Předmluva

Předkládaná skripta jsou určena studentům prvního ročníku Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze jako pomůcka při studiu základního kursu fyziky v prvním semestru. Mohou ovšem sloužit i dalším zájemcům a studentům vyšších ročníků k vyhledání potřebné informace.

Mechanika je základem a vstupní branou do fyziky. Proto je skriptům předeslán krátký úvod seznamující s postavením fyziky jako vědy v systému lidského poznání, s charakterem práce a způsobem myšlení fyziků a také s hlavními etapami vývoje fyziky. Studenti se zde poprvé seznamují s vysokoškolským způsobem studia fyziky, který se liší od středoškolského matematickou náročností, vyžaduje osvojit si schopnost řešit fyzikální úlohy a experimentální návyky ve fyzikální laboratoři.

Matematický aparát fyziky je založen na diferenciálním a integrálním počtu. Ke studiu mechaniky je třeba se seznámit s derivováním a integrováním funkcí, a to i funkcí více proměnných a výpočtem některých integrálů, včetně integrálů křivkových, plošných a objemových. Často je třeba přitom používat i jiné souřadnice než kartézské - polární, cylindrickéh, sférické. Rovnice popisující pohyb částic jsou obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu a proto je třeba se naučit řešit alespoň nejjednodušší typy takových rovnic. Mechanika v základním kursu fyziky je pojímána jako vektorová (Newtonova), na rozdíl od mechaniky v pojetí teoretické fyziky, která je založena na variačních principech a skalárních funkcích. Student se tedy musí seznámit s vektorovou algebrou a analýzou a také se základními vlastnostmi některých tenzorů. Částice se v mechanice často pohybují po trajektoriích, které jsou kuželosečkami, rotující pružné těleso kulového tvaru získává tvar elipsoidu, rotující vazká kapalina v nádobě vytváří povrch ve tvaru rotačního paraboloidu, vlastnosti symetrických tenzorů se dají názorně geometricky vyjádřit pomocí elipsoidů a hyperboloidů. Je tedy třeba znát i rovnice a geometrické vlastnosti kuželoseček a kvadrik, i některých jiných geometrických křivek a ploch, jimž někdy není v matematice věnována dostatečná pozornost.

Protože výuka matematiky se za fyzikou zpravidla opožďuje a také fundovaný matematický výklad se liší od způsobu, jakým jsou matematické poznatky ve fyzice aplikovány, je do skript zařazena kapitola Matematický aparát, kde jsou potřebné matematické poznatku stručně shrnuty. Neznamená to samozřejmě, že by je student musel hned na počátku zvládnout, spíše se k nim bude vracet při řešení konkretních fyzikálních úloh.

Látka z mechaniky je rozčleněna do pěti kapitol a postupně je probírána mechanika částice (hmotného bodu), soustavy hmotných bodů, tuhého tělesa a kontinua (pružných těles, kapalin a plynů). Pohyb částic, jejich soustav a tuhého tělesa je popsán obyčejnými diferenciálními rovnicemi (jsou to soustavy s konečným počtem stupňů volnosti), pohyb kontinua, spojitého prostředí o nekonečně velkém počtu stupňů volnosti, parciálními diferenciálními rovnicemi. Výklad je vždy veden tak, aby byl co nejstručnější a nejsouvislejší a jednotlivé konkretní fyzikální problémy a úlohy jsou pak řešeny na konci příslušného odstavce. Na konci každé kapitoly jsou uvedeny příklady k samostatnému řešení. Velká

část jich byla převzata ze sbirky autorů Dibelka, Havránková, Legová: Sbírka příkladů z fyziky I (Mechaniky), na fakultě používané. Na závěr skript jsou pak uvedeny otázky, které mohou sloužit k opakování a zkoušení látky.

K řešení mnoha zajímavých fyzikálních úloh stačí znalosti fyziky z gymnázia. Takové úlohy s podrobným řešením byly shromážděny ve skriptech autorů Havránkové, Janouta a Štolla Úvod do fyziky v řešených příkladech (ČVUT 1995) v nichž lze nalézt i 68 úloh z mechaniky. Většina z nich byla zadávána na jaderné a fyzikálně inženýrské fakultě ČVUT u přijímacích zkoušek. Některé z těchto úloh jsou uváděny i v těchto skriptech jako příklady k řešení. S mnoha zajímavými fyzikálními problémy, jejich historickými souvislostmi a podstatou fyzikálního myšlení je možno se seznámit také v knížce I. Štolla Svět očima fyziky, Prometheus Praha l995.

Vysokoškolské studium se nemůže omezovat jen na látku uvedenou ve skriptech. Studenti musí záhy začít tvůrčím způsobem pracovat, zapojovat se do odborné a výzkumné práce. Musí proto používat i další odbornou literaturu, ať už učebnice a monografie nebo články v odborných časopisech. Důkladné vysokoškolské učebnice mechaniky českých autorů jsou dnes již klasické knihy V. Trkala (Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa , NČSAV Praha l956) a M. Brdičky (Mechanika kontinua, NČSAV Praha l959). Nejnovější učebnice mechaniky základního kursu fyziky je kniha J. Kvasnica a kol. Mechanika, Academia, Praha l988, kterou je proto možno doporučit k paralelnímu studiu. Existuje velké množství cizojazyčných kursů vysokoškolské mechaniky. Zajímavý pokus o nové pojetí výuky představoval kdysi tzv. Berkeleyský kurs a jeho první díl Ch. Kittel Mechanics, Mc Graw-Hill Book Co. l965 je k dispozici i v ruském a slovenském překladu. Mnoho inspirace ovšem přinášejí i známé Feynmanovy přednášky o fyzice, dostupné v angličtině a ruštině.

Autor děkuje všem, kdo v průběhu mnoha let přispívali ke zdokonalování výuky tohoto předmětu na fakultě a z jejichž zkušeností čerpal, spolupracovníkům na katedře fyziky, studentům a zejména recenzentovi.

Praha, červen 1995

I. Štoll

Obsah

Úvod do fyziky

1. Postavení fyziky a její členění 4
2. Fyzikální principy 6
3. Fyzikální veličiny a jednotky, rozměrová analýza 8
4. Hlavní etapy vývoje fyziky 10

Matematický aparát

1. Diferenciální a integrální počet 13
2. Souřadnice ve fyzice 20
3. Skaláry, vektory a tenzory 24
4. Kuželosečky a kvadriky 31

1. Kinematika částice

1.1 Kinematický popis pohybu částice 39
1.2 Základní pohyby a jejich skládání 43

2. Dynamika částice

2.1 Pohybové rovnice 56
2.2 Pohyb kmitavý 70
2.3 Pohyb v centrálním poli 86
2.4 Pohyb v neinerciální vztažné soustavě 109

3. Mechanika soustavy částic

3.1 Zákony zachování 128
3.2 Úloha dvou těles 137
3.3 Srážky částic a ráz těles 141

4. Mechanika tuhého tělesa

4.1 Kinematika tuhého tělesa 157
4.2 Dynamika tuhého tělesa 160
4.3 Setrvačníky 178

5. Mechanika kontinua

5.1 Mechanika pružného tělesa 187
5.2 Mechanika tekutin 198
5.3 Zvuk 204

ÚVOD DO FYZIKY

1. Postavení fyziky a její členění

Název fyzika pochází z řeckého slova fysis, příroda. Původně tedy fyzika znamenala vědu o přírodě vůbec, v protikladu k umělému světu vytvořenému člověkem, technice (řec. techné). V antice byla fyzika vlastně součástí filozofie a téměř každý z antických filozofů zanechal nějaký spis o přírodě. Toto chápání fyziky jako filozofie přírody přetrvává v určitém smyslu dodnes; v angličtině, ale i v jiných jazycích spojení "přírodní filosofie", "Natural Philosophy" znamená fyziku.

Postupem času se vědy o přírodě diferencovaly. Filosofie se stala samostatnou vědou o lidském myšlení a světě vůbec. Matematika, kterou dnes nepovažujeme za přírodní vědu, se rozvinula do abstraktních výšin jako věda o kvantitativních a prostorových vztazích věcí a algoritmech a má blízko k logice. S rozvojem počítačové techniky nabyla matematika nových dimenzí a možností. Fyzika se tak stala vědou o základních, nejobecnějších zákonitostech přírody. Speciálními zákonitostmi na vyšších úrovních organizace hmoty se zabývají další přírodní i společenské vědy - chemie, biologie, psychologie, sociologie. Všechny tyto vědy musí ovšem fyzikální zákonitosti respektovat a také hojně využívají fyzikálních metod a přístrojů. Například biologické zákonitosti se týkají jen živé hmoty, která je ve vesmíru vzácným jevem. Fyzikálnímu zákonu všeobecné gravitace se však musí podřizovat všechny přírodní objekty.

Fyzika má zvláštní, úzké sepětí s matematikou - využívá jejích metod a také obohacuje matematiku novými myšlenkami a pojmy. Není náhodou, že jeden z objevitelů diferenciálního a integrálního počtu byl právě Newton, tedy fyzik. Jako věda o nejobecnějších zákonitostech přírody je fyzika v úzkém vztahu i k filozofii, a také mnoho fyziků filozofuje. Mezi fyzikou a filozofií je ovšem zásadní rozdíl. Fyzika se vždy musí opírat o experimentální data a zabývá se jen problémy, které může dříve či později experimentálně ověřit. K fyzikálním poznatkům tedy nedocházíme pouhým myšlením, spekulací, ale konfrontací s výsledky měření a pozorování.

V posledních desetiletích se fyzika stala základem pro nesmírně rychlý rozvoj moderní techniky, která stále více ovlivňuje náš život. Technika přináší společnosti nejen dobrodiní, ale také potenciální hrozby a je těžko předvídat, jak se lidstvo s těmito problémy vypořádá. Někdy je fyzika činěna zodpovědnou i za tyto hrozivé jevy naší civilizace a jindy zas je na ní požadováno, aby dala návod, jak všechny tyto problémy vyřešit. Fyzikové se samozřejmě nezříkají své společenské zodpovědnosti, ale na druhé straně nejsou to oni, kdo o konečném využití či zneužití fyzikálních objevů rozhodují.

Fyzikální výzkum má dnes i výrazné ekonomické aspekty. Je nákladný, a zejména experimentální zařízení, která počítáme k tzv. "velké vědě", obří urychlovače, zařízení pro výzkum termojaderné energie, pro kosmický výzkum apod. si mohou dovolit jen ekonomicky silné státy. Většinou jsou tato zařízení využívána v mezinárodní spolupráci, jako například v evropském středisku pro jaderný výzkum CERN v Ženevě, jehož členem je

také naše republika. Některé zvláště nákladné projekty, jako například amerického superobřího urychlovače SSC, byly z finančních důvodů zrušeny. Tato velká experimentální zařízení slouží samozřejmě k ukojení zvědavosti fyziků a hlubšímu poznání přírody. Na druhé straně z takového poznání, jak ukazuje historie, může lidstvu kynout nečekaný užitek. Vysílání umělých družic Země se zpočátku také jevilo jako nákladná prestižní záležitost a dnes si těžko představíme světovou ekonomiku a spoje bez využití blízkého kosmu. Kdo dnes může říci, jaký užitek přinese lidstvu cesta na Mars nebo objev nové elementární částice!

