

Klasifikace veličin vzhledem k transformacím souřadnic (změněnám báze \vec{E}) $\dim \vec{E} = m \in \mathbb{N}$

veličiny jsou prvky \vec{E} resp. nějaké struktury (tzv. tenzorové algebry) vybudované na \vec{E} , které budeme charakterizovat podle toho kolik mají složek a jak se tyto složky mění při změnách báze \vec{E}

$$B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m) \rightarrow \tilde{B} = (\vec{\tilde{e}}_1, \dots, \vec{\tilde{e}}_m) \text{ kde } \boxed{\vec{\tilde{e}}_j = \vec{e}_i S^i_j} \quad S = (S^i_j) \in GL(m, \mathbb{R}) \text{ matice přechodu od } B \text{ k } \tilde{B}$$

Klasifikace veličin vzhledem k transformacím souřadnic (změně báze \vec{E}) $\dim \vec{E} = m \in \mathbb{N}$

veličiny jsou prvky \vec{E} resp. nějaké struktury (tzv. tenzorové algebry) vybudované na \vec{E} , které budeme charakterizovat podle toho kolik mají složek a jak se tyto složky mění při změně báze \vec{E}

$$B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m) \rightarrow \tilde{B} = (\vec{\tilde{e}}_1, \dots, \vec{\tilde{e}}_m) \text{ kde } \boxed{\vec{\tilde{e}}_j = \vec{e}_i S^i_j} \quad S = (S^i_j) \in GL(m, \mathbb{R}) \text{ matice přechodu od } B \text{ k } \tilde{B}$$

skaláry $\Delta \in \mathbb{R}$ $\tilde{\Delta} = \Delta$ veličiny charakterizované pouze velikostí (a jednotkou), teplota náboj, energie

Klasifikace veličin vzhledem k transformacím souřadnic (změně báze \vec{E}) $\dim \vec{E} = m \in \mathbb{N}$

veličiny jsou prvky \vec{E} resp. nějaké struktury (tzv. tenzorové algebry) vybudované na \vec{E} , které budeme charakterizovat podle toho kolik mají složek a jak se tyto složky mění při změně báze \vec{E}

$$B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m) \rightarrow \tilde{B} = (\vec{\tilde{e}}_1, \dots, \vec{\tilde{e}}_m) \text{ kde } \boxed{\vec{\tilde{e}}_j = \vec{e}_i S^i_j} \quad S = (S^i_j) \in GL(m, \mathbb{R}) \text{ matice přechodu od } B \text{ k } \tilde{B}$$

skaláry $\Delta \in \mathbb{R}$ $\tilde{\Delta} = \Delta$ veličiny charakterizované pouze velikostí (a jednotkou), teplota náboj, energie

vektory $\vec{v} \in \vec{E}$ ($\vec{v} \in \mathbb{R}^m$) veličiny charakterizované velikostí a směrem, síla, rychlost, hybnost, intenzita ele. pole,

Klasifikace veličin vzhledem k transformacím souřadnic (změně báze \vec{E}) $\dim \vec{E} = m \in \mathbb{N}$

veličiny jsou prvky \vec{E} resp. nějaké struktury (tzv. tenzorové algebry) vybudované na \vec{E} , které budeme charakterizovat podle toho kolik mají složek a jak se tyto složky mění při změně báze \vec{E}

$$B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m) \rightarrow \tilde{B} = (\vec{\tilde{e}}_1, \dots, \vec{\tilde{e}}_m) \text{ kde } \boxed{\vec{\tilde{e}}_j = \vec{e}_i S^i_j} \quad S = (S^i_j) \in GL(m, \mathbb{R}) \text{ matice přechodu od } B \text{ k } \tilde{B}$$

skaláry $\Delta \in \mathbb{R}$ $\tilde{\Delta} = \Delta$ veličiny charakterizované pouze velikostí (a jednotkou), teplota náboj, energie

vektory $\vec{v} \in \vec{E}$ ($\vec{v} \in \mathbb{R}^m$) veličiny charakterizované velikostí a směrem, síla, rychlost, hybnost, intenzita ele. pole,

$$\vec{v} = v^i \vec{e}_i = \tilde{v}^j \vec{\tilde{e}}_j = \tilde{v}^j \vec{e}_i S^i_j \Rightarrow v^i = S^i_j \tilde{v}^j / (S^{-1})^k_i$$

$$\tilde{v}^k = (S^{-1})^k_i v^i$$

$$\vec{\tilde{v}} = S^{-1} \vec{v}$$

$$(S^{-1})^k_i v^i = (S^{-1} S)^k_j \tilde{v}^j = \delta^k_j \tilde{v}^j = \tilde{v}^k$$

kontravariantní (mění se proti – opačně než báze)

