Rovnice elektrodynamiky v Minkowského prostoročase

Princip relativity (stejný tvar fyzikálních zákonů ve všech inerciálních vztažných soustavách) lze matematicky vyjádřit kovariantním tvarem rovnic (všechny členy rovnice se transformují stejně při Lorentzových tr.)

Př: $\quad T'^{\mu} = K'^{\mu} \qquad T'^{\mu} = \alpha^{\mu}{}_{\nu} T^{\nu} \qquad \alpha^{\mu}{}_{\nu} T^{\nu} = \alpha^{\mu}{}_{\nu} K^{\nu} / (\alpha^{-1})^{\sigma}{}_{\mu} \qquad T^{\sigma} = K^{\sigma}$

d'Alembretovy rovnice - nehomogení vlnové pro potenciály (ve vakuu)

$\Box\, \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\qquad$ Lorenzova kalibrační podmínka

$\Box\, \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$ $\qquad$ $\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

chceme tvar ve kterém bude na obou stranách rovnice vystupovat čtyřvektor

d'Alembertův operátor $\Box$

skalární operátor, zapíšeme ho pomocí čtyřtenzorů a ukážeme jeho invarianci

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^i} - \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} = -g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = -g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu}$$

$x'^{\mu} = \alpha^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \qquad x^{\nu} = (\alpha^{-1})^{\nu}{}_{\sigma} x'^{\sigma} \qquad g'^{\mu\nu} = \alpha^{\mu}{}_{\rho} \alpha^{\nu}{}_{\sigma} g^{\rho\sigma}$

$$\partial'_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = (\alpha^{-1})^{\nu}{}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = (\alpha^{-1})^{\nu}{}_{\mu} \partial_{\nu}$$

$$\Box' = -g'^{\mu\nu} \partial'_{\mu} \partial'_{\nu} = -\alpha^{\mu}{}_{\rho} \alpha^{\nu}{}_{\sigma} g^{\rho\sigma} (\alpha^{-1})^{\kappa}{}_{\mu} (\alpha^{-1})^{\lambda}{}_{\nu} \partial_{\kappa} \partial_{\lambda} = -\delta^{\kappa}_{\rho} \delta^{\lambda}_{\sigma} g^{\rho\sigma} \partial_{\kappa} \partial_{\lambda} = -g^{\rho\sigma} \partial_{\rho} \partial_{\sigma} = \Box$$

čtyřproud

Náboj je invariant $\mathrm{d}Q' = \mathrm{d}Q = \rho\, \mathrm{d}V$ a díky kontrakci délek $\mathrm{d}V = \frac{1}{\gamma} \mathrm{d}V_0$ proto $\rho = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V} = \gamma \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V_0} = \gamma \rho_0$, kde ρ_0 je klidová hustota náboje.
Inspirujeme se proudovou hustotu ($\vec{j} = \rho \vec{v}$) a definujeme *čtyřproud* jako součin invariantu ρ_0 a čtyřrychlosti u^{μ}

$$(j^{\mu}) = \rho_0 (u^{\mu}) = \rho_0 (\gamma c, \gamma \vec{v}) = (\rho_0 \gamma c, \rho_0 \gamma \vec{v}) = (\rho c, \rho \vec{v}) = (\rho c, \vec{j})$$

Rovnice kontinuity v kovariantním tvaru

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = \frac{\partial c\rho}{\partial (ct)} + \frac{\partial j^i}{\partial x^i} = \frac{\partial j^0}{\partial x^0} + \frac{\partial j^i}{\partial x^i} = \frac{\partial j^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = \partial_{\mu} j^{\mu}$$

čtyřdivergence $\boxed{\partial_{\mu} j^{\mu} = 0}$

čtyřpotenciál

Upravíme rovnice tak aby na pravé straně stál čtyřvektor

$$\Box\, \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\mu_0 c^2 \rho = -\mu_0 c j^0 \qquad \Box\, \frac{\varphi}{c} = -\mu_0 j^0 \qquad \Box\, \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

<u>čtyřpotenciál</u> $(A^{\mu}) = (\frac{\varphi}{c}, \vec{A})$

d'Alembertovy rovnice v kovariantním tvaru $\boxed{\Box\, A^{\mu} = -\mu_0 j^{\mu}}$

$$0 = \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial (ct)} \frac{\varphi}{c} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \frac{\partial A^0}{\partial x^0} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = \partial_{\mu} A^{\mu}$$

