Hyperjemná struktura vodíku, Zeemanův jev

Martin Štefaňák

23. dubna 2021

Přehled

Přehled

Hyperjemná struktura základního stavu vodíku

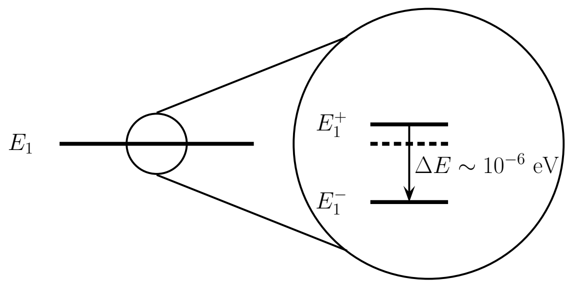
- Energetické hladiny vodíku - $E_N = -\frac{R}{N^2}, \quad N \in \mathbb{N}$
- Základní hladina E_1 je nedegenerovaná
- Při započítání spinu elektronu a spinu protonu má degeneraci 4
- Ve skutečnosti jde o multiplet dvou velmi blízkých hladin $E_1^{\pm}$ — hyperjemná struktura

$$\Delta E = E_1^+ - E_1^- \sim 10^{-6}\ \mathrm{eV}$$

- Hyperjemná struktura je důsledek interakce spinů elektronu a protonu
- Relativistické korekce způsobují tzv. jemnou strukturu vodíku

$$\Delta E_{FS} \sim 10^{-5}\ \mathrm{eV}$$

- Jemná struktura posune základní hladinu, ale nedojde k rozštěpení



Spin elektronu a protonu

- Hilbertovy prostory spinu elektronu a protonu

$$\mathscr{H}^{(e)} = [|+_e\rangle, |-_e\rangle]_\lambda \,, \quad \mathscr{H}^{(p)} = [|+_p\rangle, |-_p\rangle]_\lambda$$

- Hilbertův prostor složeného systému

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}^{(e)} \otimes \mathscr{H}^{(p)} = [|+_e, +_p\rangle, |+_e, -_p\rangle, |-_e, +_p\rangle, |-_e, -_p\rangle]_\lambda$$

- Standardní báze

$$|+_e, +_p\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |+_e, -_p\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-_e, +_p\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-_e, -_p\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Operátory spinu elektronu

$$\hat{S}_j^{(e)} = \hat{S}_j \otimes \hat{I} \Longrightarrow S_j^{(e)} = \frac{\hbar}{2}\sigma_j \otimes I$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matice složek spinu elektronu

$$S_x^{(e)} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y^{(e)} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_z^{(e)} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Operátory spinu protonu

$$\hat{S}_j^{(p)} = \hat{I} \otimes \hat{S}_j \implies S_j^{(p)} = \frac{\hbar}{2} I \otimes \sigma_j$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matice složek spinu protonu

$$S_x^{(p)} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y^{(p)} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_z^{(p)} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Interakce magnetických momentů protonu a elektronu

- Klasicky — dva magnetické momenty $\vec{\mu}_1$ a $\vec{\mu}_2$ — $E \sim \vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2$
- Kvantově — Hamiltonián interakce magnetických momentů protonu a elektronu

$$\hat{H}_0 = \tilde{A}\hat{\vec{\mu}}^{(e)} \cdot \hat{\vec{\mu}}^{(p)}$$

- Vlastní magnetický moment elektronu

$$\hat{\vec{\mu}}^{(e)} = g_e \frac{\mu_B}{\hbar}\hat{\vec{S}}^{(e)} \equiv \frac{2\mu_e}{\hbar}\hat{\vec{S}}^{(e)}, \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \doteq 9.274 \cdot 10^{-24} J \cdot T^{-1}, \quad g_e \doteq -2$$

