

Kvantová teleportace

Martin Štefaňák

7. května 2021

Kvantové provázání umožňuje provést věci, které se klasicky zdají nemožné

Kvantová teleportace

- Přenos neznámého kvantového stavu pomocí sdíleného provázaného páru

Qubit

- Libovolný kvantový systém, který má Hilbertův prostor $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$
- Spin-1/2, polarizace fotonu, dvě elektronové hladiny v atomu, ...
- Bazické stavy — $|0\rangle, |1\rangle$ — hodnota qubitu 0, 1 — výpočetní báze
- Budeme pracovat se dvěma qubity — $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^4$
- Výpočetní báze dvou qubitů — $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$

Kvantová teleportace



- Alice má qubit v neznámém kvantovém stavu
- Chce poslat informace o kvantovém stavu Bobovy, ale nemůže poslat qubit fyzicky
- 1 kopie qubitů — jeho stav nelze určit měřením
- Stav qubitů je neznámý — Alice ho nemůže zkopírovat

Pokud Alice a Bob sdílí provázaný pár qubitů, pak mohou neznámý stav qubitů teleportovat od Alice k Bobovy

Určení stavu qubitu

- Qubit v neznámém stavu — chceme určit amplitudy α a β

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

Známe α a β — stav umíme připravit — můžeme ho přenést k Bobovy "klasicky"

- Měření ve výpočetní bázi — náhodně dostanu 0 nebo 1 s pr. $W_0 = |\alpha|^2$, $W_1 = |\beta|^2$
- Stav po měření je $|0\rangle$ nebo $|1\rangle$ podle výsledku — nevratně se změní

Mám k dispozici jen jeden qubit — jeho stav nemůžu určit

- K určení neznámého kvantového stavu potřebuji mít více částic (kopií) ve stavu $|\psi\rangle$
- Na každé kopii provedeme vždy jen jedno měření
- Měřením ve výpočetní bázi určím $|\alpha|^2$ a $|\beta|^2$
- Relativní fáze mezi α a β — musím měřit v nějakých jiných bazích
- Např. pro spin-1/2 — projekce spinu do os x , y , a z

No-cloning teorém

Můžeme si připravit více kopií neznámého kvantového stavu?

Nelze, kvůli linearitě kvantové mechaniky — No-cloning theorem (Wooters, Zurek)

- Existuje unitární transformace $\hat{U}$, která vytvoří kopii libovolného stavu $|\psi\rangle$?

$$\hat{U}|\psi\rangle|0\rangle = |\psi\rangle|\psi\rangle, \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}$$

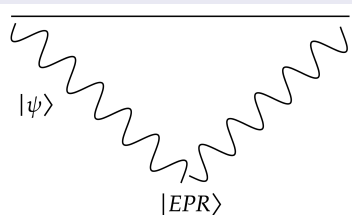
- Uvažujme dva stavy $|\psi\rangle, |\phi\rangle$, skalární součin stavů před kopírováním $|\psi\rangle|0\rangle, |\phi\rangle|0\rangle$

$$(\langle\psi| \otimes \langle 0|)(|\phi\rangle \otimes |0\rangle) = \langle\psi|\phi\rangle\langle 0|0\rangle = \langle\psi|\phi\rangle$$

- Skalární součin stavů po kopírování $|\psi\rangle|\psi\rangle$ a $|\phi\rangle|\phi\rangle$

$$(\langle\psi| \otimes \langle\psi|)(|\phi\rangle \otimes |\phi\rangle) = (\langle\psi|\phi\rangle)^2 = (\langle\psi| \otimes \langle 0|) \hat{U}^\dagger \hat{U} (|\phi\rangle \otimes |0\rangle) = \langle\psi|\phi\rangle$$

- Bud' $\langle\psi|\phi\rangle = 1$ ($\Leftrightarrow |\psi\rangle \equiv |\phi\rangle$), nebo $\langle\psi|\phi\rangle = 0$ — nelze splnit pro všechny $|\mu\rangle \in \mathcal{H}$



