Newtonovy pohybové zákony (1687) formulované v Newtonově absolutním prostoru

$\boxed{1.\,N.\,Z.}$ Těleso na které nepůsobí vnější síly se pohybuje rovnoměrně přímočaře.

Těleso $\rightarrow$ <u>hmotný bod</u> – idealizace, objekt charakterizovaný hmotností a polohou

<u>Vnější síly</u> – pravé (ne setrvačné) síly u kterých lze určit objekt, který je jejich původcem

<u>Rovnoměrný přímočarý pohyb</u> – v kartézských souřadnicích $x_i(t) = \underbrace{v_i t + x_{0i}}_{\text{lineární závislost na čase}}$ $\quad \dot{x}_i = v_i = \text{konst.}$
(zahrnuje i klid) $\quad \ddot{x}_i = 0 \quad \forall i$

<u>Pozn.</u> pokud zvolíme počátek $o = b(t)$ tak zřejmě $x_i(b(t)) = 0$ je lineární pro lib. pohyb $\Rightarrow$
pro formulaci pohybových zákonů je důležitý výběr vztažné soustavy, preferované soustavy budou ty ve kterých platí 1. N. Z.

<u>Inerciální vztažná soustava</u> – soustava ve které platí 1. N. Z. (tj. pro bezsilové body platí $\ddot{x}_i = 0$).

za inerciální lze považovat soustavu
- se středem ve středu Slunce a osami směřujícími ke stálicím
- soustavu spojenou pevně se Zemí (např. laboratorní) pouze pro děje $\ll 24\,h$

Transformace mezi inerciálními soustavami $\langle o, (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)\rangle$ $\quad \tilde{o}(t) = o + \vec{w}(t)$ $\quad \ddot{x}_i(b(t)) = 0$

$\langle \tilde{o}(t), (\tilde{\vec{e}}_1(t), \dots, \tilde{\vec{e}}_n(t))\rangle$ $\quad \tilde{\vec{e}}_j(t) = \vec{e}_i S^i_j(t)$ $\quad S(t) \in SO(3)$ $\quad \Updownarrow$ $\quad \ddot{\tilde{x}}_i(b(t)) = 0$

$$\tilde{x}_i = S_{ji}(x_j - x_j(\tilde{o}))$$

$$\dot{\tilde{x}}_i = \dot{S}_{ji}(x_j - x_j(\tilde{o})) + S_{ji}(\dot{x}_j - \dot{x}_j(\tilde{o}))$$

$$\ddot{\tilde{x}}_i = \underset{\downarrow\ 0}{\ddot{S}_{ji}}(\underset{=\,v_j t + x_{0j}}{x_j} - x_j(\tilde{o})) + 2\underset{\downarrow\ 0}{\dot{S}_{ji}}(\underset{=\,v_j}{\dot{x}_j} - \dot{x}_j(\tilde{o})) + \underset{S\ \text{regulární}}{S_{ji}}(\underset{=\,0}{\ddot{x}_j} - \underset{\downarrow\ 0}{\ddot{x}_j(\tilde{o})}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ddot{x}_i = 0 \quad \forall i \qquad x_i = v_i t + x_{0i}$$

$\forall v_j\ \forall x_{0j}$ $\qquad$ libovolné konstanty

odtud $\left.\begin{array}{l} S_{ji}(t) = \text{konst.} \\ \ddot{x}_j(\tilde{o}) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\begin{array}{ll} \tilde{\vec{e}}_j = \vec{e}_i S^i_j & \text{osy se neotáčí (ale mohou být natočené } (S \neq \mathbb{1})) \\ \tilde{o}(t) = o + \vec{W} t + \vec{x}_0 & \text{počátek se pohybuje rovnoměrně přímočaře} \end{array}$

