Energetické veličiny a zákony zachování v elektrodynamice

Zákon zachování náboje

Náboj neexistuje samostatně, je vždy vázán na částice (elektrony, protony, pozitrony), je kvantován (násobky $\pm e$), je relativistický invariant (nezávisí na pohybu částice). Celkový náboj se navíc zachovává i při procesech při kterých částice vznikají a zanikají (rozpady a anihilace částic).

Nechť je v prostoru rozložen volný elektrický náboj s objemovou hustotou $\rho(\vec{r},t)$ jehož pohyb je popsán polem rychlostí $\vec{v}(\vec{r},t)$. Úbytek náboje v libovolně pevně zvolené oblasti V je dán množstvím náboje, které projde přes hranici ∂V oblasti V.

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \,\mathrm{d}V = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V = \oint_{\partial V} \rho\vec{v}\,\mathrm{d}\vec{S} = \oint_{\partial V} \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\vec{j}\,\mathrm{d}V$$

Pro libovolnou pevně zvolenou oblast V tedy platí

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}\,\mathrm{d}V = 0$$

odtud pro $V \to 0$ dostaneme rovnici kontinuity

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0}$$

Zákon zachování energie

Dále budeme předpokládat, že částice neprochází plochou ∂V ohraničující oblast V. Síla, kterou EM pole působí na náboj dq v elementu objemu dV je

$$\mathrm{d}\vec{F} = (\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})\,\mathrm{d}q = (\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})\rho\,\mathrm{d}V = \rho(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})\,\mathrm{d}V = \vec{f}\,\mathrm{d}V$$

Výkon této síly

$$\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{F} = \vec{v}\cdot\vec{f}\,\mathrm{d}V = \rho\vec{v}\cdot\vec{E} + \rho\vec{v}\cdot(\vec{v}\times\vec{B})\,\mathrm{d}V = \rho\vec{v}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V = \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V$$

kde $\vec{f} = \rho(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$ je hustota Lorentzovy síly a $\vec{j}\cdot\vec{E}$ hustota výkonu Lorentzovy síly.
Úbytek energie pole v objemu V je roven práci, kterou pole vykoná na částicích a energii, která vyproudí přes hranici ∂V. Označíme–li hustotu energie EM pole $w = w(\vec{r},t)$ a hustotu toku energie EM pole $\vec{\mathcal{S}} = \vec{\mathcal{S}}(\vec{r},t)$ můžeme energetickou bilanci v oblasti V popsat rovnicí

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V w\,\mathrm{d}V = -\int_V \frac{\partial w}{\partial t}\,\mathrm{d}V = \int_V \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V + \oint_{\partial V}\vec{\mathcal{S}}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \vec{j}\cdot\vec{E} + \operatorname{div}\vec{\mathcal{S}}\,\mathrm{d}V$$

Diferenciální tvar představuje lokální zákon zachování energie v soustavě EM pole a nabitých částic.

$$\boxed{-\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{j}\cdot\vec{E} + \operatorname{div}\vec{\mathcal{S}}}$$

Zbývá najít jak závisí w a $\vec{\mathcal{S}}$ na EM poli, proto vyjádříme člen $\vec{j}\cdot\vec{E}$ pomocí Maxwellových rovnic a využijeme identitu $\operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{H}) = \vec{H}\cdot\operatorname{rot}\vec{E} - \vec{E}\cdot\operatorname{rot}\vec{H}$

$$\vec{j}\cdot\vec{E} = \left(\operatorname{rot} H - \tfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot\vec{E} = \vec{E}\cdot\operatorname{rot}\vec{H} - \vec{E}\cdot\tfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} =$$
$$= -\operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{H}) + \vec{H}\cdot\operatorname{rot}\vec{E} - \vec{E}\cdot\tfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} = -\operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{H}) - (\vec{H}\cdot\tfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\cdot\tfrac{\partial\vec{D}}{\partial t})$$

Dále předpokládáme pouze lineární (měkké) prostředí (s konst $\mu,\varepsilon\in\mathbb{R}$), kde

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E},\ \vec{B} = \mu\vec{H} \quad\Longrightarrow\quad \vec{H}\cdot\tfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\cdot\tfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \tfrac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} + \tfrac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B})$$

Poyntingova věta

$$\boxed{-\tfrac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} + \tfrac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\right) = \vec{j}\cdot\vec{E} + \operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{H})}$$

Odtud porovnáním s lokálním ZZE určíme:

- hustotu energie EM pole $w = \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}) = \frac{1}{2}(\varepsilon\vec{E}^2 + \mu\vec{H}^2)$
- hustotu toku energie EM pole (Poyntingův vektor) $\vec{\mathcal{S}} = \vec{E}\times\vec{H}$

V látkovém prostředí je ve w zahrnuta i energie spotřebované na polarizaci a magnetizaci prostředí. Ve vakuu $w = \frac{1}{2}(\varepsilon_0\vec{E}^2 + \mu_0\vec{H}^2)$