Z toho, co bylo řečeno, je zřejmé, že fyzika má v systému lidského poznání a jeho využívání do značné míry klíčovou úlohu. Anekdotickým způsobem to bylo vyjádřeno takto: *Každý odborník se domnívá, že jeho věda je ta nejdůležitější. Fyzik se však liší od všech ostatních odborníků tím, že jeho věda skutečně nejdůležitější je.* V následujícím schematu je znázorněn vztah a vzájemné propojení jednotlivých vědních oblastí, a postavení fyziky mezi nimi.

	SOCIOLOGIE	F
	$\Uparrow$	I
	PSYCHOLOGIE	L
	$\Uparrow$	O
	BIOLOGIE	S
	$\Uparrow$	O
	CHEMIE	F
	$\Uparrow$	I
		E
MATEMATIKA $\Leftrightarrow$	FYZIKA	$\Leftrightarrow$ TECHNIKA

Fyzika je dnes velmi rozsáhlá vědní disciplina a žádný fyzik ji nemůže ovládat v celé šíři. Můžeme ji dělit podle různých hledisek. Tak zpravidla rozlišujeme podle metody výzkumu a zaměření

a) fyziku teoretickou
b) fyziku experimentální
c) fyziku aplikovanou .

Každá z nich má opět své dílčí oblasti. Převládá-li důraz na matematickou metodu, mluvíme o fyzice matematické, využíváme-li počítače k simulování fyzikálních procesů, o fyzice počítačové.

Podle druhu jevů, jimiž se fyzika zabývá můžeme rozlišovat
a) mechaniku (a gravitační pole)
b) elektřinu a magnetismus (a elektromagnetické pole)
c) termiku
d) optiku

Podle fyzikálních soustav, které fyzika zkoumá
a) fyziku molekulovou, atomovou, jadernou a částicovou
b) fyziku pevných látek
c) fyziku tekutin (kapalin a plynů)
d) fyziku plazmatu.

Další důležité dělení je na fyziku *klasickou* a *kvantovou*. Klasická fyzika se zabývá zákonitostmi makrosvěta, tedy světa našich rozměrů a smyslové zkušenosti. Kvantová fyzika je fyzikou mikrosvěta, kde platí jiné fyzikální zákonitosti. Charakteristickým parametrem v mikrosvětě je Planckova konstanta $h = 6,626.10^{-34}$ J.s. U jevů a pohybů u nichž můžeme Planckovu konstantu považovat za zanedbatelně malou, odpovídají (korespondují) zákonitosti kvantové fyziky zákonitostem fyziky klasické. Říkáme tomu *princip korespondence*. Kvantová fyzika je tedy obecnější, ale u makroskopických pohybů můžeme kvantové jevy zanedbat (i když ne vždy). V těchto skriptech se budeme zabývat mechanikou klasickou, s kvantovou mechanikou se seznámíte později.

Podobně můžeme rozlišit fyziku *nerelativistickou* a *relativistickou*. Jevy, které popisuje speciální teorie relativity, se projevují, pohybují-li se částice nebo tělesa rychlostmi blízkými rychlosti světla ve vakuu $c = 2,997\ 924\ 58$ m.s^{-1}. Mechanika, kterou se budeme zabývat, je mechanika nerelativistická. Opět zde platí princip korespondence - při rychlostech podstatně menších než je rychlost světla ve vakuu, tedy můžeme-li považovat tuto rychlost za nekonečně velkou, přecházejí zákony relativistické mechaniky v zákony mechaniky nerelativistické. Budeme-li se však zabývat vlastnostmi elektromagnetického pole, musíme používat zákony speciální teorie relativity. Podobně ve velmi silných gravitačních polích, která se vyskytují v okolí velkých hmotných těles ve vesmíru, se uplatní zákony obecné teorie relativity.

Zvláštní částí fyziky je *je termodynamika*, která zkoumá stavy fyzikálních soustav z hlediska jejich pravděpodobnosti a má úzký vztah k teorii informace. Některé termodynamické zákony (například druhá věta termodynamická) mají pravděpodobnostní charakter - netvrdí zda nějaký jev nastane či ne, nýbrž pouze zda nastane s větší či menší pravděpodobností. Termodynamikou tedy vstoupila do fyziky náhoda, ne vždy je možno výsledek nějakého jevu předpovědět jednoznačně. Také termodynamické zákonitosti lze vysvětlit z mikroskopického hlediska statistickými metodami. Těmi se zabývá důležitá část fyziky,

fyzika statistická.

2. Fyzikální principy

Několik slov o metodách práce a způsobu myšlení fyziků. Fyzika jako věda o přírodě vychází z pozorování a experimentů, zobecňuje zjištěná fakta a formuluje obecné *fyzikální zákony.* Těmto fyzikálním zákonům dává matematickou formu. Takový poznávací proces zobecňování jednotlivých fakt se nazývá metoda *vědecké indukce.* Na základě znalosti obecných fyzikálních zákonů může pak fyzika usuzovat, jaký bude výsledek konkretního experimentu v daném zvláštním případě. Řešením rovnic vyjadřujících fyzikální zákony předvídá tyto výsledky a znovu je ověřuje. To je proces *vědecké dedukce.* Tak fyzika teoreticky zdůvodnila, že při výbuchu jaderné bomby dojde k uvolnění obrovského množství energie a experiment v Alamogordo v Novém Mexiku v roce 1945 tuto fyzikální předpověď plně potvrdil.

Na rozdíl od matematiky musí fyzika stále konfrontovat svá tvrzení s experimentální skutečností; fyzikální objevy nelze dělat pouhými spekulacemi, jak se občas leckdo pokouší. Rozdíl mezi přístupem matematiky a fyziky lze názorně ukázat na příkladu velkého německého přírodovědce minulého století Gausse, který byl jak matematikem, tak fyzikem. Jako matematik dospěl k objevu neeuklidovské geometrie a zjistil, že je možno logicky konstruovat prostory, v nichž neplatí věta o tom, že součet úhlů v trojúhelníku je roven 2π. Matematik by se s tím spokojil a věnoval by se dále logickému rozvíjení takové myšlenkové konstrukce. Fyzika však zkoumá náš reálný svět a geometrie tohoto světa je vlastně součástí fyziky. Jako fyzik si proto Gauss položil otázku, zda uvedená věta v reálném světě skutečně platí a začal proměřovat velké trojúhelníky, jejichž vrcholy tvořily vrcholy Harckého pohoří. Později se skutečně ukázalo, že díky gravitaci je náš prostor zakřiven a tato geometrická poučka v trojúhelnících velkých rozměrů neplatí.

Jedním z ústředních principů, jímž se fyzika řídí, je *princip symetrie* (někdy též mluvíme o principu dostatečného důvodu). Na počátku vždy analyzujeme symetrii úlohy a tato analýza ukáže cestu k dalšímu řešení. Z důvodu symetrie musí gravitační pole kulové hmoty působit v radiálním směru, síla musí směřovat do středu koule, podobně pole nekonečného válce bude působit kolmo k ose válce. Z mnoha různých možností volí příroda vždy takovou, která se něčím odlišuje od ostatních, má nějakou význačnou vlastnost. Síla by mohla například působit pod obecným úhlem k ose válce, ale vzhledem k symetrii není k tomu "dostatečný důvod", nelze preferovat jeden obecný směr před jiným. Kdyby síla působila rovnoběžně s osou válce, nebylo by opět možno rozhodnout, kterým ze dvou možných směrů, neboť osa válce není orientována.

Princip symetrie se projevuje v invarianci, neměnnosti pohybu fyzikální soustavy vzhledem k některým transformacím prostoru a času. K takovým transformacím patří translace (posunutí soustavy souřadnic ve směru některé z os), rotace (pootočení soustavy souřadnic), časová translace, inverze (zrcadlové zobrazení). Bylo dokázáno, že takové transformace odpovídající příslušným symetriím vedou k *zákonům zachování* různých fyzikálních

veličin. V mechanice se seznámíme se zákony zachování hybnosti, momentu hybnosti, energie, rychlosti těžiště izolované soustavy. Ve fyzice existuje celá řada dalších zákonů zachování, například zákon zachování elektrického náboje aj. Zákon zachování energie, který má ve fyzice klíčový význam, byl objeven až ve čtyřicátých letech minulého století. Pro mechanickou energii byl však užíván již mnohem dříve, a sice v podobě tvrzení, že nemůže existovat perpetuum mobile, zařízení, které by konalo mechanickou práci bez dodávání vnější energie.

Zákony zachování mají velký praktický význam při řešení konkretních fyzikálních pohybů. Udávají totiž, že některá fyzikální veličina se za pohybu nemění, je invariantem, nebo jak říkáme integrálem pohybu. Při integrování pohybových rovnic musíme totiž určit hodnoty integračních konstant z daných počátečních podmínek. Znalost zákonů zachování nám to usnadňuje a někdy nás zbavuje nutnosti řešit pohybovou rovnici vůbec.

K dalším fyzikálním principům patří *principy variační.* Podle nich z možných variant stavů nebo pohybů se bude realizovat takový, který odpovídá extrému (maximu nebo minimu) nějaké fyzikální veličiny. Je známo, že rovnováha nějaké fyzikální soustavy se ustaví vždy tak, aby potenciální energie nabývala minimální nebo maximální hodnoty. V prvním případě jde o rovnováhu stabilní, ve druhém je to rovnováha labilní. Podobně například světelný paprsek volí vždy takovou dráhu, aby čas potřebný k proběhnutí mezi počátečním a koncovým bodem byl minimální. Tato podivuhodná "úspornost" přírody je opět důsledkem obecného principu dostatečného důvodu - právě extrémní hodnota je význačná, odlišuje se od ostatních možností. Teoretická fyzika je budována právě na variačních principech, z nichž plynou pohybové rovnice obecnější a elegantnější než jsou rovnice
Newtonovy. S teoretickou (analytickou) mechanikou se seznámíte později v kursu teoretické fyziky.