$B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m) \rightarrow \tilde{B} = (\tilde{\vec{e}}_1, \dots, \tilde{\vec{e}}_m)$ kde $\tilde{\vec{e}}_j = \vec{e}_i S^i_j$ $S = (S^i_j) \in GL(m, \mathbb{R})$ matice přechodu od B k \tilde{B}

\tilde{E}^* duální vektorový prostor k vek. pr. \tilde{E} je mn. všech lineárních zobrazení z \tilde{E} do \mathbb{R} (lin. funkcionalů)

duální bázi $B^* = (\underline{e}^1, \dots, \underline{e}^m)$ k bázi $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ $\underline{e}^i(\vec{e}_j) = \delta^i_j$ tvoří souřadnicové funkcionaly

$B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m) \rightarrow \tilde{B} = (\tilde{\vec{e}}_1, \dots, \tilde{\vec{e}}_m)$ kde $\tilde{\vec{e}}_j = \vec{e}_i S_j^i$ $S = (S_j^i) \in GL(m, \mathbb{R})$ matice přechodu od B k \tilde{B}

\tilde{E}^* duální vektorový prostor k vek. pr. \tilde{E} je mn. všech lineárních zobrazení z \tilde{E} do \mathbb{R} (lin. funkcionalů)

duální bázi $B^* = (\underline{e}^1, \dots, \underline{e}^m)$ k bázi $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ $\underline{e}^i(\vec{e}_j) = \delta_j^i$ tvoří souřadnicové funkcionaly

lineární funkcional $\underline{\omega} \in \tilde{E}^*$ $\underline{\omega} = \omega_i \underline{e}^i$ $\underline{\omega}(\vec{e}_j) = \omega_i \underline{e}^i(\vec{e}_j) = \omega_i \delta_j^i = \omega_j$ souřadnice v bázi B^*

$B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m) \rightarrow \tilde{B} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m)$ kde $\tilde{e}_j = \vec{e}_i S_j^i$ $S = (S_j^i) \in GL(m, \mathbb{R})$ matice přechodu od B k \tilde{B}

\tilde{E}^* duální vektorový prostor k vek. pr. \tilde{E} je mn. všech lineárních zobrazení z \tilde{E} do \mathbb{R} (lin. funkcionalů)

duální bázi $B^* = (\underline{e}^1, \dots, \underline{e}^m)$ k bázi $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ $\underline{e}^i(\vec{e}_j) = \delta_j^i$ tvoří souřadnicové funkcionaly

lineární funkcional $\underline{\omega} \in \tilde{E}^*$ $\underline{\omega} = \omega_i \underline{e}^i$ $\underline{\omega}(\tilde{e}_j) = \omega_i \underline{e}^i(\tilde{e}_j) = \omega_i \delta_j^i = \omega_j$ souřadnice v bázi B^*

$$\tilde{\omega}_j = \underline{\omega}(\tilde{e}_j) = \underline{\omega}(\vec{e}_i S_j^i) = \underline{\omega}(\vec{e}_i) S_j^i = \omega_i S_j^i$$

kovektor

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{\omega}_j &= \omega_i S_j^i \\ \tilde{\omega}^T &= \omega^T S \end{aligned}}$$

kovariantní (mění se stejně jako báze)

$B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m) \rightarrow \tilde{B} = (\tilde{\vec{e}}_1, \dots, \tilde{\vec{e}}_m)$ kde $\tilde{\vec{e}}_j = \vec{e}_i S^i_j$ $S = (S^i_j) \in GL(m, \mathbb{R})$ matice přechodu od B k \tilde{B}

tenzory

tenzor 2. řádu $\alpha_i, \beta_j \in \vec{E}^*$ v lib. bázi def. $T_{ij} := \alpha_i \beta_j$ $\tilde{T}_{ij} = \tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_j = \alpha_k S^k_i \beta_l S^l_j = \alpha_k \beta_l S^k_i S^l_j = T_{kl} S^k_i S^l_j$
(kovariantní)

$B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m) \rightarrow \tilde{B} = (\tilde{\vec{e}}_1, \dots, \tilde{\vec{e}}_m)$ kde $\tilde{\vec{e}}_j = \vec{e}_i S^i_j$ $S = (S^i_j) \in GL(m, \mathbb{R})$ matice přechodu od B k \tilde{B}

tenzory

tenzor 2. řádu $\alpha_i, \beta_j \in \vec{E}^*$ v lib. bázi def. $T_{ij} := \alpha_i \beta_j$ $\tilde{T}_{ij} = \tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_j = \alpha_k S^k_i \beta_l S^l_j = \alpha_k \beta_l S^k_i S^l_j = T_{kl} S^k_i S^l_j$
(kovariantní)

maticově $S^k_i T_{kl} S^l_j = S^k_i (T S)_{kj} = ((T S)^T)_{jk} S^k_i = ((T S)^T S)_{ji} = (S^T T S)_{ij}$ $\tilde{T} = S^T T S$

