Stern-Gerlachův experiment, měření a nekompatibilita pozorovatelných

Martin Štefaňák

27. března 2021

Přehled

Přehled

Sternův-Gerlachův experiment

Svazek částic prochází nehomogenním magnetickým polem

- Síla působící na částice — urychluje ve směru gradientu projekce magnetického momentu částice na magnetické pole

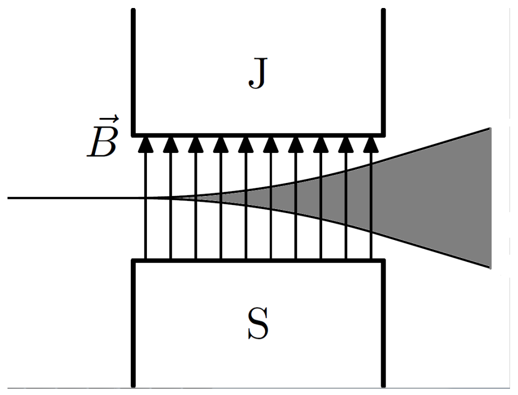
$$\vec{F} = \vec{\nabla}\left(\vec{\mu}\cdot\vec{B}(\vec{x})\right)$$

- Částice mají magnetický moment $\vec{\mu}$ velikosti μ, náhodně orientovaný
- Projekce magnetického momentu na magnetické pole se spojitě mění

$$-\mu B(\vec{x}) \geq \vec{\mu}\cdot\vec{B}(\vec{x}) \leq \mu B(\vec{x})$$

- Částice dopadnou na stínítko v širokém pásu, šířka závisí na μ

$\vec{\mu} \neq 0$



Sternův-Gerlachův experiment s atomy stříbra

- Atom stříbra v základním stavu
- 1 valenční elektron ve slupce 5*s*
- Přiblížení — dvoučásticový systém

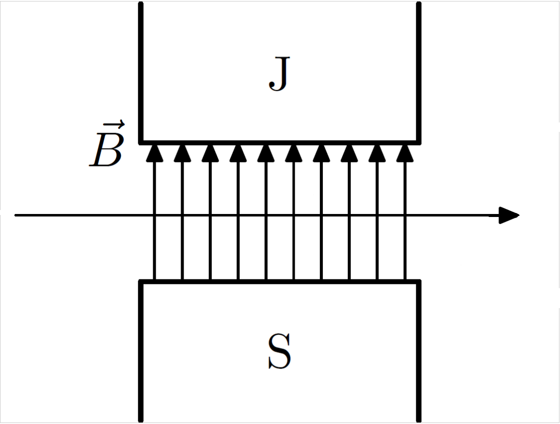
(jádro + vnitřní e^-) + (valenční e^-)

- Hlavní roli hraje valenční elektron
- Valenční elektron má nulový orbitální magnetický moment

$$\vec{\mu} = 0$$

- Na atom nepůsobí žádná síla
- Se svazkem by se nemělo nic stát

$\mu = 0$

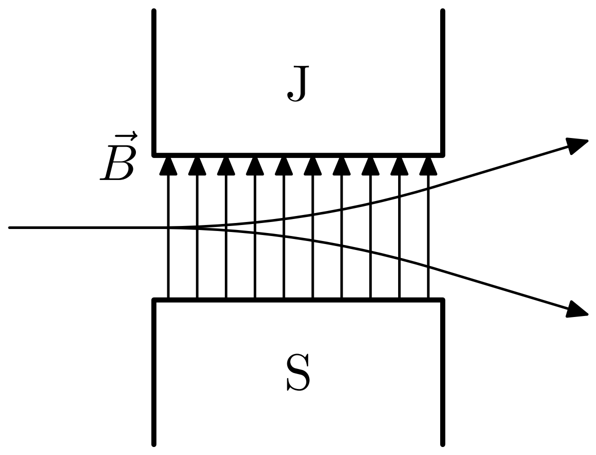


Sternův-Gerlachův experiment s atomy stříbra

Svazek atomů se rozdělí na dva

- Valenční elektron musí mít nějaký vlastní magnetický moment
- Dva výsledné svazky — projekce vlastního magnetického momentu elektronu na magnetické pole může nabývat pouze dvou hodnot
- Velikost vlastního magnetického momentu je v dobré shodě s Bohrovým magnetonem μ_B