Vedle těchto principů se fyzikové řídí i dalšími hledisky, z nichž některé jsou intuitivní, heuristické, ale často umožňují "uhádnout" správné řešení. To se pak samozřejmě musí matematicky a experimentálně ověřit. Konec konců tak postupoval i Archimedes, když objevil svůj zákon v lázni a s výkřikem Heuréka! (Našel jsem!) jej spěchal oznámit ostatním. Známa je i legenda o Newtonovi, který prý objevil gravitační zákon při pozorování pádu jablka. Problém je ovšem v tom, že mnoho jiných lidí také pozorovalo pád jablka, ale gravitační zákon neobjevili. Intuice fyziků jde tak daleko, že předpokládají, že matematická rovnice vyjadřující nějaký nový fyzikální zákon musí být vnitřně krásná a přitom dostatečně šílená. Ale to už se dostáváme do oblasti čistě subjektivní.

3. Fyzikální veličiny a jednotky, rozměrová analýza

Aby fyzika mohla být exaktní vědou, musí pracovat s přesně definovanými pojmy. Přírodní objekty, jako je například elektron, atom nebo elektromagnetické pole nelze vyčerpat slovní definicí, protože fyzika objevuje stále nové a nové vlastnosti těchto objektů. Základní pojmy jako je hmotnost, délka, čas, síla, elektrický náboj apod. není ovšem možno defi-

novat pomocí pojmů ještě jednodušších. Proto je však důležité jednoznačně udat, jakým způsobem lze tyto pojmy experimentálně zkoumat, měřit jejich vlastnosti.

Vlastnosti, které mají jak kvalitativní tak kvantitativní stránku, tj. dají se porovnávat s obdobnými vlastnostmi jiných objektů a měřit po zavedení příslušné fyzikální jednotky, se nazývají *fyzikální veličiny*. Fyzikální veličiny nejsou mezi sebou nezávislé, platí mezi nimi obecné vztahy, které mohou mít povahu fyzikálních zákonů.

To také umožňuje vytvořit *soustavy fyzikálních jednotek*. Některé veličiny zvolíme za základní a ostatní veličiny jsou pak od nich odvozeny pomocí příslušných matematických vztahů vyjadřujících fyzikální zákony. I když se ve fyzice stále používají různé soustavy jednotek, normativně byla zavedena Mezinárodní soustava SI, které se také budeme přidržovat. Základní mechanické veličiny jsou v ní délka, hmotnost a čas a z nich jsou všechny ostatní veličiny odvozeny. Základní veličiny budeme označovat velkými písmeny: délku L, hmotnost M a čas T a odvozené veličiny budou pak charakterizovány svým *fyzikálním rozměrem*, tj. vztahem k základním veličinám. Tak rychlost bude mít rozměr $[v] = \mathrm{LT}^{-1}$, síla $[F] = \mathrm{LMT}^{-2}$ apod.

V soustavě SI jsou základními jednotkami, jimiž se měří základní mechanické veličiny metr (m), kilogram (kg) a sekunda (s). Rovinný úhel se měří v radiánech (rad), prostorový ve steradiánech (sr); tyto jednotky byly dříve řazeny do zvláštní skupiny vedlejších jednotek, dnes jsou považovány za bezrozměrné odvozené jednotky.

Metr je podle posledního rozhodnutí Mezinárodní konference pro míry a váhy z r. 1983 definován jako "délka rovnající se vzdálenosti, kterou uběhne světlo ve vakuu za 1/299 792 458 s". Za jeden *kilogram* je vzata hmotnost prototypu, válečku z platiny a iridia, který je od r. 1889 uložen v Sèvres u Paříže. *Sekunda* je definována od r. 1967 jako "doba trvání 9 192 631 770 period záření, které přísluší přechodu mezi dvěma velmi jemnými hladinami základního stavu atomu cesia 133".

S dalšími základními a odvozenými veličinami a jednotkami soustavy SI se postupně seznámíme při studiu elektřiny a magnetismu, termiky, optiky, atomové a jaderné fyziky. Uveďme ještě, že vedle základních a od nich odvozených jednotek v rámci soustavy SI je normami trvale povoleno užívání i některých jednotek vedlejších. Jsou to minuta, hodina, den, úhlový stupeň, úhlová minuta a úhlová vteřina, hektar, litr, tuna, Celsiův stupeň, elektronvolt, atomová hmotnostní jednotka, astronomická jednotka a parsek.

Fyzikální rozměr není jen formálním vyjádřením vztahu fyzikálních veličin k veličinám základním, ale má i velký význam ověřovací a heuristický. Chceme-li zkontrolovat, zda nějaká rovnice vyjadřující vztah mezi fyzikálními veličinami je správná, jako první krok vždy zjistíme, zda fyzikální rozměr veličin na levé straně rovnice souhlasí s rozměrem veličin na pravé straně. Jindy můžeme prostou úvahou na základě fyzikálního rozměru uhádnout fyzikální závislost nebo zákonitost. Taková systematická úvaha na základě fyzikálního rozměru je předmětem *rozměrové analýzy*. Její použití budeme ilustrovat na příkladu matematického kyvadla.

Matematické kyvadlo představuje idealizovaný model tvořený hmotným bodem zavěšeným na nehmotném vlákně v tíhovém poli. Jedinými charakteristikami kyvadla jsou hmotnost bodu m a délka vlákna l, jedinou charakteristikou pole jeho intenzita (tíhové zrychlení) velikosti g mířící svisle k zemi. Pohyb kyvadla bude záležet též na počátečních podmínkách. Pokud kyvadlo vychýlíme z dolní stabilní polohy do určité výše h a volně pustíme, začne vykonávat kyvy ve svislé rovině dané směrem počáteční výchylky a směrem svislým. Protože na něj nepůsobí žádná další síla, která by ho z této roviny vychylovala,

není důvodu, proč by tuto rovinu opouštělo. Jeho pohyb tedy bude rovinný (plyne to i ze zákona zachování momentu hybnosti). Zanedbáme-li odpor vzduchu a případně tření v místě upevnění závěsu, bude podle zákona zachování energie při pohybu kyvadla směrem dolů klesat jeho potenciální energie a poroste energie kinetická. Po průchodu dolní polohou začne kyvadlo opět stoupat a to do původní výše. Bude tedy vykonávat periodický pohyb a nás bude zajímat perioda tohoto pohybu.

Tato perioda může záviset pouze na výše uvedených veličinách m, l, g a mohla by též záviset na počáteční výchylce. To je složitější otázka, kterou může rozřešit buď experiment nebo podrobnější matematický výpočet. Mladý Galileo Galilei při pozorování kyvů lucerny zavěšené na dlouhém závěsu na stropě pisánského kostela dospěl k závěru, že pohyb kyvadla je izochronní, tj. že jeho perioda nezávisí na výchylce. Přijměme tedy hypotézu, která se nabízí z pozorování, že alespoň při malých výchylkách je perioda pohybu kyvadla konstantní a pokusme se jí určit z rozměrové analýzy.

Předpokládejme, že perioda bude záviset na parametrech soustavy jako mocninná funkce vztahem

$$T \;=\; C\; l^{\alpha}\; m^{\beta}\; g^{\gamma} \quad ,$$

kde C je bezrozměrná konstanta. Protože fyzikální rozměr na levé a pravé straně rovnice musí být týž, dostaneme podmínku

$$[T] \;=\; \mathrm{L}^{\alpha}\; \mathrm{M}^{\beta}\; (\mathrm{LT}^{-2})^{\gamma} \;=\; \mathrm{L}^{\alpha+\gamma}\; \mathrm{M}^{\beta}\; \mathrm{T}^{-2\gamma} \;=\; \mathrm{T}\,.$$

Odtud dostáváme soustavu rovnic $\alpha + \gamma = 0$, $\beta = 0$, $-2\gamma = 1$, z níž plyne $\alpha = 1/2$, $\beta = 0$, $\gamma = -1/2$. Z rozměrové analýzy dostáváme výraz pro periodu kyvadla jako

$$T \;=\; C\,\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

Tímto způsobem nemůžeme ovšem určit bezrozměrnou konstantu C. Protože však bod na konci závěsu kyvadla koná pohyb po oblouku kružnice, je logické očekávat, že tato konstanta bude obsahovat číslo π. Dále fyzik intuitivně předpokládá, že konstanta bude obsahovat malá celá čísla, například 2, 3, 1/2 apod. a nikoli například 896/2379. Tímto způsobem můžeme "uhádnout" správný výsledek

$$T \;=\; 2\,\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

Uvedený postup není samozřejmě odvozením a správnost výsledku by se musela teprve přesným výpočtem dokázat a experimentálně potvrdit. Je však ilustrací heuristického postupu jímž se fyzikové dobírají předběžných výsledků - pomocí obecných fyzikálních principů, rozměrové analýzy a intuice.

4. Hlavní etapy vývoje fyziky

Fyzika prošla dlouhým historickým vývojem a znalost tohoto vývoje pomáhá lépe

pochopit logiku soustavy fyzikálních poznatků a dokonce docházet k poznatkům novým. Historie fyziky je ovšem samostatným vědním oborem, který zde nemůžeme probírat. Zmíníme se proto pouze o hlavních etapách tohoto vývoje a později při probírání mechaniky upozorníme stručně na některé důležité historické okolnosti.

Dějiny fyziky můžeme rozdělit na tři hlavní etapy:
a) *Stará fyzika* - od starověku do počátku 17. století (orientačně do roku 1600).
b) *Klasická fyzika* - 1600 - 1900
c) *Moderní fyzika* - 1900 - dosud

Starou fyziku nemůžeme považovat za vědu ve vlastním smyslu, i když se dobrala celé řady významných vědeckých poznatků. První z nich znali již staří Sumerové, Babyloňané, Egypťané a Číňané. Šlo zejména o poznatky astronomické a geometrické (Pythagorova věta) a také o metody měření některých fyzikálních veličin (délka, hmotnost, čas). Fyzika ve starém Řecku byla jako součást filosofie převážně spekulativní a tento charakter si pod vlivem aristotelismu udržela až do počátku novověku. Skutečný fyzikální výzkum prováděli až helenističtí Řekové, kdy se centrem vědy a kultury antického světa stala Alexandrie. V Alexandrii studoval největší fyzik starověku Archimedes, který dospěl k důležitým poznatkům o statické rovnováze těles a plování těles a v matematice se těsně přiblížil objevu diferenciálního a integrálního počtu. Alexandrijští Řekové znali také zákon odrazu světla (nikoli lomu) a prováděli první měření teploty. Poznatky antiky byly středověké Evropě zprostředkovány Araby, kteří se též intenzivně zabývali optikou (Alhazen) a určováním měrné hmotnosti látek. Zatímco ve středověky byly hlavní přírodovědné poznatky čerpány z Euklidových "Základů" (geometrie), "Almagestu" Klaudia Ptolemaia (geocentrický výklad astronomie sluneční soustavy) a spisů Aristotelových (mj. "Fysika"), vešly práce Archimedovy v Evropě ve známost až teprve začátkem novověku. Ve starověku a středověku však fyzika neprováděla systematické experimenty, nevyužívala matematický aparát k popisu přírodních jevů a neměla ani přesně definovány základní pojmy (rychlost, zrychlení, síla apod.)

