Pozor toto jen první verze, v průběhu semestru může docházet ke změnám. Na příklady tak budou jednoznažně odkazovat čísla ŠT x.y

Cvičení 1 **[ŠT UD 2.3, Poincaréův model Lobačevského geometrie]** *Po jaké dráze mezi dvěma body ve svislé rovině xy se pohybuje včela, která se snaží dosáhnout cíle za nejkratší možnou dobu? Předpokládejte, že její rychlost je úměrná výšce,* $v = ky,\ k > 0,\ y > 0,\ x_1 \neq x_2$.

Cvičení 2 **[ŠT 6.10, JŠT 62, Řetězovka]** *Určete polohu těžkého homogenního vlákna pod vlivem tíže. Návod: Mezi všemi rovinnými křivkami délky* $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}dx = l$ *jejichž konce leží v daných bodech* $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$*, najděte ty, jejichž svislá souřadnice těžiště* $y_{CM} = \frac{1}{M}\int y dm = \frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}dx$ *je minimální.*

Cvičení 3 **[ŠT UD 2.2, JŠT 60, Úloha o brachistochroně]** *Nejděte rovinnou křivku spojující dva body* A, B *ve svislé rovině, tak aby hmotný bod vypuštěný s nulovou počáteční rychlostí z bodu* A *a pohybující se po této křivce vlivem tíže, dosáhl bodu* B *za nejkratší dobu.*

Cvičení 4 **[ŠT 5.1]** *Odvoďte Hamiltonovy rovnice přímo výpočtem derivací* $\frac{\partial H}{\partial q_j}, \frac{\partial H}{\partial p_j}$.

Cvičení 5 **[ŠT 5.3]** *Sestavte Hamiltonovy rovnice pro pohyb volného hmotného bodu v poli konzervativních sil (v kartézských souřadnicích) a ukažte, že získané rovnice jsou ekvivalentní s rovnicemi Newtonovými.*

Cvičení 6 **[ŠT 5.4]** *Napište Hamiltonovu funkci harmonického oscilátoru.*

Cvičení 7 **[ŠT 5.7, JŠT 5.3]** *Napište Hamiltonovu funkci a sestavte Hamiltonovy rovnice částice s nábojem* e *a hmotností* m *v daném vnějším elektromagnetickém poli s potenciály* $\varphi(\vec{r}, t), \vec{A}(\vec{r}, t)$.

Cvičení 8 **[ŠT 5.2, JŠT 5.1]** *Napište Hamiltonovu funkci volného hmotného bodu v kartézských, sférických a cylindrických souřadnicích*

Cvičení 9 **[ŠT 5.5]** *Sestavte Hamiltonovy rovnice pro pohyb volného hmotného bodu pod vlivem centrální síly s potenciálem* $U(r)$ *ve sférických souřadnicích. Určete integrály pohybu.*

Cvičení 10 **[ŠT 5.6, JŠT 5.2]** *Hmotný bod* m *je vázán na válcovou plochu* $x^2 + y^2 = R^2$ *a pohybuje se po ní pod vlivem centrální elastické síly* $\vec{F} = -k\vec{r}$*. Najděte Hamiltonovu funkci, sestavte Hamiltonovy rovnice a řešte je (v cylindrických souřadnicích).*

Cvičení 11 **[ŠT 5.12]** *Spočtěte* $\{e^{\alpha q}, e^{\beta p}\}$.

Cvičení 12 **[Fundamentální Poissonovy závorky]** *Spočtěte* $\{q_i, q_j\}$, $\{p_i, p_j\}$, $\{q_i, p_j\}$.