- Vlastní magnetický moment protonu

$$\hat{\vec{\mu}}^{(p)} = g_p \frac{\mu_N}{\hbar}\hat{\vec{S}}^{(p)} \equiv \frac{2\mu_p}{\hbar}\hat{\vec{S}}^{(p)}, \quad \mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} \doteq 5.051 \cdot 10^{-27} J \cdot T^{-1}, \quad g_p \doteq 5.586$$

- Magnetický moment protonu μ_p je mnohem menší než elektronu μ_e

$$\left|\frac{\mu_p}{\mu_e}\right| = \frac{g_p}{g_e}\frac{m_e}{m_p} \doteq 1.5 \cdot 10^{-3}$$

Interakce spinu protonu a elektronu

- Hamiltonián interakce magnetických momentů vyjádřený pomocí operátorů spinu

$$\hat{H}_0 = \tilde{A}\,\hat{\vec{\mu}}^{(e)} \cdot \hat{\vec{\mu}}^{(p)} = \frac{4}{\hbar^2}\mu_e\mu_p\tilde{A}\,\hat{\vec{S}}^{(e)} \cdot \hat{\vec{S}}^{(p)} = \frac{4}{\hbar^2}A\,\hat{\vec{S}}^{(e)} \cdot \hat{\vec{S}}^{(p)}, \quad A = \mu_e\mu_p\tilde{A}$$

- Rozepíšeme skalární součin

$$\hat{H}_0 = \frac{4}{\hbar^2}A\,\Big((\hat{S}_x \otimes \hat{I})(\hat{I} \otimes \hat{S}_x) + (\hat{S}_y \otimes \hat{I})(\hat{I} \otimes \hat{S}_y) + (\hat{S}_z \otimes \hat{I})(\hat{I} \otimes \hat{S}_z)\Big)$$

- Maticový zápis

$$H_0 = \frac{4}{\hbar^2}A\,(S_x \otimes S_x + S_y \otimes S_y + S_z \otimes S_z) = A\,\sigma_j \otimes \sigma_j \equiv A\,\sigma_{jj}$$

- Roznásobíme matice složek spinu elektronu a protonu, nebo spočítáme $\sigma_j \otimes \sigma_j \equiv \sigma_{jj}$

Interakce spinu protonu a elektronu

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Tenzorový součin Pauliho matic

$$\sigma_{xx} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{yy} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{zz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matice hamiltoniánu ve standardní bázi

$$H_0 = A\,\sigma_{jj} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A & 2A & 0 \\ 0 & 2A & -A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \end{pmatrix}$$

Hyperjemná struktura základního stavu vodíku

- Vlastní čísla hamiltoniánu jsou $E_+ = A$ a $E_- = -3A$
- Základní hladina vodíku E_1 — multiplet blízkých hladin $E_1^\pm$

$$E_1^+ = E_1 + E_+ = -R + A, \quad E_1^- = E_1 + E_- = -R - 3A$$

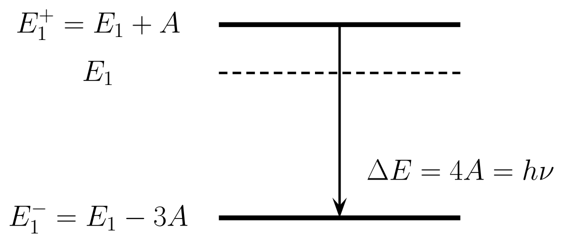
- Přechod mezi hladinami — vyzáření mikrovlnného fotonu

$$h\nu = \Delta E = 4A$$

- Z experimentálních dat plyne

$$\Delta E \doteq 5.9 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{eV}$$

$$\nu \doteq 1420\ \mathrm{MHz}, \quad \lambda \doteq 21\ \mathrm{cm}$$



Vlastní podprostory hamiltoniánu

Podprostor E_-

- Vlastní číslo má násobnost 1
- Vlastní vektor — singlet

$$
\begin{aligned}
|\psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+_e, -_p\rangle - |-_e, +_p\rangle\right) \\
&\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0)^T
\end{aligned}
$$