Lorenzova podmínka v kovariantním tvaru $\boxed{\partial_{\mu} A^{\mu} = 0}$

Kalibrační transformace v kovariantním tvaru

$$\widetilde{\varphi} = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \qquad \widetilde{A}^0 = \frac{\widetilde{\varphi}}{c} = \frac{\varphi}{c} - \frac{\partial \Lambda}{\partial (ct)} = A^0 - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^0} = A^0 - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_0}$$

$$\vec{\widetilde{A}} = \vec{A} + \operatorname{grad} \Lambda \qquad \widetilde{A}^i = A^i + \frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = A^i - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i}$$

$\boxed{\widetilde{A}^{\mu} = A^{\mu} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_{\mu}} = A^{\mu} - \partial^{\mu} \Lambda}$ $\quad$ nebo $\quad$ $\boxed{\widetilde{A}_{\mu} = A_{\mu} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^{\mu}} = A_{\mu} - \partial_{\mu} \Lambda}$

(gradient $\partial^{\mu} \Lambda = g^{\mu\nu} \partial_{\nu} \Lambda$ $\quad$ vs. $\quad$ složka jednoformy $\mathrm{d}\Lambda = \frac{\partial \Lambda}{\partial x^{\nu}} \mathrm{d}x^{\nu} = \partial_{\nu} \Lambda\, \mathrm{d}x^{\nu}$)

Maxwellovy–Lorentzovy rovnice (ve vakuu)

$\boxed{\text{I.}}$ $\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ $\boxed{\operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}}$ $\quad$ $\boxed{\text{II.}}$ $\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0}$ $\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}$

Zapíšeme vektory $\vec{E}$, $\vec{B}$ pomocí čtyřpotenciálu. Nejprve připomeneme jak tomu bylo v $\mathbb{R}^3$ pomocí potenciálů: $\quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$

$$B_i = (\operatorname{rot} A)_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} B_k \qquad B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} = \widehat{B}_{23} \qquad \widehat{B}_{jk} = \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k}$$

$$B_i = \tfrac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \widehat{B}_{jk} \qquad \widehat{B}_{jk} = \varepsilon_{jki} B_i \qquad \widehat{B} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 \\ -B_3 & 0 & B_1 \\ B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \widehat{B}_{jk} = \partial_j A_k - \partial_k A_j$$

Obdobně jako u úhlové rychlosti $\widetilde{\Omega}_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \widetilde{\omega}_{jk}$ i zde jsou složky $\vec{B}$ ztotožněny (přes Hodgeův duální operátor) se složkami složky antisymetrického tenzoru 2. řádu $\widehat{B}$. Proto je $\vec{B}$ pseudovektor.

*Hodgeoův operátor $* : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{n-k}(V^*)$ nad n-dim. vek. pr. (V, g, o)

$$(*\alpha)_{j_1,\dots,j_{n-k}} = \frac{1}{k!} \alpha^{i_1,\dots,i_k} \omega_{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_{n-k}}, \quad \text{kde} \quad \omega_{i_1,\dots,i_n} = o(\text{baze}) \sqrt{|g|} \epsilon_{i_1,\dots,i_n}$$

Tenzor elektromagnetického pole

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = c\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi}{c}\right) - \frac{\partial A_x}{\partial (ct)}\right] = c\left[-\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0}\right]$$

$$\stackrel{(A^1=-A_1)}{=} c\left[\frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1}\right] = cF_{01}$$

$$B_x = [\mathrm{rot}\,\vec{A}]_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} = \frac{\partial A_2}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^2} = F_{32}$$

Tenzor elektromagnetického pole $\boxed{F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}$

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

zvednutím indexů $F^{\mu\nu} = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F_{\rho\sigma} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

je antisymetricky $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$

transformace $F'^{\mu\nu}(x') = \alpha^\mu{}_\rho \alpha^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(x)$

kalibrační invariance $\widetilde{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \widetilde{A}^\nu - \partial^\nu \widetilde{A}^\mu = \partial^\mu(A^\nu - \partial^\nu \Lambda) - \partial^\nu(A^\mu - \partial^\mu\Lambda) =$

$$= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu\partial^\nu\Lambda + \partial^\nu\partial^\mu\Lambda = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}$$

Duální tenzor

Čtyřrotace čtyřvektoru je tedy antisymetrický čtyřtenzor druhého řádu, Hodgeův duál z něj udělá zase čtyřtenzor druhého řádu.