$\mu = \pm\mu_B$



Vlastní magnetický moment a spin

- Vlastní magnetický moment je důsledkem vlastního momentu hybnosti — spinu
- Standardní ONB spinu — vlastní vektory projekce spinu do osy z

$$\mathscr{H} = [|z,+\rangle, |z,-\rangle]_\lambda \simeq \mathbb{C}^2, \quad \langle z,+|z,-\rangle = 0, \quad \hat{S}_z|z,\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|z,\pm\rangle$$

- Projekce spinu elektronu do směru $\vec{n}$ má dvě možné hodnoty — $\pm\hbar/2$

$$\hat{\vec{S}} = (\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3), \quad \hat{S}_{\vec{n}} = \hat{\vec{S}} \cdot \vec{n}, \quad \sigma(\hat{S}_i) = \sigma(\hat{S}_{\vec{n}}) = \{\pm\hbar/2\}$$

- Operátor vlastního magnetického momentu elektronu — násobek spinu

$$\hat{\vec{\mu}} = -\frac{2\mu_B}{\hbar}\hat{\vec{S}}, \quad \sigma(\hat{\mu}_i) = \{\pm\mu_B\}$$

- Projekce vlastního magnetického momentu elektronu do směru $\vec{n}$

$$\hat{\mu}_{\vec{n}} = \hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{n}, \quad \sigma(\hat{\mu}_{\vec{n}}) = \{\pm\mu_B\}$$

Přehled

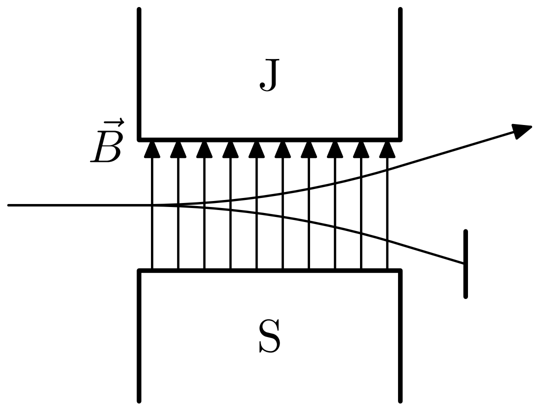
Stern-Gerlachův přístroj jako filtr

Zablokujeme jeden z proudů vyletujících částic — ponecháme jen částice s vhodnou projekcí spinu na magnetické pole

- Osa z — směr magnetického pole
- Zablokujeme spodní proud
- Vyletující částice mají kladnou projekci spinu do osy z
- Přístroj funguje jako filtr
- Matematický popis — OG projektor

$$\hat{F}_{z,+} = |z,+\rangle\langle z,+| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Filtr $F_{z,+}$

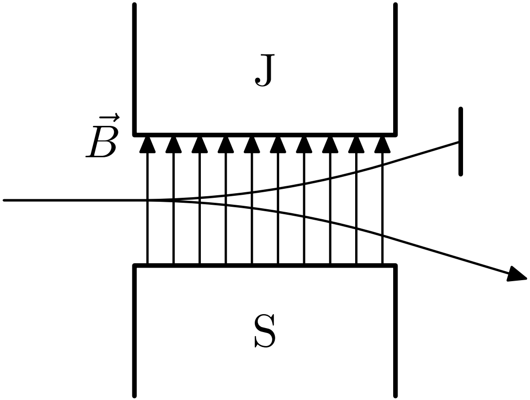


Stern-Gerlachův přístroj jako filtr

- Zablokujeme horní proud
- Vyletující částice mají zápornou projekci spinu do osy z
- Matematický popis — OG projektor

$$\hat{F}_{z,-} = |z,-\rangle\langle z,-| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Filtr $F_{z,-}$



Stern-Gerlachův přístroj jako filtr

- Filtr — ortogonální projektor
- Působení ortogonálních projektorů na stavy

$$\hat{F}_{z,+}|\psi\rangle = \langle z,+|\psi\rangle|z,+\rangle, \quad \hat{F}_{z,-}|\psi\rangle = \langle z,-|\psi\rangle|z,-\rangle$$

- Fourierovy koeficienty — amplituda pr. průchodu částice filtrem

$$W_{z,+} = |\langle z,+|\psi\rangle|^2, \quad W_{z,-} = |\langle z,-|\psi\rangle|^2$$

- Maticový zápis

$$a = \langle z,+|\psi\rangle, \quad b = \langle z,-|\psi\rangle, \quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad F_{z,+}|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_{z,-}|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