Podprostor E_+

- Vlastní číslo má násobnost 3
- Vlastní vektory — triplet

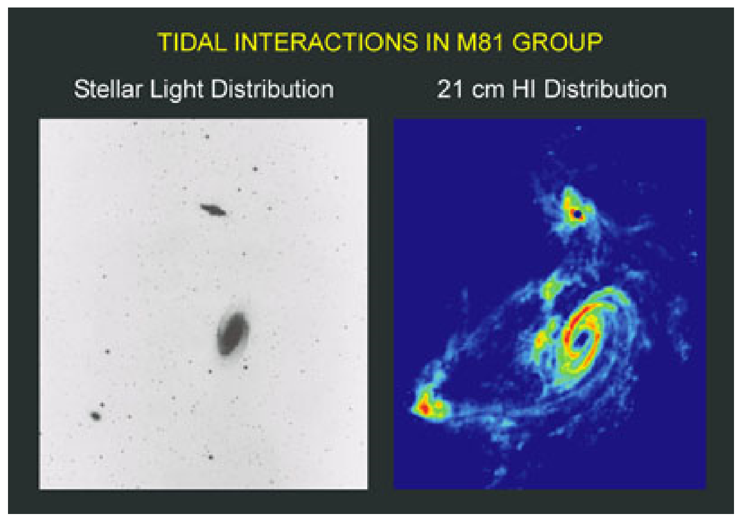
$$
\begin{aligned}
|\psi_1^+\rangle &= |+_e, +_p\rangle = (1, 0, 0, 0)^T \\
|\psi_2^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+_e, -_p\rangle + |-_e, +_p\rangle\right) \\
&\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0)^T \\
|\psi_3^+\rangle &= |-_e, -_p\rangle = (0, 0, 0, 1)^T
\end{aligned}
$$

Přechody v hyperjemé struktuře vodíku

- Přechod mezi hladinami hyperjemné struktury vodíku je silně potlačen
- Rychlost přechodu $\Gamma \sim 10^{-15}\ \mathrm{s}^{-1}$ — střední doba života $\tau = 1/\Gamma \sim 10^{15}$ s $\sim 10^{7}$ let
- Přechod nelze pozorovat v pozemských podmínkách, s vyjímkou vodíkového maseru
- Vodík je nejběžnější prvek ve vesmíru
- Spektrální linii $\lambda = 21$cm odpovídající přechodu hyperjemé struktury vodíku (HI) lze pozorovat na astronomických škálách — struktury typu mračna vodíku v galaxiích
- Radiové vlny v této oblasti nejsou pohlcovány prachovými mračny
- Z Dopplerova posunu spektrální linie lze určit relativní rychlost vůči sluneční soustavě

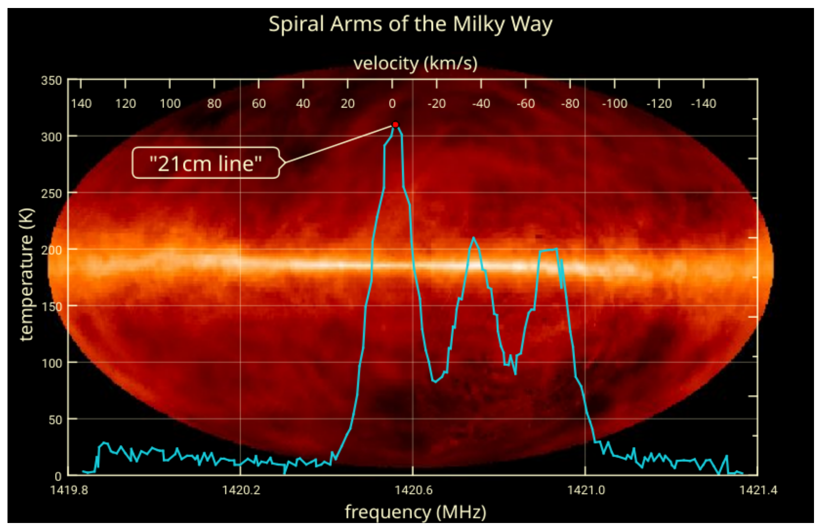
21cm linie atomárního vodíku (HI) hraje důležitou roli v radioastronomii

