

Konfigurační prostor M - polohy systému, $\dim M = \Delta$ souřadnice (q_1, \dots, q_Δ)

Fázový prostor Γ - stavů systému, $\dim \Gamma = 2\Delta$ souřadnice $(q_1, \dots, q_\Delta, p_1, \dots, p_\Delta)$

Pozn. hybnost "klasická" (kinetická) $\vec{p} = m\dot{x}$ vektor X hybnost obecná (kanonická) $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ kovektor

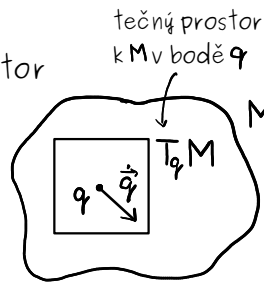
Pozn. Geometrie

Rychlostní fázový prostor (tečný bandl)

$$TM = \bigcup_{q \in M} T_q M$$

Lagrangeova funkce

$$L: TM \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

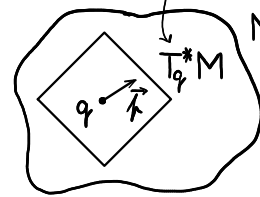


$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Legendreova transformace

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

duální vektorový prostor $k T_q^* M$



Fázový prostor (kotečný bandl)

$$\Gamma = T^* M = \bigcup_{q \in M} T_q^* M$$

Hamiltonova funkce

$$H: \Gamma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Hamiltonovy rovnice (dynamický systém na fázovém prostoru)

Vektorové pole (hamiltonovské)

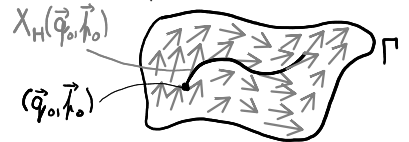
$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad dq_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} d\lambda \quad q_i(\lambda + d\lambda) = q_i(\lambda) + \frac{\partial H}{\partial p_i} d\lambda$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad dp_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} d\lambda \quad p_i(\lambda + d\lambda) = p_i(\lambda) - \frac{\partial H}{\partial q_i} d\lambda$$

Taylor do 1. řádu v $d\lambda \Rightarrow$ numerické řešení

$$X_H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{pmatrix} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

bazické vektory tečného prostoru k fázovému prostoru Γ v daném bodě



Fázová trajektorie - je řešení Hamiltonových rovnic $(\vec{q}(\lambda), \vec{p}(\lambda))$

- je určena jednoznačně počátečními podmínkami $\vec{q}(0) = \vec{q}_0, \vec{p}(0) = \vec{p}_0$

- každým bodem Γ prochází právě jedna fázová trajektorie

- je integrální křivka pole X_H parametrizovaná časem tj. její tečný vektor v každém bodě (\vec{q}, \vec{p}) je $X_H(\vec{q}, \vec{p})$

Pozn. Hamiltonián H (resp. pole X_H) je generátorem časového vývoje = toku vektorového pole X_H

Fázový portrét - obraz na kterém jsou fázové trajektorie pro všechny počáteční podmínky

(zobrazuje tzv. hamiltonovský tok - tok hamiltonovského vektorového pole X_H)

Př. Harmonický oscilátor $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2 \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q} \rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m} \quad H(q, p) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} k q^2$

Hamiltonovy rovnice

Fázová trajektorie

Hamiltonovské vektorové pole

$$X_H = \begin{pmatrix} \frac{p}{m} \\ -kq \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq \end{aligned} \right\} \text{řešení}$$

$$\ddot{q} + \frac{k}{m} q = 0$$

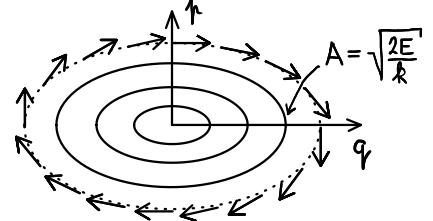
$$q(\lambda) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \lambda + B\right)$$

$$p(\lambda) = -\frac{\sqrt{k m}}{\sqrt{2mE}} A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \lambda + B\right)$$

Fázový portrét

Integrál pohybu

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow E = \text{konst.} \Rightarrow H = \text{konst.} \quad \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} = E \quad \frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{\frac{2E}{k}} = 1$$