<u>Galileiho transformace</u>

$$\boxed{\begin{array}{l} \tilde{x}_i = S_{ji}(x_j - W_j t - x_{0j}) \\ \tilde{t} = t - t_0 \end{array}}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d(t-t_0)}$$

je dána 10 parametry
$(S, \vec{W}, \vec{x}_0, t_0) \in SO(3) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$
(grupa $SGal(3) \cong \mathbb{R}^4 \rtimes (\mathbb{R}^3 \rtimes SO(3))$)

$$(t, \vec{x}^T, 1)\begin{pmatrix} 1 & \vec{W}^T & 0 \\ \vec{0} & S & \vec{0} \\ t_0 & \vec{x}_0^T & 1 \end{pmatrix} = (t + t_0, t\vec{W}^T + \vec{x}^T S + \vec{x}_0^T, 1)$$

reprezentace v $\mathbb{R}^5$

<u>Galileiho princip relativity</u>

Zákony mechaniky mají stejný tvar ve všech inerciálních vztažných soustavách.

<u>Př.</u> $\quad m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$ $\qquad \vec{x} = S\tilde{\vec{x}} + \vec{W}t + \vec{x}_0$ (konst.) $\qquad \dot{\vec{x}} = S\dot{\tilde{\vec{x}}} + \vec{W}$ $\qquad \ddot{\vec{x}} = S\ddot{\tilde{\vec{x}}}$

$$\downarrow$$

$$m S \ddot{\tilde{\vec{x}}} = S\tilde{\vec{F}}(\tilde{\vec{x}}) \qquad / S^T = S^{-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$m\ddot{\tilde{\vec{x}}} = \tilde{\vec{F}}(\tilde{\vec{x}})$$

<u>Kovariance</u>

důsledek kovariantního tvaru rovnice – veličiny ze kterých je sestavena se transformují stejně*

stejný tvar = <u>invariance</u>

$m\ddot{\tilde{\vec{x}}} = \vec{F}(\tilde{\vec{x}})$ $\quad$ tj. difr. $\quad \Phi(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, t) = 0$

lze splnit pouze pro uzavřené systémy

$$\downarrow$$

$$\Phi(\tilde{\vec{x}}, \dot{\tilde{\vec{x}}}, \ddot{\tilde{\vec{x}}}, t) = 0$$

2.N.Z. Změna pohybu je úměrná vtištěné síle a nastává ve směru přímky, podél níž síla působí.

v inerciální vztažné soustavě $\frac{d\vec p}{dt} = \vec F$ pro $m = \text{konst.}$ $m\vec a = \vec F$ v kartézských souřadnicích $m\ddot x_i = F_i \quad \forall i$

v neinerciální vztažné soustavě $m\ddot{\tilde x}_i = \tilde F_i + \tilde Z_i$ zdánlivé (setrvačné) síly

$$\tilde{\vec x} = \mathbb{S}^T(\vec x - \vec x(\tilde\sigma)) \qquad \mathbb{S} = \mathbb{S}(t) \in SO(3) \qquad \tilde\sigma = \tilde\sigma(t)$$

$$\mathbb{S}\tilde{\vec x} = \mathbb{S}\mathbb{S}^T(\vec x - \vec x(\tilde\sigma)) = \vec x - \vec x(\tilde\sigma) \ \Big/ \frac{d}{dt} \qquad \dot{\mathbb{S}}\tilde{\vec x} + \mathbb{S}\dot{\tilde{\vec x}} = \dot{\vec x} - \dot{\vec x}(\tilde\sigma) \ \Big/ \frac{d}{dt} \qquad \ddot{\mathbb{S}}\tilde{\vec x} + 2\dot{\mathbb{S}}\dot{\tilde{\vec x}} + \mathbb{S}\ddot{\tilde{\vec x}} = \ddot{\vec x} - \ddot{\vec x}(\tilde\sigma)$$

$$m\ddot{\vec x} = m\left[\mathbb{S}\ddot{\tilde{\vec x}} + 2\dot{\mathbb{S}}\dot{\tilde{\vec x}} + \ddot{\mathbb{S}}\tilde{\vec x} + \ddot{\vec x}(\tilde\sigma)\right] = \vec F = \mathbb{S}\tilde{\vec F} \quad \Big/ \cdot \mathbb{S}^T = \mathbb{S}^{-1}$$

