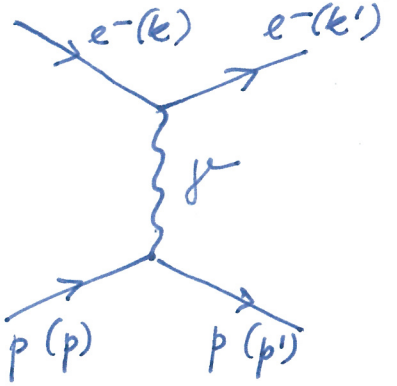
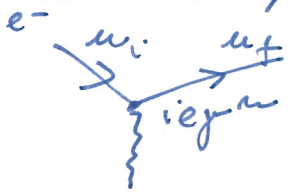
ELASTICKÝ ROZPTYL e^- NA BODOVÉM PROTONU

V nejnižším řádu PT (QED) je tento proces popsán:



N.B.

částice se spinem 1/2



částice se spinem 0

$ie(p_f + p_i)^\mu$

Pro částici se spinem 1/2:

$$\overline{|\mathcal{M}_{if}|^2} = \frac{1}{4} \sum_{\text{spiny}} \left| [\bar{u}(k')\gamma_\mu u(k)]\, e^2 \frac{ig^{\mu\nu}}{q^2} [\bar{u}(p')\gamma_\nu u(p)] \right|^2$$

průměr přes spiny s_1, s_2 počátečních a $\sum$ s_3, s_4 z konc. stav

kde $q = k - k' = p - p'$

$u, \bar{u}$ ... jsou Diracovy bispinory splňující $(\not{p} - m)\, u(p) = 0$; $\bar{u}(p)(\not{p} - m) = 0$

a normalizované $\bar{u}(p)u(p) = -\bar{v}(p)v(p) = 2m$

$u^+(p)u(p) = v^+(p)v(p) = 2E$

fotonový propagátor je ve Feynm. kalib.

Pro určení účinného průřezu potřebujeme spočítat $\overline{|\mathcal{M}_{if}|^2} = \frac{e^4}{q^4} L_e^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^p$

tenzory spojené s vrcholem "e" a "p"

$$L_e^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \sum_{e\text{-spin}} [\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)][\bar{u}(k')\gamma^\nu u(k)]^*$$

$$L_p^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \sum_{p\text{-spin}} [\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)][\bar{u}(p')\gamma^\nu u(p)]^*$$

1×1 matice, proklesnou je "+" a "*" stejné

$(\gamma^\mu)^+ = \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^\mu$
$(\gamma^0)^+ = \gamma^0$
$(\gamma^k)^+ = -\gamma^k$ pro $k=1,2,3$
$\gamma^{\mu\,+} \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\mu$

$$[u^+(k')\gamma^0\gamma^\nu u(k)]^+ = u^+(k)\gamma^{\nu+}\gamma^{0+}u(k') = u^+(k)\gamma^0\gamma^\nu u(k')$$

komplexní konjugace přehazuje pořadí maticového produktu

$$L_e^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{s'} \underbrace{\bar{u}_\alpha^{(s')}(k')\gamma^\mu_{\alpha\beta}}\sum_s u_\beta^{(s)}(k)\,\bar{u}_\rho^{(s)}(k)\,\gamma^\nu_{\rho\sigma}\,u_\sigma^{(s')}(k')$$

$(\not{k}'+m)_{\beta\alpha}\,\gamma^\mu_{\alpha\beta}$ $\quad$ $(\not{k}+m)_{\rho\sigma}\,\gamma^\nu_{\rho\sigma}$

implicitní sumace přes opakující se indexy

N.B.
$\sum_{s=1,2} u^{(s)}(p)\,\bar{u}^{(s)}(p) = \not{p}+m$
$\sum_s v^{(s)}(p)\,\bar{v}^{(s)}(p) = \not{p}-m$
$\bar{u}^{(s)}u^{(s)} = 2m$
$\bar{v}^{(s)}v^{(s)} = -2m$
relace úplnosti Dirac. rce

$L_e^{\mu\nu}$ je stopa produktu 4 matic 4×4:

$$L_e^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,[(\not{k}'+m)\gamma^\mu(\not{k}+m)\gamma^\nu] \overset{\text{úlohy s lichým počtem } \gamma\text{-matic dají } 0}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\not{k}'\gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu) + \frac{1}{2}m^2\,\mathrm{Tr}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 4\,(k'^\mu k^\nu - (k'\cdot k)\,g^{\mu\nu} + k'^\nu k^\mu) + \frac{1}{2}m^2\,4g^{\mu\nu} =$$

$$= 2\,[k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu - (k'\cdot k - m^2)\,g^{\mu\nu}]$$