Cvičení 13 **[ŠT 5.13, JŠT 5.8]** *Spočtěte Poissonovy závorky pro složky hybností* p_j *a momentů hybností* $L_i = \varepsilon_{ijk}x_j p_k$ *částice tj.* $\{L_i, p_j\}$ *a* $\{L_i, L_j\}$*. Budou stejné vztahy platit i pro celkovou hybnost a celkový moment hybnosti soustavy částic?*

Cvičení 14 **[ŠT 5.15]** *Dokažte, že jsou–li* L_1, L_2 *integrály pohybu, pak i* L_3 *je integrálem pohybu.*

Cvičení 15 **[ŠT U 5.3]** *Dokažte Poissonovu větu: Poissonova závorka dvou integrálů pohybu je opět integrálem pohybu.*

Cvičení 16 [**ŠT 5.17, JŠT 5.10**] *Pomocí Poissonovy věty odvoďte další první integrál Hamiltonových pohybových rovnic (tj. integrál pohybu) v případě hmotného bodu pod vlivem centrální síly v otáčející se soustavě, znáte–li první integrály:* $u = \sum_{i=1}^{3} \frac{p_i^2}{2m} - \Omega \cdot (x_1 p_2 - x_2 p_1) + U(r)$, $v = \sum_{i=1}^{3} \frac{p_i^2}{2m} + U(r)$.

Cvičení 17 [**ŠT 5.14**] *Ukažte, že* $\{L_3, F\} = 0$, *kde* $F = F(\vec{q} \cdot \vec{p})$ *je libovolná (dostatečně hladká) skalární funkce souřadnic a hybností částice.*

Cvičení 18 [**ŠT 5.16, JŠT 5.9**] *Ověřte, že složky momentu hybnosti* $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ *a Runge–Lenzova vektoru* $\vec{A} = \frac{1}{m}\vec{p} \times \vec{L} + \alpha\frac{\vec{r}}{r}$ *splňují vztahy:* $\{L_i, A_j\} = \varepsilon_{ijk} A_k$, $\{A_i, A_j\} = -2H \varepsilon_{ijk} L_k$, *kde* $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}$, $\alpha > 0$.

Cvičení 19 [**ŠT U 5.4**] *Najděte kanonické transformace určené vytvořujícími funkcemi a)* $F_2 = \sum_k q_k P_k$, *b)* $F_2 = \sum_k f_k(\vec{q}, t) P_k$, *c)* $F_1 = \sum_k q_k Q_k$.

Cvičení 20 [**ŠT 5.19**] *Ukažte, že transformace* $Q_j = p_j$, $P_j = -q_j$ *je kanonická.*

Cvičení 21 [**ŠT 5.20**] *Ukažte, že kanonická transformace* $(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) \longrightarrow (R, \varphi, z, P_R, P_\varphi, P_z)$ *definovaná vytvořující funkcí* $F_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} P_R + \mathrm{arctg}(\frac{x_2}{x_1}) P_\varphi + x_3 P_z$ *převádí souřadnice kartézské na cylindrické.*

Cvičení 22 [**ŠT 5.21**] *Ukažte, že transformace* $Q = \mathrm{arctg}(\sqrt{km}\frac{q}{p})$, $P = \frac{1}{2}(\sqrt{km} q^2 + \frac{p^2}{\sqrt{km}})$ *je kanonická. Užijte tuto transformaci k řešení pohybových rovnic harmonického oscilátoru* $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$. *Jaký fyzikální význam mají nové proměnné* Q *a* P*?*

Cvičení 23 [**ŠT 5.24**] *Uvažujte transformaci* $(q, p) \longrightarrow (Q, P)$ $Q = q^\alpha \cos(\beta p)$, $P = q^\alpha \sin(\beta p)$. *Pro která* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *je tato transformace kanonická. Najděte příslušnou vytvořující funkci.*

Cvičení 24 [**ŠT U5.8**] *Řešte Hamilton–Jacobiho rovnici pro bezsilový volný hmotný bod popsaný Hamiltonovnou funkcí* $H = \sum_{i=1}^{3} \frac{p_i^2}{2m}$. *Ukažte, že Hamilton–Jacobiho rovnice pro vytvořující funkce typu* F_1 *resp.* F_2 *mají úplné integrály tvarů* $S_1(q_i, t, Q_i) = \frac{m}{2t} \sum_{i=1}^{3} (q_i - Q_i)^2$ *a* $S_2(q_i, t, P_i) = -\sum_{i=1}^{3} \frac{P_i^2}{2m} t + \sum_{i=1}^{3} P_i q_i$.