Zrod fyziky jako vědy se datuje začátkem 17. století. Na základě astronomických výzkumů Keplerových (1571-1630) a pozemských mechanických experimentů Galileiových (1564-1642) mohl Isaac Newton (1643-1727) vytvořit první fyzikální teorii, klasickou mechaniku, využívající matematický aparát diferenciálního a integrálního počtu. Newton přišel s koncepcí všeobecné gravitace a ukázal, že není přehrady mezi nebeskou a pozemskou fyzikou, že síla, která udržuje planety na jejich drahách kolem Slunce je táž jako síla, která nutí jablko padat k zemi. Základní Newtonovo dílo z r. l687 nese název "Matematické základy přírodní filosofie" ("Philosophiae naturalis principia mathematica") a představuje pravděpodobně nejvýznamnější vědeckou knihu, která byla kdy napsána. Newton se zabýval též optikou a rozpracoval teorii rozkladu bílého světla do spektra. V té době byl již zásluhou Snellovou a Descartovou znám i zákon lomu světla.

Z roku 1600 pochází první vědecký spis o elektřině a magnetismu od anglického lékaře a fyzika Gilberta. Výzkumem těchto jevů se v následujících stoletích zabývala celá řada fyziků (Coulomb, Volta, Oersted, Ampère a další). Tento výzkum pak završil Faraday (1791-1867) svým objevem zákona elektromagnetické indukce a svou koncepcí siločar elektromagnetického pole. Úlohu Newtona elektromagnetismu pak sehrál James Clerk Maxwell (1831-1879), který ve svém "Traktátě o elektřině a magnetismu" z r. 1873 sestavil slavné Maxwellovy rovnice popisující vlastnosti elektromagnetického pole. Maxwell záro-

veň teoreticky zdůvodnil elektromagnetickou povahu světla a ukázal, že jevy spojené s vlastnostmi elektrického náboje ("elektřina"), elektrického proudu ("galvanismus"), magnetického pole a světla (optika), jsou jedné a téže elektromagnetické povahy.

V devatenáctém století byl tak dovršen výzkum mechanických jevů a elektromagnetismu a klasická fyzika tím uzavřena. V přírodě tedy existovaly pouze dvě síly, dva způsoby vzájemné interakce mezi částicemi: *gravitační* a *elektromagnetická*. Mezi nimi se však projevoval určitý rozpor. Jak Newtonovy tak Maxwellovy rovnice platí v libovolné inerciální vztažné soustavě. Při přechodu od jedné inerciální soustavy k druhé se však Newtonovy rovnice transformují pomocí tzv. Galileiho transformací a Maxwellovy rovnice pomocí Lorentzových transformací. Fyzika se tak rozdvojila, mechanické a elektromagnetické děje se zdály být neslučitelné. Kromě toho existovaly některé experimenty, jejichž výsledek nedokázala klasická fyzika vysvětlit: průběh spektra rovnovážného elektromagnetického záření (tzv. záření absolutně černého tělesa) a pokus Michelsonův, který svědčil o neexistenci světelného éteru.

Tyto zdánlivě nepodstatné rozpory vyústily ve 20. století ve vznik moderní fyziky, tj. fyziky kvantové a relativistické. Právě koncem roku 1900 vyslovil Planck tzv. kvantovou hypotézu, jíž vysvětlil záření absolutně černého tělesa, a v r. 1905 publikoval Einstein (1879, rok Maxwellovy smrti - 1955) práci o speciální teorii relativity. V ní překlenul rozpor mezi Newtonovou a Maxwellovou fyzikou a fyziku opět sjednotil. Předpoklad o existenci světelného éteru se teorií relativity stal zbytečným. V roce 1916 vytvořil Einstein i obecnou teorii relativity jako moderní teorii gravitace. Gravitační síly podle této teorie souvisejí se zakřivením prostoročasu. Jak speciální, tak obecná teorie relativity přecházejí při rychlostech objektů podstatně menších než je rychlost světla ve vakuu a při slabých gravitačních polích v teorii Newtonovu.

Přelom 19. a 20. století je též poznamenán objevem radioaktivity a vznikem jaderné fyziky, která tak významným způsobem zasáhla do života celého lidstva. V jaderné fyzice se uplatní další dvě přírodní síly - tzv. silná, která udržuje nukleony v atomových jádrech a slabá, která se projevuje při radioaktivní přeměně beta za vzniku neutrin. Moderní fyzika odhalila v kosmickém záření a pomocí urychlovačů obrovské množství částic, jejichž vlastnosti studuje a snaží se je utřídit a vysvětlit. Mezi všemi těmito částicemi působí čtyři základní síly přírody: gravitační, elektromagnetická, silná a slabá.

V nedávné době se podařilo prokázat, že i elektromagnetická a slabá interakce jsou téže podstaty a tvoří jedinou sílu elektroslabou. V průběhu historie fyziky od Newtona a Maxwella k dnešku tak probíhá úsilí o *sjednocování interakcí*, které pokračuje i dnes. Fyzika se pokouší prokázat, že i silná a elektroslabá interakce jsou téže povahy, a že k nim konečně přistupuje i síla gravitační. Tím by vznikla idea jediné přírodní síly sjednocující všechny přírodní jevy a děje. Fyzika ovšem nemůže k takovému závěru dojít pouhým uvažováním, musí matematicky vypracovat a zdůvodnit příslušnou teorii a její závěry experimentálně ověřit. To vede ke snaze budovat stále větší a větší urychlovače a také k intenzivnímu výzkumu jevů v kosmu. Sjednocování interakcí má totiž těsnou návaznost na vývoj vesmíru podle hypotézy o tzv. "velkém třesku". Právě v počátcích vývoje vesmíru by se měly všechny čtyři (resp. tři) interakce uplatňovat rovnocenným způsobem a teprve v průběhu dalšího vývoje a rozpínání vesmíru se postupně oddělovat. Tak jako počátky vzniku vědecké fyziky v 17. století jsou spjaty s astronomickými pozorováními sluneční soustavy, je i dnes fyzika stále více propojena s astrofyzikou. Vesmír zůstává největší fyzikální laboratoří.

M A T E M A T I C K Ý A P A R Á T

1. Diferenciální a integrální počet

Derivace funkce jedné reálné proměnné $f(x)$ v bodě x_0 je definována jako

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} . \qquad \text{(M.1)}$$

Z obr. M 1 je vidět, že tato derivace vyjadřuje směrnici tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0 rovnou tg α. Derivace funkce je tedy sama opět funkcí a lze ji zapisovat ve tvaru

$$f'(x) = \frac{df}{dx} , \qquad \text{(M.2)}$$

kde dx nazýváme *diferenciálem nezávisle proměnné* a df *diferenciálem funkce*. Zatímco pod diferenciálem nezávisle proměnné dx můžeme rozumět prostě libovolnou nekonečně malou změnu proměnné x, diferenciál funkce df již podstatně závisí na vlastnostech této funkce. Vlastnostmi funkcí, podmínkami existence a vlastnostmi jejich derivací a diferenciálů se zabývá matematická analýza a nebudeme je zde rozebírat. Důležité je si však uvědomit, že nekonečně malé veličiny dx, df nejsou nulové, a proto je možno jimi násobit i dělit.

obr. M 1

Při počítání s derivacemi platí pravidla pro derivaci lineární kombinace funkcí (C_1, $C_2, \ldots$ jsou konstanty), součinu a podílu funkcí a derivaci funkce složené:

$$\begin{aligned}
f &= C_1\, f_1 + C_2\, f_2 + \ldots , & f' &= C_1\, f_1' + C_2\, f_2' + \ldots \\
f &= f_1\, f_2 , & f' &= f_1'\, f_2 + f_1\, f_2' \\
f &= \tfrac{f_1}{f_2} , & f' &= \tfrac{f_1'\, f_2 - f_1\, f_2'}{f_2^2} \\
f &= [\, g(x) \,] , & \tfrac{df}{dx} &= \tfrac{df}{dg}\, \tfrac{dg}{dx} = f'(g)\, g'(x).
\end{aligned} \qquad \text{(M.3)}$$

Čárkou zde vždy označujeme derivaci funkce podle celého argumentu. Vidíme, že poslední vztah jsme vlastně dostali rozšířením výrazu pro derivaci $\frac{df}{dx}$ diferenciálem dg.

Ve fyzice se nejčastěji setkáváme s funkcemi více proměnných, závislých na prostorových souřadnicích a na čase. Potom zavádíme pojem *parciální (částečné) derivace* podle

jedné z proměnných; ostatní proměnné přitom považujeme za konstanty. Jsou-li například $x,\ y,\ z$ kartézské souřadnice a t čas, bude parciální derivace funkce $f(x,y,z)$ podle souřadnice x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta x}. \tag{M.4}$$

Vidíme, že přírůstek dostává pouze proměnná x, ostatní proměnné se nemění. Se symboly ∂f, ∂x už nemůžeme zacházet jako se samostatnými veličinami a výraz $\frac{\partial f}{\partial x}$ nemůžeme chápat jako podíl dvou diferenciálů, ani ho označovat čárkou. Můžeme ovšem zavést diferenciály nezávisle proměnných dx, dy, dz, dt a sestavit takzvaný *totální (úplný) diferenciál* funkce (nověji úplnou diferenciální formu) ve tvaru

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt. \tag{M.5}$$

Ve fyzice bývají souřadnice x, y, z zpravidla funkcemi času $x(t),\ y(t),\ z(t)$; funkce proměnných $f\ [x(t),\ y(t),\ z(t),\ t]$ je tedy vlastně složenou funkcí času. Závisí na čase jednak přímo (explicitně), jednak nepřímo (implicitně) prostřednictvím souřadnic $x,\ y,\ z$. Můžeme ji tedy derivovat podle času jako složenou funkci a dostaneme

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{M.6}$$

To je vlastně *úplná (totální) derivace* funkce f podle času a ve fyzice ji označujeme tečkou. Tečkou označujeme také derivace funkcí jedné proměnné závislé na čase:

$$\dot{f}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{M.7}$$

Odtud je též patrný rozdíl mezi časovými derivacemi $\frac{df}{dt}$ a $\frac{\partial f}{\partial t}$.

Derivace funkcí jsou opět funkcemi a lze je dále derivovat. Tím dostáváme derivace vyšších řádů. U funkcí jedné proměnné je označujeme

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}\ ,\ f'''(x) = \frac{d^3 f}{dx^3}, \tag{M.8}$$

atd.

Se symboly v čitateli a jmenovateli opět nemůžeme zacházet samostatně. U funkcí více proměnných pak dostáváme vyšší derivace buď podle jedné proměnné nebo derivace smíšené:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\ ,\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \tag{M.9}$$

apod.