$B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m) \rightarrow \tilde{B} = (\tilde{\vec{e}}_1, \dots, \tilde{\vec{e}}_m)$ kde $\tilde{\vec{e}}_j = \vec{e}_i S^i_j$ $S = (S^i_j) \in GL(m, \mathbb{R})$ matice přechodu od B k \tilde{B}

tenzory

tenzor 2. řádu $\alpha, \beta \in \vec{E}^*$ v lib. bázi def. $T_{ij} := \alpha_i \beta_j$ $\tilde{T}_{ij} = \tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_j = \alpha_k S^k_i \beta_l S^l_j = \alpha_k \beta_l S^k_i S^l_j = T_{kl} S^k_i S^l_j$
(kovariantní)

maticově $S^k_i T_{kl} S^l_j = S^k_i (\mathbb{T} S)_{kj} = ((\mathbb{T} S)^T)_{jk} S^k_i = ((\mathbb{T} S)^T S)_{ji} = (S^T \mathbb{T} S)_{ij}$ $\tilde{\mathbb{T}} = S^T \mathbb{T} S$

tenzor 2. řádu (kontravariantní) $\vec{\mu}, \vec{\nu} \in \vec{E}$ $T^{ij} := \mu^i \nu^j$ $\tilde{T}^{ij} = (S^{-1})^i_k (S^{-1})^j_l T^{kl}$ $\tilde{\mathbb{T}} = S^{-1} \mathbb{T} (S^{-1})^T$

$B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m) \rightarrow \tilde{B} = (\vec{\tilde{e}}_1, \dots, \vec{\tilde{e}}_m)$ kde $\vec{\tilde{e}}_j = \vec{e}_i S^i_j$ $S = (S^i_j) \in GL(m, \mathbb{R})$ matice přechodu od B k \tilde{B}

tenzory

tenzor 2. řádu $\alpha_i, \beta_j \in \vec{E}^*$ v lib. bázi def. $T_{ij} := \alpha_i \beta_j$ $\tilde{T}_{ij} = \tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_j = \alpha_k S^k_i \beta_l S^l_j = \alpha_k \beta_l S^k_i S^l_j = T_{kl} S^k_i S^l_j$
(kovariantní)

$$\text{maticově } S^k_i T_{kl} S^l_j = S^k_i (T S)_{kj} = ((T S)^T)_{jk} S^k_i = ((T S)^T S)_{ji} = (S^T T S)_{ij} \quad \tilde{T} = S^T T S$$

tenzor 2. řádu (kontravariantní) $\vec{\mu}, \vec{\nu} \in \vec{E}$ $T^{ij} := \mu^i \nu^j$ $\tilde{T}^{ij} = (S^{-1})^i_k (S^{-1})^j_l T^{kl}$ $\tilde{T} = S^{-1} T (S^{-1})^T$

Tenzorem typu $\binom{p}{q}$ tj. kontravariantním řádu $p \in \mathbb{N}_0$ a kovariantním řádu $q \in \mathbb{N}_0$ nazýváme veličinu T reprezentovanou (v bázi B) m^{p+q} reálnými čísly $T^{i_1, \dots, i_p}_{j_1, \dots, j_q}$ které se při změně báze $\vec{\tilde{e}}_j = \vec{e}_i S^i_j$ transformují podle vztahu

$$\tilde{T}^{i_1, \dots, i_p}_{j_1, \dots, j_q} = (S^{-1})^{i_1}_{k_1} \dots (S^{-1})^{i_p}_{k_p} T^{k_1, \dots, k_p}_{l_1, \dots, l_q} S^{l_1}_{j_1} \dots S^{l_q}_{j_q}$$

$p+q$ řád tenzoru


Př. tenzor momentu setrvačnosti $I_{jk} = \int_{V'} \rho (x_l'^2 \delta_{jk} - x_j' x_k') dV'$ $L_j = I_{jk} \omega_k$ $T = \frac{1}{2} I_{jk} \omega_j \omega_k$

Př. tenzor momentu setrvačnosti $I_{jk} = \int_{V'} \rho (x'_l{}^2 \delta_{jk} - x'_j x'_k) dV'$ $L_j = I_{jk} \omega_k$ $T = \frac{1}{2} I_{jk} \omega_j \omega_k$

elektrický kvadrupólový moment $Q_{jk} = \int_V (3x_j x_k - \delta_{jk} x_l{}^2) \rho dV$