Duální tenzor $\boxed{F^*_{\kappa\lambda} = \frac{1}{2!}\epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}F^{\mu\nu}}$ $\qquad F^{*\kappa\lambda} = -\frac{1}{2!}\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}F_{\mu\nu}$

Levi–civitův symbol $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ je úplně antisymetrický a $\epsilon_{0123} = 1 = \epsilon^{0123}$.

$$F^*_{01} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{01\mu\nu}F^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{0123}F^{23} + \varepsilon_{0132}F^{32}) = \tfrac{1}{2}(F^{23} - (-F^{23})) = F^{23} = -B_x$$

$$F^*_{12} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{12\mu\nu}F^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{1203}F^{03} + \varepsilon_{1230}F^{30}) = \tfrac{1}{2}(F^{03} - (-F^{03})) = F^{03} = -\tfrac{E_z}{c}$$

$$F^*_{13} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{13\mu\nu}F^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{1302}F^{02} + \varepsilon_{1320}F^{20}) = \tfrac{1}{2}(-F^{02} + F^{20})) = F^{20} = \tfrac{E_y}{c}$$

$$(F^{*\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} & \frac{E_y}{c} \\ -B_y & \frac{E_z}{c} & 0 & -\frac{E_x}{c} \\ -B_z & -\frac{E_y}{c} & \frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix}$$

Přechod od $F^{\mu\nu}$ k $F^{*\mu\nu}$ odpovídá záměně $\frac{\vec{E}}{c} \to -\vec{B}$ a $\vec{B} \to \frac{\vec{E}}{c}$.

Maxwellovy–Lorentzovy rovnice v kovariantním tvaru

I. série $\boxed{\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \partial_\nu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\mu}$ $\qquad$ II. série $\boxed{\frac{\partial F^{*\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \partial_\nu F^{*\mu\nu} = 0}$

$$\frac{\partial F^{0\nu}}{\partial x^\nu} = 0 + \frac{\partial F^{0i}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(-\frac{E_i}{c}\right) = -\frac{1}{c}\,\mathrm{div}\,\vec{E} = -\mu_0 j^0 = -\mu_0 c\rho$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \mu_0 c^2 \rho = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial F^{1\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial F^{10}}{\partial x^0} + 0 + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial (ct)}\left(\frac{E_x}{c}\right) + \frac{\partial(-B_z)}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z} =$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} - (\mathrm{rot}\,\vec{B})_x = -\mu_0 j_x \qquad (\mathrm{rot}\,\vec{B})_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} = \mu_0 j_x$$

$$\frac{\partial F^{*0\nu}}{\partial x^\nu} = 0 + \frac{\partial F^{*0i}}{\partial x^i} = \frac{\partial B_i}{\partial x^i} = \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

$$\frac{\partial F^{*1\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial F^{*10}}{\partial x^0} + 0 + \frac{\partial F^{*12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{*13}}{\partial x^3} = \frac{\partial(-B_x)}{\partial (ct)} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{E_z}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E_y}{c}\right)$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t} - \frac{1}{c}(\mathrm{rot}\,\vec{E})_x = 0 \qquad \left(\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_x = 0$$

Lorentzova čtyřsíla

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(m_0 u^\mu) = K^\mu \qquad (u^\mu) = (\gamma c, \gamma\vec{v}) \qquad (K^\mu) = (\tfrac{\gamma}{c}\vec{v}\cdot\vec{F}, \gamma\vec{F})$$

Lorentzova síla $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$

$$K^1 = \gamma F_x = \gamma e(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})_x = e(\gamma\tfrac{c}{c}E_x + \gamma v_y B_z - \gamma v_z B_y) =$$

$$= e(u_0 F^{10} + (-u_2)(-F^{12}) + u_3 F^{13}) = eF^{1\nu}u_\nu$$

$$K^0 = \tfrac{\gamma}{c}\vec{v}\cdot\vec{F} = e\tfrac{\gamma}{c}\vec{v}\cdot\vec{E} = e(-\tfrac{E_i}{c})(-\gamma v_i) = eF^{0\nu}u_\nu$$