Cvičení 25 [**ŠT 5.41**] *Zkonstruujte hlavní funkci Hamiltonovu* $S_1(q_i, t, Q_i) = \frac{m}{2t} \sum_{i=1}^{3} (q_i - Q_i)^2$ *integrací Lagrangeovy funkce* $L = \sum_{i=1}^{3} \frac{\dot{q}_i^2}{2m}$ *od* 0 *do* t *po skutečné trajektorii bezsilového hmotného bodu* $q_i = Q_i + v_i t$.

Cvičení 26 [**ŠT 5.41**] *Najděte kanonické transformace určené vytvořujícími funkcemi* $S_1(q_i, t, Q_i) = \frac{m}{2t} \sum_{i=1}^{3} (q_i - Q_i)^2$ *a* $S_2(q_i, t, P_i) = -\sum_{i=1}^{3} \frac{P_i^2}{2m} t + \sum_{i=1}^{3} P_i q_i$. *Jaký geometrický tvar mají příslušné vlnoplochy* $S = konst$ *v konfiguračním prostoru?*

Cvičení 27 [**ŠT 5.38**] *Napište a řešte Hamilton–Jacobiho rovnici pro lineární harmonický oscilátor* $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$.

Cvičení 28 [**ŠT 5.43, JŠT 5.22**] *Ukažte, že funkce* $S(q, t, Q) = m\omega \frac{(q^2 + Q^2)\cos(\omega t) - 2qQ}{2\sin(\omega t)}$ *je při* $0 < t < \pi$ *úplným integrálem Hamilton–Jacobiho rovnice pro harmonický oscilátor* ($\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$).

Cvičení 29 [**Generátor transformace**] *Ukažte, že veličina* $L_3 = q_1 p_2 - q_2 p_1$ *je generátorem rotace.*

Cvičení 30 **[JŠT 5.19]** *Na fázovém prostoru soustavy N částic $\alpha = 1, 2, \dots, N$ se souřadnicemi $q_{\alpha i}$ a hybnostmi $p_{\alpha i}$, kde $i = 1, 2, 3$ je dána funkce tvaru $G(q_{\alpha i}, p_{\alpha i}, t) = \sum_\alpha m_\alpha q_{\alpha 1} - \sum_\alpha p_{\alpha 1} t$ jakožto generátor infinitesimální transformace. Ukažte, že tato funkce generuje speciální Galileiho transformaci (podél 1. osy). Návod: použijte $\varepsilon = V$.*

Cvičení 31 **[ŠT U5.9 Nezávislé integrály pohybu]** *Uvažujte soustavu o s stupních volnosti, jejímž fázovým prostorem je $\mathbb{R}^{2s}$ (nebo jeho otevřená podmnožina) a jejíž Hamiltonova funkce nezávisí explicitně na čase. Ukažte, že taková soustava může mít nanejvýš $2s - 1$ integrálů pohybu, které nezávisí explicitně na čase.*

Cvičení 32 **[U5.11 Integrabilní soustavy]** *Definice integrabilní soustavy. Liovilleova věta*

Cvičení 33 **[ŠT 5.53]** *Todova Molekula. Ukažte, že lineární tříatomová molekula s Hamiltoniánem $H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + e^{q_1 - q_2} + e^{q_2 - q_3} + e^{q_3 - q_1}$ je integrabilní soustava. Návod: zkoumejte první integrály H, $P = p_1 + p_2 + p_3$, $K = \frac{1}{9}(p_1 + p_2 - 2p_3)(p_2 + p_3 - 2p_1)(p_3 + p_1 - 2p_2) + (p_1 + p_2 - 2p_3)e^{q_1 - q_2} + (p_2 + p_3 - 2p_1)e^{q_2 - q_3} + (p_3 + p_1 - 2p_2)e^{q_3 - q_1}$.*

Cvičení 34 **[ŠT 5.55]** **Najděte proměnné akce–úhel pro LHO $H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$.*