Podobně dostaneme pro $L_p^{\mu\nu} = 2\cdot[p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - (p'\cdot p - M^2)g^{\mu\nu}]$

Nyní dáme dohromady celý produkt

$\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4\cdot[(a\cdot b)(c\cdot d) - (a\cdot c)(b\cdot d) + (a\cdot d)(b\cdot c)]$
$\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}) = 4\,a\cdot b$
$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$

$$L_e^{\mu\nu}\, L^{p}_{\mu\nu} = 4\,[\,k'^{\mu}k^{\nu} + k'^{\nu}k^{\mu} - (k'\cdot k - m^2)\,g^{\mu\nu}\,]\,[\,p'_{\mu}p_{\nu} + p'_{\nu}p_{\mu} - (p'\cdot p - M^2)\,g_{\mu\nu}\,] =$$

$$= 4\cdot 2\,[\,(k'\cdot p')(k\cdot p) + (k'\cdot p)(k\cdot p') - \underbrace{m^2\,(p'\cdot p)}_{\doteq 0} - M^2(k'\cdot k) + \underbrace{2m^2M^2}_{\doteq 0}\,] \doteq$$

$$\doteq 8\,[\,(k'\cdot p')(k\cdot p) + (k'\cdot p)(k\cdot p') - M^2(k'\cdot k)\,] \quad (=)$$

Připomeňme: Mandelstamovy proměnné

$$s \equiv (k+p)^2 \underset{\text{relat. lim.}}{\simeq} 2k\cdot p \simeq 2k'\cdot p'$$

$$t \equiv (k-k')^2 \simeq -2k\cdot k' \simeq -2p\cdot p'$$

$$u \equiv (k-p')^2 \simeq -2k\cdot p' \simeq -2k'\cdot p$$

$$q \equiv p' - p = k - k'$$

$$q^2 \doteq -2k'\cdot k$$

$$(=)\quad 8\,[\,(k\cdot p)^2 + (k'\cdot p)^2 - M^2\cdot\left(-\tfrac{q^2}{2}\right)\,] = 8(k\cdot p)^2\left[1 + \underbrace{\left(\tfrac{k'\cdot p}{k\cdot p}\right)^2}_{1-y} + \tfrac{M^2q^2}{2(k\cdot p)^2}\right] (=)$$

$$q \equiv p' - p$$

$$(q+p)^2 = p'^2$$

$$q^2 + 2pq + p^2 = p'^2$$

$$q^2 = -2pq \qquad y = \tfrac{q\cdot p}{k\cdot p} \qquad y = -\tfrac{q^2}{2(k\cdot p)}$$

$$(=)\quad 8(k\cdot p)^2\left[1 + (1-y)^2 - \tfrac{M^2 y}{k\cdot p}\right]$$

$$\longrightarrow_{k\cdot p\to\infty} \quad 8(k\cdot p)\,[\,1 + (1-y)^2\,]$$

↑ relativist. invarianty

a $(k\cdot p) = \dfrac{s - M^2}{2}$ … primární energie štěpící se částic

$\dfrac{k'\cdot p}{k\cdot p} = 1 - y$ … popisuje konečný stav

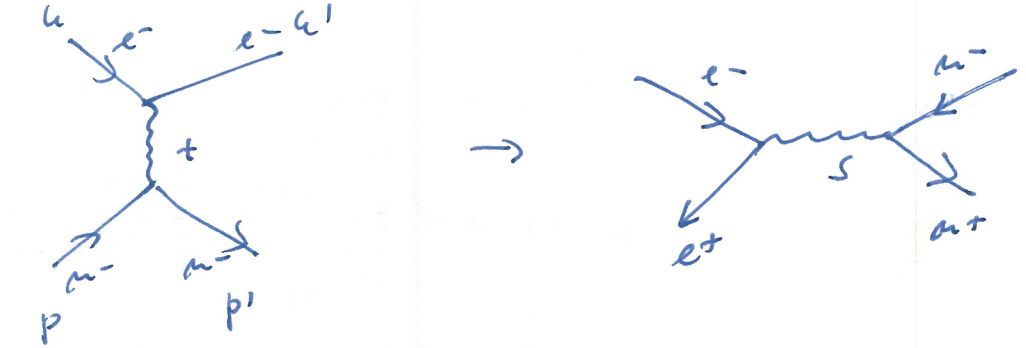
$e^-\mu^-$ ROZPTYL $M=0$ (NEPOLARIZOVANÝ):

$$|\overline{m_{if}}|^2 = \frac{8e^4}{q^4}(k\cdot p)^2\left[1+\left(\frac{k'\cdot p}{k\cdot p}\right)^2+\frac{M^2q^2}{2(k\cdot p)^2}\right] =$$

$$= \frac{8e^4}{t^2}\left[\underbrace{(k\cdot p)^2}_{(s/2)^2}+\underbrace{(k'\cdot p)^2}_{(-\frac{u}{2})^2}\right] = \frac{8e^4}{4t^2}\left[s^2+u^2\right] = \boxed{2e^4\,\frac{s^2+u^2}{t^2}}$$