$$m\,\mathbb{S}^T\mathbb{S}\ddot{\tilde{\vec x}} + m2\,\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}}\dot{\tilde{\vec x}} + m\,\mathbb{S}^T\ddot{\mathbb{S}}\tilde{\vec x} + m\,\mathbb{S}^T\ddot{\vec x}(\tilde\sigma) = \mathbb{S}^T\mathbb{S}\tilde{\vec F} = \tilde{\vec F}$$

$$\boxed{m\ddot{\tilde{\vec x}} = \tilde{\vec F} - m\,\mathbb{S}^T\ddot{\vec x}(\tilde\sigma) - 2m\,\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}}\dot{\tilde{\vec x}} - m\,\mathbb{S}^T\ddot{\mathbb{S}}\tilde{\vec x}}$$

označíme $\tilde\omega = -\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}}$ $\qquad \mathbb{S}^T\mathbb{S} = \mathbb{1} \ \Big/ \frac{d}{dt} \qquad \dot{\mathbb{S}}^T\mathbb{S} + \mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}} = 0 \Rightarrow \dot{\mathbb{S}}^T\mathbb{S} = -\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}}$

$\tilde\omega^T = (-\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}})^T = -\dot{\mathbb{S}}^T\mathbb{S} \overset{!}{=} \mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}} = -\tilde\omega$ ... antisymetrická matice má tři nezávislé složky $\quad \tilde\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix}$

$\tilde\omega_{ij} = \varepsilon_{ijk}\tilde\Omega_k$ ... pouze v pravotočivé O.N. bázi (Hodgeův duál) $\quad \tilde{\vec\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_{23} \\ -\omega_{13} \\ \omega_{12} \end{pmatrix}$

$$\varepsilon_{ijl}\tilde\omega_{ij} = \varepsilon_{ijl}\varepsilon_{ijk}\tilde\Omega_k = 2\delta_{lk}\tilde\Omega_k = 2\tilde\Omega_l$$

$\boxed{\tilde\Omega_l = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijl}\tilde\omega_{ij} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{lij}(\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}})_{ij}}$ složky pseudovektoru úhlové rychlosti rotace soustavy $\langle\tilde\sigma, \tilde{B}\rangle$ vůči soustavě $\langle\sigma, B\rangle$ v bázi $\tilde B$

dále $\tilde\omega_{ij}\tilde y_j = \varepsilon_{ijk}\tilde\Omega_k\tilde y_j = -\varepsilon_{ikj}\tilde\Omega_k\tilde y_j = -(\tilde{\vec\Omega}\times\tilde{\vec y})_i$ $\quad$ tj. $\tilde\omega\tilde{\vec y} = -\tilde{\vec\Omega}\times\tilde{\vec y}$

členy: $-2m\,\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}}\dot{\tilde{\vec x}} = 2m\tilde\omega\dot{\tilde{\vec x}} = -2m\tilde{\vec\Omega}\times\dot{\tilde{\vec x}} = \tilde{\vec F}_c$ $\quad$ Coriolisova síla

$$\mathbb{S}^T\ddot{\mathbb{S}} = (\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}})^{\cdot} - \dot{\mathbb{S}}^T\dot{\mathbb{S}} = -\dot{\tilde\omega} - \dot{\mathbb{S}}^T\underbrace{\mathbb{S}\mathbb{S}^T}_{\mathbb{1}}\dot{\mathbb{S}} = -\dot{\tilde\omega} + \mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}}\,\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}} = -\dot{\tilde\omega} + \tilde\omega\tilde\omega$$

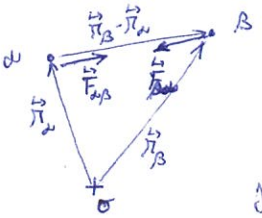
$$-m\,\mathbb{S}^T\ddot{\mathbb{S}}\tilde{\vec x} = -m(-\dot{\tilde\omega} + \tilde\omega\tilde\omega)\tilde{\vec x} = m\dot{\tilde\omega}\tilde{\vec x} - m\tilde\omega\tilde\omega\tilde{\vec x} = \underbrace{-m\dot{\tilde{\vec\Omega}}\times\tilde{\vec x}}_{\tilde{\vec F}_e}\underbrace{-m\tilde{\vec\Omega}\times(\tilde{\vec\Omega}\times\tilde{\vec x})}_{\tilde{\vec F}_o} = \tilde{\vec F}_e + \tilde{\vec F}_o$$

