Ústřední rovnice Lagrangeova — jiný tvar d'Alembertova principu

$$0=\delta A_f = \sum_{i=1}^{3N}(F_i - m_i\ddot x_i)\delta x_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{3N}F_i\delta x_i}_{\delta A \text{ virtuální práce akčních sil}} - \sum_{i=1}^{3N} m_i\ddot x_i\delta x_i = \delta A - \frac{\hat d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{3N} \underbrace{m_i\dot x_i}_{\frac{\partial T}{\partial\dot x_i}}\delta x_i\Big) + \delta\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{3N}\frac12 m_i\dot x_i^2}_{T}\Big) = \delta A - \frac{\hat d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot x_i}\delta x_i\Big)+\delta T$$

$$\ddot x_i\delta x_i = \frac{\hat d}{dt}(\dot x_i\delta x_i) - \dot x_i\frac{\hat d}{dt}(\delta x_i) = \frac{\hat d}{dt}(\dot x_i \delta x_i) - \dot x_i\delta\dot x_i = \frac{\hat d}{dt}(\dot x_i\delta x_i) - \frac12\delta\dot x_i^2 \qquad \boxed{\delta T + \delta A = \frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot x_i}\delta x_i\right)}$$

v obecných souřadnicích: $x_i = \hat x_i(\vec q, t)$ $\quad\delta x_i = \delta\hat x_i = \frac{\partial \hat x_i}{\partial q_j}\delta q_j$ $\quad\hat T(\vec q,\dot{\vec q},t) = T(\dot{\vec{\hat x}}(\vec q,\dot{\vec q},t))$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot x_i}\delta x_i = \frac{\partial T}{\partial \dot x_i}\frac{\partial\hat x_i}{\partial q_j}\delta q_j = \frac{\partial T}{\partial\dot x_i}\frac{\partial \dot{\hat x}_i}{\partial\dot q_j}\delta q_j = \frac{\partial\hat T}{\partial\dot q_j}\delta q_j \qquad \delta A = F_i\delta x_i = F_i\frac{\partial\hat x_i}{\partial q_j}\delta q_j = Q_j\delta q_j = \delta\hat A \qquad \boxed{\delta\hat T + \delta\hat A = \frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial\hat T}{\partial\dot q_j}\delta q_j\right)}$$

$$\delta\hat A = Q_j^{(nep)}\delta q_j + Q_j^{(pot)}\delta q_j = Q_j^{(nep)}\delta q_j + \left(\frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial\hat U}{\partial\dot q_j}\right) - \frac{\partial\hat U}{\partial q_j}\right)\delta q_j = Q_j^{(nep)}\delta q_j + \frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial\hat U}{\partial\dot q_j}\delta q_j\right) - \frac{\partial\hat U}{\partial\dot q_j}\delta\dot q_j - \frac{\partial\hat U}{\partial q_j}\delta q_j = Q_j^{(nep)}\delta q_j + \frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial\hat U}{\partial\dot q_j}\delta q_j\right) - \delta\hat U$$

$$\delta\hat T - \delta\hat U + Q_j^{(nep)}\delta q_j = \frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial(\hat T-\hat U)}{\partial\dot q_j}\delta q_j\right) \qquad \boxed{\delta\hat L + Q_j^{(nep)}\delta q_j = \frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial\hat L}{\partial\dot q_j}\delta q_j\right)}$$

Pozn: diferenciální počet

Funkce — přírůstek funkce — lineární část přírůstku = diferenciál funkce — derivace — stacionární bod

$f:\mathbb R\to\mathbb R \quad \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \overbrace{A(x)\Delta x} + \underbrace{\omega(x,\Delta x)}_{\downarrow \text{ pro }\Delta x\to 0,\ 0}\cdot\Delta x \quad df = A(x)\Delta x = f'(x)dx \quad f(x)=x,\ dx=\Delta x \quad f'(x) = \frac{df}{dx} = A(x) \quad f'(x_0)=0$

