

Cvičení 1 Definice δ_{ij} , ε_{ijk} , Einsteinovo sumační pravidlo, δ_{ii} , $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}$.

Cvičení 2 Štoll, Tolar: D3.55, D3.63

Cvičení 3 Zopakujte si větu o derivování složené funkce více proměnných (chain rule). Vysvětlete podrobně schematický vzorec

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}$$

Cvičení 4 Štoll, Tolar: D.3.68

Cvičení 5 Řešte jednoduché diferenciální rovnice

$$\begin{aligned}y' &= f(x), \\y' &= f(y), \\y'' &= f(x), \\y'' &= f(y'), \\y'' &= f(y),\end{aligned}$$

kde $y = y(x)$ a f je libovolná spojitá funkce.

Cvičení 6 * Zopakujte si řešení Newtonových rovnic pro harmonický oscilátor, kde $\vec{F}(\vec{x}) = -k \vec{x}$

Cvičení 7 Odvoďte inverzní vztah k

$$x^j(b) = S^j_i(\tilde{x}^i(b) - \tilde{x}^i(o)), \quad (1)$$

t.j. $\tilde{x}^i(b)$ jako funkci $x^i(b)$ a $x^i(o)$.

Cvičení 8 Necht' složky veličiny $\mathbf{A}$ v bazi $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ mají hodnoty $(1, 2, 3)$ a složky veličiny $\mathbf{B}$ v téže bazi mají hodnoty $(4, 5, 6)$.

V bazi $\tilde{\mathbf{e}} = (\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3) = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)$ má tatáž veličina $\mathbf{A}$ složky $(2, 0, -1)$ a veličina $\mathbf{B}$ složky $(15, 5, -2)$.

Je veličina $\mathbf{A}$ kovariantní nebo kontravariantní vektor? Je veličina $\mathbf{B}$ kovariantní nebo kontravariantní vektor?

Pozn:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 9 *Nechť složky veličiny $\mathbf{C}$ v bazi $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ mají hodnoty $(1, 1, 1)$ a v bazi $\tilde{\mathbf{e}}$ z předchozího cvičení mají rovněž hodnoty $(1, 1, 1)$. Je veličina $\mathbf{C}$ kovariantní nebo kontravariantní vektor?*

Cvičení 10 *Nechť $\mathbf{e}_j$ jsou prvky ortonormální baze a $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_j F^j_i$, kde $F \in GL(n)$ jsou prvky obecně neortonormální baze $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$. Ukažte, že skalární součin $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ má v bazi $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$, a , tvar*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i b^j g_{ij}, \quad (2)$$

kde $g_{ij} := F^k_i F^k_j$ je Gramova matice souboru $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$.

Cvičení 11 *Ukažte, že prvky matice g_{ij} definující skalární součin (2) v obecné bazi lze považovat za složky kovariantního (tzv. metrického) tenzoru.*

Cvičení 12 * *Transformace skalárního pole. Jakých hodnot nabývá elektrický potenciál soustavy dvou elektronů vzdálených od sebe na délku l ve vztažné soustavě: $(o, \mathbf{e})$, kde o je bod ležící ve středu úsečky spojující elektrony a $\mathbf{e}$ je ortonormální soustava taková, že $\mathbf{e}_1$ směřuje ve směru spojnice obou elektronů a $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ jsou na ní kolmé?*

$(\tilde{o}, \tilde{\mathbf{e}})$, kde $\tilde{o}$ je bod ležící ve vrcholu rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka, jehož přepona je tvořena úsečkou spojující elektrony a $\tilde{\mathbf{e}}$ je ortonormální soustava taková, že $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2$ směřují ve směru jednotlivých elektronů a $\tilde{\mathbf{e}}_3$ je na ně kolmá?

Uvědomte si, že ač funkce U a $\tilde{U}$ mají různý tvar, popisují stejné elektrické pole!

Cvičení 13 *Ukažte že pro libovolné skalární pole U se veličina $\text{grad } U$ transformuje jako (kovariantní) vektorové pole.*

Cvičení 14 * *Ukažte že $\gamma = \det g_{ij}$, kde g_{ij} je matice definující skalární součin (2) v obecné bazi, je skalární hustota stupně 2.*

Cvičení 15 * *Ukažte že totálně antisymetrické Levi-Civitovy symboly v dimenzi n*

$$\varepsilon_{i_1, i_2, \dots, i_n} \in \{-1, 0, 1\}, \quad \varepsilon_{1, 2, \dots, n} = 1 \quad (3)$$

lze chápat jako složky $GL(n, R)$ -invariantní kovariantní tenzorové hustoty váhy -1 a invariantní kontravariantní tenzorové hustoty váhy $+1$. Použijte definici determinantu matice.

Cvičení 16 * *Nechť ω je orientace vektorového prostoru. Napište $\omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ ve složkách vektorů $\mathbf{v}_j$ v ortonormální bazi*

Cvičení 17 * *Ukažte, že $|\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b})|$ je obsah rovnoběžníka s hranami $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ a $|\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$ je objem rovnoběžnostěny s hranami $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.*

Cvičení 18 * Ukažte že v ortonormální pozitivně orientované bázi platí pro vektorový součin vzorec $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \varepsilon_{ijk} a^i b^j \mathbf{e}_k$. Změní se vzorec v negativně orientované bázi?