Cvičení 35 **[ŠT 7.3, JŠT 6.3]** *Odvoďte relativistický zákon skládá rovnoběžných rychlostí složením dvou speciálních Lorentzových transformací. Jsou speciální Lorentzovy transformace podél osy x záměnné – záleží na jejich pořadí?*

Cvičení 36 **[ŠT 7.2]** *Přesvědčte se, že Lorentzovy transformace je možno zapsat v kompaktní vektorové podobě $\vec{r}\,' = \vec{r} + (\frac{\gamma - 1}{V^2}\vec{V} \cdot \vec{r} - \gamma t)\vec{V}$, $t' = \gamma(t - \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}}{c^2})$. Návod: rozložte vektor $\vec{r}$ na dvě složky rovnoběžnou k $\vec{V}$ a kolmou k $\vec{V}$. Složky se pak transformují obdobně jako souřadnice x resp. y.*

Cvičení 37 **[ŠT 7.1]** *Najděte matici boostu (speciální Lorentzovy transformace) v libovolném směru.*

Cvičení 38 **[ŠT 7.4]** *Odvoďte relativistický zákon skládání rychlostí pro libovolnou vzájemnou orientaci obou rychlostí. Jak se zjednodušší pro $V << c$. Jaká bude velikost výsledné rychlosti?*

Cvičení 39 **[ŠT 7.5]** *Rerlativní rychlost dvou částic je definována jako rychlost jedné z nich v soustavě, v níž je druhá částice v klidu. Určete kvadrát v_{rel}^2, jestliže v některé inerciální soustavě mají částice rychlosti $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$.*

Cvičení 40 **[Relativita současnosti a soumístnosti]** *Uvažujte dvě inerciální soustavy S a S' spojené speciální Lorentzovou transformací. Určete rychlost V soustavy S' vůči soustavě S tak aby*
a) událost o souřadnicích $(ct, x, 0, 0)$ splňujících $(ct)^2 - x^2 = \Delta s^2 < 0$ v soustavě S byla v soustavě S' současná s událostí o souřadnicích $(0, 0, 0, 0)$
b) událost o souřadnicích $(ct, x, 0, 0)$ splňujících $(ct)^2 - x^2 = \Delta s^2 > 0$ v soustavě S byla v soustavě S' soumístná s událostí o souřadnicích $(0, 0, 0, 0)$.

Cvičení 41 **[ŠT 7.9]** *V horní vrstvě atmosféry vznikl mion pohybující se rychlostí $v = 0,99c$. Do svého rozpadu stihl urazit vzdálenost $l = 5km$ (v soustavě spojené se Zemí – SZ). a) Jakou dobu života mionu pozorujeme v soustavě SZ? b) Jakou dobu žvota měl mion ve své klidové soustavě? c) Jak silná vrstva atmosféry prošla kolem mionu v jeho klidové soustavě?*

Cvičení 42 **[ŠT 7.15]** *Fizeaův pokus (1859). Fizeau měřil pomocí interferometru rychlost světla v v kapalinách tekoucích (rychlostí $\pm V$) po i proti směru šíření světla a zjistil závislost $v = \frac{c}{n} \pm V(1 - \frac{1}{n^2})$, kde n je index lomu kapaliny. Odvoďte tento empirický vztah pomocí zákona skládání rychlostí. Návod: použijte Taylorův rozvoj do prvního řádu ve $\frac{V}{c}$.*

Cvičení 43 [**ŠT 7.17**] *Rychlost $\vec{v}$ (v soustavě S) leží v rovně xy a s osou x svírá úhel Θ, obdobně je definovaný úhel Θ' pro rychlost $\vec{v}'$ v soustave S'. Odvoďte vztah mezi Θ a Θ' př speciální Lorentzově transformaci S$\longrightarrow$S'. Určete* $\tan\Theta'$ *pomocí* Θ.