$|\overline{m}|^2\ (e^-\mu^-\to e^-\mu^-)$

$e^-e^+\to\mu^+\mu^-$: $k'\leftrightarrow -p \equiv s\leftrightarrow t$ $\quad |\overline{m}|^2 = 2e^4\,\frac{t^2+u^2}{s^2}$



Pokračujme ale dále v e^-p rozptylu a vyjádřeme účinný průřez v CMS i LAB soustavě:

$$y = \frac{qp}{kp} = \left(\frac{s-M^2}{s}\right)\frac{1-\cos\vartheta^*}{2} \overset{s\gg M}{\doteq} \frac{1-\cos\vartheta^*}{2} \Rightarrow dy \doteq -\frac{d(\cos\vartheta^*)}{2}$$

$1+2 \to 3+4$

$$\Big/\ d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{|\vec{v}_1-\vec{v}_2|}\,\frac{1}{2E_1}\,\frac{1}{2E_2}\,|m_{if}|^2\,\frac{d\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3}\,\frac{d\vec{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4}\,\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)\cdot SF\ \Big/$$

Za D.Ú. vypočtěte $\int$ přes fáz. prostor

$$\iint \frac{d^3\vec{p}\,'}{2E_{p'}}\,\frac{d^3\vec{k}\,'}{2E_{k'}}\,\delta^4(k+p-k'-p') = \int\left(\frac{s-M^2}{8s}\right)d\Omega \doteq \frac{1}{8}\int d\Omega =$$

$$= \frac{1}{8}\,2\pi\cdot\int d\cos\vartheta^* = -\frac{4\pi}{8}\int dy =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int dy$$

Dále se spočítáme "flux faktor" $2E_1 \cdot 2E_2 \, |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$

Dá se lehce ukázat, že platí $|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \dfrac{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}{2E_1 E_2}$

kde $\lambda(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$

V našem případě $\lambda(s, m_1^2, m_2^2) = (s^2 + m_1^4 + m_2^4 - 2sm_1^2 - 2sm_2^2 - 2m_1^2 m_2^2) \overset{m_1=0,\ m_2=M}{=}$

$= (s^2 + M^4 - 2sM^2) = (s - M^2)^2$

a po dosazení $|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \dfrac{s - M^2}{2E_1 E_2}$

a flux faktor je tudíž roven $2(s - M^2)$

Dáme vše dohromady a dostaneme pro $d\sigma$:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{2(s-M^2)} \cdot \left(\frac{-\pi}{2}\right) \int dy \, \frac{1}{(2\pi)^6} \cdot \frac{8e^4}{q^4} (kp)^2 \left[1 + (1-y)^2 - \frac{M^2 y}{k \cdot p}\right] \Rightarrow$$

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{8\pi e^4}{q^4} \frac{1}{4(s-M^2)} (kp)^2 \cdot [\ ] \overset{\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \Rightarrow e^4 = 16\pi^2\alpha^2}{=} \frac{1}{4\pi^2} \frac{8\pi \cdot 16\pi^2\alpha^2}{4q^4 \cdot (s-M^2)} (kp)^2 \cdot [\ ] =$$

$$= \frac{8\pi\alpha^2}{q^4} \frac{1}{s-M^2} (kp)^2 [\ ] = \frac{2\pi\alpha^2}{q^4} \frac{1}{s-M^2} (2kp)^2 [\ ] \overset{k \cdot p = \frac{s-M^2}{2}}{=} \frac{2\pi\alpha^2}{q^4} \cdot 2kp [\ ]$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{dy} = \frac{2\pi\alpha^2}{q^4} (2kp) \left[1 + (1-y)^2 - \frac{M^2 y}{kp}\right]}$$

Za použití $Q^2 = y \cdot 2kp$ resp. $2\,dQ^2 = 2kp \cdot dy$ můžeme $\frac{d\sigma}{dy}$ přepsat jako

$$\boxed{\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4}\left[1 + (1-y)^2 - \frac{M^2 y}{kp}\right]}$$