Dalo by se očekávat, že derivování u smíšených derivací nebude záviset na pořadí proměnných. Není to sice samozřejmé, ale v matematické analýze se dokazuje, že pokud jsou příslušné derivace spojité, platí *Schwarzova věta* o smíšených derivacích

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\ , \ldots \tag{M.10}$$

Tato věta je důležitou praktickou kontrolou toho zda nějaká lineární diferenciální forma je nebo není úplná. Máme-li například malou změnu funkce ve tvaru

$$\delta f \;=\; a\,(x,y,z)\,dx \;+\; b\,(x,y,z)\,dy \;+\; c\,(x,y,z)\,dz, \tag{M.11}$$

stačí prověřit, zda se funkce $a,\ b,\ c$ chovají jako parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z}$,tj. zda pro ně platí vztahy (M.10). Potom můžeme formu δf označit jako totální diferenciál df.

Ve fyzice řešíme takzvané *pohybové rovnice*. Pro fyzikální soustavy, které mají konečný počet stupňů volnosti s (volný hmotný bod 3, soustava N volných hmotných bodů 3N, tuhé těleso 6) jsou to obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu, resp. jejich soustavy. Mají nekonečně mnoho řešení závislých na $2s$ integračních konstantách jako parametrech. V daném konkretním případě jsou tyto konstanty určeny tzv. *počátečními podmínkami*. Pro daný okamžik (např. pro $t \;=\; 0$) musíme přitom zadat souřadnice a složky rychlostí všech bodů tvořících soustavu, což dá právě $2s$ potřebných vztahů. Pro soustavy o nekonečném počtu stupňů volnosti, jako jsou pružná tělesa, tekutiny nebo pole, musíme řešit parciální diferenciální rovnice s tzv. *okrajovými (hraničními) podmínkami*.

Řešení diferenciálních rovnic je obecně složitá záležitost. Uvedeme si pouze dva jednoduché, často se vyskytující případy. Často je možno u diferenciální rovnice provést tzv. *separaci proměnných*. Mějme například rovnici

$$\frac{dx}{dt} \;=\; f(x)\;g(t)\;, \tag{M.12}$$

kde $f\ ,\ g$ jsou zadané funkce. Tuto rovnici můžeme uvést na tvar

$$\frac{dx}{f(x)} \;=\; g(t)\;dt, \tag{M.13}$$

kde se na levé straně rovnice vyskytují pouze funkce proměnné x a na pravé straně rovnice funkce proměnné t. Integrací obou stran rovnice můžeme dostat hledanou funkci $x(t)$; přitom nesmíme zapomenout přičíst integrační konstanty.

Jiným častým případem jsou *lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty*. Uvažme například neznámou funkci času $x(t)$, která má splňovat rovnici

$$a_2\ddot{x} \;+\; a_1\dot{x} \;+\; a_0 x \;=\; b(t). \tag{M.14}$$

Tato rovnice je *nehomogenní*, neboť na pravé straně vystupuje zadaná, známá funkce času $b(t)$. V teorii diferenciálních rovnic se dokazuje, že obecné řešení takové rovnice je součtem obecného řešení $x_o(t)$ příslušné *homogenní* rovnice (která vznikne položíme-li pravou stranu $b(t) = 0$) a partikulárního (zvláštního) řešení $x_p(t)$ původní *nehomogenní* rovnice. Pod obecným řešením rozumíme řešení závislé na (v daném případě dvou) integračních konstantách, které musíme nakonec určit z počátečních podmínek, partikulární řešení je libovolné konkretní řešení splňující původní nehomogenní rovnici. Toto řešení musíme prostě uhádnout; i na to ovšem existují ovšem metody. Někdy je to snadné; je-li například funkce $b(t) \;=\; b_0$ konstantní, bude hledané partikulární řešení zřejmě rovno $x_p(t) \;=\; b_0\ /\ a_0$, jak se lze přesvědčit dosazením. Výsledné obecné řešení nehomogenní rovnice bude tedy

$$x(t) \;=\; x_o(t) \;+\; x_p(t) \;=\; C_1\;x_{o1}(t) \;+ C_2\;x_{o2}(t) \;+\; x_p(t). \tag{M.15}$$

Řešení homogenní rovnice $x_{o1}, \quad x_{o2}$ hledáme ve tvaru funkce $x(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}$. Po dosazení do homogenní rovnice a zkrácení (vždy nenulovou) veličinou $\mathrm{e}^{\alpha t}$ dostaneme takzvanou charakteristickou algebraickou rovnici

$$a_2\ \alpha^2 + a_1\ \alpha + a_0 = 0, \tag{M.16}$$

kterou snadno vyřešíme. Má obecně dva kořeny α_1, α_2, jimž odpovídají dvě lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice. Máme tedy

$$x_o(t) = C_1\ \mathrm{e}^{\alpha_1(t)} + C_2\ \mathrm{e}^{\alpha_2(t)}\ . \tag{M.17}$$

K tomuto řešení přičteme $x_p(t)$ a pak určíme integrační konstanty z počátečních podmínek.

Připomeneme nyní derivace a integrály nejčastěji používaných elementárních funkcí:

funkce	def. obor	derivace	funkce	def. obor	derivace
C	$(-\infty,\ \infty)$	0	x^n	$(-\infty,\ \infty)$	nx^{n-1}
a^x	$(-\infty\ \infty)$	$a^x \ln a\ (a > 0)$	e^x	$(-\infty,\ \infty)$	e^x
$\log_a x$	$(0, \infty)$	$\frac{1}{x}\ \log_a \mathrm{e}\ (a, x > 0)$	$\ln x$	$(0,\ \infty)$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$(-\infty,\ \infty)$	$\cos x$	$\cos x$	$(-\infty,\ \infty)$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}x$	$[x \neq (n + \frac{1}{2})\pi]$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{cotg}x$	$[x \neq n\pi]$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Při derivování funkce x^n předpokládáme pro $x > 0$ n reálné a pro $x < 0$ n celé. Připomeňme ještě přibližné hodnoty čísla $\mathrm{e} = 2,71828...$ a $\log_{10} \mathrm{e} = 0,43429...$.

Kromě těchto funkcí známých ze střední školy se často setkáváme s funkcemi inverzními k funkcím trigonometrickým; jsou to takzvané *funkce cyklometrické*: arkussinus, arkuskosinus, arkustangens a arkuskotangens. Protože goniometrické funkce jsou periodické, musíme se při definování funkcí k nim inverzních omezit na interval, kde je příslušná goniometrická funkce prostou. Hodnoty jednoznačně definovaných cyklometrických funkcí nazýváme hlavními hodnotami (viz obr. M 2).

Mezi trigonometrickými a exponenciálními funkcemi platí důležité vztahy

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ x}}{2}\ , \qquad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}^x}}{2\ \mathrm{i}}\ . \tag{M.18}$$

Podobně lze definovat *funkce hyperbolické* vztahy

$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\ , \quad \sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\ , \quad \mathrm{tgh}x = \frac{\sinh x}{\cosh x}\ , \quad \mathrm{cotgh}x = \frac{\cosh x}{\sinh x}\ , \tag{M.19}$$

obr. M 2

které nazýváme kosinus hyperbolický, sinus hyperbolický, tangens hyperbolický a kotangens hyperbolický. Platí pro ně vztah

$$\cosh^2 x \; - \; \sinh^2 x \; = \; 1 \qquad \text{(porovnejte s} \;\; \cos^2 x \; + \; \sin^2 x \; = \; 1) \; . \tag{M.20}$$

K hyperbolickým funkcím lze opět definovat funkce inverzní, které nazýváme *funkce hyperbolometrické* a nazýváme argument kosinu hyperbolického, atd. Tyto funkce mají těsné vztahy k funkci logaritmické:

$$\text{argsinh}x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{pro} \quad -\infty < x < +\infty \tag{M.21}$$

$$\text{argcosh}x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{pro} \quad 1 \leq x < \infty \tag{M.22}$$

$$\text{argtgh}x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}, \quad \text{pro} \quad -1 < x < 1 \tag{M.23}$$

$$\text{argcotgh}x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}, \quad \text{pro} \quad |x| > 1 . \tag{M.24}$$

Průběh funkcí hyperbolických a hyperbolometrických je znázorněn na obr. M 3 a M 4.

Uvedeme nyní tabulku derivací cyklometrických, hyperbolických a hyperbolometrických funkcí:

$y = \arcsin x$,	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $\lvert x\rvert < 1$	$y = \arccos x$,	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $\lvert x\rvert < 1$
$y = \text{arctg}x$,	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \text{arccotg}x$,	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$
$y = \sinh x$,	$y' = \cosh x$	$y = \cosh x$,	$y' = \sinh x$
$y = \text{tgh}x$,	$y' = \frac{1}{\cosh^2 x}$	$y = \text{cotgh}x$,	$y' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$
$y = \text{argsinh}x$,	$y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$y = \text{argcosh}x$,	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ pro $x > 1$
$y = \text{argtgh}x$,	$y' = \frac{1}{1-x^2}$ pro $\lvert x\rvert < 1$	$y = \text{argcotgh}x$,	$y' = \frac{1}{1-x^2}$ pro $\lvert x\rvert > 1$

Všechny uvedené funkce, s nimiž jsme se zatím setkali, patří mezi tzv. funkce elementární. Jsou tabelovány, jejich grafy a vlastnosti jsou dobře známy. Při řešení některých fyzikálních úloh se mohou vyskytnout i další funkce, které mezi elementární nepatří; nazýváme je funkce speciální. Tak například při řešení některých pohybových diferenciálních rovnic můžeme dospět k integrálu, který nemůže být vyjádřen pomocí elementárních funkcí. Přesto však považujeme úlohu za vyřešenu a říkáme, že jsme nalezli její řešení "v kvadraturách". Je-li totiž řešení dovedeno do tvaru integrálu, můžeme tento integrál vždy vyjádřit buď v podobě některé speciální funkce, případně ho rozvinout do konvergující řady a omezit se podle požadované přesnosti na několik prvních členů anebo, jde-li o určitý integrál, spočítat jej numericky na počítači.

Neurčité integrály některých jednoduchých často se vyskytujících funkcí se nazývají "tabulkové". Patří k nim tyto integrály :

obr. M 3

obr. M 4

$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ($n \neq -1$, při $x < 0$ přiroz. n)

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ ($x \neq 0$)

$\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ($a > 0$)

$\int \mathrm{e}^x\ dx = \mathrm{e}^x + C$

$\int \sin x\ dx = -\cos x + C$

$\int \cos x\ dx = \sin x + C$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{cotg}\ x + C$ ($x \neq n\pi$)

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\ x + C$ ($x \neq \frac{1}{2}\pi + n\pi$)

$\int \mathrm{tg}\ x\ dx = -\ln|\cos x| + C$

$\int \mathrm{cotg}\ x\ dx = \ln|\sin x| + C$

$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\ \mathrm{arctg}\ \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\ \mathrm{arccotg}\ \frac{x}{a} + K$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$

$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$ ($|x| \neq |a|$)

$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ ($|x| \neq |a|$)

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos x + K$ ($|x| < |a|$)

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$ ($|x| > |a|$)

$\int \sinh x\ dx = \cosh x + C$

$\int \cosh x\ dx = \sinh x + C$

$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\mathrm{cotgh}\ x + C$ ($x \neq 0$)

$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \mathrm{tgh}\ x + C$

(C, K jsou libovolné konstanty).