- Součet obou filtrů je jednotkový operátor

$$\hat{F}_{z,+} + \hat{F}_{z,-} = \hat{I}$$

Filtrování projekcí spinu do jiného směru

- Magnetického pole ve směru jiné osy (x, y), zablokujeme jeden z proudů částic
- Stern-Gerlachův přístroj propustí částice z kladnou/zápornou projekcí do dané osy
- Působí jako filtr $\hat{F}_{i,\pm}$, $i = x, y$
- Filtry — OG projektory na vlastní vektory $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$

$$\hat{F}_{x,+} = |x,+\rangle\langle x,+|, \quad \hat{F}_{x,-} = |x,-\rangle\langle x,-|, \quad \hat{F}_{y,+} = |y,+\rangle\langle y,+|, \quad \hat{F}_{y,-} = |y,-\rangle\langle y,-|$$

- Kvadrát projektoru je roven původnímu projektoru

$$\hat{F}_{x,+}\hat{F}_{x,+} = |x,+\rangle \underbrace{\langle x,+|x,+\rangle}_{1} \langle x,+| = |x,+\rangle\langle x,+| = \hat{F}_{x,+}$$

Vlastní vektory projekce spinu do hlavních os

- Matice operátorů projekce spinu ve standardní bázi

$$S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Vlastní vektory $\hat{S}_x$

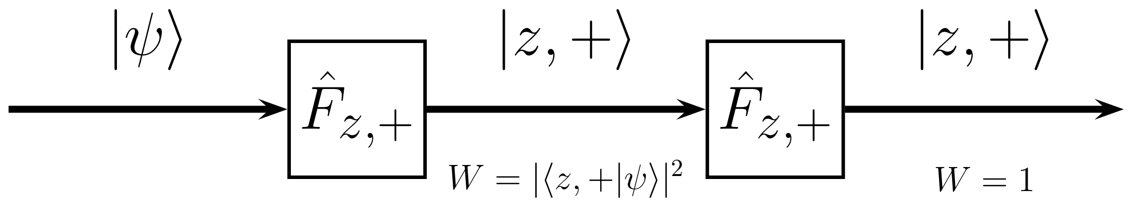
$$|x,+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z,+\rangle + |z,-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |x,-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z,+\rangle - |z,-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Vlastní vektory $\hat{S}_y$

$$|y,+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z,+\rangle + i|z,-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad |y,-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z,+\rangle - i|z,-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Skládání Stern-Gerlachových filtrů — stejný směr

- Dva S-G přístroje za sebou, magnetické pole orientované ve směru osy z
- Oba mají zablokované spodní proudy — filtry $\hat{F}_{z,+}$

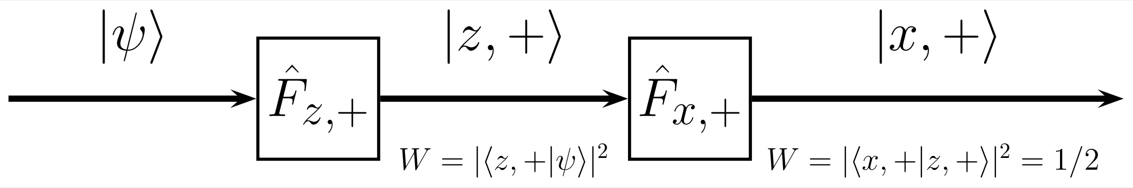


- První filtr — propustí částice s kladnou projekcí spinu do osy z — příprava stavu
- Do druhého filtru vstupují částice ve stavu $|z,+\rangle$ — všechny projdou
- Druhý identický filtr stav nezmění

$$\hat{F}_{z,+}\hat{F}_{z,+} = \hat{F}_{z,+}$$

Skládání Stern-Gerlachových filtrů — jiný směr

- Dva S-G přístroje za sebou, magnetické pole orientované ve směru os z, x
- Oba mají zablokované spodní proudy — filtry $\hat{F}_{z,+}$, $\hat{F}_{x,+}$



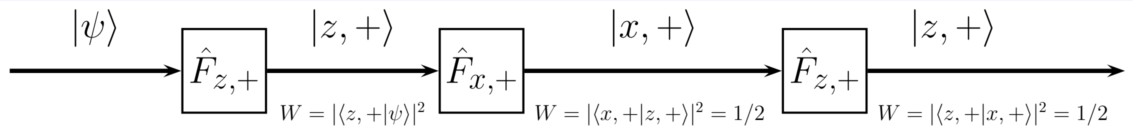
- První filtr — příprava částice ve stavu $|z,+\rangle$
- Druhým filtrem projde polovina částic

$$\hat{F}_{x,+}|z,+\rangle = \langle x,+|z,+\rangle|x,+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|x,+\rangle, \quad W = |\langle x,+|z,+\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