$f:\mathbb R^m\to\mathbb R \quad \Delta f = f(\vec x+\Delta\vec x) - f(\vec x) = \sum_{j=1}^m A_j(\vec x)\Delta x_j + \underbrace{\omega(\vec x,\Delta\vec x)}_{\downarrow\text{ pro }|\Delta\vec x|\to0,\ 0}\cdot|\Delta\vec x| \quad df = \underbrace{A(\vec x)\Delta\vec x}_{\nabla f(\vec x)\cdot d\vec x} = \sum_{j=1}^m\frac{\partial f(\vec x)}{\partial x_j}dx_j \quad f'(\vec x) = A(\vec x)\in\mathscr L(\mathbb R^m,\mathbb R) \quad A_j(\vec x) = \frac{\partial f}{\partial x_j} = \partial_j f = f_{,j} \quad \frac{\partial f(\vec x_0)}{\partial x_j}=0\ \ \forall j\in\hat m$

pokud existuje, pak $df = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} f(\vec x+\varepsilon d\vec x)$

Variační počet body → křivky funkce → funkcionály

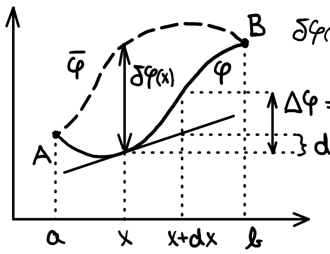
Křivka (třídy $n\in\mathbb N_0$) je spojité zobrazení $\varphi:\langle a,b\rangle\subset\mathbb R\to\mathbb R$ (třídy C^n tj. má spojité derivace do řádu n).

$C^n\langle a,b\rangle$ mn. všech křivek třídy n tvoří vektorový prostor dim $+\infty$

s normou $\|\varphi\| = \max_{x\in\langle a,b\rangle}\{|\varphi(x)|,|\varphi'(x)|,\dots,|\varphi^{(n)}(x)|\}$ který označíme $\vec C^n\langle a,b\rangle$

$C^n_{(A,B)}\langle a,b\rangle = \{\varphi\in C^n\langle a,b\rangle \mid \varphi(a)=A\wedge\varphi(b)=B\}$ mn. křivek z A do B

$(C^n_{(A,B)}\langle a,b\rangle, -, \vec C^n_{(0,0)}\langle a,b\rangle)$ normovaný afinní prostor



$\delta\varphi(x) = \bar\varphi(x)-\varphi(x)$

$\Delta\varphi = \varphi(x+dx)-\varphi(x)$

$d\varphi = \varphi'(x)dx$

$\boxed{\frac{d}{dx}(\delta\varphi) = \delta\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)}$

Buď $\varphi\in C^n_{(A,B)}\langle a,b\rangle$ pak pro lib. $\bar\varphi\in C^n_{(A,B)}\langle a,b\rangle$ nazýváme $\delta\varphi = \bar\varphi-\varphi\in\vec C^n_{(0,0)}\langle a,b\rangle$ variací křivky φ s pevnými konci.
$C^n\langle a,b\rangle$ $\vec C^n\langle a,b\rangle$ s volnými konci.

Funkcionál je zobrazení z prostoru (např. vektorového) do reálných čísel.

Funkcionál $I: C^n\langle a,b\rangle\to\mathbb R$ je spojitý na křivce φ, pokud $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall\bar\varphi\in C^n\langle a,b\rangle\ \ \|\bar\varphi-\varphi\|<\delta \Rightarrow |I(\bar\varphi)-I(\varphi)|<\varepsilon$

Funkcionál $I: C^n\langle a,b\rangle\to\mathbb R$ je diferencovatelný na křivce φ pokud existuje spojitý lineární funkcionál $\Phi:\vec C^n\langle a,b\rangle\to\mathbb R$ (nazývaný variace I na křivce φ značený $\delta I(\varphi)$) tak, že platí $\lim_{\|\delta\varphi\|\to0}\frac{I(\varphi+\delta\varphi)-I(\varphi)-\Phi[\delta\varphi]}{\|\delta\varphi\|}=0$.

tj. $\Delta I = I(\varphi+\delta\varphi)-I(\varphi) = \underbrace{\Phi[\delta\varphi]}_{\text{lineární část přírustku }\delta I(\varphi)[\delta\varphi]} + \underbrace{\omega(\varphi,\delta\varphi)}_{\downarrow\text{ pro }\|\delta\varphi\|\to0,\ 0}\cdot\|\delta\varphi\|$

Pozn: existuje-li variace, lze ji najít takto $\eta\in\vec C^n\langle a,b\rangle$ $\quad\hat I(\varepsilon) = I(\varphi+\overbrace{\varepsilon\eta}^{\delta\varphi})\ \ \forall\varepsilon\in\mathbb R$ $\quad\delta I(\varphi)[\delta\varphi] = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} I(\varphi+\varepsilon\delta\varphi)$