Eulerova $\qquad$ odstředivá síla

$-m\,\mathbb{S}^T\ddot{\vec x}(\tilde\sigma) = \tilde{\vec F}_s$ $\quad$ Setrvačná síla

celkem: $$m\ddot{\tilde{\vec x}} = \tilde{\vec F} - m\,\mathbb{S}^T\ddot{\vec x}(\tilde\sigma) - 2m\tilde{\vec\Omega}\times\dot{\tilde{\vec x}} - m\dot{\tilde{\vec\Omega}}\times\tilde{\vec x} - m\tilde{\vec\Omega}\times(\tilde{\vec\Omega}\times\tilde{\vec x})$$

Pozn: síly Newtonovy mechaniky



1) gravitační síla $\vec F_{\alpha\beta} = -\varkappa\frac{m_\alpha m_\beta}{|\vec r_\alpha - \vec r_\beta|^3}(\vec r_\alpha - \vec r_\beta) = -\vec F_{\beta\alpha}$

2) síla pružnosti $\vec F_{\alpha\beta} = -k(\vec r_\alpha - \vec r_\beta) = -\vec F_{\beta\alpha}$

síla kterou β působí na α

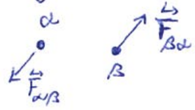
jde o definice síly na pravé straně 2.N.Z.

Pozn: vektorové pole na pravé straně 2.N.Z. může obecně záviset i na rychlostech a čase $\tilde{\vec F}(\tilde{\vec x}, \tilde{\vec v}, t) = \mathbb{S}^T\vec F(\vec x, \vec v, t)$

např: $\vec F = q\vec v\times\vec B$ – takové pole, ale už není Galileovsky invariantní.

$\boxed{3.N.Z.}$ Akce a reakce: Vzájemná působení dvou těles jsou vždy stejně velká a míří opačnými směry.

1) <u>slabá verze</u> $\overleftrightarrow{F}_{\alpha\beta} = -\overleftrightarrow{F}_{\beta\alpha}$



2) <u>silná verze</u> - síly jsou navíc centrální (působí podél spojnice bodů) tj: $\underbrace{(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta)}_{\vec{r}_{\alpha\beta}} \times \overleftrightarrow{F}_{\alpha\beta} = 0$

Newtonova mechanika soustav volných hmotných bodů

pro $N \in \mathbb{N}$ volných hm. bodů v inerciální soustavě platí $\dfrac{d\vec{p}_\alpha}{dt} = m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha = \vec{F}_\alpha = \vec{F}^{(e)}_\alpha + \sum\limits_{\beta=1}^{N}{}' \vec{F}_{\alpha\beta} \quad \forall \alpha \in \hat{N}$

bez sumace; vnější; vnitřní síly

<u>Celková hybnost</u> $\vec{P} = \sum\limits_{\alpha=1}^{N}{}' \vec{p}_\alpha$

$$\dot{\vec{P}} = \sum_\alpha{}' \dot{\vec{p}}_\alpha = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha = \sum_\alpha \Big(\vec{F}^{(e)}_\alpha + \sum_\beta{}' \vec{F}_{\alpha\beta}\Big) = \sum_\alpha{}' \vec{F}^{(e)}_\alpha + \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha\neq\beta}} \vec{F}_{\alpha\beta} \underset{\uparrow}{=} \sum_\alpha{}' \vec{F}^{(e)}_\alpha = \vec{F}^{(e)}$$

