Mach-Zehnderův interferometr

Martin Štefaňák

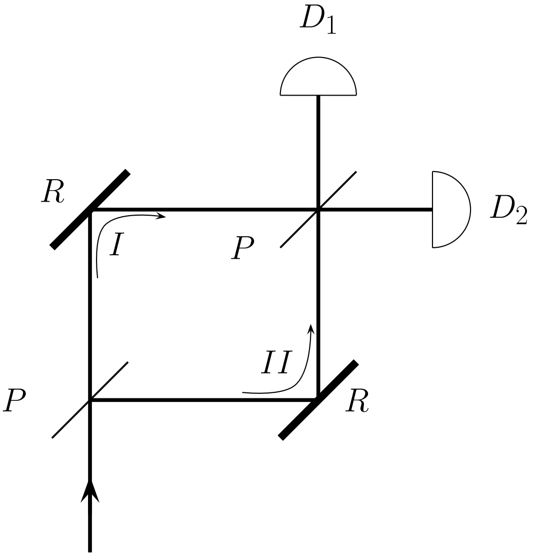
12. března 2021

Přehled

Přehled

Mach-Zehnderův interferometr

Schéma interferometru

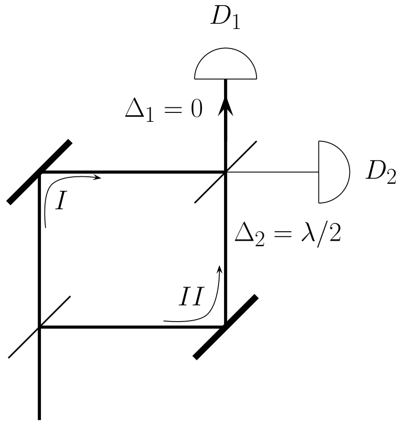


- P — polopropustná zrcadla
- R — dokonalá zrcadla
- D_i — fotodetektory
- Optické dráhy I a II jsou stejně dlouhé

Experiment s klasickým světlem

- Klasické koherentní světlo — EM vlna
- Dopadající vlna se na prvním polopropustném zrcadlu rozdělí na dvě s poloviční intenzitou
- Každý odraz vlny na P nebo R — změna fáze vlny o $\pi/2$ — posun vlny o $\lambda/4$
- Na druhém P se vlny opět spojí
- Vlny směřující do D_1 — obě dva odrazy — konstruktivní interference
- Vlny směřující do D_2 — I 1 odraz, II 3 odrazy — destruktivní interference

Schéma interferometru



Všechno světlo dopadá do detektoru D_1

Experiment s kvantovým světlem

Místo silného koherentního světla uvažujme zdroj jednotlivých fotonů

Klasické světlo

- Detektory zaznamenávají intenzitu dopadající vlny
- Intenzita je rovna kvadrátu absolutní hodnoty amplitudy vlny
- Interference elektromagnetických vln — sčítají se amplitudy jednotlivých vln

Kvantové světlo

- Detektory zaznamenávají dopady jednotlivých fotonů
- Pravděpodobnost dopadu je rovna kvadrátu absolutní hodnoty amplitudy pravděpodobnosti
- Interference amplitud pravděpodobnosti pro jeden foton

- Výsledek bude stejný jako v klasickém případě
- Všechny fotony dopadnou do detektoru D_1

Kvantový popis interference jednoho fotonu

- Vystačíme si s Hilbertovým prostorem dimenze 2

$$\mathscr{H} = [|\uparrow\rangle, |\rightarrow\rangle]_\lambda\,, \quad \langle\uparrow|\rightarrow\rangle = 0, \quad \langle\uparrow|\uparrow\rangle = \langle\rightarrow|\rightarrow\rangle = 1$$

- Stavy $|\uparrow\rangle, |\rightarrow\rangle$ odpovídají směru šíření fotonu "nahoru"a "doprava"
- Polopropustné a dokonalé zrcadlo změní stav fotonu
- Změna stavu bude popsaná nějakým lineárním unitárním operátorem
- Unitární operátor nemění normu vektoru
- Unitarita zajišťuje zachování pravděpodobnosti
- Stav fotonu na konci interferometru — $|\psi\rangle$
- Skalární součiny s bazickými stavy — amplitudy pravděpodobnosti dopadu do D_i
- Pravděpodobnosti dopadu do D_i — W_i

$$W_1 = |\langle\uparrow|\psi\rangle|^2, \quad W_2 = |\langle\rightarrow|\psi\rangle|^2$$