- K teleportaci neznámého kvantového stavu musí Alice a Bob nejprve sdílet maximálně provázaný pár qubitů — EPR (Bellův) stav
- Alice má qubit v neznámém stavu $|\psi\rangle$ a jeden qubit z provázaného páru
- Bob má druhý qubit z provázaného páru
- Alice provede tzv. měření v Bellově bázi — 4 možné výsledky
- Výsledek svého měření pošle klasickým komunikačním kanálem Bobovy
- Bob podle výsledku udělá na svém qubitu jednu ze čtyř unitárních transformací
- Na konci bude mít Bob qubit v neznámém stavu $|\psi\rangle$

- ON báze prostoru dvou qubitů

$$|\Phi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle), \quad |\Psi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle \pm |10\rangle)$$

- Všechny jsou maximálně provázané (Schmidtovy koeficienty $a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$)
- Každý stav dvou qubitů můžeme rozložit do Bellovy báze

$$|\Omega\rangle = a|\Phi^+\rangle + b|\Phi^-\rangle + c|\Psi^+\rangle + d|\Psi^-\rangle$$

- Měření v Bellově bázi — projekce na stavy $|\Phi^{\pm}\rangle, |\Psi^{\pm}\rangle$
- Měření v Bellově bázi převede částice ze stavu $|\Omega\rangle$ do jednoho z Bellových stavů
- a, b, c, d jsou amplitudy pravděpodobnosti nalezení částic v jednom z Bellových stavů

Kvantová teleportace — počáteční stav

- Celkem 3 qubity — 1. v neznámém stavu, 2. a 3. v nějakém Bellově stavu

$$|\Omega\rangle = |\psi\rangle|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) (|00\rangle + |11\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [(\alpha|00\rangle + \beta|10\rangle)|0\rangle + (\alpha|01\rangle + \beta|11\rangle)|1\rangle]$$

- Vyjádříme stavy qubitů Alice pomocí Bellových stavů

$$\begin{aligned} |00\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Phi^+\rangle + |\Phi^-\rangle), & |01\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Psi^+\rangle + |\Psi^-\rangle) \\ |10\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Psi^+\rangle - |\Psi^-\rangle), & |11\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Phi^+\rangle - |\Phi^-\rangle) \end{aligned}$$

- Stav 3 qubitů zapsaný pomocí Bellovy báze pro qubity Alice

$$|\Omega\rangle = \frac{1}{2} [|\Phi^+\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |\Phi^-\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |\Psi^+\rangle(\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) + |\Psi^-\rangle(-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle)]$$

$$|\Omega\rangle = \frac{1}{2} [|\Phi^+\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |\Phi^-\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |\Psi^+\rangle(\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) + |\Psi^-\rangle(-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle)]$$

- Měření v Bellově bázi na qubitech Alice ovlivní stav qubitu Boba
- Podle výsledku měření bude qubit Boba v jednom ze 4 stavů

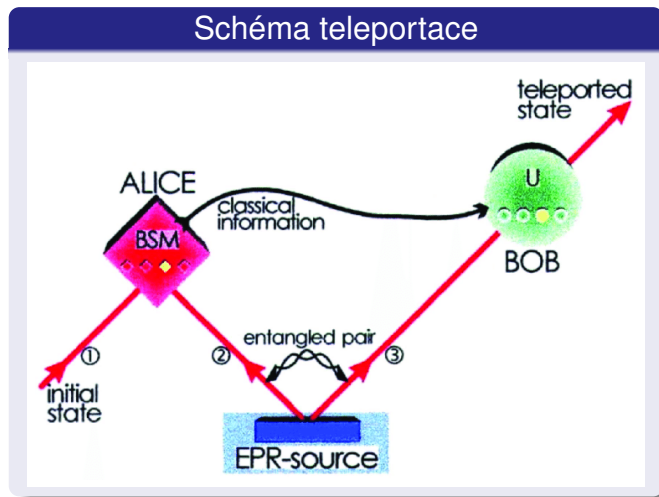
$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle &\implies |\psi_1\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, & |\Phi^-\rangle &\implies |\psi_2\rangle = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle \\ |\Psi^+\rangle &\implies |\psi_3\rangle = \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle, & |\Psi^-\rangle &\implies |\psi_4\rangle = -\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle \end{aligned}$$