- Druhý filtr stav změní — výsledný stav je $|x,+\rangle$

Skládání tří Stern-Gerlachových filtrů

- Tři S-G přístroje za sebou, magnetické pole orientované ve směru os z, x a z
- Zablokované spodní proudy — filtry $\hat{F}_{z,+}$, $\hat{F}_{x,+}$ a $\hat{F}_{z,+}$



- Druhým filtrem projde polovina částic, jejich stav je $|x,+\rangle$
- Filtrace $\hat{F}_{x,+}$ smaže informaci o předchozím měření $\hat{S}_z$
- Třetím filtrem opět projde pouze polovina částic, výsledný stav je $|z,+\rangle$

$$\hat{F}_{z,+}|x,+\rangle = \langle z,+|x,+\rangle|z,+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|z,+\rangle, \quad W = |\langle z,+|x,+\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

Měření v kvantové mechanice může nevratně změnit stav částice

Přehled

Měření projekce spinu do os z a x

- Měřím projekci spinu do osy z, vyjde kladná — stav spinu je $|z,+\rangle$
- Následně měřím $\hat{S}_x$ — mohu dostat $\pm\hbar/2$ se stejnou pr. $1/2$
- Stav po měření $\hat{S}_x$ je popsaný vlastním vektorem, který odpovídá výsledku měření
- Nové měření $\hat{S}_z$ — mohu dostat $\pm\hbar/2$ se stejnou pr. $1/2$
- Měření $\hat{S}_x$ smaže výsledek předchozího měření $\hat{S}_z$
- Projekce spinu do os x a z nemohu určit současně — nejsou kompatibilní
- Operátory $\hat{S}_x$ a $\hat{S}_z$ nemají společné vlastní vektory

$$\nexists|\psi\rangle \neq 0, \quad \hat{S}_x|\psi\rangle = \alpha|\psi\rangle, \quad \hat{S}_z|\psi\rangle = \beta|\psi\rangle$$

Neexistuje stav spinu, kde by měl současně dobře definované (ostré) hodnoty projekce do osy x a z

Kompatibilita pozorovatelných

- Operátory $\hat{S}_x$ a $\hat{S}_z$ nekomutují

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = \hat{S}_i\hat{S}_j - \hat{S}_j\hat{S}_i = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{S}_k \implies [\hat{S}_x, \hat{S}_z] = -i\hbar\hat{S}_y$$

- Pokud operátory nekomutují, pak nemají společné vlastní vektory (kromě vl. čísla 0)
- Naopak, pokud $\hat{A}$ a $\hat{B}$ komutují, pak mají společné vlastní vektory, tvoří ON bázi

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0 \implies \hat{A}|m,n\rangle = a_m|m,n\rangle, \quad \hat{B}|m,n\rangle = b_n|m,n\rangle$$

- Ve stavu $|m,n\rangle$ mají obě pozorovatelné dobře definované (ostré) hodnoty
- Opakovaná měření $\hat{A}$ a $\hat{B}$ už stav nezmění — můžeme je měřit současně

Pozorovatelné $\hat{A}$ a $\hat{B}$ jsou kompatibilní $\iff$ operátory komutují

Nekompatibilní pozorovatelné pro částici na přímce

- Kvantová částice na přímce — kvadraticky integrabilní funkce — $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}, dx)$

$$(\hat{Q}\psi)(x) = x\psi(x), \quad \hat{P}\psi = -i\hbar\frac{d\psi}{dx}$$

- Poloha a hybnost nejsou kompatibilní (analogie Poissonovy závorky)

$$\left[\hat{Q},\hat{P}\right]\psi = -i\hbar\left(x\frac{d\psi}{dx} - \frac{d}{dx}(x\psi(x))\right) = i\hbar\psi(x) \implies \left[\hat{Q},\hat{P}\right] = i\hbar$$

- Poloha a hybnost nemají společné (zobecněné) vlastní funkce
- Důsledkem nekompatibility polohy a hybnosti jsou Heisenbergovy relace neurčitosti

$$\Delta_\psi x\, \Delta_\psi p \geq \frac{\hbar}{2}$$

- Čím přesněji je ve stavu ψ určená poloha částice, tím hůře je v ψ určená hybnost