- Odraz změní stav $|\uparrow\rangle$ na $|\rightarrow\rangle$ a naopak, navíc vždy posune fázi stavu o $\pi/2$
- Působení na $\mathscr{H}$ — lineární operátor $\hat{R}$, definice na bazických stavech

$$\hat{R}|\uparrow\rangle = i|\rightarrow\rangle, \quad \hat{R}|\rightarrow\rangle = i|\uparrow\rangle$$

- Reprezentace operátoru maticí v bázi $\{|\uparrow\rangle, |\rightarrow\rangle\}$

$$R = \begin{pmatrix} \langle\uparrow|\hat{R}|\uparrow\rangle & \langle\uparrow|\hat{R}|\rightarrow\rangle \\ \langle\rightarrow|\hat{R}|\uparrow\rangle & \langle\rightarrow|\hat{R}|\rightarrow\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

- Operátor je unitární — $\hat{R}\hat{R}^\dagger = \hat{I} \Longleftrightarrow$ matice v ON bázi je unitární

$$R^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad RR^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Kvantový popis polopropustného zrcadla

- Foton může polopropustným zrcadle projít — stav se nezmění
- Může se odrazit — změna stavu ($|\uparrow\rangle \longleftrightarrow |\rightarrow\rangle$) s posunem fáze o $\pi/2$
- Možnosti se nevybírají náhodně, stav fotonu bude koherentní superpozicí $|\uparrow\rangle$ a $|\rightarrow\rangle$
- Působení na $\mathscr{H}$ — lineární operátor $\hat{P}$, definice na bazických stavech

$$\hat{P}|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\rightarrow\rangle), \quad \hat{P}|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(i|\uparrow\rangle + |\rightarrow\rangle)$$

- Reprezentace operátoru maticí v bázi $\{|\uparrow\rangle, |\rightarrow\rangle\}$

$$P = \begin{pmatrix} \langle\uparrow|\hat{P}|\uparrow\rangle & \langle\uparrow|\hat{P}|\rightarrow\rangle \\ \langle\rightarrow|\hat{P}|\uparrow\rangle & \langle\rightarrow|\hat{P}|\rightarrow\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

- Operátor $\hat{P}$ je unitární

$$P^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad P\,P^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Kvantový popis průchodu fotonu interferometrem

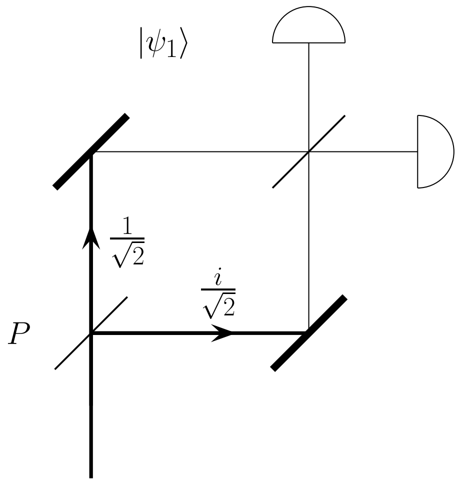
- Počáteční stav fotonu

$$|\psi_0\rangle = |\uparrow\rangle$$

- Průběh experimentu — postupně aplikujeme unitární operace $\hat{P}$ a $\hat{R}$
- Časový vývoj v diskrétních krocích
- Stav po průchodu prvním polopropustným zrcadlem

$$|\psi_1\rangle = \hat{P}|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\rightarrow\rangle)$$

Stav fotonu 1



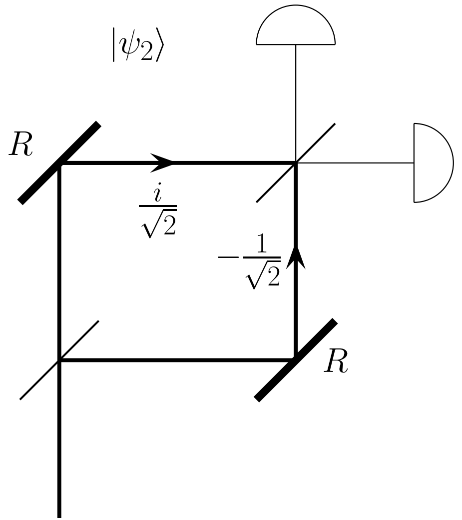
Kvantový popis průchodu fotonu interferometrem

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\rightarrow\rangle)$$

- Stav po odrazu na dokonalých zrcadlech

$$|\psi_2\rangle = \hat{R}|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(i|\rightarrow\rangle - |\uparrow\rangle)$$