Lorentzova čtyřsíla $\boxed{K^\mu = eF^{\mu\nu}u_\nu}$

Relativistické invarianty elektromagnetického pole

$I_0 = F^\mu{}_\mu = g_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0$ $\qquad$ (Hadamardův součin $(A\circ B)_{ij} = A_{ij}\cdot B_{ij}$, $\not\supseteq$)

$I_1 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2})$ $\qquad$ Další invarianty jsou již buď závislé nebo

$I_2 = F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu} = 4\frac{\vec{E}\cdot\vec{B}}{c}$ $\qquad$ triviální. $I_1 = -F^*_{\mu\nu}F^{*\mu\nu}$

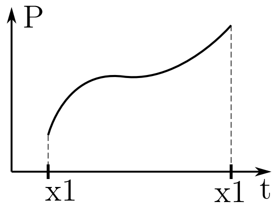
Podle znamének těchto invariantů lze provést relativisticky invariantní klasifikaci EM–polí do devíti tříd. Případ $I_1 = 0 = I_2$ tj. $\vec{E}\perp\vec{B}$, $E = cB$ odpovídá rovinné elektromagnetické vlně ve vakuu.

Lagrangeův formalizmus v teorii pole

V STR nelze interakci mezi částicemi popsat pomocí potenciálů (z důvodu konečné rychlosti šíření interakce). Soustavu interagujících částic je potřeba doplnit o další fyzikální objekt (silové pole) s vlastními stupni volnosti, který tuto interakci zprostředkuje.
Pole resp. soustavu polí popíšeme sadou hladkých funkcí $q_a(x^\mu)$, $a = 1, \dots, n$ – obecných souřadnic polí na prostoročasu

Pohyb nerelativistické částice po přímce - motivace

$S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - U(x)\,\mathrm{d}t = \int_{\langle t_1, t_2\rangle} \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 - U(\psi)\,\mathrm{d}t$



Speciální případ pole na 1–dimenzionálním prostoročasu odpovídající historii částice.

Pro částice	Pro pole
t	x^μ
$q_i(t)$	$q_a(x^\mu)$
$S[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\,\mathrm{d}t$	$S[q_a(x^\mu)] = \frac{1}{c} \int_{V^*} \mathcal{L}(q_a, q_{a,\nu}, x^\mu)\,\mathrm{d}V^*$

Akce pro pole

$$\boxed{S[q_a(x^\mu)] = \frac{1}{c} \int_{V^*} \mathcal{L}(q_a, q_{a,\nu}, x^\mu)\,\mathrm{d}V^*} \qquad \text{kde } q_{a,\nu} = \frac{\partial q_a}{\partial x^\nu} = \partial_\nu q_a$$

je objemový integrál přes čtyřrozměrnou oblast V^* s objemovým elementem

$$\mathrm{d}V^* = \mathrm{d}x^0\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3 = c\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = c\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}V$$

z hustoty Lagrangeovy funkce – lagrangiánu $\mathcal{L}(q_a, q_{a,\nu}, x^\mu)$.

Speciálně pro $V^* = \langle ct_1, ct_2\rangle \times V$ $\qquad S = \int_{V^*} \mathcal{L}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}V = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_V \mathcal{L}\,\mathrm{d}V\right)\mathrm{d}t$

Divergenční věta

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_\Omega \mathrm{d}\omega$$

Ω, $M\dots k$-rozměrné variety v $\mathbb{R}^n$, $\overline{\Omega} \subset M$ kompaktní
$\partial\Omega\dots$ hranice Ω v M s orientací pomocí vnější normály
$\omega \in C^1(\overline{\Omega})\dots$ (k-1)-forma, $\mathrm{d}\omega$ její vnější derivace (k-forma)

Hamiltonův princip pro pole

Skutečný časový vývoj soustavy polí se děje s takovou závislostí q_a na x^μ, pro kterou akce S nabývá stacionární hodnoty vzhledem k variacím $\delta q_a(x^\mu)$ splňujícím podmínku pevných konců, která požaduje nulovost variací na hranici ∂V^* oblasti V^* tj. $\delta q_a(x^\mu)|_{\partial V^*} = 0$.