N.B. Pro $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ (DÚ - opakování)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{cms}} = \frac{1}{64\pi^2 s} \cdot 2e^4 \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{2}(1+\cos^2\vartheta^*)\right]}_{\frac{t^2+u^2}{s^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{cms}} = \frac{\alpha^2}{4s}(1+\cos^2\vartheta^*) \qquad / \int\int d\vartheta^* d\varphi \qquad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}}$$

Bude se nám hodit v budoucnu ☺

/ návod:

$$s = 4(k^2 + m^2)$$
$$t = -2k^2(1-\cos\vartheta^*)$$
$$u = -2k^2(1+\cos\vartheta^*)$$

$$\rightarrow \quad t^2+u^2 = 4k^4\left[(1-\cos\vartheta^*)^2 + (1+\cos\vartheta^*)^2\right] =$$
$$= 4k^4\left[2 + 2\cos^2\vartheta^*\right] = 8k^4(1+\cos^2\vartheta^*)$$

$$\frac{t^2+u^2}{s^2} = \frac{8k^4(1+\cos^2\vartheta^*)}{16(k^4 + \underbrace{2k^2m^2}_{\text{zanedb.}} + m^4)} = \frac{1}{2}(1+\cos^2\vartheta^*) \quad /$$

Jak bude rozptyl e^-p vypadat v LAB soustavě?

$$L_e^{\mu\nu} L^p_{\mu\nu} = 16 E E' M^2 \left[\cos^2 \frac{\vartheta_{LAB}}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\vartheta_{LAB}}{2} \right]$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{LAB}} = \frac{\alpha^2}{4E^2} \frac{\cos^2(\vartheta_{LAB}/2)}{\sin^4(\vartheta_{LAB}/2)} \frac{E'}{E} \left[1 + \frac{Q^2}{2M^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta_{LAB}}{2} \right]$$

$\frac{E'}{E}$ ↑ recoil faktor

$$\frac{E'}{E} = 1 - \frac{Q^2}{2ME} < 1$$

Pro nekonečně těžký proton ($M \to \infty$)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{LAB}} = \boxed{\frac{\alpha^2}{4E^2} \frac{\cos^2(\vartheta_{LAB}/2)}{\sin^4(\vartheta_{LAB}/2)} = \frac{d\sigma_{Mott}}{d\Omega}}$$

Mottův účinný průřez: relativistické zobecnění

Rutherfordovy formule pro elastický rozptyl na Coulombickém potenciálu

Analogické výpočty bychom mohli provést pro bodovou "tečkovou" částici, která by nebyla fermionem ($S = 1/2$), ale bosonem ($S = 0$). Dostali bychom tenzor:

$$L_e^{\mu\nu} L^p_{\mu\nu} = 8 (kp)^2 \left[2(1-y) - \frac{M^2 y^2}{kp} \right]$$

a $\frac{d\sigma}{dy}$ a $\frac{d\sigma}{dQ^2}$ bychom pro obě případy mohli shrnout do následujících

vztahů:

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{4\pi\alpha^2(2kp)}{\varphi^4}\left[(1-y) + \varepsilon\frac{y^2}{2} - \frac{M^2 y}{2kp}\right]$$

$$\frac{d\sigma}{d\varphi^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{\varphi^4}\left[(1-y) + \varepsilon\frac{y^2}{2} - \frac{M^2 y}{2kp}\right] \underset{s\to\infty}{\Rightarrow} \frac{4\pi\alpha^2}{\varphi^4}$$

kde $\varepsilon = 1$ ... pro bodový fermion se spinem 1/2

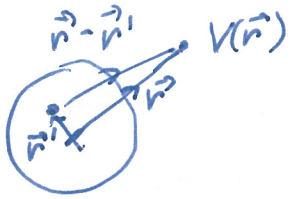
$\varepsilon = 0$ ... pro bodový boson se spinem 0

Aby bylo vidět rozdíl v rozptylu na fermionech a bosonech je nutné velké y (nebolí rozptyl na velkých úhlech)

ELASTICKÝ ROZPTYL e^- NA REÁLNÉM PROTONU

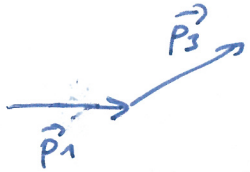
(a FORMFAKTORY)

Uvažujme rozptyl e^- na statickém potenciálu kolem náboje s distribucí



$$V(\vec r) = \int \frac{Q\rho(\vec r\,')}{4\pi|\vec r - \vec r\,'|}\, d^3\vec r\,' \quad \text{s} \quad \int \rho(\vec r)\, d^3\vec r = 1$$

