Singletní stav a kvantové provázání

Martin Štefaňák

30. dubna 2021

Singletní stav

- Uvažujme dva spiny $\frac{1}{2}$ — $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2 = \mathbb{C}^4$
- ON báze v $\mathscr{H}_i = \mathbb{C}^2$

$$|z,+\rangle \equiv |+\rangle = (1,0)^T, \quad |z,-\rangle \equiv |-\rangle = (0,1)^T$$

- ON báze v $\mathscr{H} = \mathbb{C}^4$

$$|+\rangle \otimes |+\rangle = (1,0,0,0)^T, \quad |+\rangle \otimes |-\rangle = (0,1,0,0)^T$$
$$|-\rangle \otimes |+\rangle = (0,0,1,0)^T, \quad |-\rangle \otimes |-\rangle = (0,0,0,1)^T$$

- Singletní stav

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle\right)$$

- Singletní stav je provázaný — nelze faktorizovat

$$|\psi^-\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$$

Schmidtův rozklad

- Hilbertovy prostory $\mathscr{H}_i$, $i = 1, 2$, konečné dimenze n, m, $n \geq m$

$\forall |\psi\rangle \in \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ $\exists$ ON množiny $\{|\alpha_1\rangle, \ldots, |\alpha_m\rangle\} \subset \mathscr{H}_1$ a $\{|\beta_1\rangle, \ldots, |\beta_m\rangle\} \subset \mathscr{H}_2$ takové, že

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{m} a_i |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$$

kde Schmidtovy koeficienty a_i splňují $a_i \geq 0$ a jsou určené jednoznačně až na permutaci

- Schmidtovo číslo (hodnost) stavu $|\psi\rangle$ — počet nenulových koeficientů a_i
- Separabilní (faktorizované) stavy — Schmidtova hodnost rovna jedné

$$|\psi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$$

- Provázané stavy — Schmidtova hodnost větší než jedna

$$|\psi\rangle \neq |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$$

Singletní stav

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle)$$

- Schmidtův rozklad singletního stavu

$$|\alpha_1\rangle = |+\rangle, \quad |\alpha_2\rangle = -|-\rangle, \quad |\beta_1\rangle = |-\rangle, \quad |\beta_2\rangle = |+\rangle$$

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha_1\rangle \otimes |\beta_1\rangle + |\alpha_2\rangle \otimes |\beta_2\rangle), \quad a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Singlet má Schmidtovu hodnost 2 — je to provázaný stav

Korelace v singletním stavu

Provázání kvantového stavu dvou částic se projevuje korelacemi mezi výsledky měření pozorovatelných na jednotlivých částicích

Měření spinu jedné částice

- Projekce spinu 1. nebo 2. částice do libovolného směru jsou zcela náhodné
- Pravděpodobnost naměření kladné i záporné projekce je $\frac{1}{2}$

Současné měření spinu obou částic

- Projekce spinu 1. a 2. částice do stejného směru jsou perfektně antikorelované
- Naměříme kladnou projekci spinu 1. částice do směru $\vec{n}$ — 2. částice má zápornou

Projekce spinu 1. částice v singletním stavu

- Operátor projekce spinu 1. částice do směru $\vec{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$

$$\hat{S}^{(1)}_{\vec{n}} = \hat{S}_{\vec{n}} \otimes \hat{I} = \vec{n}\cdot\hat{\vec{S}} \otimes \hat{I}, \quad \vec{n}\cdot\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

- Vlastní vektor $\hat{S}_{\vec{n}}$ s vlastním číslem $+\frac{\hbar}{2}$

$$\hat{S}_{\vec{n}}|\vec{n},+\rangle = \frac{\hbar}{2}|\vec{n},+\rangle, \quad |\vec{n},+\rangle = \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-\rangle$$

- Vlastní vektory $\hat{S}^{(1)}_{\vec{n}}$ s vlastním číslem $+\frac{\hbar}{2}$ — $|\vec{n},+\rangle\otimes|+\rangle$, $|\vec{n},+\rangle\otimes|-\rangle$

$$\hat{S}^{(1)}_{\vec{n}}\left(|\vec{n},+\rangle\otimes|\pm\rangle\right) = \left(\hat{S}_{\vec{n}}\otimes\hat{I}\right)\left(|\vec{n},+\rangle\otimes|\pm\rangle\right) = \hat{S}_{\vec{n}}|\vec{n},+\rangle\otimes|\pm\rangle = \frac{\hbar}{2}|\vec{n},+\rangle\otimes|\pm\rangle$$

- $|\vec{n},+\rangle\otimes|+\rangle$, $|\vec{n},+\rangle\otimes|-\rangle$ jsou ONB v podprostoru s vlastním číslem $+\frac{\hbar}{2}$

$$\left(\langle\vec{n},+|\otimes\langle+|\right)\left(|\vec{n},+\rangle\otimes|-\rangle\right) = \langle\vec{n},+|\vec{n},+\rangle\langle+|-\rangle = 0$$