Rovnice pole

$$\begin{aligned}
\delta S &= \frac{1}{c} \int_{V^*} \delta\mathcal{L}(q_a, q_{a,\nu}, x^\mu)\,\mathrm{d}V^* = \frac{1}{c} \int_{V^*} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a}\delta q_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}\delta q_{a,\nu}\right]\mathrm{d}V^* \\
&= \frac{1}{c} \int_{V^*} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a}\delta q_a + \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}\delta q_a\right) - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}\right)\delta q_a\right]\mathrm{d}V^* \\
&= \frac{1}{c} \int_{V^*} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a}\delta q_a - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}\right)\delta q_a\right]\mathrm{d}V^* + \frac{1}{c} \int_{V^*} \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}\delta q_a\right)\mathrm{d}V^* \\
&= \frac{1}{c} \int_{V^*} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}\right)\right]\delta q_a\,\mathrm{d}V^* + \frac{1}{c} \int_{\partial V^*} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}\delta q_a\right)\mathrm{d}f_\nu
\end{aligned}$$

Lagrangeovy rovnice pro soustavu polí v Minkowského prostoročase

$$\sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = 0 \qquad \forall a \in \widehat{n}$$

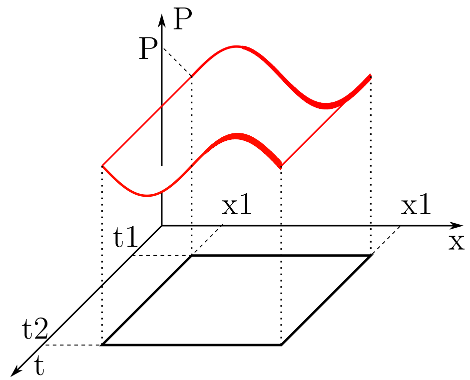
$\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ je derivace složených funkcí podle řetězového pravidla

$$q_{a,0} = \frac{\partial q_a}{\partial x^0} = \frac{\partial q_a}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x^0} = \frac{1}{c} q_{a,t} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,0}} = c\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,t}} \qquad \frac{\partial}{\partial x^0}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,0}} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,t}}$$

Homogenní struna

Jednorozměrné pole $q_1 = \psi = \psi(t, z)$ na dvourozměrném prostoročasu.

$\rho\dots$ lineární hustota struny
$T\ \dots$ síla napínající strunu
Hustota kinetické energie $\kappa = \frac{1}{2}\rho\psi_t^2$
Hustota potenciální energie $u = \frac{1}{2}T\psi_z^2$
$\psi_t = \frac{\partial \psi}{\partial t} \qquad \psi_z = \frac{\partial \psi}{\partial z}$
Hustota Lagrangeovy funkce
$\mathcal{L}(\psi_t, \psi_z) = \kappa - u = \frac{1}{2}\rho\psi_t^2 - \frac{1}{2}T\psi_z^2$



Pohybové rovnice pole

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_z}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$$

Vlnová rovnice pro strunu

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\psi_t) + \frac{\partial}{\partial z}(T\psi_z) - 0 = \rho\psi_{tt} - T\psi_{zz} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

Nejednoznačnost lagrangiánu $\mathcal{L}$

Hustota Lagrangeovy funkce je pro dané pole určena až na divergenci libovolného čtyřvektoru $F^\mu(q_a, x^\nu)$. Lagrangiány $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{\partial F^\mu(q_a, x^\nu)}{\partial x^\mu}$ vedou na stejné rovnice pole.

$$\delta \frac{1}{c} \int_{V^*} \frac{\partial F^\mu}{\partial x^\mu} \, \mathrm{d}V^* = \frac{1}{c} \delta \int_{\partial V^*} F^\mu \, \mathrm{d}f_\mu = \frac{1}{c} \int_{\partial V^*} \frac{\partial F^\mu}{\partial q_a} \underbrace{\delta q_a}_{=0} \mathrm{d}f_\mu = 0$$