3.N.Z slabá forma $\quad \sum\limits_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha\neq\beta}} \vec{F}_{\alpha\beta} = \sum\limits_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha\neq\beta}} (-\vec{F}_{\beta\alpha}) = -\sum\limits_{\alpha,\beta}{}' \vec{F}_{\alpha\beta} = 0$ $\quad \beta \to \alpha,\ \alpha \to \beta$ přejmenoval

<u>1. Věta Impulsová</u> $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(e)}$ ← celková vnější síla

Transformace souřadnic $\quad \mathbb{S} = \mathbb{1}, \quad \sigma' = \sigma(t) \quad$ $\vec{x}'_\alpha = \vec{x}_\alpha - \vec{x}(\sigma')$, $\quad \vec{v}'_\alpha = \vec{v}_\alpha - \vec{V}(t)$

$$\vec{P} = \sum_\alpha{}' \vec{p}_\alpha = \sum_\alpha{}' m_\alpha \vec{v}_\alpha = \sum_\alpha{}' m_\alpha (\vec{v}'_\alpha + \vec{V}) = \sum_\alpha{}' \underbrace{m_\alpha \vec{v}'_\alpha}_{\vec{p}'_\alpha} + \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha}_{M \text{ ... celková hmotnost}} \vec{V}$$

$\vec{P} = \vec{P}' + M\vec{V}$

v soustavě splňující $\vec{V} = \dfrac{\vec{P}}{M}$ je celková hybnost $\vec{P}' = 0$

Hmotný střed $\vec{R} = \dfrac{1}{M} \sum\limits_\alpha m_\alpha \vec{x}_\alpha \qquad \vec{P} = M\dot{\vec{R}}$

$$\boxed{\vec{x}_\alpha \equiv \vec{r}_\alpha}$$

<u>Celkový moment hybnosti</u> $\vec{L} = \sum\limits_{\alpha=1}^{N}{}' \vec{l}_\alpha = \sum\limits_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha$

$$\dot{\vec{L}} = \sum_\alpha{}' \big(\underbrace{\dot{\vec{r}}_\alpha \times \vec{p}_\alpha}_{=0} + \vec{r}_\alpha \times \dot{\vec{p}}_\alpha\big) = \sum_\alpha{}' \vec{r}_\alpha \times \dot{\vec{p}}_\alpha \underset{\substack{\uparrow \\ 2.N.Z.}}{=} \sum_\alpha{}' \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \Big(\vec{F}^{(e)}_\alpha + \sum_\beta{}' \vec{F}_{\alpha\beta}\Big) = \underbrace{\sum_\alpha{}' \vec{r}_\alpha \times \vec{F}^{(e)}_\alpha}_{} + \underbrace{\sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha\neq\beta}} \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\alpha\beta}}_{=0} = \underbrace{\vec{N}^{(e)}}_{}$$

3.N.Z. silná forma $\quad \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\alpha\beta} = \vec{r}_\beta \times \vec{F}_{\alpha\beta} = -\vec{r}_\beta \times \vec{F}_{\beta\alpha}$

$$\sum_{\alpha,\beta}{}' \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\alpha\beta} = -\sum_{\alpha,\beta}{}' \vec{r}_\beta \times \vec{F}_{\beta\alpha} = -\sum_{\alpha,\beta}{}' \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\alpha\beta} = 0$$

$\beta \to \alpha,\ \alpha \to \beta$

<u>2. Věta Impulsová</u> $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}^{(e)}$ ← celkový moment vnějších sil

<u>Celková kinetická energie</u> $T = \sum\limits_{\alpha=1}^{N}{}' \dfrac{1}{2} m_\alpha \vec{v}_\alpha^{\,2}$

vnitřní síly

$$\dot{T} = \sum_\alpha{}' \tfrac{1}{2} \underbrace{m_\alpha 2 \vec{v}_\alpha \cdot \dot{\vec{v}}_\alpha}_{} = \sum_\alpha{}' \underbrace{\dot{\vec{p}}_\alpha}_{} \cdot \vec{v}_\alpha = \sum_\alpha{}' \vec{F}_\alpha \cdot \vec{v}_\alpha = \sum_\alpha \big(\vec{F}^{(e)}_\alpha + \vec{F}^{(i)}_\alpha\big) \cdot \vec{v}_\alpha = \underbrace{\sum_\alpha{}' \vec{F}^{(e)}_\alpha \cdot \vec{v}_\alpha}_{Q^{(e)} \text{ ... výkon vnějších sil}} + \sum{}' \vec{F}^{(i)}_\alpha \vec{v}_\alpha = Q^{(e)} - \dot{U}$$