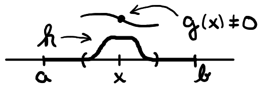
$$\frac{d\hat I}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon\to0}\frac1\varepsilon(I(\varphi+\varepsilon\eta)-I(\varphi)) = \lim_{\varepsilon\to0}\frac1\varepsilon(\Phi[\varepsilon\eta] + \omega(\varphi,\varepsilon\eta)\cdot\|\varepsilon\eta\|) = \lim_{\varepsilon\to0}(\Phi[\eta] + \mathrm{sgn}(\varepsilon)\,\omega(\varphi,\varepsilon\eta)\|\eta\|) = \Phi(\eta) = \delta I(\varphi)[\eta]$$

Funkcionál $I: C^n\langle a,b\rangle\to\mathbb R$ má na křivce φ – maximum (minimum) pokud $\forall\bar\varphi\in C^n\langle a,b\rangle$ $I(\varphi)\ge I(\bar\varphi)$ $(I(\varphi)\le I(\bar\varphi))$

– stacionární hodnotu (φ je extremálou I) pokud $\delta I(\varphi)=0$

Základní lemma variačního počtu: Buď $g \in C\langle a,b\rangle$ pokud $\forall h \in C^n_{(0,0)}\langle a,b\rangle$ platí $\int_a^b g(x)\cdot h(x)\,dx = 0$ pak $g(x)=0\ \forall x\in\langle a,b\rangle$.

Dk. sporem



Dále speciální případ funkcionálu:

Buď $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ třídy C^2 pak funkcionál $J: C^1\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$, $J(\varphi):=\int_a^b F(x,\varphi(x),\varphi'(x))\,dx$ je diferencovatelný na $C^1\langle a,b\rangle$.

$$\delta J(\varphi)[\delta\varphi] = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} J(\varphi+\varepsilon\delta\varphi) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} F(x,\varphi+\varepsilon\delta\varphi,\varphi'+\varepsilon\delta\varphi')\,dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial\varphi}(x,\varphi,\varphi')\delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial\varphi'}(x,\varphi,\varphi')\delta\varphi'\,dx =$$

$\boxed{\delta\int_a^b F\,dx = \int_a^b \delta F\,dx}$

$$= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\delta\varphi\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\right)\delta\varphi\,dx = \int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial\varphi} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\right)\right]\delta\varphi\,dx + \left[\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\delta\varphi\right]_a^b$$

Křivka $\varphi\in C^1_{(A,B)}\langle a,b\rangle$ je extremálou funkcionálu $J\big|_{C^1_{(A,B)}\langle a,b\rangle} \iff \boxed{\frac{\partial F}{\partial\varphi}(x,\varphi(x),\varphi'(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}(x,\varphi(x),\varphi'(x))\right)=0}\ \forall x\in\langle a,b\rangle$

Eulerova rovnice pro funkcionál J $\quad\varphi(a)=A$

ODR 2. řádu s okrajovými podmínkami $\quad\varphi(b)=B$

Zobecnění:

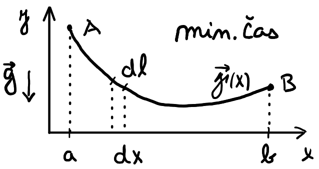
$\vec\varphi:\langle a,b\rangle\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^s\in C^1$ $\quad\vec\varphi(a)=\vec A$ $\quad\vec\varphi(b)=\vec B$

$F:\mathbb{R}^{2s+1}\to\mathbb{R}\in C^2$ $\quad J(\vec\varphi)=\int_a^b F(x,\vec\varphi(x),\vec\varphi'(x))\,dx$ $\quad\delta J(\vec\varphi)=0 \wedge \delta\vec\varphi(a)=0=\delta\vec\varphi(b) \iff \forall i\in\hat s\ \ \frac{\partial F}{\partial\varphi_i}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_i'}\right)=0\ \ \forall x\in\langle a,b\rangle$

Je–li $\vec\varphi$ minimála (maximála) funkcionálu $J\big|_{C^{(1)}_{(A,B)}\langle a,b\rangle}$ pak $\delta^2 J(\vec\varphi)\ge 0\ (\le 0)$ a matice $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi_i'\partial\varphi_j'}\right)$ je PSD (NSD)

- **Integrální principy** –jsou globální vyšetřují trajektorii v intervalu ⟨t1, t2⟩ jako celek
  –jdou zobecnit na nemechanické úlohy (elmag. pole, kvantová mechanika)