Stav fotonu 2



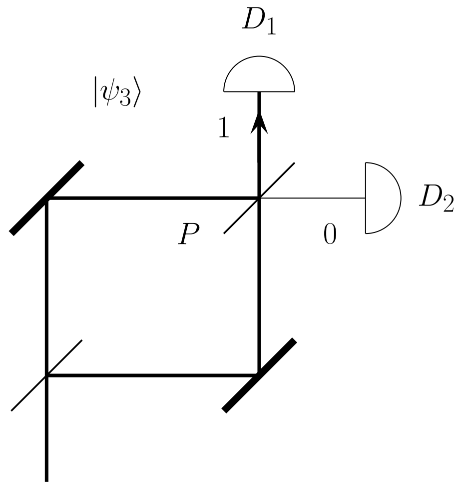
Kvantový popis průchodu fotonu interferometrem

$$|\psi_2\rangle = \hat{R}|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(i|\rightarrow\rangle - |\uparrow\rangle)$$

- Stav po průchodu druhým polopropustným zrcadlem

$$\begin{aligned}|\psi_3\rangle &= \hat{P}|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}(i|\uparrow\rangle + |\rightarrow\rangle)\right. \\ &\qquad \left. - \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\rightarrow\rangle)\right) \\ &= \frac{1}{2}(-|\uparrow\rangle + i|\rightarrow\rangle - |\uparrow\rangle - i|\rightarrow\rangle) \\ &= -|\uparrow\rangle\end{aligned}$$

Stav fotonu 3



Foton musí dopadnout do detektoru D_1

Schéma bez interference

- Vynecháme druhé polopropustné zrcadlo
- Stav po odrazu na dokonalých zrcadlech

$$|\psi_2\rangle = \hat{R}|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(i|\rightarrow\rangle - |\uparrow\rangle)$$

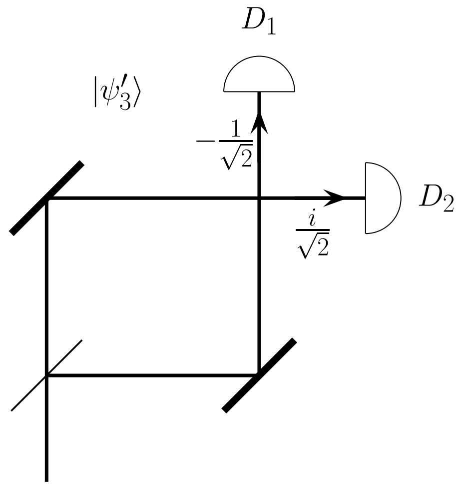
- Tento stav už se dále nemění

$$|\psi_3'\rangle = |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(i|\rightarrow\rangle - |\uparrow\rangle)$$

- Pravděpodobnosti dopadu do D_i

$$W_1' = |\langle\uparrow|\psi_3'\rangle|^2 = \frac{1}{2}, \quad W_2' = |\langle\rightarrow|\psi_3'\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

Stav fotonu 3′



Nedochází k interferenci amplitud pravděpodobnosti

Schéma s dodatečným fázovým posunem

- Do ramene I vložíme fázovou destičku — posune fázi stavu o φ
- Popsaná unitárním operátorem $\hat{F}$

$$\hat{F}|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle, \quad \hat{F}|\rightarrow\rangle = e^{i\varphi}|\rightarrow\rangle$$

- Maticové vyjádření v bázi $\{|\uparrow\rangle, |\rightarrow\rangle\}$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

- Stav před druhým polopropustným zrcadlem

$$|\psi_2''\rangle = \hat{F}|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(ie^{i\varphi}|\rightarrow\rangle - |\uparrow\rangle)$$