Cvičení 19 * Rozeberte transformační vlastnosti jednotlivých veličin vystupujících v Lorentzově síle

Cvičení 20 * Spočítejte souřadnice vektorových součinů $[\mathbf{a}]$ ve V_2 a $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ ve V_4 .

Cvičení 21 * Napište jak se změní složky vektoru $\mathbf{V}$, pseudovektoru $\mathbf{A}_\omega$, tensorů $\mathbf{T}$, pseudotensorů $\mathbf{T}_\omega$ a tensorových hustot při "inverzi os".

Cvičení 22 Napište pravidlo pro skládání Galileiho transformací (grupový součin $(S, \vec{V}, \vec{x}_0)$ a $(S', \vec{V}', \vec{x}'_0)$), t.j. $(S'', \vec{V}'', \vec{x}''_0)$ jako funkce $(S', \vec{V}', \vec{x}'_0)$ a $(S, \vec{V}, \vec{x}_0)$.

Cvičení 23 Štoll, Tolar: 1.5, 1.7

Cvičení 24 Štoll, Tolar: 2.25 věta o viriálu pro magnetické pole

Cvičení 25 Dokažte vztah pro složky zrychlení v neinerciální soustavě

$$\ddot{x}_i(b) = S_{ji} \left[\ddot{x}_j(b) - 2\dot{S}_{jk}\dot{x}_k(b) - \ddot{S}_{jk}\tilde{x}_k(b) - \ddot{x}_j(\tilde{o}) \right]. \quad (4)$$

Cvičení 26 Nechť

$$S = \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) & -\sin \varphi(t) & 0 \\ \sin \varphi(t) & \cos \varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jaké odpovídá transformaci? Spočítejte $\vec{\Omega}(t)$.

Cvičení 27 Ukažte, že pro libovolné $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$

$$(S^T \dot{S})_{ij} y_j = -\tilde{\omega}_{ij} y_j = (\vec{\Omega} \times \vec{y})_i, \quad (\tilde{\omega}^2)_{ik} y_k = (\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{y}))_i.$$

Cvičení 28 Ukažte, že $\dot{\mathbf{e}}_i = -\tilde{\mathbf{e}}_j \tilde{\omega}_{ji}$ a pro složky vektoru $\mathbf{Y}(t) = Y_i(t) \mathbf{e}_i = \tilde{Y}_j(t) \tilde{\mathbf{e}}_j(t)$ platí $\frac{d}{dt} \vec{Y} = \frac{d}{dt} (\vec{Y}) \cdot S - \vec{\Omega} \times \vec{Y}$.

Cvičení 29 Ukažte, že ω_{ij} a $\tilde{\omega}_{ij}$ jsou složky jednoho a téhož tensoru v různých bazích a $\vec{\Omega}$ a $\vec{\tilde{\Omega}}$ jsou složky jednoho a téhož vektoru v různých bazích, t.j.

$$\Omega_j(t) \mathbf{e}_j = \tilde{\Omega}_j(t) \tilde{\mathbf{e}}_j(t) = \mathbf{\Omega}(t).$$

Návod: Použijte vzorec pro transformaci bazí a definice $\vec{\Omega}(t)$ a $\vec{\tilde{\Omega}}(t)$.

Cvičení 30 Ukažte, že pro těleso s konstantní hustotou hmoty v homogenním silovém poli je moment sil vzhledem k hmotnému středu tělesa nulový.

Cvičení 31 * Nalezněte matici otáčení $S(t)$ pro homogenní kouli v bezsilovém prostředí.

Cvičení 32 * Určete pohyb bodu povrchu homogenní koule v homogenním silovém poli.

Cvičení 33 Homogenní válec s hlavními složkami momentu setrvačnosti $I_1 = I_2, I_3$ na který nepůsobí žádné síly rotuje v čase t_0 úhlovou rychlostí 10 rad/s okolo 2. osy. Okolo jaké osy a jakou rychlostí bude rotovat o 10 vteřin později?

Cvičení 34 Štoll, Tolar: 3.47 stabilita bezsilového setrvačnicku

Cvičení 35 Určete jak se liší Lagrangeovy funkce pro elektromagnetické potenciály lišící se o kalibrační transformaci a ukažte, že tento rozdíl nemá vliv na Lagrangeovy rovnice 2. druhu pro nabitý hmotný bod v elektromagnetickém poli.

Cvičení 36 Spočítejte Jacobiány

$$\det \frac{\partial \hat{x}_j}{\partial q_k} \quad (5)$$

pro přechod ke sférickým souřadnicím a cylindrickým souřadnicím v $\mathbf{R}^3$, takže $\hat{x}_j = \hat{x}_j(r, \vartheta, \varphi)$ respektive $\hat{x}_j = \hat{x}_j(\rho, \varphi, z)$. O čem vypovídá (ne)nulovost Jacobiánu?