Fermatův pricnip (1662) – světlo se z bodu A do bodu B šíří po "časově" nejkratší dráze tj. po dráze



která extremalizuje funkcionál $\quad T(\vec y) = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{dl}{v} = \frac{1}{c}\int_A^B n(\vec x)\,dl = \frac{1}{c}\int_a^b n(\vec y(x))\cdot|\vec y'(x)|\,dx$

index lomu $n=n(\vec x)$ rychlost světla c

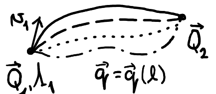
Brachistochrona (Johann Bernoulli 1696) $\quad T(\vec y) = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{dl}{v(y)} = \int_a^b \frac{|\vec y'(x)|\,dx}{\sqrt{2gy}} = \int_a^b\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx$

Maupertuis (1744) hypotéza: Každý děj v přírodě probíhá tak, že určitá veličina (tzv. akce) je minimální.

Princip nejmenší akce

– Lagrange (1760) pro konzervativní soustavy

– Hamilton (1834) pro nekonzervativní soustavy

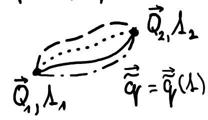


$E = T(\vec q,\dot{\vec q})+U(\vec q)$ $\quad S_0 = \int_{\vec Q_1}^{\vec Q_2} 2T\,dt$

$\Rightarrow v(\vec q) \Rightarrow \dot{\vec q} = \dot{\vec q}(t)$

$T(\vec q,\dot{\vec q},t)$

$U(\vec q,t)$ $\quad S = \int_{t_1}^{t_2} T-U\,dt$



Z ústřední rce. Lagrangeovy odvodíme Hamiltonův princip

budeme předpokládat, že virtuální posunutí jsou diferencovatelné funkce času $\delta\vec q=\delta\vec q(t)\in C^1_{(0,0)}\langle t_1,t_2\rangle$ tvoří tedy variace křivky $\vec q(t)\in C^1\langle t_1,t_2\rangle$ s pevnými konci $\delta\vec q(t_1)=0=\delta\vec q(t_2)$

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\hat L\,dt + \int_{t_1}^{t_2} Q_j^{(nep)}\delta q_j\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\left(\delta\hat L + Q_j^{(nep)}\delta q_j\right)dt = \int_{t_1}^{t_2}\frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial\hat L}{\partial\dot q_j}\delta q_j\right)dt = \left[\frac{\partial\hat L}{\partial\dot q_j}\delta q_j\right]_{t_1}^{t_2}=0$$

Hamiltonův princip: Pohyb holonomní soustavy s potenciálními silami v časovém intervalu $\langle t_1,t_2\rangle$ se děje po křivce $\vec q(t)$ (trajektorii) na které akce nabývá stacionární hodnoty vzhledem k (izochronním $\delta t=0$) variacím s pevnými konci $\delta\vec q(t_1)=0=\delta\vec q(t_2)$.

$$\boxed{S[\vec q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec q(t),\dot{\vec q}(t),t)\,dt}$$

$$\delta S[\vec q(t)]=0 \wedge \delta\vec q(t)\Big|_{t_1,t_2}=0 \iff \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}\right]_{(\vec q(t),\dot{\vec q}(t),t)}=0\quad\forall i\in\hat s$$

Eulerovy–Lagrangeovy rce. pro funkcionál S

O.D.R. 2. řádu pro $\vec q(t)=?$

s okrajovými podmínkami $\quad\vec q(t_1)=\vec Q_1\quad\vec q(t_2)=\vec Q_2$

- Akce je funkcionál $S: C^1_{(\vec Q_1,\vec Q_2)}\langle t_1,t_2\rangle\to\mathbb{R}$ a neboť $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial\dot q_i\partial\dot q_j}\right)$ je PD, je trajektorie zpravidla její minimála.
- Hamiltonův princip nezávisí na volbě obecných souřadnic $\Rightarrow$ LR2D mají stejný tvar ve všech obecných s.
- Nejednoznačnost Lagrangeiánu $\quad L' = L + \frac{\hat d\,h(\vec q,t)}{dt}$ $\quad S' = \int_{t_1}^{t_2} L'\,dt = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt + \left[h(\vec q(t_2),t_2) - h(\vec q(t_1),t_1)\right] = S+K \Rightarrow \delta S'=\delta S$
- Lze zobecnit mimo mechaniku – potřeba najít příslušnou Lagrangeovu funkci (pomocí principů symetrie)