V 1. řádu PT je příslušný maticový element dán



$\vec q = (\vec p_1 - \vec p_3)$

$$M_{fi} = \langle \psi_f | V(\vec r) | \psi_i \rangle = \int e^{-i\vec p_3\cdot\vec r}\, V(\vec r)\, e^{i\vec p_1\cdot\vec r}\, d^3\vec r =$$

$$= \iint e^{i\vec q\cdot\vec r}\, \frac{Q\rho(\vec r\,')}{4\pi|\vec r - \vec r\,'|}\, d^3\vec r\,' d^3\vec r =$$

$$= \iint e^{i\vec q\cdot(\vec r - \vec r\,')}\, e^{i\vec q\cdot\vec r\,'}\, \frac{Q\rho(\vec r\,')}{4\pi|\vec r - \vec r\,'|}\, d^3\vec r\,' d^3\vec r$$

Zafixujeme $\vec r\,'$ a budeme $\int$ přes $d^3\vec r$ se substitucí $\vec R = \vec r - \vec r\,'$

$$M_{fi} = \int e^{i\vec q\cdot\vec R}\, \frac{Q}{4\pi|\vec R|}\, d^3\vec R \int \rho(\vec r\,')\, e^{i\vec q\cdot\vec r\,'}\, d^3\vec r\,' = (M_{fi})_{bod}$$

$$F(\vec q^{\,2}) = \boxed{F(\vec q^{\,2}) = \int \rho(\vec r)\, e^{i\vec q\cdot\vec r}\, d^3\vec r}$$

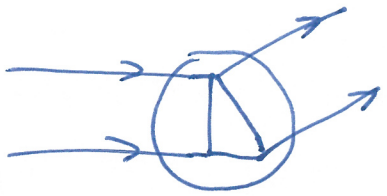
formfaktor

Čili odpovídající maticový element je ekvivalentní rozptylu na bodovém zdroji × formfaktor $F(\vec q^{\,2})$.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{MOTT} \longrightarrow \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \vartheta/2} \cos^2\frac{\vartheta}{2} \cdot |F(\vec q^{\,2})|^2$$

($\vartheta = \vartheta_{LAB}$)
z lenivosti LAB nebudeme teď vypisovat ;-

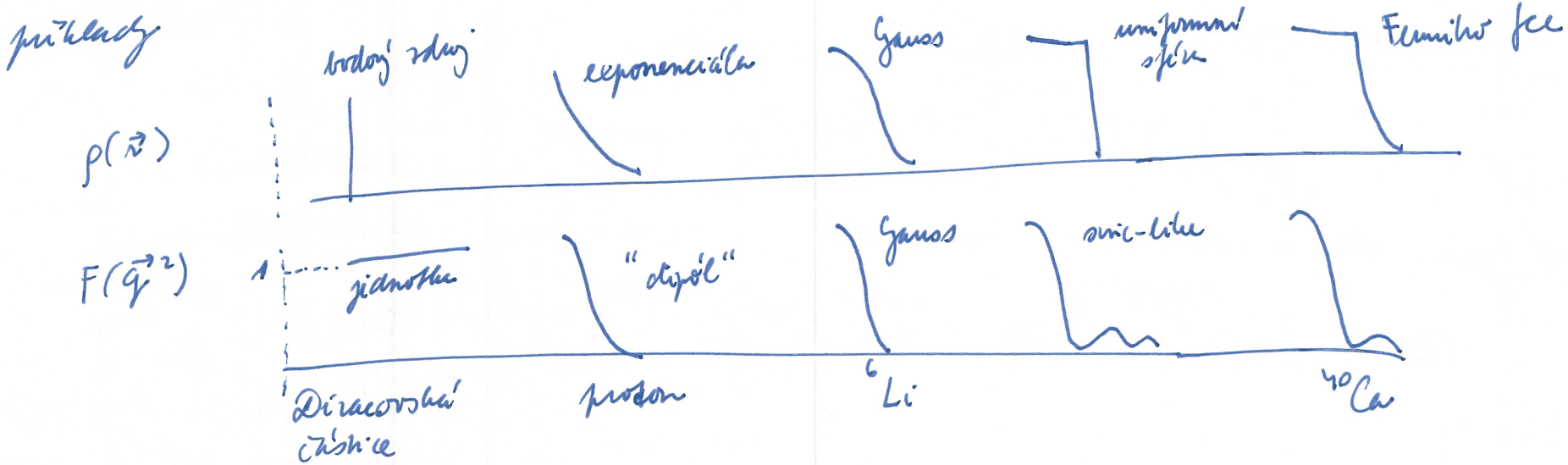
na formfaktorech není nic záhadného - je to zcela podobné jako při difrakci rovinných vln v optice