Využití 21 cm HI linie — zkoumání struktury galaxií



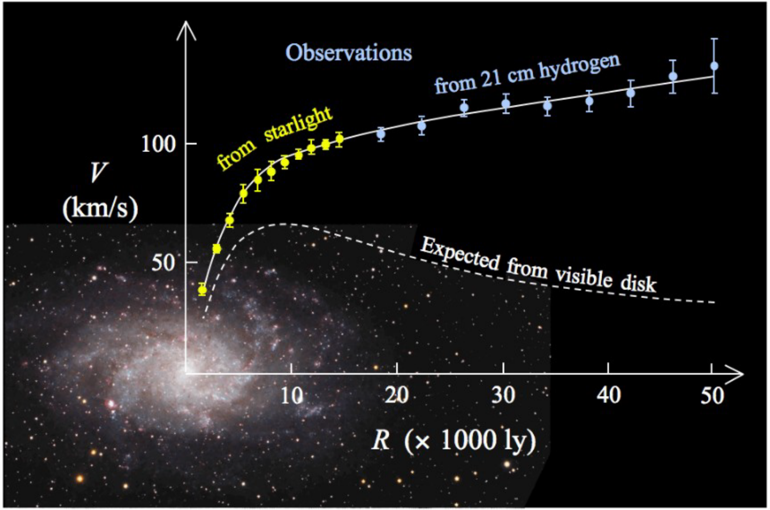
Řada struktur není vidět ve viditelném spektru

Využití 21 cm HI linie — spirální ramena Mléčné dráhy



Různé relativní rychlosti ramen vůči Slunci způsobují různý Dopplerův posun linie

Využití 21 cm HI linie — objev temné hmoty



Rychlost rotace neklesá se vzdáleností od středu galaxie

Přehled

1. Hyperjemná struktura základního stavu vodíku
2. Zeemanův jev

Vodík ve vnějším magnetickém poli

- Energie spinů elektronu a protonu závisí na jejich projekci na magnetické pole

$$\hat{H}_1 = -\hat{\vec{\mu}}^{(e)} \cdot \vec{B} - \hat{\vec{\mu}}^{(p)} \cdot \vec{B}$$

- Magnetické pole ve směru osy z — $\vec{B} = (0, 0, B)$
- Matice hamiltoniánu ve standardní bázi

$$H_1 = -\frac{2\mu_e}{\hbar} B S_z^{(e)} - \frac{2\mu_p}{\hbar} B S_z^{(p)} = H_1 = B \begin{pmatrix} -(\mu_e + \mu_p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\mu_e - \mu_p) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_e - \mu_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_e + \mu_p \end{pmatrix}$$

Vodík ve vnějším magnetickém poli

- Magnetický moment elektronu μ_e je záporný, protonu μ_p kladný, a $|\mu_e| \gg \mu_p$

$$\mu = -(\mu_e + \mu_p), \quad \mu' = -(\mu_e - \mu_p), \quad \mu \simeq \mu' > 0$$

- Matice hamiltoniánu ve standardní bázi

$$H_1 = B \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

- Celkový hamiltonián hyperjemné struktury ve vnějším poli

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$$

Vliv vnějšího pole na hyperjemnou strukturu

- Matice celkového hamiltoniánu

$$H = H_0 + H_1 = \begin{pmatrix} A+\mu B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A+\mu' B & 2A & 0 \\ 0 & 2A & -A-\mu' B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A-\mu B \end{pmatrix}$$

- Vlastní hodnoty energie

$B = 0$	$B \neq 0$
$E_+ = A$	$E_I = A + \mu B, \quad E_{II} = A - \mu B, \quad E_{III} = A\left(-1 + 2\sqrt{1 + \frac{\mu'^2 B^2}{4A^2}}\right)$
$E_- = -3A$	$E_{IV} = -A\left(1 + 2\sqrt{1 + \frac{\mu'^2 B^2}{4A^2}}\right)$