Stav fotonu $2''$

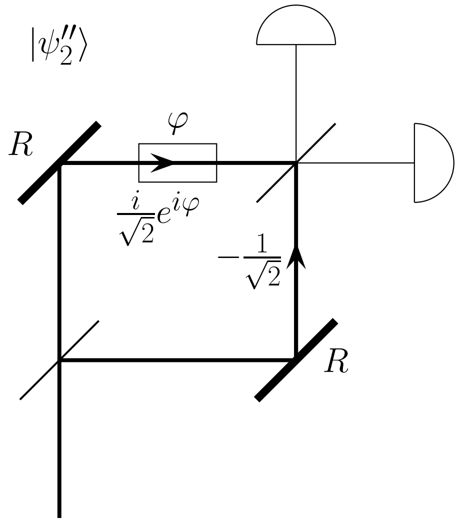


Schéma s dodatečným fázovým posunem

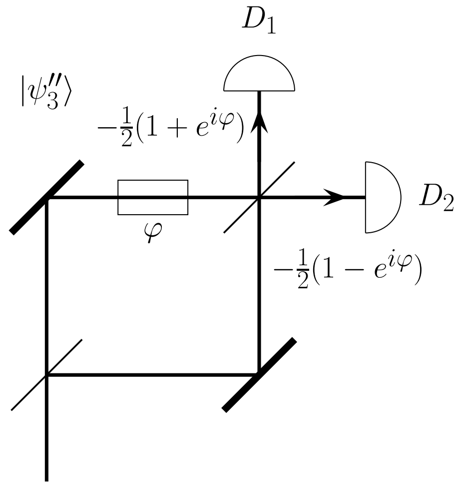
- Stav po druhém polopropustném zrcadle

$$
\begin{aligned}
|\psi_3''\rangle &= \hat{P}|\psi_2''\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\varphi}(i|\uparrow\rangle + |\rightarrow\rangle)\right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\rightarrow\rangle)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(1 + e^{i\varphi}\right)|\uparrow\rangle - \frac{i}{2}\left(1 - e^{i\varphi}\right)|\rightarrow\rangle
\end{aligned}
$$

- Pravděpodobnosti dopadu do D_i

$$
\begin{aligned}
W_1'' &= |\langle\uparrow|\psi_3''\rangle|^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos\varphi) = \cos^2\frac{\varphi}{2} \\
W_2'' &= |\langle\rightarrow|\psi_3''\rangle|^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos\varphi) = \sin^2\frac{\varphi}{2}
\end{aligned}
$$

Stav fotonu 3″



Přehled

Testování bomby

- Bomba s extrémně citlivou spouští, která reaguje i na jeden foton
- Chceme otestovat, jestli je bomba funkční nebo ne

Je možné zjistit, že bomba funguje, bez toho, aby vybuchla?

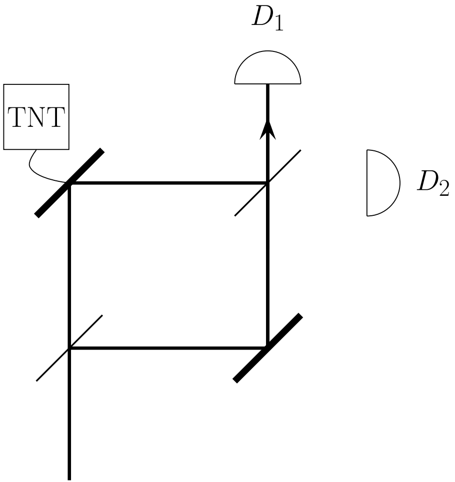
- Klasický postup — posvítíme na spoušť
  - Bomba je nefunkční — nevybuchne
  - Bomba je funkční — vybuchne

S použitím kvantové mechaniky je možné s nenulovou pravděpodobností uspět
Elitzur and Vaidman, Foundations of Physics 23, 987 (1993)

Testování bomby v Mach-Zehnderově interferometru

- Spoušť je napojena na jedno zrcadlo R
- Nefunkční bomba nedělá nic
- Foton vždy dopadne do detektoru D_1

Nefunkční bomba



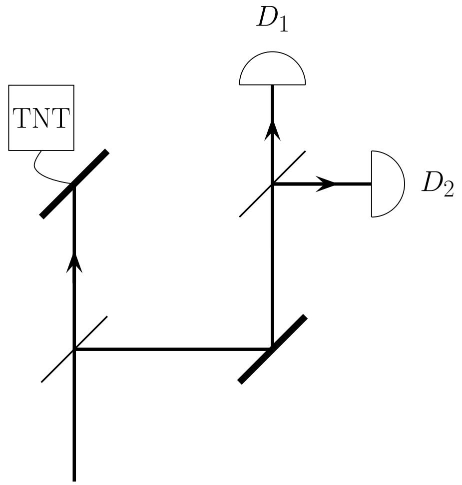
Testování bomby v Mach-Zehnderově interferometru

- Funkční bomba funguje jako detektor fotonů
- S pr. 1/2 foton projde prvním P, je absorbován na spoušti — bomba vybuchne
- S pr. 1/2 se foton na prvním P odrazí — bomba nevybuchne
- Na druhém P nedochází k interferenci
- S pr. 1/4 foton projde druhým P, dopadne do D_1 — stejně, jako když bomba nefunguje
- S pr. 1/4 se na druhém P odrazí, dopadne do D_2 — nelze, pokud bomba nefunguje