Př. tenzor momentu setrvačnosti $I_{jk} = \int_{V'} \rho (x_l'^2 \delta_{jk} - x_j' x_k') dV'$ $L_j = I_{jk} \omega_k$ $T = \frac{1}{2} I_{jk} \omega_j \omega_k$

elektrický kvadrupólový moment $Q_{jk} = \int_V (3x_j' x_k' - \delta_{jk} x_l'^2) \rho dV$ 

tenzor mechanického napětí, tenzor elektromagnetického pole $F^{\mu\nu}$, tenzor energie a hybnosti


Př. tenzor momentu setrvačnosti $I_{jk} = \int_{V'} \rho (x'_j{}^2 \delta_{jk} - x'_j x'_k) dV'$ $L_j = I_{jk} \omega_k$ $T = \frac{1}{2} I_{jk} \omega_j \omega_k$

elektrický kvadrupólový moment $Q_{jk} = \int_V (3x_j x_k - \delta_{jk} x_l^2) \rho dV$ 

tenzor mechanického napětí, tenzor elektromagnetického pole $F^{\mu\nu}$, tenzor energie a hybnosti

Pozn. skalár = tenzor nultého řádu vektor = tenzor prvního řádu

Př. tenzor momentu setrvačnosti $I_{jk} = \int_V \rho (x_l'^2 \delta_{jk} - x_j' x_k') dV'$ $L_j = I_{jk} \omega_k$ $T = \frac{1}{2} I_{jk} \omega_j \omega_k$

elektrický kvadrupólový moment $Q_{jk} = \int_V (3x_j' x_k' - \delta_{jk} x_l'^2) \rho dV$ 

tenzor mechanického napětí, tenzor elektromagnetického pole $F^{\mu\nu}$, tenzor energie a hybnosti

Pozn. skalár = tenzor nultého řádu

vektor = tenzor prvního řádu

tenzorová hustota typu $\binom{\uparrow}{q}$ váhy $\lambda \in \mathbb{Z}$

$$\tilde{\tau}_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_q} = (\det S)^\lambda (S^{-1})_{k_1}^{i_1} \dots (S^{-1})_{k_q}^{i_q} \tau_{l_1, \dots, l_q}^{k_1, \dots, k_q} S_{j_1}^{l_1} \dots S_{j_q}^{l_q}$$

Př. tenzor momentu setrvačnosti $I_{jk} = \int_V \rho (x_j^2 \delta_{jk} - x_j x_k) dV$ $L_j = I_{jk} \omega_k$ $T = \frac{1}{2} I_{jk} \omega_j \omega_k$

elektrický kvadrupólový moment $Q_{jk} = \int_V (3x_j x_k - \delta_{jk} x_l^2) \rho dV$



tenzor mechanického napětí, tenzor elektromagnetického pole $F^{\mu\nu}$, tenzor energie a hybnosti

Pozn. skalár = tenzor nultého řádu

vektor = tenzor prvního řádu


tenzorová hustota typu $\binom{p}{q}$ váhy $\lambda \in \mathbb{Z}$

$$\tilde{\tau}_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} = (\det S)^{\lambda} (S^{-1})_{k_1}^{i_1} \dots (S^{-1})_{k_p}^{i_p} \tau_{l_1, \dots, l_q}^{k_1, \dots, k_p} S_{j_1}^{l_1} \dots S_{j_q}^{l_q}$$

Bud' $G \subset GL(m)$ podgrupa, pak tenzor T nazýváme G -invariantní, pokud se jeho složky nemění při změně báze $\tilde{\vec{e}}_j = \vec{e}_i S^i_j \quad \forall S \in G$

Př. $GL(n)$ -invariantní tenzory: skaláry, tenzor typu $\binom{1}{1}$ $T^i_j := \delta^i_j$

Př. tenzor momentu setrvačnosti $I_{jk} = \int_V \rho (x_j^2 \delta_{jk} - x_j x_k) dV$ $L_j = I_{jk} \omega_k$ $T = \frac{1}{2} I_{jk} \omega_j \omega_k$

elektrický kvadrupólový moment $Q_{jk} = \int_V (3x_j x_k - \delta_{jk} x_l^2) \rho dV$ 

tenzor mechanického napětí, tenzor elektromagnetického pole $F^{\mu\nu}$, tenzor energie a hybnosti

Pozn. skalár = tenzor nultého řádu

vektor = tenzor prvního řádu

tenzorová hustota typu $\binom{1}{q}$ váhy $\lambda \in \mathbb{Z}$ $\tilde{\tau}_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_q} = (\det S)^\lambda (S^{-1})_{k_1}^{i_1} \dots (S^{-1})_{k_q}^{i_q} \tau_{l_1, \dots, l_q}^{k_1, \dots, k_q} S_{j_1}^{l_1} \dots S_{j_q}^{l_q}$