Poissonovy závorky a Integrály Pohybu

Funkce $F = F(\vec{q}, \vec{p}, \lambda)$ na fázovém prostoru se nazývá integrálem pohybu (I. P.), pokud pro každou fázovou trajektorii $(\vec{q}(\lambda), \vec{p}(\lambda))$ existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ tak, že $F(\vec{q}(\lambda), \vec{p}(\lambda), \lambda) = c \quad \forall \lambda$.

$$\tilde{F}(\lambda) = F(\vec{q}(\lambda), \vec{p}(\lambda), \lambda) = c \iff 0 = \frac{dF}{d\lambda} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} \Big|_{H.R.} = \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial \lambda}$$

Věta Funkce $F(\vec{q}, \vec{p}, \lambda)$ je integrálem pohybu pro systém s Hamiltonovou funkcí $H(\vec{q}, \vec{p}, \lambda)$

$$\iff \boxed{\{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0}$$

Poissonova závorka diferencovatelných funkcí F, G

na fázovém prostoru

$$\{F, G\} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial G}{\partial q_k}$$

Pozn. $\{.,.\} : C^\infty(\Gamma) \times C^\infty(\Gamma) \rightarrow C^\infty(\Gamma)$

Vektorový prostor hladkých funkcí na Γ

tj. fcí. třídy C^∞ na Γ

Vlastnosti Poissonových závorek $\forall F, G, F_1, F_2, F_3 \in C^1(\Gamma)$ platí:

1) antisymetrie $\{F, G\} = -\{G, F\} \Rightarrow \{F, F\} = 0$

2) bilinearita $\{c_1 F_1 + c_2 F_2, G\} = c_1 \{F_1, G\} + c_2 \{F_2, G\} \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

3) Jacobiho identita $\{F_1, \{F_2, F_3\}\} + \{F_2, \{F_3, F_1\}\} + \{F_3, \{F_1, F_2\}\} = 0$

4) Leibnitzovo pravidlo $\{F_1 \cdot F_2, G\} = \{F_1, G\} \cdot F_2 + F_1 \cdot \{F_2, G\}$

5) derivace podle parametru $\frac{\partial}{\partial \lambda} \{F, G\} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \lambda}, G \right\} + \left\{ F, \frac{\partial G}{\partial \lambda} \right\}$

6) fundamentální Poissonovy závorky $\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}, \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$

Lineární algebra je vektorový prostor V vybavený bilineární operací: $\forall x, y \in V$.
 Lieova algebra $(C^\infty(\Gamma), \{.,.\})$ je lineární algebra jejíž operace je antisymetrická a splňuje Jacobiho identitu.
 Poissonova algebra $(C^\infty(\Gamma), \{.,.\}, \cdot)$
 Asociativní algebra je lineární algebra jejíž operace je asociativní.

Hamiltonovy rovnice $\dot{q}_i = \{q_i, H\} \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\} \quad \forall i \in \hat{A} \rightarrow q_i, p_i$ jsou tzv. kanonicky sdružené proměnné

Pozn. Q.M. pozorovatelným A, B přiřadí samosdružené operátory \hat{A}, \hat{B} na Hilbertově prostoru stavů (kvadr. int. vlnových funkcí $\Psi(x, \lambda)$), jejichž (reálné) vlastní hodnoty odpovídají měřitelným hodnotám veličin, tak aby $C = \{A, B\} \Rightarrow i\hbar \hat{C} = (\hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A}) = [\hat{A}, \hat{B}]$

$C = \{A_1, \dots, A_k\} \Rightarrow \hat{C} = \{\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_k\}$ (princip korespondence) $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ kvůli rozměru (J.s) komutátor

např. $x_j \rightarrow \hat{x}_j(\Psi) = x_j \cdot \Psi \quad p_k \rightarrow \hat{p}_k(\Psi) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k} \Psi \quad [\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\hbar \delta_{jk} \quad \hat{H}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi \quad (\hat{x}^2 = -1)$ kvůli samosdruženosti

Poissonova věta: Poissonova závorka dvou integrálů pohybu je opět integrálem pohybu.