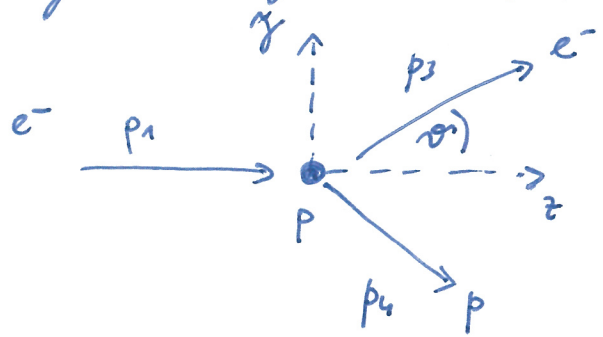
Centrum rozptylu o konečné velikosti vede k fázovému posunutí rozptylovaných rovinných vln, které se "rozptýlily v různých místech". Bude-li vlnová délka velká ve srovnání s velikostí objektu, pak

$$F(\vec{q}^{\,2}) = 1$$

příklady



Jak je to tedy s rozptylem bodového e^- na protonu (pomůcka elastický)



$p_1 = (E_1, 0, 0, E_1)$

$p_2 = (M, 0, 0, 0)$

$p_3 = (E_3, 0, E_3 \sin\vartheta, E_3 \cos\vartheta)$

$p_4 = (E_4, \vec{p}_4)$

za využití M_{fi} pro $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$, které je $\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{8e^4}{(p_1-p_3)^4}\left[(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4)+(p_1\cdot p_4)(p_3\cdot p_2)\right]$

pro náš případ, kdy $m = m_e = 0$ dostaneme:

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{8e^4}{(p_1-p_3)^4}\left[(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4)+(p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3)-(p_1\cdot p_3)M^2\right]$$

Experimentálně budeme měřit rozptýlený e^-, tudíž se zbavíme všech členů s p_4!

členy bez p_4 $\quad p_1\cdot p_2 = E_1 M$

$p_1\cdot p_3 = E_1 E_3 (1-\cos\vartheta)$

$p_2\cdot p_3 = E_3 M$

$p_4 = p_1 + p_2 - p_3$ (zzp)

$p_3\cdot p_4 = p_3\cdot p_1 + p_3\cdot p_2 - \cancel{p_3 p_3} = E_1 E_3 (1-\cos\vartheta) + E_3 M$

$p_1\cdot p_4 = \cancel{p_1 p_1} + p_1\cdot p_2 - p_1\cdot p_3 = E_1 M - E_1 E_3 (1-\cos\vartheta)$

$p_1\cdot p_1 = E_1^2 - |\vec{p}_1|^2 = m_e^2 \approx 0$

obdobně $p_3\cdot p_3 \doteq 0$

Dosadíme do $\overline{|M_{fi}|^2}$ a dostaneme

$$|M_{fi}|^2 = \frac{8e^4}{(p_1-p_3)^4} M E_1 E_3 \left[(E_1-E_3)(1-\cos\vartheta) + M(1+\cos\vartheta) \right] =$$

$$= \frac{8e^4}{(p_1-p_3)^4} 2M E_1 E_3 \left[(E_1-E_3)\sin^2\frac{\vartheta}{2} + M\cos^2\frac{\vartheta}{2} \right]$$

Teď si upravíme výrazy $q^4 = (p_1-p_3)^4$ a (E_1-E_3) :

$$q^2 = (p_1-p_3)^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2p_1\cdot p_3 = -2E_1E_3(1-\cos\vartheta) = \boxed{-4E_1E_3\sin^2\frac{\vartheta}{2}}$$

/ všimněme si, že $q^2 < 0$ space-like /

E_1-E_3 : začneme s $q\cdot p_2 = (p_1-p_3)\cdot p_2 = M(E_1-E_3)$

$p_1-p_3 = p_4-p_2$

použijeme $(q+p_2)^2 = p_4^2$

$$q^2 + 2q\cdot p_2 + p_2^2 = p_4^2$$

$$q^2 + 2q\cdot p_2 + M^2 = M^2 \quad \Rightarrow \quad q\cdot p_2 = -\frac{q^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_1-E_3 = \frac{-q^2}{2M}}$$

/ všimněme si, že veličina $q^2 < 0$, je $E_1-E_3 > 0$
a rozdíl e^- má vždy menší E než příchozí e^- logicky 😊 /

