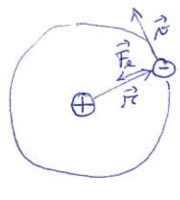
9.52 __Doba života Rutherfordova atomu__ Předpokládejte, že elektron v atomu vodíku je na kruhové dráze o poloměru $R = 10^{-10}\,m$. Určete dobu t_c, za kterou nastane jeho pád na centrum v důsledku radiačního útlumu.

Návod: Řešte rovnici $\frac{dE}{dt} = -W(t)$ kde $E = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ a $W = \frac{2}{3c^3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} r^2\omega^4(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) = \frac{2}{3m^2c^3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{1}{r^4}$



$m = m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,kg$

$m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,kg$

$m_p \gg m_e$ ... proto se omezíme místo těžišťové soustavy na pohyb elektronu v poli protonu

elektron se pohybuje v poli protonu s potenciálem $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r}$ → sféricky symetrické pole ⇒ zachovává se $\vec{L}$ pohyb probíhá v rovině kolmé k $\vec{L}$

a intenzitou $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^3}\vec{r}$

máme předpokládat pohyb po kruhové dráze poloměr r zatím konstantní

$\vec{r} = r(\cos\omega t, \sin\omega t)$

$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = r\omega(-\sin\omega t, \cos\omega t)$

$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = r\omega^2(-\cos\omega t, -\sin\omega t)$

pohybová rovnice $m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{E}(\vec{r})$ dává pro kruhovou dráhu podmínku

$$\underbrace{m\omega^2 r}_{\text{dostředivá síla}} = \underbrace{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}_{\text{elektrická síla}}$$

$$\Downarrow$$

$$\omega^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3 m}$$

Energie elektronu

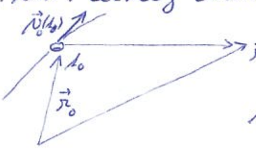
$$E = \frac{1}{2} m\vec{v}^2 + (-e)\varphi = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2} m\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3 m}\right) r^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$E = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Při zrychleném pohybu nabité částice ($\vec{a} \neq 0$) dochází k vyzařování elmag. vln. Celkový okamžitý vyzařovaný výkon je dán Larmorovým vzorcem

$$W(t) = \frac{2}{3c^3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\dot{\vec{v}}_0^{\,2}(t_0) \quad \text{kde}$$

v_0 ... rychlost částice v retardovaném čase



$$t = t_0 + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_0)|}{c}$$

dosadíme-li kruhovou dráhu

$$W(t) = \frac{2}{3c^3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} r^2\omega^4(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) = \frac{2}{3m^2c^3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^3\frac{1}{r^4}$$

toto vyzařování je na úkor energie elektronu

tedy $-\frac{dE}{dt} = W(t)$ $\qquad -\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right) = \frac{2}{3m^2c^3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^3\frac{1}{r^4}$

$$-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = \underbrace{\frac{4}{3m^2c^3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2}_{\alpha}\frac{1}{r^4} \Rightarrow -r^2\frac{dr}{dt} = \alpha \quad \Big/\int_0^{t_c} dt$$

$$-\int_0^{t_c} r^2 \underbrace{\frac{dr}{dt}dt}_{dr} = \int_0^{t_c}\alpha\, dt = \alpha t_c$$

$$\frac{R^3}{3} = -\left[\frac{r^3}{3}\right]_R^0 = -\int_R^0 r^2\,dr = \alpha t_c$$

$$\underline{\underline{t_c = \frac{R^3}{3\alpha} \approx 10^{-10}\,s}}$$

(zanedbali jsme relativistické efekty)

8.35 Vypočítejte energii elektrického pole náboje rozloženého s konstantní hustotou v kulovém objemu.

hustota energie elektromagnetického pole $w = \frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) = \frac{1}{2}(\varepsilon\vec{E}^2 + \mu\vec{H}^2)$

(v měkkém prostředí)

sférické s. $dV = r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$

$$\text{energie} \quad W = \int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \cancel{\frac{1}{2}\mu_0 H^2}\,dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_{\mathbb{R}^3}E^2\,dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\int_{V_R}\frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon_0 R^3)^2}r^2\,dV + \int_{\mathbb{R}^3\setminus V_R}\frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{1}{r^4}\,dV\right) = *$$

náboje jsou ve vakuu

máme pouze elektrostatické pole

$Q = \frac{4}{3}\pi R^3\rho \qquad q = \frac{4}{3}\pi r^3\rho \qquad q = Q\frac{r^3}{R^3}$

intenzita el. pole vně koule $r > R$ $\quad \vec{E}_{OUT} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\vec{r}$

uvnitř koule $r \leq R$ $\quad \vec{E}_{IN} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}\vec{r}$

$$* = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2 r^4\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr + \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_R^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{1}{r^2}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr = \frac{1}{\cancel{2}}\varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R\left[\varphi\right]_0^{2\pi}\overbrace{\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}}^{\cancel{2}}$$

$$+ \frac{1}{\cancel{2}}\varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left[\varphi\right]_0^{2\pi}\underbrace{\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}}_{\cancel{2}}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{10R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{2R} = \underline{\underline{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{5}\frac{Q^2}{R}}}$$