Při integrování platí, že integrál součtu je součet integrálů a konstantní koeficient lze vytknout před integrál:

$$\int [f(x) + g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx\ , \qquad \int c\ f(x)\ dx = c \int f(x)\ dx\ . \quad \text{(M.25)}$$

Při výpočtu integrálů složitějších funkcí se uplatní zejména metoda *substituce*, kdy přejdeme od proměnné x k nové proměnné t:

$$x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t)\ dt, \quad \int f(x)\ dx = \int f[\varphi(t)]\ \varphi'(t)\ dt\ , \qquad \text{(M.26)}$$

a metoda *integrování per partes* (po částech) podle pravidla

$$\int f(x)\ g'(x)\ dx = f(x)\ g(x) - \int g(x)\ f'(x)\ dx\ . \qquad \text{(M.27)}$$

obr. M 5 obr. M 6 obr. M 7

2. Souřadnice ve fyzice

Fyzikální pohyb musí být popisován vzhledem k nějaké vztažné soustavě - třem prostorovým a jedné časové souřadnici. Uvažme napřed pohyb *v rovině*. V ní můžeme zvolit počátek O a dvě vzájemně kolmé osy *kartézských souřadnic* x, y (název podle francouzského matematika René Descarta, latinsky Cartesia). Na těchto osách pak vynášíme kladné, resp. záporné souřadnice bodů v rovině. Vzdálenost bodu A od počátku a vzdálenost bodů A, B jsou podle Pythagorovy věty rovny (obr. M 5)

$$r = OA = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \tag{M.28}$$

Často je výhodné používat místo kartézských souřadnic *polární souřadnice*. Jsou to vzdálenost bodu od počátku $r > 0$ a polární úhel $0 \leq \varphi < 2\pi$, který odečítáme od dané poloosy vycházející z počátku, např. podél osy x, proti směru hodinových ručiček (obr. M 6).

Mezi polárními a kartézskými souřadnicemi platí jednoduché převodní vztahy

$$x = r\,\cos\varphi\,, \quad y = r\,\sin\varphi\,; \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x}\,. \tag{M.29}$$

Při integrování v rovině potřebujeme znát diferenciální element plochy, tj. plošku, která vznikne, dostanou-li souřadnice malé, diferenciální přírůstky. V kartézských a polárních souřadnicích jsou zřejmě tyto elementy (obr. M 7)

$$dS = dx\,dy\,, \qquad dS = r\,dr\,d\varphi\,. \tag{M.30}$$

obr. M 8 obr. M 9

Přejdeme nyní do *prostoru*. Opět zde můžeme zavést *kartézské souřadnice* $x,\ y,\ z$ a určit vzdálenost dvou bodů jako

$$r \ = \ \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ . \tag{M.31}$$

V trojrozměrném případě musíme dávat pozor na vzájemnou orientaci os v pořadí $x,\ y,\ z$. Máme-li pravotočivý šroub a budeme jím otáčet od kladného směru osy x nejkratší cestou ke kladnému směru osy y a bude-li se šroub přitom posunovat v kladném směru osy z, nazýváme takovou kartézskou soustavu *pravotočivou*. Změníme-li u pravotočivé kartézské soustavy smysl jedné nebo všech tří os, dostaneme soustavu *levotočivou*. Všechny prostorové kartézské soustavyu se tedy rozpadají na dvě velké skupiny, soustavy pravotočivé a levotočivé, které nelze navzájem převést pouhým posouváním a natáčením (obr. M 8). Abychom se vyhnuli možným problémům se znaménky různých fyzikálních veličin, budeme soustavně používat například pravotočivé kartézské soustavy.

V případech, kdy fyzikální soustava vykazuje válcovou symetrii, je vhodnější používat *válcové* neboli *cylindrické* souřadnice $R,\ \varphi,\ z$. Je to vlastně kombinace polárních souřadnic $R,\ \varphi$ v rovině kolmé k ose válce a kartézské souřadnice z ve směru osy. Konečně v případě kulové symetrie jsou vhodné *kulové* neboli *sférické* souřadnice $r,\ \varphi,\ \theta$ (obr. M 9). Souřadnice $r \geq 0$ představuje vzdálenost bodu od počátku, $0 \leq \varphi < 2\pi$ je polární úhel v rovině $x,\ y$ odečítaný od osy x a $0 \leq \theta \leq \pi$ úhel odečítaný od směru osy z. Úhel φ je tedy vlastně zeměpisná délka odečítaná od nulového poledníku východním směrem do 360^0 a θ zeměpisná šířka odečítaná nikoli od rovníku ale od severního pólu. Označíme dále vzdálenost projekce bodu do roviny $x,\ y$ od počátku jako $R = r\ \sin\theta$. Pak dostáváme vztahy

$$x \ = \ R\ \cos\varphi \ = \ r\ \sin\theta\cos\varphi\ , \qquad y \ = \ R\ \sin\varphi \ = \ r\ \sin\theta\sin\varphi\ , \qquad z \ = \ r\ \cos\theta \tag{M.32}$$

$$r \ = \ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ , \qquad \mathrm{tg}\ \varphi \ = \ \frac{y}{x}\ , \qquad \cos\theta \ = \ \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\ . \tag{M.33}$$

obr. M 10 obr. M 11

Uvedeme ještě diferenciální element na válcové ploše v cylindrických souřadnicích a na kulové ploše ve sférických souřadnicích:

$$dS \;=\; R\; d\varphi\; dz\;, \qquad dS \;=\; r^2\;\sin\theta\; d\varphi d\theta \tag{M.34}$$

a diferenciální element objemu v kartézských, cylindrických a sférických souřadnicích:

$$dV \;=\; dx\; dy\; dz\;, \quad dV \;=\; R\; dR\; d\varphi\; dz\;, \quad dV \;=\; r\; d\theta\; R\; d\varphi\; dr \;=\; r^2\;\sin\theta\; dr\; d\varphi\; d\theta\;. \tag{M.35}$$

Ve fyzice je důležité zkoumat, jak se mění matematické vyjádření jednotlivých fyzikálních veličin při *transformacích souřadnic*. Uvažme nyní kartézské souřadnice v prostoru a provádějme jejich transformace. Budeme přitom uvažovat jen tzv. euklidovské transformace, při nichž zůstávají zachovány vzdálenosti mezi dvěma body a úhly mezi dvěma směry. Jednou z možných takových transformací je *translace*, rovnoběžné posunutí všech tří os do nového počátku (obr. M 10). Je-li $\vec{o}$ vektor spojující původní počátek O a nový počátek O', dostáváme mezi původními souřadnicemi $x,\ y,\ z$ a novými souřadnicemi $x',\ y',\ z'$ transformační vztahy

$$x' \;=\; x - o_x\;, \quad y' \;=\; y - o_y\;, \quad z' \;=\; z - o_z\;. \tag{M.36}$$

Dalším důležitým případem transformace souřadnic je *rotace*, pootočení jedné kartézské soustavě vůči druhé, přičemž obě mají týž počátek $O \equiv O'$. Všimneme si napřed pootočení čárkované soustavy vůči nečárkované kolem osy z o úhel φ. Z obr. M 11 snadno

odvodíme transformační vztahy

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi & \qquad x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi & \qquad y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \\ z' &= z & \qquad z &= z' \end{aligned} \tag{M.37}$$

Je-li kartézská soustava pravotočivá (levotočivá), bude i soustava vzniklá pootočením rovněž pravotočivá (levotočivá). Přechod od pravotočivé k levotočivé soustavě můžeme dosáhnout další transformací, kterou nazýváme *inverze*. Při ní se změní znaménka všech tří souřadnic:

$$x' = -x\,, \quad y' = -y\,, \quad z' = -z\,. \tag{M.38}$$

Ve fyzice místo označení souřadnic $x,\ y,\ z$ často používáme zápisu $x_i,\ i = 1, 2, 3$, kde $x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$. Současně pro zjednodušení zápisu používáme tzv. *Einsteinovo sumační pravidlo*, podle kterého výraz, v němž se objevuje nějaký index dvakrát, je třeba považovat za sumu a sčítat podle tohoto indexu od 1 do 3. Tak například $x_i x_i = x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ se rovná čtverci vzdálenosti daného bodu od počátku.

Rotace v prostoru (kolem libovolné osy procházející počátkem) a inverze tvoří třídu *obecných ortogonálních transformací*, které zachovávají vzdálenosti a kolmost (ortogonalitu). Tyto transformace můžeme zapsat pomocí transformační matice α_{ik} (je to vlastně čtvercová tabulka devíti čísel udaných indexy $i,\ k$):

$$x'_i = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik}\, x_k = \alpha_{ik}\, x_k\,. \tag{M.39}$$

Pro výše uvedený případ rotace soustavy kolem osy z je transformační matice rovna

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{M.40}$$

Aby trasformace zachovávala vzdálenosti, musí platit pro transformační matici podmínka ortogonality. Přirovnáme-li čtverec vzdálenosti bodu od počátku v čárkované a nečárkované soustavě, dostaneme podmínku

$$r'^2 = x'_i x'_i = \alpha_{ij} x_j \alpha_{ik} x_k = \alpha_{ij}\alpha_{ik} x_j x_k = x_j x_j = r^2\,. \tag{M.41}$$

(uvědomme si, že sčítací index, který se objevuje dvakrát, můžeme označit libovolným písmenem a máme-li součin dvou různých sum, musíme volit pro každou z nich jiné označení sčítacího indexu).

Aby podmínka ortogonality M.41 byla splněna, musí pro matice α_{ik} platit

$$\alpha_{ij}\ \alpha_{ik} = \delta_{jk}\,. \tag{M.42}$$

Tzv. *Kroneckerův symbol* δ_{ij} je definován jako rovný jedné, jsou-li oba jeho indexy stejné $i = j$, a nule, jsou li různé $i \neq j$. Představuje tedy diagonální matici

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{M.43}$$

Můžeme ještě zapsat obecné vyjádření pro zpětnou transformaci, od čárkovaných souřadnic k nečárkovaným. Vynásobíme-li transformační vztah M.39 maticí α_{ij}, dostaneme

$$\alpha_{ij}\, x'_i \;=\; \alpha_{ij}\, \alpha_{ik}\, x_k \;=\; \delta_{jk}\, x_k \;=\; x_j\ . \tag{M.44}$$

Pozměníme-li označení indexů (místo j napíšeme i a místo i k), dostaneme

$$x_i \;=\; \alpha_{ki}\, x'_k\ . \tag{M.45}$$

Srovnáme-li tento transformační vztah s přímou transformací M.39, vidíme, že matice zpětné transformace je vůči matici přímé transformace transponovaná (má zaměněno pořadí indexů, tj. řádky za sloupce a naopak).