Zákon zachování hybnosti

Kromě energie předává EM pole nosičům nábojů i hybnost. Existence hybnosti EM pole byla experimentálně potvrzena objevem mechanického tlaku záření (Lebevěv 1899). Abychom zapsali bilanci hybnosti v oblasti V ohraničené nehybnou plochou ∂V kterou částice neprochází, označíme
$\vec{p}$ ... hustou hybnosti částic, $\vec{g}$ ... hustotu hybnosti EM pole
$\vec{\sigma}_i = (\sigma_{i1},\sigma_{i2},\sigma_{i3})$... hustotu toku i–té složky hybnosti EM pole (hustota toku vektoru $\vec{g}$ představuje tenzor (σ_{ij})

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V p_i + g_i\,\mathrm{d}V = \oint_{\partial V}\sigma_{ij}\,\mathrm{d}S_j = \oint_{\partial V}\vec{\sigma}_i\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\vec{\sigma}_i\,\mathrm{d}V$$

Diferenciální tvar představuje lokální zákon zachování hybnosti v soustavě EM pole a nabitých částic.

$$\boxed{-\frac{\partial g_i}{\partial t} = \frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}}$$

K určení veličin $\vec{g}$ a σ_{ij} zapíšeme pohybovou rovnici pro částice v elementu objemu a dosadíme z Maxwellových rovnic

$$\frac{\partial\vec{p}}{\partial t} = \vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B} = (\operatorname{div}\vec{D})\vec{E} + \left(\operatorname{rot}\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\times\vec{B}$$

na pravou stranu rce. přidáme dvě nuly $0 = \vec{H}\operatorname{div}\vec{B}$ a $0 = (\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t})\times\vec{D}$

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \vec{E}\,\mathrm{div}\,\vec{D} + \vec{H}\,\mathrm{div}\,\vec{B} + \left(\mathrm{rot}\,\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \times \vec{B} + \left(\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \times \vec{D} =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D} \times \vec{B}) + [\vec{E}\,\mathrm{div}\,\vec{D} + \vec{H}\,\mathrm{div}\,\vec{B} - \vec{D} \times \mathrm{rot}\,\vec{E} - \vec{B} \times \mathrm{rot}\,\vec{H}]$$

$$[\ldots]_i = E_i \frac{\partial D_j}{\partial x_j} + H_i \frac{\partial B_j}{\partial x_j} - \epsilon_{ijk} D_j \epsilon_{klm} \frac{\partial E_m}{\partial x_l} - \epsilon_{ijk} B_j \epsilon_{klm} \frac{\partial H_m}{\partial x_l}$$
$$= E_i \frac{\partial D_j}{\partial x_j} + H_i \frac{\partial B_j}{\partial x_j} - (D_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i} - D_j \frac{\partial E_i}{\partial x_j}) - (B_j \frac{\partial H_j}{\partial x_i} - B_j \frac{\partial H_i}{\partial x_j})$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_j}(E_i D_j + H_i B_j) - D_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i} - B_j \frac{\partial H_j}{\partial x_i} =$$

V lineárním prostředí s konstantními $\varepsilon, \mu \in \mathbb{R}$ lze výraz dále upravit

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}(E_i D_j + H_i B_j) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(D_j E_j + B_j H_j) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_j}(E_i D_j + H_i B_j) - \frac{1}{2}\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}(\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(E_i D_j + H_i B_j - \delta_{ij} \underbrace{\frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})}_{w}\right)$$

Odtud porovnáním s lokálním ZZH

- hustota hybnosti EM pole $\vec{g} = \vec{D} \times \vec{B} = \varepsilon\mu \vec{E} \times \vec{H} = \varepsilon\mu \vec{\mathcal{S}}$
- Maxwellův tenzor napětí (tenzor hustoty toku hybnosti EM pole)

  $\sigma_{ij} = -[E_i D_j + H_i B_j - \delta_{ij}\frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})]$

  $\sigma_{ij} = -[\varepsilon E_i E_j + \mu H_i H_j - \delta_{ij}\frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)] = -[\varepsilon E_i E_j + \mu H_i H_j - \delta_{ij} w]$

Tyto výrazy v sobě obsahují i hybnosti vázaných nábojů. Veličiny $\vec{g}$ a σ_{ij} pro samostatné EM pole bychom získali dosazením $\varepsilon = \varepsilon_0$ a $\mu = \mu_0$ případně odvozením z Lorentz–Maxwellových rovnic místo rovnic Maxwellových.

Název pro σ_{ij} pochází z analogie s mechanikou kontinua. Ve stacionárním případě EM pole totiž platí $\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = 0$ a lokální ZZH se tak redukuje na $\frac{\partial p_i}{\partial t} = f_i = -\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$. Tenzor σ_{ij} tak umožňuje vypočítat sílu působící na objem V jako výslednici "napětí" působících na povrchu ∂V
$\int_V f_i \,\mathrm{d}V = \oint_{\partial V} (-\sigma_{ij})\,\mathrm{d}S_j$

*Tenzor energie a hybnosti

Teorém Noetherové říká, že ke každé spojité jednoparametrické grupě transformací, které ponechávají akci $S = \frac{1}{c}\int_{V^*} \mathcal{L}\,\mathrm{d}V^*$ invariantní, přísluší čtyřvektor k^μ splňující $\frac{\partial k^\mu}{\partial x^\mu} = 0$ tzv. zachovávající se čtyřproud.