- Nějakou jednoznačně určenou unitární transformací $\hat{U}_j$ můžeme změnit $|\psi_j\rangle$ na $|\psi\rangle$

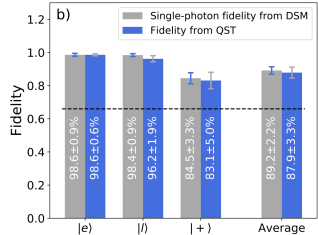
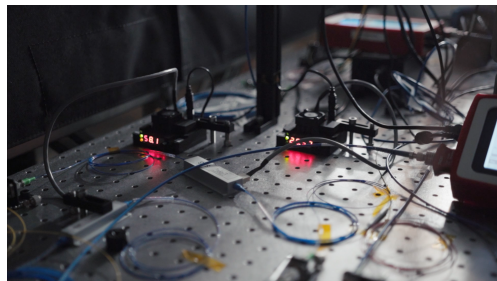
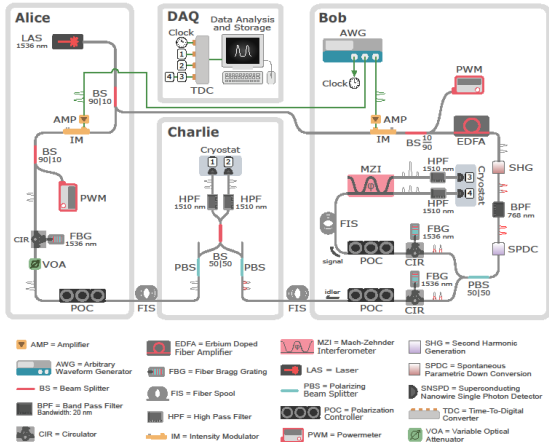
$$U_1 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad U_3 = X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_4 = ZX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

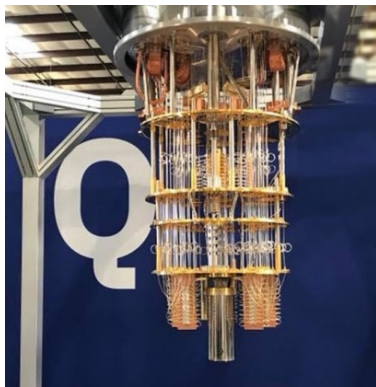
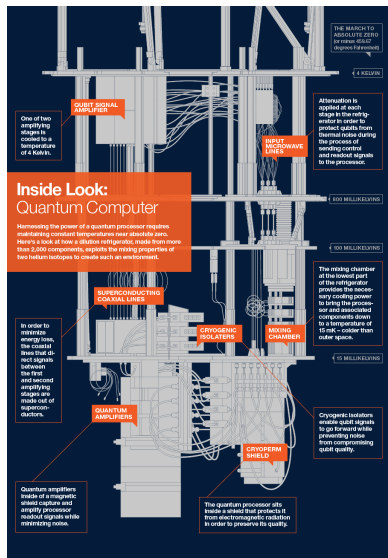
Kvantová teleportace

- Alice a Bob musí sdílet provázaný pár
- Měření v Bellově bázi na qubitech Alice je zcela náhodné — všechny možnosti s pr. 1/4
- Alice musí poslat výsledek měření (2 bity) klasickým komunikačním kanálem
- Původní neznámý stav 1. qubitu je zničen měřením v Bellově bázi
- Hodnoty amplitud α a β nejsou nikdy v průběhu experimentu známy