Cvičení 37 Spočítejte vyjádření kartézských složek rychlosti v_i a kinetickou energii $\frac{1}{2}m\vec{v}^2$ ve sférických a cylindrických souřadnicích.

Cvičení 38 Štoll, Tolar: 2.1

Cvičení 39 Štoll, Tolar: 2.2 Gravitace + centrální síla

Cvičení 40 Štoll, Tolar: U2.1, 2.4 Částice v elmag. poli, zobecněné veličiny

Cvičení 41 Štoll, Tolar: 2.7 Pružný závěs

Cvičení 42 Dva body spojené nehmotnou tyčkou měnící se délky: Holonomní rheonomní vazba $f = f(\vec{x}_{(1)}, \vec{x}_{(2)}, t) = (\vec{x}_{(1)} - \vec{x}_{(2)})^2 - l(t)^2$. Zobecněné souřadnice q_k jsou například $(y_1, y_2, y_3, \theta, \varphi)$ a $\vec{x}_{(1)}(y_1, y_2, y_3, \theta, \varphi) := \vec{y} + \vec{r}$, $\vec{x}_{(2)}(y_1, y_2, y_3, \theta, \varphi) := \vec{y} - \vec{r}$, kde

$$\vec{y} := (y_1, y_2, y_3), \quad \vec{r} = \vec{r}(t) := \frac{1}{2}l(t) (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta).$$

Spočítejte rychlosti $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ pomocí zobecněných souřadnic a rychlostí. Ověřte pravidlo o krácení teček. Určete vazbové síly.

Cvičení 43 * Ukažte, že pro rheonomní holonomní vazby $f_K(\vec{X}, t) = 0$, $K = 1, \dots, p$ platí

$$\frac{\partial f_K}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t} + \frac{\partial f_K}{\partial t} = 0.$$

Cvičení 44 Štoll, Tolar: 2.8 Závěs rostoucí délky

Cvičení 45 * Štoll, Tolar: 3.45 úloha pro strojaře

Cvičení 46 Přepište Lagrangeovu funkci

$$L = L(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3) := \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + mgx_3 \quad (6)$$

do cylindrických souřadnic a nalezněte cyklickou souřadnici a zachovávající se veličinu. Ukažte, že to je třetí složka momentu hybnosti zapsaná v cylindrických souřadnicích

Cvičení 47 Štoll, Tolar: 2.14 Bod na kuželi

Cvičení 48 Ukažte, že pokud Lagrangeova funkce nezávisí na čase (izolovaná soustava), zobecněná energie

$$E = E(q, \dot{q}) := \sum_{j=1}^s \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}) - L(q, \dot{q}). \quad (7)$$

je integrálem pohybu.

Cvičení 49 Štoll, Tolar: 2.17

Cvičení 50 Štoll, Tolar: 2.18 první integrály

Cvičení 51 Nechť Lagrangeova funkce má tvar

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - U((x_1^2 + x_2^2), x_3).$$

Ukažte, že vektorové pole $\vec{Y}(\vec{x}) = (-x_2, x_1, 0)$ splňuje

$$\sum_{j=1}^s \left[\frac{\partial L}{\partial x_j} Y_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \left(\sum_{k=1}^s \frac{\partial Y_j}{\partial x_k} \dot{x}_k + \frac{\partial Y_j}{\partial t} \right) \right] = 0, \quad (8)$$

Napište odpovídající zachovávající se veličinu.

Cvičení 52 *Nechť Lagrangeova funkce má tvar (volný hmotný bod na přímce)*

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2.$$

Ukažte, že pohybové rovnice jsou invariantní vůči "škálování" $x \mapsto x e^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Jak vypadá vektorové pole Y pro tuto grupu transformací? Je $F(x, \dot{x}, t)$ dané vztahem

$$F(x, \dot{x}, t) = \sum_{j=1}^s Y_j(x, t) \frac{\partial}{\partial \dot{x}_j} L(x, \dot{x}, t) \quad (9)$$

integrálem pohybu?

Cvičení 53 *Štoll, Tolar: 2.20 zachovávající se P a L*

Cvičení 54 *Štoll, Tolar: 2.21 první integrály v homogenním magnetickém poli*

Cvičení 55 *Štoll, Tolar: 3.20 Runge Lenz*

Cvičení 56 *Štoll, Tolar: 3.21 Runge Lenz*

Cvičení 57 *Odvodte podmínky pro reálná a virtuální posunutí pro hmotný bod pohybující se po trojosém elipsoidu, jehož osy jsou závislé na čase*

Cvičení 58 *Štoll, Tolar: U D 2.2 úloha o brachistochroně*

Cvičení 59 *Štoll, Tolar: 3.38 malé kmity dvojitého kyvadla*

Cvičení 60 *Štoll, Tolar: 3.39 malé kmity dvou h.o.*

Cvičení 61 *Štoll, Tolar: 3.44 malé kmity fyzikálního kyvadla*