I. P. tvoří Lieovu algebru

Dk. F_1, F_2 jsou I. P. pro systém s Hamiltonovou funkcí $H \quad \left. \frac{dF_i}{d\lambda} \right|_{H.R.} = \{F_i, H\} + \frac{\partial F_i}{\partial \lambda} = 0 \quad i=1,2$

$$\left. \frac{d\{F_1, F_2\}}{d\lambda} \right|_{H.R.} = \{\{F_1, F_2\}, H\} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \{F_1, F_2\} = \{\{F_1, F_2\}, H\} + \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial \lambda}, F_2 \right\} + \left\{ F_1, \frac{\partial F_2}{\partial \lambda} \right\} = \{F_1, F_2, H\} - \{F_1, H, F_2\} - \{F_2, H, F_1\} = \{F_1, F_2, H\} + \{H, F_1, F_2\} + \{F_2, H, F_1\} = 0$$

Integrály pohybu snadno najdeme na základě proměnných které chybí v předpisu Hamiltonovy funkce

1) čas $\lambda \quad H = H(\vec{q}, \vec{p}) \quad$ tj. $\frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \left. \frac{dH}{d\lambda} \right|_{H.R.} = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow$ Hamiltonova funkce $H = H(\vec{q}, \vec{p}) = \text{Konst.}$

2) cyklické souřadnice q_j tj. $\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow p_j = \text{Konst.}$ obdobně pro p_j tj. $\frac{\partial H}{\partial p_j} = 0 \Rightarrow q_j = \text{Konst.}$

Odvození Hamiltonových rovnic z Hamiltonova principu - variace křivek $\vec{q}(\lambda)$ v konfiguračním prostoru

$$0 = \delta S = \delta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda) d\lambda = \delta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\hat{p}_i \dot{q}_i - H(\vec{q}, \vec{p}, \lambda)) d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\dot{q}_i \delta \hat{p}_i + \hat{p}_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta \hat{p}_i) d\lambda =$$

pro $\delta \vec{q}(\lambda_1) = 0$
 $\delta \vec{q}(\lambda_2) = 0$
 $\hat{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

$$= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[\left(-\hat{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta \hat{p}_i \right] d\lambda + \left[\hat{p}_i \delta q_i \right]_{\lambda_1}^{\lambda_2}$$

Pracujeme v proměnných \vec{q}, \vec{p} a až při zápisu výsledných rovnic přejdeme od \vec{q}, \vec{p} k \vec{q}, \vec{p} a zrušíme tak sřečky u \vec{p}
 Variace $\delta \vec{q}$ a $\delta \vec{p}$ nejsou navzájem nezávislé což nevadí neboť koeficienty u $\delta \vec{p}$ jsou nula.

II. $0 \leftarrow \text{ZLVP}$ vzájemně nezávislé I. derivace $= 0$ přímým výpočtem $= 0$ pevné konce

Modifikovaný Hamiltonův princip na fázovém prostoru - variace křivek $(\vec{q}(\lambda), \vec{p}(\lambda))$ ve fázovém prostoru

$$0 = \delta \bar{S} = \delta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\hat{p}_i \dot{q}_i - H(\vec{q}, \vec{p}, \lambda)) d\lambda \quad \text{Eulerovy-Lagrangeovy rce. pro funkcional } \bar{S} \text{ (akci na fázovém pr.)}$$

pro $\delta \vec{q}(\lambda_1) = 0 = \delta \vec{q}(\lambda_2)$
 $\delta \vec{p}(\lambda_1) = 0 = \delta \vec{p}(\lambda_2)$ ← není nutné

$$0 = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial F}{\partial q_j} = \frac{d}{d\lambda} (\hat{p}_i \delta_{ij}) + \frac{\partial H}{\partial q_j} = \dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \Rightarrow \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$0 = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_j} \right) - \frac{\partial F}{\partial p_j} = 0 - \delta_{ij} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_j} = -\dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \Rightarrow \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

V této formulaci začínáme s akci \bar{S} na Γ . Variace $\delta \vec{q}$ a $\delta \vec{p}$ považujeme za nezávislé, stejně tak proměnné \vec{q}, \vec{p} , které již nejsou svázané definicí obecné hybnosti, nýbrž jen Hamiltonovými rovnicemi. V tomto smyslu již mají obě sady Hamiltonových rovnic dynamický obsah.