Dosadíme do $\overline{|M_{fi}|^2}$

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{8e^4}{16E_1^2E_3^2\sin^4\frac{\vartheta}{2}} 2ME_1E_3 \left[M\cos^2\frac{\vartheta}{2} - \frac{q^2}{2M}\sin^2\frac{\vartheta}{2} \right] =$$

$$= \frac{M^2e^4}{E_1E_3\sin^4\frac{\vartheta}{2}} \left[\cos^2\frac{\vartheta}{2} - \frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\vartheta}{2} \right]$$

Pro $E \gg m_e$ je $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2}\left(\frac{E_3}{ME_1}\right)|M_{fi}|^2$

a tedy $\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_1^2 \sin^4\frac{\vartheta}{2}} \frac{E_3}{E_1}\left(\cos^2\frac{\vartheta}{2} - \frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)}$ $\quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}$

diferenciální účinný průřez pro elastický $e^-p \to e^-p$ rozptyl za předpokladu bodové Dirac. částice s $s = 1/2$

Jak lze tento vztah interpretovat v kontextu $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \vartheta/2}\cos^2\frac{\vartheta}{2}$

↗ toto je rozptyl e^- se $s = 1/2$ na pevném elektr. potenciálu

V našem případě tedy máme navíc "odraz protonu" a magnetickou interakci.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_1^2 \sin^4\frac{\vartheta}{2}} \frac{E_3}{E_1}\left(\cos^2\frac{\vartheta}{2} - \frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$\frac{E_3}{E_1}$ ... p-recoil

$\frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\vartheta}{2}$ ... toto je nové magn. interakční díky spin-spin interakci. $\sim \sin^2\frac{\vartheta}{2}$

Hledaný dif. účinný průřez závisí na jediném parametru. Pro daný úhel ϑ, je q^2 a E_3 v zafixovaném kinematickém

Přesvědčíme se o tom:

$$\circledast \quad q^2 = -2E_1E_3(1-\cos\vartheta) \quad \text{a} \quad E_1 - E_3 = -\frac{q^2}{2M} \quad (\text{viz str. 12})$$

$$\Downarrow$$

$$-2M(E_1-E_3) = -2E_1E_3(1-\cos\vartheta)$$

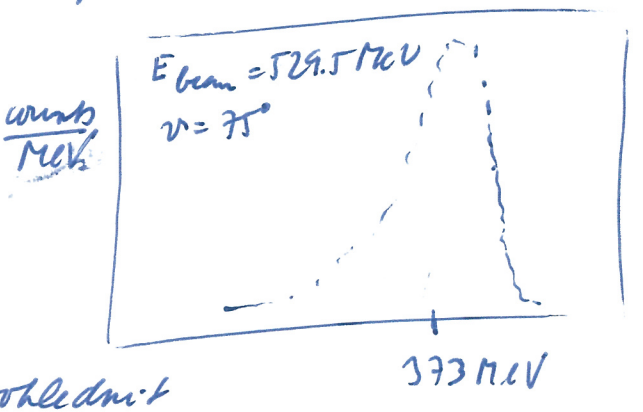
$$\boxed{\frac{E_3}{E_1} = \frac{M}{M+E_1(1-\cos\vartheta)}}$$

a dosazením do $\circledast$ již snadno $q^2 = -\frac{2ME_1^2(1-\cos\vartheta)}{M+E_1(1-\cos\vartheta)}$

např. pro $E_{beam} = 529.5$ MeV a $\vartheta = 75°$ $\rightarrow E_3 = 373$ MeV

$|q^2| = 294$ MeV^2

(Jansens, Hofstadter, Hughes, Yearian)
Phys. Rev. 142 (1966) 922



Obecně měříme konečnou velikost protonu pomocí 2 strukturních funkcí - jedna je vázaná k rozložení náboje v protonu $G_E(q^2)$ a druhá je svázaná s magnetickým momentem protonu, $G_M(q^2)$

Dá se ukázat, že náš vztah $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ je ekvivalentní obecnější ROSENBLUTHOVĚ FORMULI:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_1^2 \sin^4\frac{\vartheta}{2}} \frac{E_3}{E_1} \left(\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1+\tau} \cos^2\frac{\vartheta}{2} + 2\tau G_M^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2} \right)$$

s Lorentzovsky invariantní veličinou $\tau = -\frac{q^2}{4M^2} > 0$

Pozor! Na rozdíl od naší předchozí diskuse o formfaktorech, zde jsou formfaktory funkcí q^2 nikoliv $\vec{q}^2$ a nemohou být tedy jednoduše v rámci teorie pole brány jako distribuce el. a mag. momentu.