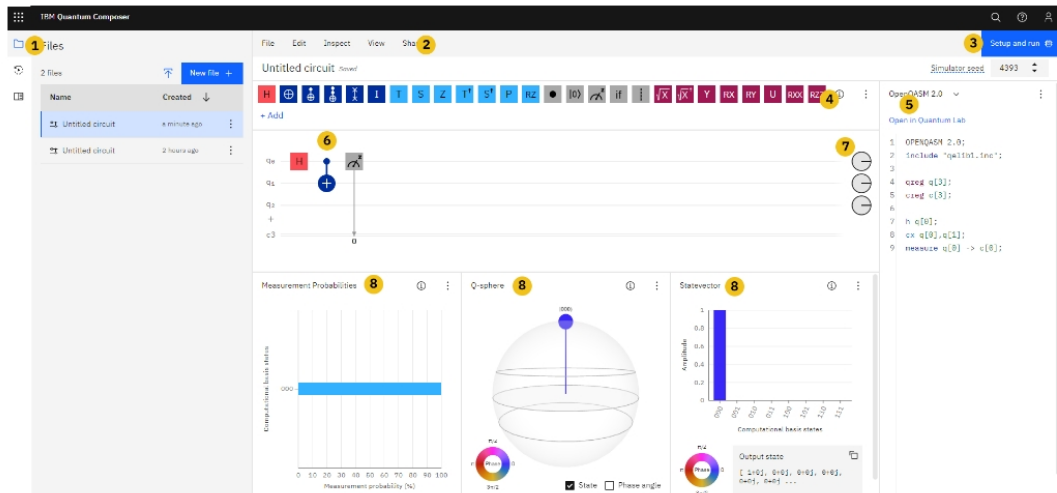


Kvantová teleportace stavu fotonu na vzdálenost 44 km





- Qubity — supravodivé obvody chlazené na $\sim 0.1\text{K}$
- Manipulace qubitů pomocí RF pulsů
- Aktuálně největší počítač ~ 50 qubitů
- Simulátor a počítače s ≤ 15 qubity volně přístupné



1-qubitové kvantové brány

X-brána

- Prohodí hodnotu qubitu

$$\hat{X}|0\rangle = |1\rangle, \hat{X}|1\rangle = |0\rangle$$

- Maticový zápis

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Unitární a hermitovská transformace

$$\hat{X} = \hat{X}^\dagger = \hat{X}^{-1}, \hat{X}^2 = \hat{I}$$



Z-brána

- Změní fázi u $|1\rangle$ o π

$$\hat{Z}|0\rangle = |0\rangle, \hat{Z}|1\rangle = -|1\rangle$$

- Maticový zápis

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Unitární a hermitovská transformace

$$\hat{Z} = \hat{Z}^\dagger = \hat{Z}^{-1}, \hat{Z}^2 = \hat{I}$$



Hadamardova transformace

- Z vektorů standardní báze vytvoří rovnoměrnou superpozici

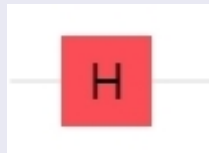
$$\hat{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad \hat{H}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

- Maticový zápis

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Unitární a hermitovská transformace

$$\hat{H} = \hat{H}^\dagger = \hat{H}^{-1}, \quad \hat{H}^2 = \hat{I}$$



Obecná unitární transformace

- Unitární transformace qbitu — rotace na Blochově sféře — Eulerovy úhly θ, ϕ, λ
- Z vektorů standardní báze vytvoří rovnoměrnou superpozici

$$\hat{U}|0\rangle = \cos \frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}|1\rangle, \quad \hat{U}|1\rangle = -e^{i\lambda} \sin \frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i(\phi+\lambda)} \cos \frac{\theta}{2}|1\rangle$$

- Maticový zápis

$$U(\theta, \phi, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -e^{i\lambda} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} & e^{i(\phi+\lambda)} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

- Inverzní transformace

$$U^\dagger(\theta, \phi, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ -e^{-i\lambda} \sin \frac{\theta}{2} & e^{-i(\phi+\lambda)} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = U(\theta, \pi-\lambda, \pi-\phi)$$