Projekce spinu 1. částice v singletním stavu

- Pravděpodobnost naměření kladné projekce spinu 1. částice do směru $\vec{n}$

$$W = W_{|\psi^-\rangle\rightarrow|\vec{n},+\rangle\otimes|+\rangle} + W_{|\psi^-\rangle\rightarrow|\vec{n},+\rangle\otimes|-\rangle} = W_{(\vec{n},+),+} + W_{(\vec{n},+),-}$$

- Amplitudy pravděpodobnosti přechodu ze singletního stavu

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle\otimes|-\rangle - |-\rangle\otimes|+\rangle\right)$$

do stavů $|\vec{n},+\rangle\otimes|\pm\rangle = \left(\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-\rangle\right)\otimes|\pm\rangle$

$$\left(\langle\vec{n},+|\otimes\langle+|\right)|\psi^-\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\left(\langle\vec{n},+|\otimes\langle-|\right)|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}$$

Projekce spinu 1. částice v singletním stavu

- Pravděpodobnost přechodu do stavu $|\vec{n},+\rangle \otimes |+\rangle$

$$W_{(\vec{n},+),+} = \left| \left(\langle \vec{n},+| \otimes \langle +| \right) |\psi^-\rangle \right|^2 = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

- Pravděpodobnost přechodu do stavu $|\vec{n},+\rangle \otimes |-\rangle$

$$W_{(\vec{n},+),-} = \left| \left(\langle \vec{n},+| \otimes \langle -| \right) |\psi^-\rangle \right|^2 = \frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}$$

- Pravděpodobnost naměření kladné projekce spinu 1. částice do směru $\vec{n}$

$$W = W_{(\vec{n},+),+} + W_{(\vec{n},+),-} = \frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Pravděpodobnost je $\frac{1}{2}$ nezávisle na směru $\vec{n}$, pro zápornou projekci to platí také

Pro jednu částici ve stavu $|\psi\rangle$ toto nastat nemůže

- Pro každý spinor $|\psi\rangle$ mohu najít směr $\vec{p}$, tak, že $|\psi\rangle = |\vec{p},+\rangle$

$$\begin{aligned} \hat{\vec{S}}_{\vec{p}}|\vec{p},+\rangle &= \frac{\hbar}{2}|\vec{p},+\rangle, \quad \vec{p} = (\sin\alpha\cos\beta, \sin\alpha\sin\beta, \cos\alpha) \\ |\vec{p},+\rangle &= \cos\frac{\alpha}{2}e^{-i\beta}|+\rangle + \sin\frac{\alpha}{2}|-\rangle \end{aligned}$$

- Pravděpodobnost naměření kladné projekce spinu do směru $\vec{n}$ ve stavu $|\vec{p},+\rangle$

$$\begin{aligned} |\langle\vec{n},+|\vec{p},+\rangle|^2 &= \left|\cos\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}\cos\frac{\alpha}{2}e^{-i\beta} + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right|^2 \\ &= \frac{1}{2}(1 + \cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta\cos(\beta-\varphi)) = \frac{1}{2}(1 + \vec{n}\cdot\vec{p}) \end{aligned}$$

Měření projekce spinu obou částic do osy z

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle\right)$$

- Měřím projekci spinu 1. částice do osy z, naměřím kladnou s $W = \frac{1}{2}$
- Stav po měření je popsán ketem $|\psi\rangle = |+\rangle \otimes |-\rangle$
- Druhá částice má s jistotou zápornou projekci spinu do osy z
- Analogicky pro opačný výsledek měření

Projekce spinů do osy z jsou v singletním stavu perfektně antikorelovány

Korelace v separabilním stavu

- Uvažujme částice v separabilním stavu $|\psi\rangle = |+\rangle \otimes |-\rangle$
- Měřím projekci spinu 1. částice do osy z, s jistotou naměřím kladnou
- Podobně, u 2. částice s jistotou naměřím zápornou projekci spinu do osy z
- Perfektní antikorelace ale platí jen pro měření do osy z
- Žádné měření na 1. částici neovlivní stav 2. částice
- Měřím projekci spinu 1. částice do směru $\vec{n}$, pr. naměření kladnou/záporné projekce

$$W_+^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + \vec{n} \cdot \vec{p}^{(1)}) = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta), \quad W_-^{(1)} = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta), \quad \vec{p}^{(1)} = (0, 0, 1)$$

- Naměřím kladnou, stav po měření je popsán vektorem $|\vec{n}, +\rangle \otimes |-\rangle$
- Stav 2. částice se nijak nezměnil
- Měřím projekci spinu 2. částice do směru $\vec{n}$ — mohu dostat oba výsledky s pr.

$$W_+^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + \vec{n} \cdot \vec{p}^{(2)}) = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta), \quad W_-^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta), \quad \vec{p}^{(2)} = (0, 0, -1)$$