Bud' $G \subset GL(m)$ podgrupa, pak tenzor T nazýváme G -invariantní, pokud se jeho složky nemění při změně báze $\tilde{\vec{e}}_j = \vec{e}_i S_j^i \quad \forall S \in G$

Př. $GL(n)$ -invariantní tenzory: skaláry, tenzor typu $\binom{1}{1}$ $T_j^i := \delta_j^i$

Pozn. Grupa transformací vůči kterým se charakterizují veličiny závisí na teorii mechanika – ortogonální transformace $O(3)$

STR – Lorentzovy transformace $O(1,3)$

OTR – obecné lineární transformace $GL(4)$

Skalární pole je zobrazení $U: E \rightarrow \mathbb{R}$, $U = U(\mathbf{a})$ v souřadnicích $U: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $U = U(\vec{x}(\mathbf{a}))$

$$\tilde{U}(\vec{x}(\mathbf{a})) = U(\vec{x}(\mathbf{a})) \quad \tilde{U}(\vec{x}) = U(\vec{x}) = U(\mathcal{S}(\vec{x} - \vec{x}(\mathbf{a})))$$

Skalární pole je zobrazení $U: E \rightarrow \mathbb{R}$, $U = U(\mathbf{a})$ v souřadnicích $U: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $U = U(\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{a}))$

$$\tilde{U}(\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{a})) = U(\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{a})) \quad \tilde{U}(\vec{\mathbf{x}}) = U(\vec{\mathbf{x}}) = U(\mathcal{S}(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}(\sigma)))$$

Vektorové pole (kontravariantní) je zobrazení $\vec{F}: E \rightarrow \vec{E}$, $\vec{F} = \vec{F}(\mathbf{a})$ v souřadnicích $\vec{F}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{a}))$

$$\tilde{F}^i(\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{a})) = (\mathcal{S}^{-1})^i_j F^j(\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{a})) \quad \tilde{\vec{F}}(\vec{\mathbf{x}}) = \mathcal{S}^{-1} \vec{F}(\vec{\mathbf{x}}) = \mathcal{S}^{-1} \vec{F}(\mathcal{S}(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}(\sigma)))$$

Skalární pole je zobrazení $U: E \rightarrow \mathbb{R}$, $U = U(\mathbf{a})$ v souřadnicích $U: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $U = U(\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{a}))$

$$\tilde{U}(\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{a})) = U(\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{a})) \quad \tilde{U}(\vec{\mathbf{x}}) = U(\vec{\mathbf{x}}) = U(\mathcal{S}(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}(\sigma)))$$

Vektorové pole (kontravariantní) je zobrazení $\vec{F}: E \rightarrow \vec{E}$, $\vec{F} = \vec{F}(\mathbf{a})$ v souřadnicích $\vec{F}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{a}))$

$$\tilde{F}^i(\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{a})) = (S^{-1})^i_j F^j(\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{a})) \quad \tilde{\vec{F}}(\vec{\mathbf{x}}) = \mathcal{S}^{-1} \vec{F}(\vec{\mathbf{x}}) = \mathcal{S}^{-1} \vec{F}(\mathcal{S}(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}(\sigma)))$$

Euklidovský afinní prostor – afinní prostor se skalárním součinem na \vec{E} tj. s bilineárním zobrazením $g: \vec{E} \times \vec{E} \rightarrow \mathbb{R}$ které je symetrické $g(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) = g(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}}) \quad \forall \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in \vec{E}$ a pozitivně definitní $g(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}}) > 0 \quad \forall \vec{\mathbf{v}} \neq \vec{0}$

Skalární pole je zobrazení $U: E \rightarrow \mathbb{R}$, $U=U(\mathbf{a})$ v souřadnicích $U: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $U=U(\vec{x}(\mathbf{a}))$

$$\tilde{U}(\vec{x}(\mathbf{a})) = U(\vec{x}(\mathbf{a})) \quad \tilde{U}(\vec{x}) = U(\vec{x}) = U(S(\vec{x} - \vec{x}(\sigma)))$$

Vektorové pole (kontravariantní) je zobrazení $\vec{F}: E \rightarrow \vec{E}$, $\vec{F}=\vec{F}(\mathbf{a})$ v souřadnicích $\vec{F}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{F}=\vec{F}(\vec{x}(\mathbf{a}))$

$$\vec{F}^i(\vec{x}(\mathbf{a})) = (S^{-1})^i_j F^j(\vec{x}(\mathbf{a})) \quad \vec{F}(\vec{x}) = S^{-1} \vec{F}(\vec{x}) = S^{-1} \vec{F}(S(\vec{x} - \vec{x}(\sigma)))$$