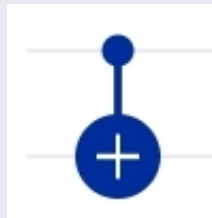
CNOT (CX)

- Prohodí hodnotu 2. qubitu, pokud první má hodnotu 1

$$\hat{C}X|00\rangle = |00\rangle, \quad \hat{C}X|01\rangle = |01\rangle, \quad \hat{C}X|10\rangle = |11\rangle, \quad \hat{C}X|11\rangle = |10\rangle$$

- Maticový zápis

$$CX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



- Unitární a hermitovská transformace

$$\hat{C}X = \hat{C}X^\dagger = \hat{C}X^{-1}, \quad \hat{C}X^2 = \hat{I}$$

- Kontrolní qubit ve stavu superpozice — CX vytvoří provázaný stav

$$\hat{C}X \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)|\Phi^+\rangle$$

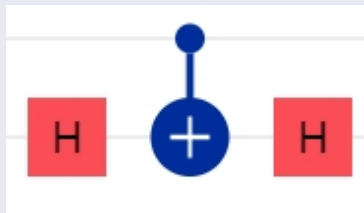
Control-Z (CZ)

- Aplikuje Z bránu na 2. qubit, pokud první má hodnotu 1

$$\hat{CZ}|00\rangle = |00\rangle, \quad \hat{CZ}|01\rangle = |01\rangle, \quad \hat{CZ}|10\rangle = |10\rangle, \quad \hat{CZ}|11\rangle = -|11\rangle$$

- Maticový zápis

$$CZ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

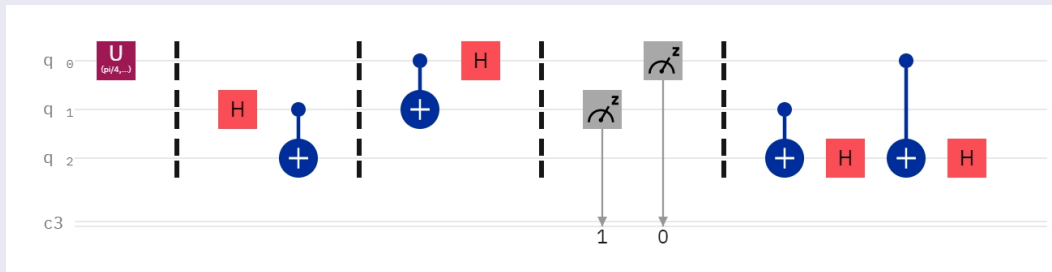


- Lze rozložit pomocí Hadamardovy transformace a CNOT

$$CZ = (I \otimes H)CX(I \otimes H) = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} HH & 0 \\ 0 & HXH \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}$$

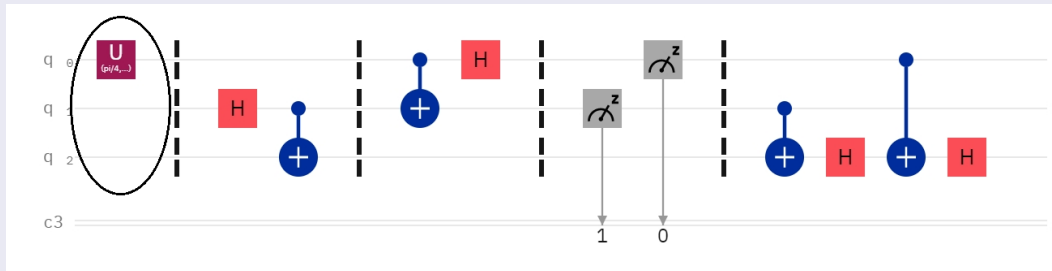
$$HXH = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = Z$$

Kvantová teleportace na IBM-Q



- 1 Příprava stavu $|\psi\rangle$
- 2 Příprava provázaného páru $|\Phi^+\rangle$
- 3 Převod měření z Bellovy do výpočetní báze
- 4 Měření ve výpočetní bázi
- 5 Finální úprava stavu 3. qubitu