Korelace v singletním stavu, změna báze

V singletním stavu perfektní antikorelace platí pro projekce do libovolného směru $\vec{n}$

- Vlastní vektory s kladnou a zápornou projekcí spinu do směru $\vec{n}$

$$|\vec{n},+\rangle = \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-\rangle, \quad |\vec{n},-\rangle = \sin\frac{\theta}{2}|+\rangle - \cos\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|-\rangle$$

- Standardní báze $|\pm\rangle$ pomocí $|\vec{n},\pm\rangle$ (změna báze)

$$|+\rangle = \cos\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|\vec{n},+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|\vec{n},-\rangle, \quad |-\rangle = \sin\frac{\theta}{2}|\vec{n},+\rangle - \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}|\vec{n},-\rangle$$

- Stavy dvou spinů s opačnou projekcí do osy z

$$|+\rangle|-\rangle = \frac{1}{2}\sin\theta\left(e^{i\varphi}|\vec{n},+\rangle|\vec{n},+\rangle - e^{-i\varphi}|\vec{n},-\rangle|\vec{n},-\rangle\right) - \cos^2\frac{\theta}{2}|\vec{n},+\rangle|\vec{n},-\rangle + \sin^2\frac{\theta}{2}|\vec{n},-\rangle|\vec{n},+\rangle$$

$$|-\rangle|+\rangle = \frac{1}{2}\sin\theta\left(e^{i\varphi}|\vec{n},+\rangle|\vec{n},+\rangle - e^{-i\varphi}|\vec{n},-\rangle|\vec{n},-\rangle\right) - \cos^2\frac{\theta}{2}|\vec{n},-\rangle|\vec{n},+\rangle + \sin^2\frac{\theta}{2}|\vec{n},+\rangle|\vec{n},-\rangle$$

Invariance singletního stavu vůči současné změně báze

- Singletní stav má stejný tvar v každé bázi tvaru $|\vec{n},\pm\rangle \otimes |\vec{n},\pm\rangle$

$$
\begin{aligned}
|\psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg(\frac{1}{2}\sin\theta\left(e^{i\varphi}|\vec{n},+\rangle|\vec{n},+\rangle - e^{-i\varphi}|\vec{n},-\rangle|\vec{n},-\rangle\right) - \cos^2\frac{\theta}{2}|\vec{n},+\rangle|\vec{n},-\rangle + \\
&\quad + \sin^2\frac{\theta}{2}|\vec{n},-\rangle|\vec{n},+\rangle - \frac{1}{2}\sin\theta\left(e^{i\varphi}|\vec{n},+\rangle|\vec{n},+\rangle - e^{-i\varphi}|\vec{n},-\rangle|\vec{n},-\rangle\right) \\
&\quad + \cos^2\frac{\theta}{2}|\vec{n},-\rangle|\vec{n},+\rangle - \sin^2\frac{\theta}{2}|\vec{n},+\rangle|\vec{n},-\rangle\Bigg) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right)\left(|\vec{n},+\rangle|\vec{n},-\rangle - |\vec{n},-\rangle|\vec{n},+\rangle\right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\vec{n},+\rangle|\vec{n},-\rangle - |\vec{n},-\rangle|\vec{n},+\rangle\right)
\end{aligned}
$$

- Singletní stav je invariantní vůči transformacím tvaru $\hat{U} \otimes \hat{U}$

Korelace v singletním stavu

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\vec{n},+\rangle|\vec{n},-\rangle - |\vec{n},-\rangle|\vec{n},+\rangle\right)$$

- Měřím projekci spinu 1. částice do směru $\vec{n}$, naměřím kladnou s $W = \frac{1}{2}$
- Stav po měření je popsán ketem $|\psi\rangle = |\vec{n},+\rangle \otimes |\vec{n},-\rangle$
- Druhá částice má s jistotou zápornou projekci spinu do směru $\vec{n}$
- Analogicky pro opačný výsledek měření

Projekce spinů do všech směrů jsou v singletním stavu perfektně antikorelovány

- Částice v provázaném stavu jsou nedělitelnou součástí jednoho kvantového systému
- Měření na 1. částici změní stav celého systému — ovlivní 2. částici
- Einstein — strašidelné působení na dálku — porušení STR?
- Náhodnost výsledků měření — provázání nelze využít pro přenos informace nadsvětelnou rychlostí — není rozpor s STR

Provázaný stav

- Singletní stav je příklad maximálně provázaného stavu
- Kvantový stav — soubor informací o možných výsledcích měření
- V singletním stavu samostatné částice nenesou žádné informace
- Jejich individuální stavy nelze popsat vektorem
- Musí se použít obecnější popis stavu pomocí matice hustoty
- Veškeré informace v singletním stavu jsou v antikorelacích výsledků měření
- Korelace jsou ve všech provázaných stavech
- Korelace jsou přítomné i v klasické fyzice
- Kvantové korelace mohou být mnohem silnější — provázání
- Situace jako u singletního stavu nemůže v klasické fyzice nastat