Cvičení 44 [**ŠT 7.18**] *Specializujte vztah získaný v předchozím příkladu pro případ $v = v' = c$. Dopočtěte* $\sin\Theta', \cos\Theta'$ *jako funkce Θ. A za předpokladu malé (oproti c) vzájemné rychlosti soustav vypočtěte $\Delta\Theta = \Theta' - \Theta$.*

Cvičení 45 [**ŠT 7.19 Aberace světla stálic**] *Hvězdy opisují během roku na obloze malé elipsy, kružnice nebo úsečky o úhlovém rozměru asi $41''$. Vysvětlete tento jev pohybem Země kolem Slunce rychlostí $V = 30km/s$.*

Cvičení 46 [**ŠT 7.20**] *Dopplerův jev. Inerciální soustavy S a S' jsou svázány speciální Lorentzovou transformací podél osy x. Soustava S je spojena s pozorovatelem, S' je klidovou soustavou zdroje monochromatické světelné vlny ve vakuu s úhlovou frekvencí $\omega' = \omega_0$. Předpokládejte, že vlna je rovinná a šíří se v soustavě S' ve směru $\vec{n}' = (\cos\Theta', \sin\Theta', 0)$ a v soustavě S ve směru $\vec{n} = (\cos\Theta, \sin\Theta, 0)$. Jakou frekvenci ω bude registrovat pozorovatel? Specializujte výsledek pro podélný ($\Theta = 0$) a příčný ($\Theta = \frac{\pi}{2}$) Dopplerův jev. Návod: fáze vlny je v obou soustavách stejná.*

Cvičení 47 [**ŠT 7.27**] *Mezon π^0 s klidovou hmotností m_0 pohybující se rychlostí v se rozpadá na dvě stejná kvanta záření gama (fotony). Určete úhel φ který budou svírat směry pohybu fotonů.*

Cvičení 48 [**ŠT 7.28**] *Ukažte, že v nepřítomnosti vnějšího pole se foton nemůže změnit v pár elektron – pozitron.*

Cvičení 49 [**Comptonův Jev**] *Na elektron, který je v laboratorní soustavě v klidu dopadá foton s energii $h\nu_0$. Najděte závislost energie fotonu po srážce na úhlu φ, který svírá směr fotonu po srážce se směrem fotonu před srážkou.*

Cvičení 50 [**ŠT U7.4**] *Pohyb nabité relativistické částice v magnetickém poli - cyklotronová frekvence. Určete jak se bude pohybovat nabitá částice v homogenním magnetickém poli intenzity $\vec{B} =$ konst. v nerelativistickém a relativistickém případě.*

Cvičení 51 [**ŠT 7.16***] *Tyč vlastní délky l' je v klidu v soustavě S', v níž svírá úhel Θ' s osou x'. Určete délku l a úhel Θ (s osou x) v soustavě S. Jsou–li soustavy S a S' spojeny speciální Lorentzovou transformací ve směru osy x.*

Cvičení 52 [**ŠT 7.21***] *Přesvědčte se, že z transformačních vzorců pro čtyřrychlost plynou relativistické vzorce pro skládání rychlostí. Co dává transformace nultých složek?*

Cvičení 53 [**ŠT 7.30**] *Ukažte, že při pohybu nabité částice (m_0, q) v magnetickém poli určeném vektorovým potenciálem $\vec{A} = (0, 0, A(x, y))$ se zachovává veličina $\frac{m_0 v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + qA(x, y)$.*

Cvičení 54 [**ŠT 7.33**] *Odvoďte pohybové rovnice polí ve dvourozměrném prostoročase (t, x) ze zadaných hustot Lagrangiánu. Indexy t, x značí parciální derivace podle t, x.*
a) $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\varphi_t^2 - \varphi_x^2) + \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 - \frac{1}{4}\lambda\varphi^4$ *kde* $\mu^2, \lambda > 0$.
b) sinus–Gordon $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\varphi_t^2 - \varphi_x^2) + (\cos\varphi - 1)$.
c) Korteweg–de Vries $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Theta_x\Theta_t + \frac{\alpha}{6}\Theta_x^3 + \Theta_x\Psi_x + \frac{1}{2}\Psi^2$.