Kvantová teleportace na IBM-Q



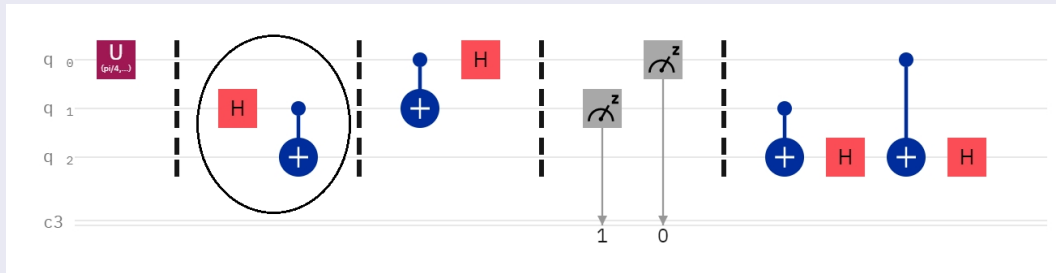
- 1 Příprava stavu $|\psi\rangle$ pomocí nějaké unitární transformace $\hat{U}$

$$\hat{U}|0\rangle = \cos \frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}|1\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = |\psi\rangle$$

Stav registru

$$|\Omega_1\rangle = (\hat{U}|0\rangle)|00\rangle = |\psi\rangle|00\rangle$$

Kvantová teleportace na IBM-Q



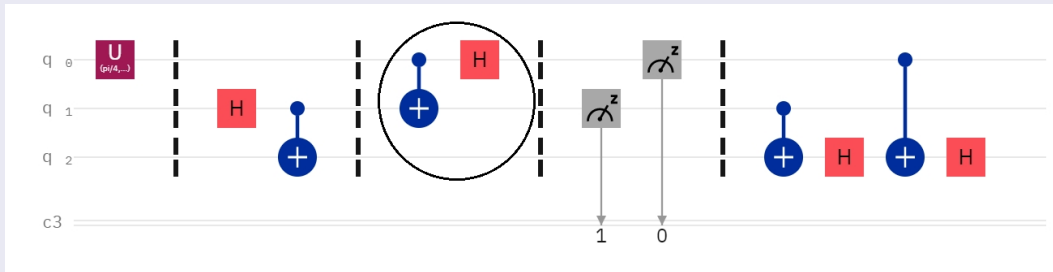
2 Příprava Bellova stavu $|\Phi^+\rangle$

$$\hat{C}\hat{X}\hat{H}|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = |\Phi^+\rangle$$

Stav registru

$$|\Omega_2\rangle = |\psi\rangle|\Phi^+\rangle = \frac{1}{2} [|\Phi^+\rangle|\psi_1\rangle + |\Phi^-\rangle|\psi_2\rangle + |\Psi^+\rangle|\psi_3\rangle + |\Psi^-\rangle|\psi_4\rangle]$$

Kvantová teleportace na IBM-Q



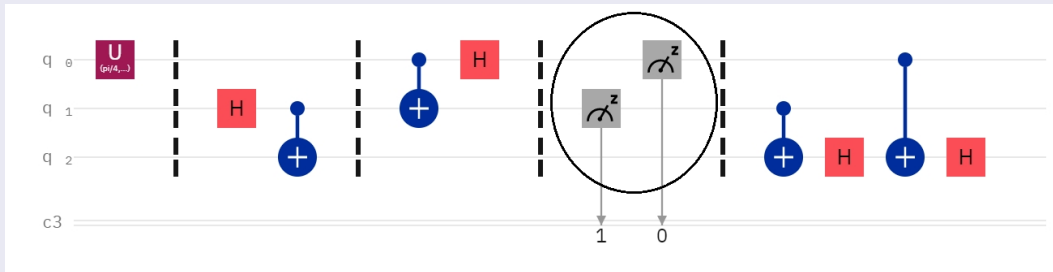
3 Příprava k měření — převedeme měření z Bellovy do výpočetní báze

$$\hat{H}\hat{C}\hat{X}|\Phi^+\rangle = |00\rangle, \quad \hat{H}\hat{C}\hat{X}|\Phi^-\rangle = |10\rangle, \quad \hat{H}\hat{C}\hat{X}|\Psi^+\rangle = |01\rangle, \quad \hat{H}\hat{C}\hat{X}|\Psi^-\rangle = |11\rangle$$