3. Skaláry, vektory a tenzory

Z matematického hlediska mají fyzikální veličiny charakter skalárů, vektorů a tenzorů druhého případně vyšších řádů. Vektor můžeme přitom považovat za tenzor prvního řádu, skalár za tenzor nultého řádu. *Skaláry* (od latinského scala, škála) jsou dány číslem, většinou reálným, a jeho hodnota závisí pouze na zvolené jednotce. *Vektory* v třírozměrném eukleidovském prostoru představují uspořádané trojice čísel, které můžeme zapisovat pomocí jediného indexu jako $a_i,\ i = 1, 2, 3.$[1]. *Tenzory* druhého řádu zapisujeme pomocí dvou indexů a_{ik} (představují tedy čtvercovou matici), tenzory vyšších řádů mají pak tři a více indexů. Skalárem je třeba hmotnost nebo elektrický náboj, vektorem rychlost, zrychlení, síla apod., charakter tenzoru má např. moment setrvačnosti, mechanické napětí, elektromagnetické či gravitační pole aj.

Ve skutečnosti nejde pouze o to, kolika indexy je ta která veličina popsána, kolik má prvků (souřadnic). Důležité je jakým způsobem se tyto souřadnice transformují při ortogonálních transformacích soustavy souřadnic. Skaláry, které nazýváme též invarianty, se při transformacích souřadnic nemění: $a' = a$. Vedle pravých skalárů existují také *pseudoskaláry*, které při inverzi mění znaménko.

Pravé neboli polární vektory mají souřadnice, které se transformují stejně jako souřadnice bodů, tj. podle M.39:

$$a'_i \;=\; \alpha_{ik}\, a_k\ . \tag{M.46}$$

Při inverzi tedy souřadnice vektorů mění znaménko, směr vektoru se ovšem nemění. Existují též vektory nepravé neboli axiální (pseudovektory), které při inverzi znaménko nemění. Patří k nim například moment hybnosti, moment síly apod. Právě při počítání s pseudovektory musíme dbát, abychom používali důsledně pravotočivou soustavu souřadnic. [2]

[1] V teorii relativity přistupuje čtvrtá souřadnice a indexy vektorů v takovém čtyřrozměrném prostoru označujeme řeckými písmeny, např. a^μ nebo $a_\mu,\ \mu = 0, 1, 2, 3$

[2] Snadno se přesvědčíme, že skalární součin dvou polárních vektorů i dvou axiálních vektorů je skalár, skalární součin polárního a axiálního vektoru je pseudoskalár, vektorový součin dvou polárních vektorů je axiální vektor (pseudovektor).

Tenzory druhého řádu se transformují jako součiny souřadnic vektorů. Jednou z možností, jak získat tenzor je totiž vytvořit součin souřadnic dvou vektorů: $a_{ik} = b_i c_k$. Takový tenzor se pak bude transformovat podle pravidla

$$a'_{ik} \;=\; b'_i\; c'_k \;=\; \alpha_{ij} b_j\; \alpha_{kl} c_l \;=\; \alpha_{ij}\alpha_{kl}\; a_{jl}\;. \tag{M.47}$$

Všimneme si nyní blíže vlastností vektorů. V matematice je vektor (označíme ho $\vec{a}$) zcela obecně definován jako prvek množiny (vektorového prostoru), v níž je zavedena operace sčítání vektorů (součet dvou vektorů je opět prvkem této množiny) a násobení vektoru číslem (výsledný vektor je opět prvkem množiny). Pro tyto operace pak musí platit komutativní, asociativní a distributivní zákony:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \quad \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}, \quad \alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a},$$

$$(\alpha + \beta)\;\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}, \quad \alpha\;(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b},$$

musí být definován nulový vektor $\vec{0}$ takový, že

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}, \quad 0\vec{a} = \vec{0}, \quad \alpha\vec{0} = \vec{0}$$

(rovnost $\alpha\vec{a} = \vec{0}$ nastane právě tehdy, když $\alpha = 0$ nebo $\vec{a} = \vec{0}$), dále ke každému vektoru opačný vektor $-\vec{a}$ tak, aby

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}, \quad \vec{b} + (-\vec{a}) = \vec{b} - \vec{a} = \vec{x} \;\Rightarrow \vec{b} = \vec{a} + \vec{x}, \quad -(\alpha\vec{a}) = (-\alpha)\vec{a} = \alpha(-\vec{a})$$

(tím je vlastně definováno odečítání vektorů) a při násobení číslem 1 musí vektor zůstat beze změny: $1\vec{a} = \vec{a}$.

Takto definovaný vektorový prostor může být tvořen nejrůznějšími objekty - funkcemi, mnohočleny, uspořádanými n-ticemi čísel apod. Omezíme se na uspořádané trojice reálných čísel; tato čísla budeme nazývat kartézské souřadnice vektorů: $\vec{a} \equiv (a_1,\; a_2,\; a_3)$. Dva vektory budeme považovat za totožné, budou-li si jejich odpovídající kartézské souřadnice rovny. [3]

Součet dvou vektorů a součin vektoru a čísla zavedeme vztahy

$$\vec{a} \;+\; \vec{b} \;=\; (a_1 + b_1,\; a_2 + b_2,\; a_3 + b_3)\;, \qquad \alpha\;\vec{a} \;=\; (\alpha a_1,\; \alpha a_2,\; \alpha a_3)\;, \tag{M.48}$$

nulový vektor jako $\vec{0} = (0,\; 0,\; 0)$ a vektor opačný k $\vec{a}$ jako $-\vec{a} = (-a_1,\; -a_2,\; -a_3)$. Snadno ověříme, že budou splněny výše uvedené požadavky na vektorový prostor.

Takto zavedený vektorový prostor má přímý vztah k bodům trojrozměrného eukleidovského prostoru a má názornou geometrickou interpretaci. Tyto vektory můžeme chápat jako uspořádané dvojice bodů ("šipky") $\vec{AB}$ a souřadnice vektoru jako rozdíly kartézských souřadnic těchto bodů. Vztahy mezi vektory pak můžeme vyjadřovat jak v souřadnicové podobě tak geometricky, při čemž geometrické vyjádření je obecnější, není závislé na druhu zvolených souřadnic. Tak sčítání dvou vektorů a násobení vektoru číslem můžeme názorně geometricky definovat pomocí pravidla rovnoběžníku a násobením úsečky (obr. M 12). Z

[3] Jde tedy o tzv. vektory volné, jejichž počáteční bod můžeme umístit v libovolném bodě. Vedle toho známe vektory vázané, které mají počáteční bod (působiště) vázáno na určitý bod a vektory klouzavé, které je možno libovolně přemisťovat podél jejich vektorové přímky.

obr. M 12

obr. M 13

asociativnosti sčítání vektorů též plyne, že při sčítání více vektorů můžeme postupně přikládat začátek dalšího vektoru ke konci předcházejícího a najít výsledný vektor spojením počátku prvního a konce posledního (obr. M 13a). Z pravidla o sčítání vektorů také snadno najdeme rozdíl vektorů (obr. M 13b).

Snadno se přesvědčíme, že délka úsečky reprezentující vektor, tj. podle Pythagorovy věty veličina

$$a \;=\; |\vec{a}| \;=\; \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \;=\; \sqrt{a_i a_i} \tag{M.49}$$

zůstává invariantní, neměnná při transformaci souřadnic vektoru M.46. Tak můžeme vektoru přiřadit invariant (skalár) M.49 nazývaný délka, velikost, absolutní hodnota, norma nebo modul vektoru. Vektor o délce rovné 1 nazveme jednotkový. Zavedeme-li ortonormální vektory kartézské báze (orty), tj. jednotkové vektory ve směru kartézských os souřadnic, označované $\vec{x}_0,\ \vec{y}_0,\ \vec{z}_0$ nebo také $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, o souřadnicích $\vec{i} = (1,0,0),\ \vec{j} = (0,1,0),\ \vec{k} = (0,0,1)$ můžeme každý vektor vyjádřit jako součet

$$\vec{a} \;=\; (a_1, a_2, a_3) \;=\; a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \;=\; \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3\ , \tag{M.50}$$

tj. rozložit jej do složek $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3$ podél kartézských os. Takzvaný *polohový vektor* (nepěkně "rádiusvektor") daného bodu A spojuje počátek soustavy souřadnic s tímto bodem a má tedy souřadnice $\vec{r} = (x, y, z)$, kde $x,\ y,\ z$ jsou zároveň souřadnice bodu A.

obr. M 14

Eukleidovský trojrozměrný vektorový prostor je speciální typ vektorového prostoru, ve kterém můžeme kromě sčítání vektorů a násobení vektoru číslem zavést další vektorové operace, skalární a vektorové násobení vektorů (nikoli dělení).

Skalární součin dvou vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ je definován jako číslo

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \;=\; a\; b\; \cos\gamma\;, \tag{M.51}$$

kde a, b jsou velikosti obou vektorů a γ úhel mezi nimi (obr. M 14a).

Odtud plyne, že je-li $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, musí být buď jeden z vektorů nulový nebo musí být oba vektory vzájemně kolmé. Pro vektory $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ zřejmě platí $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$. Vyjádříme-li nyní vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ ve tvaru M.50 a skalárně vynásobíme, dostaneme pro skalární součin souřadnicové vyjádření

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \;=\; a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \;=\; a_i b_i\;. \tag{M.52}$$

Je vidět, že absolutní velikost vektoru můžeme vyjádřit též jako $a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$. Snadno se přesvědčíme, že pro skalární součin platí komutativní a asociativní vztahy

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \;=\; \vec{b} \cdot \vec{a}\;, \quad \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) \;=\; (\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b}\;, \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) \;=\; \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}\;, \tag{M.53}$$

ale obecně $\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$!!.