Hamiltonův princip spolu s Lagrangeovými rovnicemi lze použít v prostorech libovolné dimenze. Úloha nalézt lagrangián, který vede na rovnice popisující pohyb daného pole je obtížná a pro její řešení nejsou známa obecně platná pravidla. Využívají se principy symetrie a jednoduchosti. Například v STR jde o požadavek relativistické invariance lagrangiánu, který plyne z relativistické invariance akce a integrace vzhledem k $\mathrm{d}V^{*\prime} = |J| \, \mathrm{d}V^*$

$$J = \det \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) = \det(\alpha^\mu{}_\nu) = \det A = \pm 1$$

Transformace polí

- skalární pole $\psi'(x'^\kappa) = \psi(x^\kappa)$
- vektorové pole $A'^\mu(x'^\kappa) = \alpha^\mu{}_\nu A^\nu(x^\kappa)$
- tenzorové pole $F'^{\mu\nu}(x'^\kappa) = \alpha^\mu{}_\rho \alpha^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(x^\kappa)$

$$x'^\kappa = \alpha^\kappa{}_\lambda x^\lambda \qquad A'^\mu(x'^\kappa) = \alpha^\mu{}_\nu A^\nu((\alpha^{-1})^\lambda{}_\kappa x'^\kappa)$$

Akce pro soustavu nabitých částic a elektromagnetického pole

Akci pro soustavu interagujících nabitých částic v EM poli sestavíme ze dvou mezních případů

- soustava vzájemně neinteragujících nabitých částic ve vnějším poli
- EM pole buzené zadaným rozložením nabitých částic a jejich rychlostí

Soustava neinteragujících částic ve vnějším poli

Zanedbává se vzájemná interakce částic stejně jako jejich vliv na EM pole.
Lagrangeova funkce

- pro nabitou částici s klidovou hmotností m_0 a nábojem e v EM poli
  $L = -m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - e(\varphi(\vec{r},t) - \vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{r},t))$
- pro soustavu částic s klidovými hmotnostmi m_α a náboji e_α

$$L = \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N} -m_\alpha c^2\sqrt{1-\frac{v_\alpha^2}{c^2}}}_{L_m} \underbrace{-\sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha[\varphi(\vec{r}_\alpha,t) - \vec{v}_\alpha\cdot\vec{A}(\vec{r}_\alpha,t)]}_{L_{mf}}$$

Diracova delta funkce δ

Je “funkce” na $\mathbb{R}$ s vlastnostmi $\int_{\mathbb{R}}\delta(x)\,\mathrm{d}x = 1$ a $\delta(x)=0,\ \forall x\neq 0.$

Platí pro ni $\int_{\mathbb{R}}\delta(x)f(x)\,\mathrm{d}x = f(0)$ $\qquad$ $\int_{\mathbb{R}}\delta(x-a)f(x)\,\mathrm{d}x = f(a)$

$\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_a) = \delta(x-x_a)\delta(y-y_a)\delta(z-z_a)$ $\qquad$ $\int_{\mathbb{R}^3}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_a)f(\vec{r})\,\mathrm{d}V = f(\vec{r}_a)$

Pro bodové náboje je nábojová a proudová hustota dána vztahy

$$\rho(\vec{r},t) = \sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha\delta(\vec{r}-\vec{r}_\alpha(t)) \qquad \vec{j}(\vec{r},t) = \sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha\vec{v}_\alpha(t)\delta(\vec{r}-\vec{r}_\alpha(t))$$

Interakční lagrangián

$$\begin{aligned}
L_{mf} &= -\sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha\varphi(\vec{r}_\alpha,t) + \sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha\vec{v}_\alpha\cdot\vec{A}(\vec{r}_\alpha,t) = \\
&= -\sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha\int_{\mathbb{R}^3}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_\alpha)\varphi(\vec{r},t)\,\mathrm{d}V + \sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha\vec{v}_\alpha\cdot\int_{\mathbb{R}^3}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_\alpha)\vec{A}(\vec{r},t)\,\mathrm{d}V = \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3}\underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_\alpha)}_{\rho(\vec{r},t)}\varphi(\vec{r},t)\,\mathrm{d}V + \int_{\mathbb{R}^3}\underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha\vec{v}_\alpha\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_\alpha)}_{\vec{j}(\vec{r},t)}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)\,\mathrm{d}V = \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3} c\rho(\vec{r},t)\frac{\varphi(\vec{r},t)}{c} - \vec{j}(\vec{r},t)\cdot\vec{A}(\vec{r},t)\,\mathrm{d}V = \int_{\mathbb{R}^3}\underbrace{-j^\mu A_\mu}_{\mathcal{L}_{mf}}\mathrm{d}V
\end{aligned}$$