jsou-li vnitřní síly potenciální

$\vec{F}^{(i)}_\alpha = -\nabla_\alpha U = -\dfrac{\partial U}{\partial \vec{r}_\alpha} \iff \vec{F}^{(i)}_{\alpha j} = -\dfrac{\partial U}{\partial x_{\alpha j}}$ tak $\sum\limits_\alpha{}' \vec{F}^{(i)}_\alpha \vec{v}_\alpha = \sum\limits_\alpha{}' -\dfrac{\partial U}{\partial \vec{r}_\alpha} \cdot \dfrac{d\vec{r}_\alpha}{dt} = -\dfrac{dU}{dt}$

Celková energie $E = T + U \qquad \boxed{\dfrac{dE}{dt} = \dfrac{d(T+U)}{dt} = Q^{(e)}}$

Transformace souřadnic $\quad \vec{r}'_\alpha = \vec{r}_\alpha - \vec{r}(\sigma')$, $\quad \vec{v}'_\alpha = \vec{v}_\alpha - \vec{V}(t)$

$$T = \sum_\alpha{}' \tfrac{1}{2} m_\alpha (\vec{v}'_\alpha + \vec{V})^2 = \overbrace{\tfrac{1}{2} \sum_\alpha{}' m_\alpha \vec{v}'^{\,2}_\alpha}^{T'} + \overbrace{\sum_\alpha m_\alpha \vec{v}'_\alpha}^{\vec{P}'} \cdot \vec{V} + \tfrac{1}{2} \overbrace{\sum{}' m_\alpha}^{M} \vec{V}^2 = T' + \vec{P}' \cdot \vec{V} + \tfrac{1}{2} M \vec{V}^2$$

V soustavě hmotného středu $(\vec{P}' = 0)$ $\quad T = T' + \frac{1}{2} M \vec{V}^2 \quad$ Königova Věta

Izolovaná soustava hmotných bodů - nepůsobí na ni žádné vnější síly $(\vec{F}_\alpha^{(e)} = 0 \quad \forall \alpha \in \hat{N})$

$\dot{\vec{P}} = 0$ Z.Z. celkové hybnosti $\qquad M\ddot{\vec{R}} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{R}} = \vec{V} = konst \Rightarrow \vec{R} = \vec{V}t + \vec{R}_0$ ZZ rychlosti hmotného středu

$\dot{\vec{L}} = 0$ ZZ. celkového momentu hybnosti

$\dot{E} = 0$ ZZ. celkové mechanické energie $\quad \swarrow$ celkem 10 zákonů zachování

Věta o viriálu (1870 Rudolf Clausius) - vztah mezi střední časovou hodnotou celkové kinetické energie a viriálem (připadně střední časovou hodnotou celk. potenciální energie soustavy)

Časová střední hodnota funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f = f(t)$ je definovaná předpisem $\langle f \rangle := \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t)\,dt$

Věta: Pokud $\exists F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$, F omezená $(\exists K \in \mathbb{R}, |F(t)| \le K, \forall t \in \mathbb{R})$ tak $\langle f \rangle = \langle \dot{F} \rangle = 0$.

Důkaz: $|\langle f \rangle| = \lim_{\tau \to +\infty} \left| \frac{1}{\tau}(F(\tau) - F(0)) \right| \le \lim_{\tau \to +\infty} \left| \frac{2K}{\tau} \right| = 0$

Homogenní funkce stupně $k \in \mathbb{N}$ je fce $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f = f(\vec{x})$ taková, že $\forall \lambda > 0$ platí $f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda^k f(\vec{x})$.