Ale $q^2 = (E_1 - E_3)^2 - \vec{q}^2$ a ze vztahu $E_1 - E_3 = \frac{q^2}{2M}$, kdy jsme si před chvílí odvodili, dostaneme

$$-\vec{q}^2 = q^2 \left[1 - \left(\frac{q}{2M}\right)^2\right]$$

a pro $\frac{q^2}{4M^2} \ll 1$ je $q^2 \approx -\vec{q}^2$ a $G(q^2) \approx G(\vec{q}^2)$!

Nebo: pro $q^2/(4M^2) \ll 1$ můžeme skutečně formfaktory interpretovat jako Fourierovské transformace nábojové distribuce a magn. momentu

$$G_E(q^2) \approx G_E(\vec{q}^2) = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \rho(\vec{r})\, d^3\vec{r}$$

$$G_M(q^2) \approx G_M(\vec{q}^2) = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \mu(\vec{r})\, d^3\vec{r}$$

Povšimněme si, že v Rosenbluthově formuli jsme předpokládali, proton jako Diracovskou částici se spinem 1/2, neboli:

$$\vec{\mu} = \frac{e}{M}\vec{S}$$

ale víme, že exp. změřená hodnota $\vec{\mu}$ protonu je větší:

$$\vec{\mu} = 2.79\ \frac{e}{M}\vec{S}$$

Čili pro proton očekáváme: $G_E(0) = \int \rho(\vec{r})\, d^3\vec{r} = 1$

$$G_M(0) = \int \mu(\vec{r})\, d^3\vec{r} = \mu_p = +2.79 \quad !$$

Ale pozorovaný "anomální" moment protonu poukazuje na skutečnost, že proton není bodový !

Přepíšeme si Rosenbluthovu formuli ve tvaru

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left(\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1+\tau} + 2\tau G_M^2 \operatorname{tg}^2\frac{\vartheta}{2}\right)$$

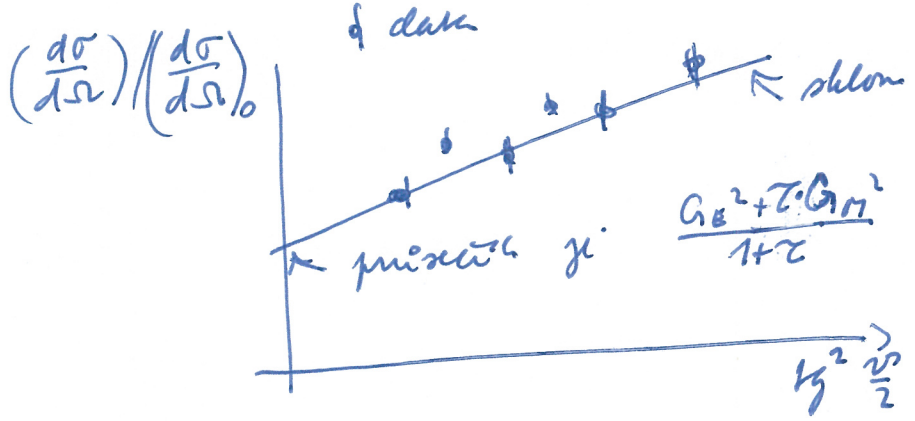
$$= \frac{\alpha^2}{4E_1^2 \sin^4\frac{\vartheta}{2}} \frac{E_3}{E_1} \cos^2\frac{\vartheta}{2} \quad \leftarrow \text{tato je } \sigma_{Mott} \times \text{recoil } p$$

malé q^2: $\tau = -q^2/4M^2 \approx 0$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big/ \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \approx G_E^2(q^2)$$

velké q^2: $\tau \gg 1$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big/ \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \approx \tau\left(1 + 2\operatorname{tg}^2\frac{\vartheta}{2}\right) G_M^2(q^2)$$



Obecně y ale $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ závisí na G_E i G_M, takže nelze vždy ze závislosti $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ na ϑ pro fixní q^2 určit

SHRNUTÍ ELASTICKÉHO ROZPTYLU:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_1^2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \frac{E_3}{E_1} \left(\underbrace{\cos^2 \frac{\vartheta}{2}}_{\text{elektrický}} - \underbrace{\frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}_{\text{magn. člen z důvodu spinu}} \right)$$

e⁻ na bodovém Diracově protonu

Rutherford

$\frac{E_3}{E_1}$ ↑ odraz protonu

magn. rozptyl

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_1^2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \frac{E_3}{E_1} \left(\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1+\tau} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + 2\tau G_M^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right)$$

Rosenbluth

e⁻ na nebodovém protonu