Cvičení 55 [**ŠT 7.32**] *Odvoďte pohybovou rovnici reálného skalárního pole $\varphi = \varphi(t, \vec{x})$ ve čtyřprostoru, je-li jeho Lagrangeova hustota $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\varphi_{,\mu}\varphi^{,\mu} - \kappa^2\varphi^2)$. (Klein–Gordon)*

Cvičení 56 [ŠT U8.4 Lorentzovy transformace potenciálů a polí] *Pomocí čtyřpotenciálu resp. tenzoru elektromagnetického pole odvoďte transformační vztahy pro skalární φ a vektorový $\vec{A}$ potenciál resp. pole $\vec{E}$ a $\vec{B}$.*

Cvičení 57 [ŠT 8.50] *Vypočtěte potenciály elektromagnetického pole buzeného ve vakuu bodovým nábojem e pohybujícím se (v dané inerciální soustavě S) rovnoměrně přímočaře rychlostí $\vec{V}$. Jaký tvar mají ekvipotenciální plochy?*

Cvičení 58 [ŠT 8.45] *Najděte dva různé vektorové potenciály, které popisují konstantní homogenní magnetické pole $\vec{B} = (0, 0, B)$. Ukažte, že tyto vektorové potenciály spolu souvisí kalibrační transformací.*

Cvičení 59 [ŠT 8.46] *Určete složky vektorových potenciálů z předchozího příkladu ve sférických a cylindrických souřadnicích.*

Cvičení 60 [ŠT 8.42] *Jaký fyzikální smysl má veličina $\Gamma = \oint_l \vec{A}\,\mathrm{d}\vec{l}$. Je tato veličina kalibračně invariantní?.*

Cvičení 61 [ŠT 8.43] *Rozhodněte, zda je veličina $A^\mu A_\mu$ vytvořená z čtyřpotenciálu A^μ a) Lorentzovsky invariantní b) kalibračně invariantní.*

Cvičení 62 [ŠT U8.2 Popis bodového náboje pomocí Diracovy δ-funkce*]

Cvičení 63 [ŠT 9.52 Doba života Rutherfordova atomu] *Předpokládejte, že elektron v atomu vodíku je na kruhové dráze o poloměru $R = 10^{-10} m$. Určete dobu t_c, za kterou nastane jeho pád na centrum vlivem radiačního útlumu.*

Cvičení 64 [ŠT 8.35] *Vypočtěte energii elektromagnetického pole náboje rozloženého s konstantní hustotou v kulovém objemu o poloměru R.*

Cvičení 65 [ŠT 8.36 Klasický poloměr elektronu] *Určete řádovou velikost elektronu, za předpokladu, že celá jeho hmotnost má původ v energii pole.*

Cvičení 66 [ŠT 9.55 Thompsonův účinný průřez] *Na volný elektron dopadá ve vakuu světelná vlna. Vypočítejte totální účinný průřez rozptylu σ_t definovaný jako poměr celkového vyzářeného výkonu W k intenzitě J_0 (lépe hustotě toku energie) dopadající vlny. Zanedbejte reakci záření a relativistické efekty.*

Cvičení 67 [ŠT 9.7] *Nechť je dána elektromagnetická vlna popsaná potenciály $\vec{A} = \vec{a}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$, $\varphi = b\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$. Ukažte, že magnetické pole $\vec{B}$ je automaticky příčné, zatímco příčnost elektrického pole $\vec{E}$ vyžaduje splnění podmínky $b = \omega\frac{\vec{k}\cdot\vec{a}}{k^2}$. Ukažte, že za této podmínky bude vektor $\vec{B}$ kolmý na vektor $\vec{E}$.*

Cvičení 68 [ŠT 9.8] *Určete kalibrační transformaci, která transformuje potenciály z předchozího příkladu splňující podmínku $b = \omega\frac{\vec{k}\cdot\vec{a}}{k^2}$ na tvar $\vec{A}' = \vec{a}'\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$, $\varphi' = 0$ odpovídající coulombovské kalibraci, v níž $\vec{a}'\cdot\vec{k} = 0$.*