Euklidovský afinní prostor – afinní prostor se skalárním součinem na \vec{E} tj. s bilineárním zobrazením $g: \vec{E} \times \vec{E} \rightarrow \mathbb{R}$ které je symetrické $g(\vec{u}, \vec{v}) = g(\vec{v}, \vec{u}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$ a pozitivně definitní $g(\vec{v}, \vec{v}) > 0 \quad \forall \vec{v} \neq \vec{0}$

Skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v} = g(\vec{u}, \vec{v}) = g(\mu^i \vec{e}_i, \nu^j \vec{e}_j) = \mu^i \nu^j g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \mu^i g_{ij} \nu^j = \vec{\mu}^T g \vec{\nu} = (\mu^1, \dots, \mu^m) \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1} & \dots & g_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu^1 \\ \vdots \\ \nu^m \end{pmatrix}$
v bázi B

Gramova matice $g = (g_{ij})$ tenzor typu $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tzv. metrický tenzor, v ON bázi $g_{ij} = \delta_{ij}$, $g = 1$

Skalární pole je zobrazení $U: E \rightarrow \mathbb{R}$, $U = U(\mathbf{a})$ v souřadnicích $U: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $U = U(\vec{x}(\mathbf{a}))$

$$\tilde{U}(\vec{x}(\mathbf{a})) = U(\vec{x}(\mathbf{a})) \quad \tilde{U}(\vec{x}) = U(\vec{x}) = U(S(\vec{x} - \vec{x}(\sigma)))$$

Vektorové pole (kontravariantní) je zobrazení $\vec{F}: E \rightarrow \vec{E}$, $\vec{F} = \vec{F}(\mathbf{a})$ v souřadnicích $\vec{F}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}(\mathbf{a}))$

$$\vec{F}^i(\vec{x}(\mathbf{a})) = (S^{-1})^i_j F^j(\vec{x}(\mathbf{a})) \quad \vec{F}(\vec{x}) = S^{-1} \vec{F}(\vec{x}) = S^{-1} \vec{F}(S(\vec{x} - \vec{x}(\sigma)))$$

Euklidovský afinní prostor – afinní prostor se skalárním součinem na \vec{E} tj. s bilineárním zobrazením $g: \vec{E} \times \vec{E} \rightarrow \mathbb{R}$ které je symetrické $g(\vec{u}, \vec{v}) = g(\vec{v}, \vec{u}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$ a pozitivně definitní $g(\vec{v}, \vec{v}) > 0 \quad \forall \vec{v} \neq \vec{0}$

Skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v} = g(\vec{u}, \vec{v}) = g(\mu^i \vec{e}_i, \nu^j \vec{e}_j) = \mu^i \nu^j g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \mu^i g_{ij} \nu^j = \vec{\mu}^T g \vec{\nu} = (\mu^1, \dots, \mu^m) \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1} & \dots & g_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu^1 \\ \vdots \\ \nu^m \end{pmatrix}$
v bázi B

Gramova matice $g = (g_{ij})$ tenzor typu $\binom{0}{2}$ tzv. metrický tenzor, v ON bázi $g_{ij} = \delta_{ij}$, $g = \mathbb{1}$

Soustava souřadnic $\langle \sigma, (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m) \rangle$ se nazývá kartézská, je-li báze $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ ortonormální.

ortogonální transformace (přechody mezi ortonormálními bázemi) $\tilde{\mathbf{e}}_j = \mathbf{e}_i S_j^i$

pasivně – ponechávají invariantní metrický tenzor (nemění vzorec pro výpočet skalárního součinu)

$$\delta_{ij} = \tilde{g}_{ij} = g_{kl} S_i^k S_j^l = \delta_{kl} S_i^k S_j^l = S_i^k S_j^k$$

ortogonální transformace (přechody mezi ortonormálními bázemi) $\tilde{\vec{e}}_j = \vec{e}_i S_j^i$

pasivně – ponechávají invariantní metrický tenzor (nemění vzorec pro výpočet skalárního součinu)

$$\delta_{ij} = \tilde{g}_{ij} = g_{kl} S_i^k S_j^l = \delta_{kl} S_i^k S_j^l = S_i^k S_j^k$$

aktivně – zachovávají délky a úhly (nemění výsledek skalárního součinu) $g(S\vec{u}, S\vec{v}) = g(\vec{u}, \vec{v})$

$$(S\vec{u})^T g_f (S\vec{v}) = \vec{u}^T S^T g_f S \vec{v} = \vec{u}^T g_f \vec{v} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \quad S^T g_f S = g_f \quad \text{v ON. bázi} \quad g_f = \mathbb{1} \quad S^T S = \mathbb{1} \quad S^{-1} = S^T$$

ortogonální transformace (přechody mezi ortonormálními bázemi) $\vec{\tilde{e}}_j = \vec{e}_i S_j^i$

pasivně – ponechávají invariantní metrický tenzor (nemění vzorec pro výpočet skalárního součinu)