Hustota Lagrangeovy funkce pro EM pole

Akce pro pole $S_f = \frac{1}{c}\int_{V^*}\mathcal{L}_f\,\mathrm{d}V^*$ má být stejná ve všech inerciálních vztažných soustavách a neměla by záviset na zvolené kalibraci pole.
Hustotu Lagrangeovy funkce $\mathcal{L}_f$ pro EM pole hledáme tak, aby byla:

- nejvýše kvadratická v polních proměnných (Maxwellovy rce. jsou lineární)
- relativistiky invariantní (kvůli kovarianci polní rovnice)
- kalibračně invariantní (nezávislá na parametrizaci pole)

Kvadratickými v polních proměnných $\vec{E}, \vec{B}, A_\mu$, $\boxed{\partial_\nu A_\mu = A_{\mu,\nu}}$ jsou invarianty $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ (skalár) $F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu}$ (pseudoskalár) (další $A_\mu A^\mu$, $A_{\mu,\nu}A^{\mu,\nu}$ nejsou kalib. inv.)

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\mu_0}2(\vec{B}^2 - \frac{1}{c^2}\vec{E}^2) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2 - \frac{1}{2}\mu_0\vec{H}^2$$

$$\mathcal{L}(A_\mu, A_{\mu,\nu}, x^\nu) = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu = -\frac{1}{4\mu_0}(A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu})(A^{\nu,\mu} - A^{\mu,\nu}) - j^\mu A_\mu$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\kappa,\lambda}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\kappa} = 0 \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\kappa} = -j^\mu\frac{\partial A_\mu}{\partial A_\kappa} = -j^\mu\delta_\mu^\kappa = -j^\kappa$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\kappa,\lambda}} &= -\frac{1}{4\mu_0}\left(\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial A_{\kappa,\lambda}}F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu}\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial A_{\kappa,\lambda}}\right) = -\frac{1}{4\mu_0}\left(\frac{\partial(A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu})}{\partial A_{\kappa,\lambda}}F^{\mu\nu} + \right. \\
&\left. + F_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F_{\rho\sigma}}{\partial A_{\kappa,\lambda}}\right) = -\frac{1}{4\mu_0}\left((\delta_\nu^\kappa\delta_\mu^\lambda - \delta_\mu^\kappa\delta_\nu^\lambda)F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial A_{\kappa,\lambda}}\right) = \\
&= -\frac{1}{4\mu_0}\left(F^{\lambda\kappa} - F^{\kappa\lambda} + F^{\rho\sigma}\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial A_{\kappa,\lambda}}\right) = -\frac{1}{4\mu_0}\left(2F^{\lambda\kappa} + 2F^{\lambda\kappa}\right) = \frac{1}{\mu_0}F^{\kappa\lambda}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\kappa,\lambda}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\kappa} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{1}{\mu_0}F^{\kappa\lambda}\right) - (-j^\kappa) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \partial_\lambda F^{\kappa\lambda} = -\mu_0 j^\kappa$$

I. série Maxwellových–Lorentzových rovnic (II. série je splněna potenciály)

Akce pro soustavu nabitých částic a EM pole je $S = S_m + S_{mf} + S_f$, kde

- hmota (matter) $S_m = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{\alpha=1}^{N}(-m_\alpha c^2)\sqrt{1-\frac{v_\alpha^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t$
- pole (field) $S_f = \frac{1}{c}\int_{V^*}(-\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\,\mathrm{d}V^*$
- inetarkce $S_{mf} = \frac{1}{c}\int_{V^*}(-j^\mu A_\mu)\,\mathrm{d}V^* = \int_{t_1}^{t_2}(-\sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha[\varphi(\vec{r}_\alpha,t) - \vec{v}_\alpha\cdot\vec{A}(\vec{r}_\alpha,t)])\,\mathrm{d}t$

Odtud se variací podle proměnných x_α^μ (při neměnných A_μ) získají relativistické pohybové rovnice pro částice v EM poli a variací podle polních proměnných A_μ (při neměnných x_α^μ) Maxwellovy–Lorentzovy rovnice.