Stav registru

$$|\Omega_3\rangle = \frac{1}{2} [|00\rangle|\psi_1\rangle + |10\rangle|\psi_2\rangle + |01\rangle|\psi_3\rangle + |11\rangle|\psi_4\rangle]$$

Kvantová teleportace na IBM-Q

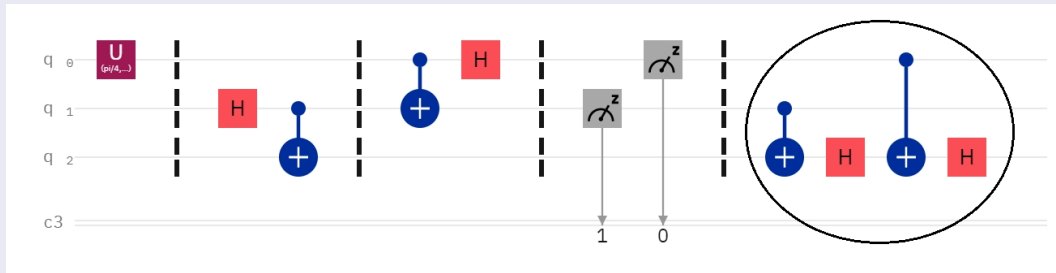


- 4 Měření ve výpočetní bázi — náhodný výsledek (00, 01, 10, 11), všechny s pr. 1/4

Stav registru — jeden ze stavů $|\Omega_{ij}\rangle$

$$|\Omega_{00}\rangle = |00\rangle|\psi_1\rangle, \quad |\Omega_{01}\rangle = |01\rangle|\psi_3\rangle, \quad |\Omega_{10}\rangle = |10\rangle|\psi_2\rangle, \quad |\Omega_{11}\rangle = |11\rangle|\psi_4\rangle$$

Kvantová teleportace na IBM-Q



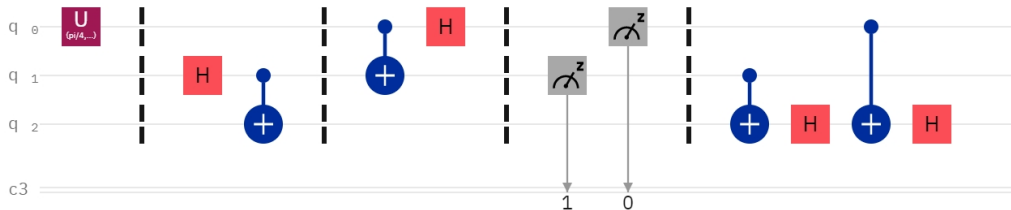
5 Úprava stavu posledního qubitu podle výsledku měření ij

$$|00\rangle \leftrightarrow |\Phi^+\rangle \leftrightarrow I, \quad |10\rangle \leftrightarrow |\Phi^-\rangle \leftrightarrow Z, \quad |01\rangle \leftrightarrow |\Psi^+\rangle \leftrightarrow X, \quad |11\rangle \leftrightarrow |\Psi^-\rangle \leftrightarrow ZX$$

- 1. qubit má hodnotu 0, 2. qubit 0/1 — nic/ X na 3. qubit — $\hat{C}X$ brána $2 \rightarrow 3$
- 2. qubit má hodnotu 0, 1. qubit 0/1 — nic/ Z na 3. qubit — $\hat{C}Z$ brána $1 \rightarrow 3$

$$\hat{U} = \hat{C}Z\hat{C}X$$

Kvantová teleportace na IBM-Q



Na konci je 3. qubit ve stejném stavu $|\psi\rangle$, v jakém jsme připravili 1. qubit