Eulerova věta pro homogenní fci stupně k $\quad \boxed{\sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} x_j = k f(\vec{x})}$

Důkaz: $\frac{d}{d\lambda} f(\lambda \vec{x}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\lambda \vec{x})}{\partial(\lambda x_j)} \cdot x_j = k \lambda^{k-1} f(\vec{x}) \quad \forall \lambda > 0$

tedy i pro $\lambda = 1$

Značení: Pro funkci $Z = Z(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N, t)$, $Z: \mathbb{R}^{6N+1} \to \mathbb{R}$ a funkce $\vec{x}_\alpha = \vec{x}_\alpha(t) \quad \forall \alpha \in \hat{N}$

označíme $\tilde{Z} = \tilde{Z}(t) := Z(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1, \dots, \dot{\vec{x}}_N, t) \quad \tilde{Z}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Věta (o viriálu) Označme $G = \sum_{\alpha=1}^N \vec{p}_\alpha \vec{x}_\alpha$ a $T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{v}_\alpha^{\,2}$. Pro libovolné řešení $\vec{x}_\alpha = \vec{x}_\alpha(t) \quad \forall \alpha \in \hat{N}$

Newtonových pohybových rovnic $m_\alpha \ddot{\vec{x}}_\alpha = \vec{F}_\alpha \quad \forall \alpha \in \hat{N}$ platí: $\left\langle \frac{d\tilde{G}}{dt} \right\rangle = 0 \Rightarrow \langle \tilde{T} \rangle = -\frac{1}{2} \underbrace{\left\langle \sum_{\alpha=1}^N \tilde{\vec{F}}_\alpha \cdot \vec{x}_\alpha \right\rangle}_{\text{Viriál}}$

Důkaz: $2\tilde{T} = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{x}}_\alpha^{\,2} = \underbrace{\left(\sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{x}}_\alpha \vec{x}_\alpha \right)^{\cdot}}_{\dot{\tilde{G}}} - \sum_\alpha m_\alpha \ddot{\vec{x}}_\alpha \vec{x}_\alpha = \dot{\tilde{G}} - \sum_\alpha \tilde{\vec{F}}_\alpha \cdot \vec{x}_\alpha$

$\Rightarrow \langle \tilde{T} \rangle = \frac{\langle \dot{\tilde{G}} \rangle}{2} - \frac{1}{2} \left\langle \sum_\alpha \tilde{\vec{F}}_\alpha \vec{x}_\alpha \right\rangle$

Pozn: $\langle \dot{\tilde{G}} \rangle = 0$ např. pokud je G omezená funkce
což nastává např. pokud jsou polohy $\vec{x}_\alpha$ a rychlosti $\dot{\vec{x}}_\alpha$ omezené funkce $\forall \alpha \in \hat{N}$

Důsledek Jsou-li navíc síly $\vec{F}_\alpha$ potenciální tj. $\vec{F}_\alpha = -\nabla_\alpha U = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}_\alpha}$ a potenciál $U = U(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)$ je homogenní funkce stupně k v proměnných $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N$ tak: $\langle \dot{\tilde{G}} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \tilde{T} \rangle = \frac{k}{2} \langle \tilde{U} \rangle$.

Důkaz:

$\sum_\alpha \tilde{\vec{F}}_\alpha \cdot \vec{x}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \tilde{F}_{\alpha i} x_{\alpha i} = -\sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x_{\alpha i}} \tilde{x}_{\alpha i} = -kU$

Pokud bychom označili $E = T + U$ "celková energie soustavy"
tak
$\langle \tilde{E} \rangle = \langle \tilde{T} \rangle + \langle \tilde{U} \rangle = (1 + \frac{k}{2}) \langle \tilde{U} \rangle \Rightarrow \langle \tilde{U} \rangle = \frac{2}{k+2} \langle \tilde{E} \rangle$

$\langle \tilde{T} \rangle = \frac{k}{k+2} \langle \tilde{E} \rangle$

pokud bude navíc $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ tak je $\tilde{E} = konst$ a střední hodnoty $\langle \tilde{E} \rangle = E$.