$$\delta_{ij} = \tilde{g}_{ij} = g_{kl} S_i^k S_j^l = \delta_{kl} S_i^k S_j^l = S_i^k S_j^k$$

aktivně – zachovávají délky a úhly (nemění výsledek skalárního součinu) $g(S\vec{\mu}, S\vec{\nu}) = g(\vec{\mu}, \vec{\nu})$

$$(S\vec{\mu})^T g (S\vec{\nu}) = \vec{\mu}^T S^T g S \vec{\nu} = \vec{\mu}^T g \vec{\nu} \quad \forall \vec{\mu}, \vec{\nu} \quad S^T g S = g \quad \text{v ON. bázi} \quad g = \mathbb{1} \quad S^T S = \mathbb{1} \quad S^{-1} = S^T$$

ortogonální transformace $S \in O(m) = \{A \in \mathbb{R}^{m \times m} \mid A^T A = A A^T = \mathbb{1}\}$ ortogonální grupa

kovariantní $\vec{\tilde{\omega}}_j = \omega_i S_j^i \quad \vec{\tilde{\omega}}^T = \vec{\omega} S \quad \vec{\tilde{\omega}} = S^T \vec{\omega}$

kontravariantní $\vec{\tilde{\nu}}^i = (S^{-1})^i_j \nu^j \quad \vec{\tilde{\nu}} = S^{-1} \vec{\nu} \quad \vec{\tilde{\nu}} = S^T \vec{\nu}$

jsou při OG. transformacích v mechanice stejné proto od teď indexy budou jen dole

Orientace vektorového prostoru je zobrazení $\omega: \{B \mid B \text{ báze } \mathbb{E}\} \rightarrow \{+1, -1\}$ takové, že $\forall B, \tilde{B}$ báze \mathbb{E}
platí $\det S > 0 \Rightarrow \omega(B) = \omega(\tilde{B})$ souhlasně orientované báze
 $\det S < 0 \Rightarrow \omega(B) = -\omega(\tilde{B})$ opačně orientované báze

Báze B je kladně orientovaná pokud $\omega(B) = +1$

Př. $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha} \times \tilde{\beta} \neq 0)$ je kladně orientovaná báze

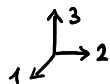

Orientace vektorového prostoru je zobrazení $\omega: \{B \mid B \text{ báze } \mathbb{E}\} \rightarrow \{+1, -1\}$ takové, že $\forall B, \tilde{B}$ báze \mathbb{E} platí $\det S > 0 \Rightarrow \omega(B) = \omega(\tilde{B})$ souhlasně orientované báze

$\det S < 0 \Rightarrow \omega(B) = -\omega(\tilde{B})$ opačně orientované báze

Báze B je kladně orientovaná pokud $\omega(B) = +1$

Př. $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha} \times \tilde{\beta} \neq 0)$ je kladně orientovaná báze

Pozn. Fyzikální prostor není orientovaný, orientaci v něm volíme výběrem pravidla pravé (levé) ruky.

 Pravotočivá  Levotočivá

V mechanice je orientace fixována volbou báze tak, že ta je vždy kladně orientovaná.



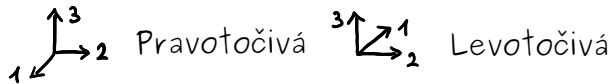
Orientace vektorového prostoru je zobrazení $\omega: \{B \mid B \text{ báze } \mathbb{E}\} \rightarrow \{+1, -1\}$ takové, že $\forall B, \tilde{B}$ báze \mathbb{E} platí $\det S > 0 \Rightarrow \omega(B) = \omega(\tilde{B})$ souhlasně orientované báze

$\det S < 0 \Rightarrow \omega(B) = -\omega(\tilde{B})$ opačně orientované báze

Báze B je kladně orientovaná pokud $\omega(B) = +1$

Př. $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha} \times \tilde{\beta} \neq 0)$ je kladně orientovaná báze

Pozn. Fyzikální prostor není orientovaný, orientaci v něm volíme výběrem pravidla pravé (levé) ruky.



V mechanice je orientace fixována volbou báze tak, že ta je vždy kladně orientovaná.



Pseudotenzory – veličiny jejichž definice závisí na orientaci tak, že při změně orientace mění znaménko.

Např. magnetická indukce $\vec{B}_{-\omega} = -\vec{B}_{\omega}$ nebo moment hybnosti, moment síly, úhlová rychlost, ...

Vztažná soustava = vztažné těleso (tuhé) + hodiny + kartézská soustava souřadnic (spojená s v. tělesem)

– reprezentujeme ji soustavou kartézských souřadnic $\langle \sigma(\lambda), (\tilde{x}_1(\lambda), \dots, \tilde{x}_n(\lambda)) \rangle$

počátek σ lze volit kdekoliv (homogenita pr.), $\sigma = \sigma(\lambda)$ translace
osy (bázi) lze natočit jakkoliv (izotropie pr.), $B = B(\lambda)$ rotace

$B(\lambda)$ pravotočivá ON. báze

vůči Newtonově absolutnímu pr.