Klikne detektor D_2

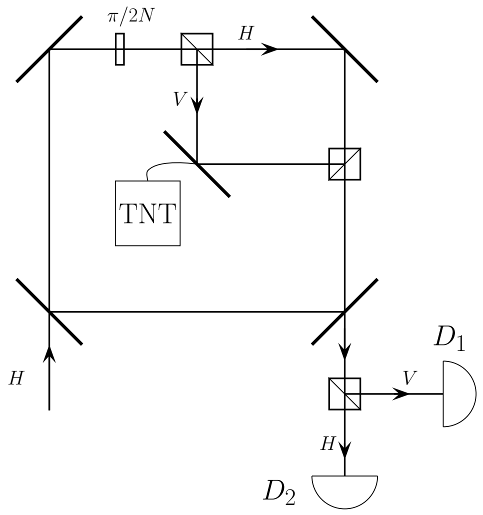
- Víme, že bomba je funkční
- K výbuchu nedošlo
- Pravděpodobnost úspěchu je 1/4

Funkční bomba



Testování bomby s větší úspěšností

Schéma interferometru



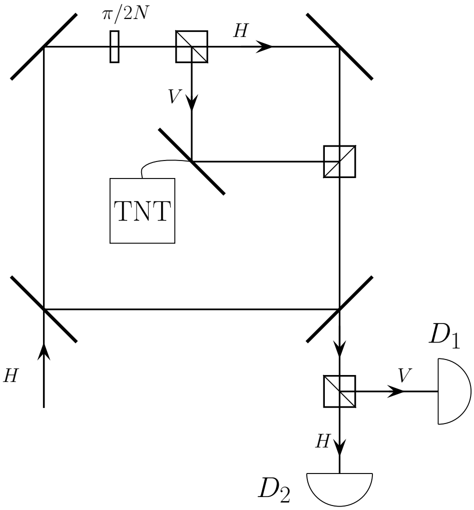
- Interferometr s polarizovaným světlem
- Vstupující foton je horizontálně polarizovaný
- Foton prochází interferometrem po spirále
- Po N obězích směřuje do detektorů
- Polarizační rotátor — otočí polarizaci o $\pi/2N$

$$\begin{aligned}\hat{U}|H\rangle &= \cos(\frac{\pi}{2N})|H\rangle + \sin(\frac{\pi}{2N})|V\rangle \\ \hat{U}|V\rangle &= -\sin(\frac{\pi}{2N})|H\rangle + \cos(\frac{\pi}{2N})|V\rangle\end{aligned}$$

- Polarizační dělič — rozdělí H a V polarizaci

Testování bomby s větší úspěšností

Schéma interferometru



- Bomba nefunguje — foton Nx projde rotátorem
- Po N obězích má foton V polarizaci

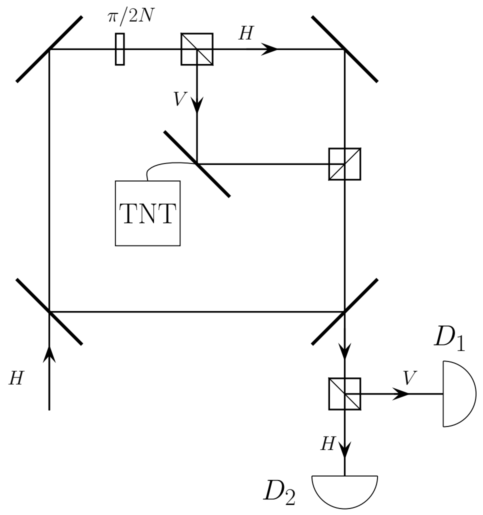
$$U = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2N}) & \sin(\frac{\pi}{2N}) \\ -\sin(\frac{\pi}{2N}) & \cos(\frac{\pi}{2N}) \end{pmatrix}, \quad U^N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{U}^N|H\rangle = |V\rangle$$

- Dopadne vždy do D_1

Testování bomby s větší úspěšností

Schéma interferometru



- Bomba funguje — absorbuje foton, pokud má V polarizaci
- Do rotátoru se vždy vrátí foton s H polarizací
- Pr., že foton má horizontální polarizaci po jednom průchodu rotátorem

$$W = |\langle H|\hat{U}|H\rangle|^2 = \cos^2(\frac{\pi}{2N})$$

- Foton není absorbován bombou — vyjde ven po N obězích s H polarizací — dopadne do D_2
- Celkem je pr. úspěchu rovna

$$W_N = \cos^{2N}(\frac{\pi}{2N}) \longrightarrow 1, \quad N \to \infty$$