Jako transformace si zvolíme translace $x'^\mu = x^\mu + b^\mu$ při kterých se polní proměnné transformují jako skalární funkce $q'_a(x') = q_a(x)$. Hustota Lagrangeovy funkce $\mathcal{L}(q_a, q_{a,\mu}, x^\mu)$ bude invariantní vůči translacím právě tehdy, když nebude záviset explicitně na souřadnicích x^μ tj. $\mathcal{L}(q'_a(x'), q'_{a,\mu}(x')) = \mathcal{L}(q_a(x), q_{a,\mu}(x))$. To lze vyjádřit nulovostí derivací explicitních závislostí $\mathcal{L}$ na x^μ:

$$0 = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}\right)_{expl} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} q_{a,\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}} q_{a,\nu\mu} \overset{\text{rce. pole}}{=}$$
$$= \delta^\nu_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}\right) q_{a,\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}} q_{a,\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}} q_{a,\mu} - \delta^\nu_\mu \mathcal{L}\right]$$

Tyto rovnice pro $\mu = 0, 1, 2, 3$ představují zákony zachování energie a hybnosti v teorii pole. Výraz v závorce nazýváme kanonický tenzor energie a hybnosti

$$\boxed{\mathcal{T}_\mu{}^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}} q_{a,\mu} - \delta^\nu_\mu \mathcal{L}}$$

Pro volné (bez zdrojů) elektromagnetické pole máme

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \qquad \text{kde} \qquad F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$$

$$\mathcal{T}_\mu{}^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\rho,\nu}} A_{\rho,\mu} - \delta^\nu_\mu \mathcal{L} \overset{\text{11.před.}}{=} \frac{1}{\mu_0} A_{\rho,\mu} F^{\rho\nu} + \delta^\nu_\mu \frac{1}{4\mu_0} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$$

Tento tenzor není vhodný, neboť není kalibračně invariantní. Doplníme ho proto o čtyřdivergenci

$$-\frac{1}{\mu_0} A_{\mu,\rho} F^{\rho\nu} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial x^\rho}(A_\mu F^{\nu\rho}) \qquad \text{kde} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x^\rho}(A_\mu F^{\nu\rho}) = 0$$

Dostaneme tak tenzor, který již kalibračně invariantní je

$T_\mu{}^\nu = \frac{1}{\mu_0} A_{\rho,\mu} F^{\rho\nu} - \frac{1}{\mu_0} A_{\mu,\rho} F^{\rho\nu} + \delta^\nu_\mu \frac{1}{4\mu_0} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} = \frac{1}{\mu_0}(-F_{\mu\rho} F^{\nu\rho} + \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \delta^\nu_\mu)$

Po zvednutí indexu dostáváme symetrický tenzor energie a hybnosti:

$T^{\mu\nu} = g^{\mu\kappa} T_\kappa{}^\nu = \frac{1}{\mu_0} g^{\mu\kappa}(-F_{\kappa\rho} F^{\nu\rho} + \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \delta^\nu_\kappa) =$
$\quad = \frac{1}{\mu_0}(-F^\mu{}_\rho F^{\nu\rho} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}) = \frac{1}{\mu_0}(-g_{\sigma\rho} F^{\mu\sigma} F^{\nu\rho} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma})$

Symetrický tenzor energie a hybnosti

Je kalibračně invariantní tenzor $\boxed{T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}(-g_{\rho\sigma}F^{\mu\rho}F^{\nu\sigma} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma})}$

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} w & \frac{\mathcal{S}_x}{c} & \frac{\mathcal{S}_y}{c} & \frac{\mathcal{S}_z}{c} \\ \frac{\mathcal{S}_x}{c} & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \frac{\mathcal{S}_y}{c} & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \frac{\mathcal{S}_z}{c} & \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{c}\vec{\mathcal{S}}=c\vec{g}}{\overset{\text{ve vakuu}}{=}} \begin{pmatrix} w & cg_x & cg_y & cg_z \\ cg_x & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ cg_y & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ cg_z & \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Tento tenzor umožňuje jednotně zapsat lokální zákon zachování energie a hybnosti.

Lokální zákon zachování energie a hybnosti pro volné EM pole

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0$$

Lokální zákon zachování energie a hybnosti pro soustavu částic a EM pole

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -f^\mu$$

kde $f^\mu = F^{\mu\nu}j_\nu$ je hustota Lorentzovy čtyřsíly $(f^\mu) = (\frac{\vec{j}\cdot\vec{E}}{c}, \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B})$.

Rozepsáním získáme dříve uvedené lokální ZZE a ZZH:

$$\frac{\partial T^{0\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial w}{\partial(ct)} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{S}_i}{\partial x_i} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\mathcal{S}}\right) = -\frac{1}{c}\vec{j}\cdot\vec{E} = -f^0$$

$$\frac{\partial T^{i\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial(cg_i)}{\partial(ct)} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = -(\rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B})_i = -f^i$$