Vztažná soustava = vztažné těleso (tuhé) + hodiny + kartézská soustava souřadnic (spojená s v. tělesem)

– reprezentujeme ji soustavou kartézských souřadnic $\langle \sigma(\lambda), (\tilde{x}_1(\lambda), \dots, \tilde{x}_n(\lambda)) \rangle$

počátek σ lze volit kdekoliv (homogenita pr.), $\sigma = \sigma(\lambda)$ translace
osy (bázi) lze natočit jakkoliv (izotropie pr.), $B = B(\lambda)$ rotace

$B(\lambda)$ pravotočivá ON. báze

vůči Newtonově absolutnímu pr.

Transformace souřadnic mezi pravotočivými kartézskými vztažnými soustavami

$$\tilde{\vec{x}} = S^T(\lambda) (\vec{x} - \vec{x}(\tilde{\sigma}(\lambda)))$$

$$\tilde{x}_i = S_{ji}(\lambda) (x_j - x_j(\tilde{\sigma}(\lambda)))$$

$$S(\lambda) \in SO(3)$$

Vztažná soustava = vztažné těleso (tuhé) + hodiny + kartézská soustava souřadnic (spojená s v. tělesem)

– reprezentujeme ji soustavou kartézských souřadnic $\langle \sigma(\lambda), (\tilde{x}_1(\lambda), \dots, \tilde{x}_n(\lambda)) \rangle$

počátek σ lze volit kdekoliv (homogenita pr.), $\sigma = \sigma(\lambda)$ translace
osy (bázi) lze natočit jakkoliv (izotropie pr.), $B = B(\lambda)$ rotace

$B(\lambda)$ pravotočivá ON. báze

vůči Newtonově absolutnímu pr.

Transformace souřadnic mezi pravotočivými kartézskými vztažnými soustavami

$$\tilde{\vec{x}} = S^T(\lambda) (\vec{x} - \vec{x}(\tilde{\sigma}(\lambda))) \quad \tilde{x}_i = S_{ji}(\lambda) (x_j - x_j(\tilde{\sigma}(\lambda))) \quad S(\lambda) \in SO(3)$$

Pozn. Rychlost vůči Newtonově absolutnímu pr. $\vec{v}(\lambda) = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{b(\lambda + \Delta\lambda) - b(\lambda)}{\Delta\lambda}$ neumíme měřit, proto zavedeme

Vztažná soustava = vztažné těleso (tuhé) + hodiny + kartézská soustava souřadnic (spojená s v. tělesem)

– reprezentujeme ji soustavou kartézských souřadnic $\langle \sigma(\lambda), (\tilde{x}_1(\lambda), \dots, \tilde{x}_n(\lambda)) \rangle$

počátek σ lze volit kdekoliv (homogenita pr.), $\sigma = \sigma(\lambda)$ translace
osy (bázi) lze natočit jakkoliv (izotropie pr.), $B = B(\lambda)$ rotace
 $B(\lambda)$ pravotočivá ON. báze
vůči Newtonově absolutnímu pr.

Transformace souřadnic mezi pravotočivými kartézskými vztažnými soustavami

$$\vec{x} = S^T(\lambda) (\vec{x} - \vec{x}(\tilde{\sigma}(\lambda))) \quad \tilde{x}_i = S_{ji}(\lambda) (x_j - x_j(\tilde{\sigma}(\lambda))) \quad S(\lambda) \in SO(3)$$

Pozn. Rychlost vůči Newtonově absolutnímu pr. $\vec{v}(\mathbf{l}) = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathbf{l}(\lambda + \Delta\lambda) - \mathbf{l}(\lambda)}{\Delta\lambda}$ neumíme měřit, proto zavedeme

Relativní veličiny – definované vůči vztažné soustavě – mohou se transformovat složitěji

Polohový vektor $\vec{x}(\mathbf{l}) \quad x_i(\mathbf{l}) = (\mathbf{l} - \sigma) \cdot \tilde{e}_i$

Vektor rychlosti $\vec{v}(\mathbf{l}) = \dot{\vec{x}}(\mathbf{l}) = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(\mathbf{l}(\lambda + \Delta\lambda)) - \vec{x}(\mathbf{l}(\lambda))}{\Delta\lambda} \quad v_i = \dot{x}_i$

Vektor zrychlení $\vec{a}(\mathbf{l}) = \dot{\vec{v}}(\mathbf{l}) = \ddot{\vec{x}}(\mathbf{l})$