Zeemanův jev

- Energie závisí na intenzitě vnějšího magnetického pole
- Dojde k rozštěpení degenerované hladiny E^+ na trojici E_I, E_{II}, E_{III}

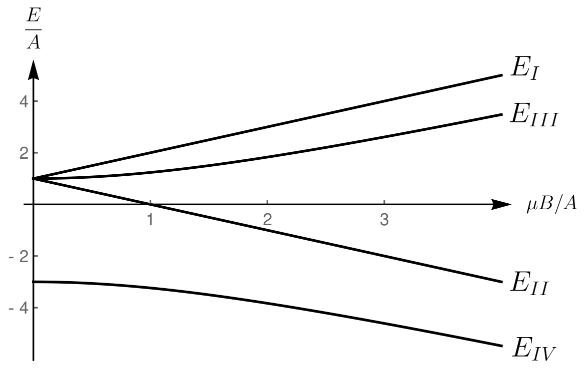
- E_I a E_{II} závisí na B lineárně
- Pro slabá pole jsou E_{III} a E_{IV} konst.

$$\mu' B \ll A \ \Rightarrow \ E_{III} \simeq A, \quad E_{IV} \simeq -3A$$

- V silném poli jsou E_{III} a E_{IV} lineární

$$\mu' B \gg A \ \Rightarrow \ \begin{aligned} E_{III} &\simeq -A + \mu' B \\ E_{IV} &\simeq -A - \mu' B \end{aligned}$$

Energie v závislosti na B



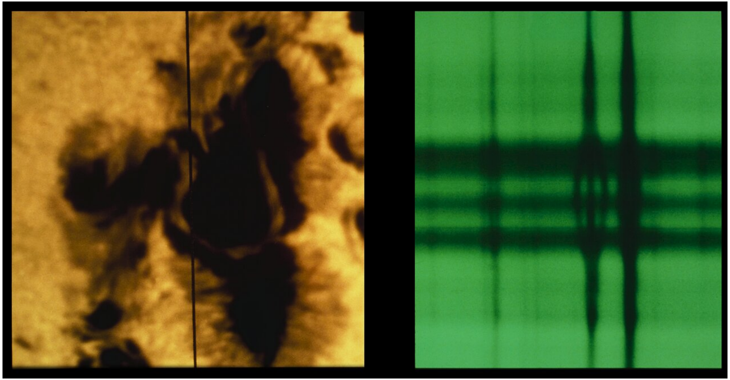
Zeemanův jev

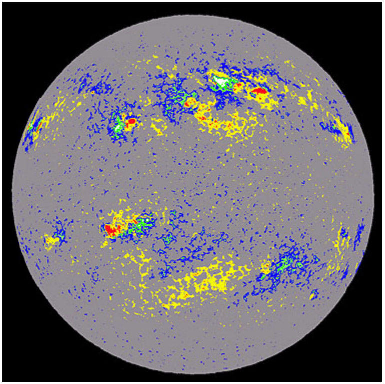
- Elektronové hladiny atomů — energie $E_{n,l}$ závisí na radiálním (n) a orbitálním (l) kvantovém čísle
- l určuje velikost orbitálního momentu hybnosti elektronu
- Energie nezávisí na projekci momentu hybnosti $m = l, \ldots, -l$
- $l \neq 0$ — elektron má orbitální magnetický moment — má energii v mag. poli
- Projekce na magnetické pole — $\mu_B m B$
- Normální Zeemanův jev

$$E_{n,l,m} = E_{n,l} + \mu_B m B, \quad m = l, \ldots, -l$$

Rozštěpení hladin kadmia

Zeemanův jev v astronomii — magnetogram slunce





Z šířky rozštěpení spektrální linie lze určit lokální intenzitu magnetického pole