Vektorový součin dvou vektorů je definován jako vektor

$$\vec{a} \times \vec{b} \;=\; \vec{c}\;, \quad \text{kde} \quad c \;=\; a\; b\; \sin\gamma \tag{M.54}$$

a jeho směr je kolmý k oběma vektorům $\vec{a}$, $\vec{b}$. Smysl vektorového součinu určíme tak, že se budeme pohybovat od vektoru $\vec{a}$ k vektoru $\vec{b}$ kratší cestou (tj. pro $0 \leq \gamma \leq \pi$) a vektor $\vec{c}$ pak bude mířit ve směru pohybu pravotočivého šroubu (používáme-li pravotočivou soustavu souřadnic!) (obr. M 14b) .V levotočivé soustavě bude mít směr opačný a vektorový součin dvou pravých vektorů je tedy pseudovektor. Velikost vektorového součinu je zřejmě rovna obsahu rovnoběžníku vytvořeného z vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$. Je-li $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, musí být buď jeden z vektorů nulový nebo oba vektory rovnoběžné. Proto také $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

Na rozdíl od skalárního součinu je vektorový součin *antikomutativní*:

$$\vec{d} \;=\; \vec{b} \times \vec{a} \;=\; b\; a\; \sin(2\pi - \gamma) \;=\; -\vec{a} \times \vec{b} \;=\; -\vec{c}\;. \tag{M.55}$$

Pro vektory $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ platí $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$, $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$, $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$. Vyjádříme- li vektory $\vec{a},\ \vec{b}$ ve složkách podle M.50 a vektorově vynásobíme, dostaneme

$$\vec{a}\times\vec{b} \;=\; (\ a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1\ )\ . \tag{M.56}$$

Vektorový součin M.56 můžeme také zapsat ve formě vektorového determinantu

$$\vec{a}\times\vec{b} \;=\; \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{M.57}$$

Zavedeme-li *Levi-Civitův symbol* ε_{ijk} rovný nule, jsou-li kterékoli dva jeho indexy stejné, rovný jedné, jsou-li všechny tři indexy různé a tvoří sudou permutaci čísel 1, 2, 3 a rovný minus jedné, tvoří-li tyto indexy lichou permutaci, můžeme vektorový součin zapsat v elegantním tvaru

$$c_i \;=\; \varepsilon_{ijk}\ a_j\ b_k\ . \tag{M.58}$$

Přes indexy j a k se ovšem sčítá, výraz M.58 udává $i-$tou složku vektorového součinu.

Pro vektorový součin platí vztahy

$$\vec{a}\times b \;=\; -\vec{b}\times\vec{a}\ ,\quad \alpha(\vec{a}\times\vec{b}) \;=\; (\alpha\vec{a})\times\vec{b}\ ,\quad \vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) \;=\; \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}\ . \tag{M.59}$$

Obecně ovšem $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$!!.

Smíšený součin tří vektorů $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ definujeme jako skalár

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} \;=\; |\vec{a}\times\vec{b}|\ |\vec{c}|\ \cos\gamma\ , \tag{M.60}$$

kdeγ je úhel, který svírá vektor $\vec{c}$ s kolmicí k rovině $\vec{a},\ \vec{b}$ (viz obr. M 15). Z obrázku je zřejmý názorný geometrický význam smíšeného součinu tří vektorů. Je-li $0\leq\gamma<\pi/2$, tj leží-li vektor $\vec{c}$ v témž poloprostoru jako vektorový součin $\vec{a}\times\vec{b}$, představuje smíšený součin objem rovnoběžnostěnu vytvořeného vektory $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$. Je-li $\gamma=\pi/2$, tj. leží-li všechny tři vektory v jedné rovině, je smíšený součin nulový. Je-li $\pi/2<\gamma\leq\pi$, bude mít smíšený součin záporné znaménko.

Vzhledem ke svému geometrickému významu nemůže smíšený součin záležet na tom, které dva vektory násobíme vektorově, pokud dodržíme pořadí všech tří vektorů, resp. jejich sudou permutaci. Platí tedy

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} \;=\; (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} \;=\; (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}\ . \tag{M.61}$$

Protože skalární součin je komutativní, nemusíme označení součinů uvádět a můžeme smíšený součin psát jen jako $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$. Změní-li se pořadí dvou sousedních vektorů, změní smíšený součin znaménko. Smíšený součin můžeme spočítat jako determinant

$$\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} \;=\; \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}\cdot(c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}) \;=\; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{M.62}$$

Nakonec ještě uvedeme některé užitečné vzorce vektorové algebry. Je to především vzorec pro *dvojitý vektorový součin* známý jako formule "bac minus cab":

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \;=\; \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) \;-\; \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})\ . \tag{M.63}$$

obr. M 15

Někdy se hodí i vzorce

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) \;=\; (\vec{a} \cdot \vec{c})\;(\vec{b} \cdot \vec{d}) \;-\; (\vec{a} \cdot \vec{d})\;(\vec{b} \cdot \vec{c}) \tag{M.64}$$

(tzv. Lagrangeova identita), a dále

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) \;=\; [\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{d})]\;\vec{c} \;-\; [\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})]\;\vec{d} \tag{M.65}$$

a

$$\vec{a} \times [\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})] \;=\; (\vec{a} \times \vec{c})\;(\vec{b} \cdot \vec{d}) \;-\; (\vec{a} \times \vec{d})\;(\vec{b} \cdot \vec{c})\;. \tag{M.66}$$

Krátce o některých vlastnostech *tenzorů*. V trojrozměrném eukleidovském prostoru má tenzor druhého řádu obecně devět prvků, souřadnic:

$$T_{ik} \;\equiv\; \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}. \tag{M.67}$$

Důležitým příkladem tenzoru druhého řádu je Kroneckerův symbol δ_{ik} M.43. Je to diagonální tenzor (má nenulové souřadnice pouze na diagonále matice) a má tu vlastnost, že je invariantní (izotropní). Při přechodu od jedné kartézské soustavy souřadnic k druhé se jeho tvar nemění. Z tenzorů třetího řádu jsme poznali Levi-Civitův symbol ε_{ijk}, který je rovněž invariantní, avšak při inverzi mění znaménko. Je to tedy pseudotenzor.

Také pro tenzory můžeme definovat řadu algebraických operací, jako sčítání $T_{ik} = T_{ik}^{(1)} + T_{ik}^{(2)}$ (součet tenzorů je tenzor tvořený součty odpovídajících souřadnic) a násobení číslem $T_{ik} = \alpha T_{ik}^{(1)}$ (číslem násobíme všechny souřadnice tenzoru). Násobením tenzoru n-tého řádu a tenzoru m-tého řádu vzniká obecně tenzor (n+m)-tého řádu: $T_{ij}U_{klm} = V_{ijklm}$. Naproti tomu je možno provádět i operaci *úžení* tenzoru, sčítáme-li přes některé

dvojice jeho indexů. Tím vznikají tenzory nižších řádů. Zúžením tenzoru třetího řádu dostaneme vektor, zúžením tenzoru druhého řádu skalár:

$$T_{iik} \;=\; a_k \;, \qquad T_{ii} \;=\; \mathrm{Sp}\, T_{ik} \;=\; a \;. \tag{M.68}$$

(dvakrát se opakující index je sčítací a ve výsledku se již neobjevuje). Suma T_{ii} je vlastně součet diagonálních prvků tenzoru a nazývá se *stopa* tenzoru. Označujeme ji symbolem Sp (z německého Spur) nebo Tr (z anglického trace). Stopa tenzoru je tedy invariant, nemění se při transformaci souřadnic.

Lze rozlišit tenzory symetrické, u nichž $S_{ik} = S_{ki}$ a tenzory antisymetrické pro něž platí $A_{ik} = -A_{ki}$. Vlastnost symetrie nebo antisymetrie je invariantní, tenzor zůstává symetrickým (antisymetrickým) i při transformacích souřadnic. Symetrický tenzor druhého řádu má obecně šest nezávislých, nenulových prvků - tři diagonální a tři nediagonální. Antisymetrický tenzor druhého řádu musí mít na diagonále prvky nulové a má tedy jen tři nezávislé prvky. Takový tenzor můžeme odvodit z prvků axiálního vektoru $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ jako

$$A_{ik} \;\equiv\; \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{M.69}$$

Říká se mu tenzor duální k axiálnímu vektoru. Příkladem antisymetrického tenzoru třetího řádu je tenzor Levi-Civitův; má celkem 27 prvků, z toho 21 nul, 3krát 1 a 3krát -1. Každý tenzor lze jednoznačně vyjádřit jako součet symetrického a antisymetrického tenzoru:

$$T_{ik} \;=\; \frac{1}{2}\,(T_{ik} + T_{ki}) \;+\; \frac{1}{2}\,(T_{ik} - T_{ki}) \;=\; S_{ik} \;+\; A_{ik} \;. \tag{M.70}$$

Ve fyzice se často setkáváme se symetrickými tenzory. Mají důležitou vlastnost: *Každý symetrický nenulový tenzor lze vhodnou ortogonální transformací diagonalizovat*, tj. vhodnou volbou souřadných os převést na diagonální tvar

$$S_{ik} \;=\; \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} . \tag{M.71}$$

Číslům λ_i se říká *hlavní hodnoty tenzoru* a osám souřadnic, v nichž má tenzor diagonální tvar, *hlavní osy souřadnic.* Z prvků symetrického tenzoru druhého řádu jako koeficientů můžeme sestavit rovnici symetrické kvadratické plochy (kvadriky):

$$S_{11}x^2 + S_{22}y^2 + S_{33}z^2 + 2S_{12}xy + 2S_{23}yz + 2S_{13}xz \;=\; \mathrm{sgn}(|S_{ik}|)\;; \tag{M.72}$$

svislými čarami je zde označen determinant matice.

Také rovnici kvadriky lze jak známo vhodnou volbou souřadnic převést na kanonický tvar

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 \;=\; \mathrm{sgn}(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)\;. \tag{M.73}$$

Symetrický tenzor lze tedy názorně geometricky interpretovat pomocí symetrických kvadrik, k nimž patří elipsoid, jednodílný hyperboloid a dvojdílný hyperboloid. Jsou-li hlavní prvky tenzoru kladné, připadá v úvahu pouze elipsoid.

Je-li zadán symetrický tenzor S_{ik}, najdeme jeho hlavní prvky řešením tzv. *sekulární rovnice*

$$\begin{vmatrix} S_{11}-\lambda & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22}-\lambda & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + A\lambda^2 - B\lambda + C = 0\,. \tag{M.74}$$

Je to algebraická rovnice třetího stupně pro neznámou λ (výraz na levé straně je determinant, který čtenář jistě umí rozvinout) a ta nám dá právě tři kořeny, hledané hlavní hodnoty tenzoru. Koeficienty A, B, C jsou invarianty tenzoru, nezávisí na soustavě souřadnic a mají hodnoty

$$A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = S_{11} + S_{22} + S_{33} = S_{ii} = \mathrm{Sp}S_{ik}$$

$$B = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{23} & S_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{11} & S_{13} \\ S_{13} & S_{33} \end{vmatrix}$$

$$C = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |S_{ik}|\,. \tag{M.75}$$

Symetrický tenzor má tedy tři invarianty: stopu, součet hlavních minorů a determinant příslušející matici tenzoru.

4. Kuželosečky a kvadriky

Kuželosečky jsou rovinné křivky, které vzniknou jako průsečnice roviny dvojitou kuželovou plochou; tento způsob vytváření kuželoseček znal a jejich vlastnosti podrobně popsal již starořecký matematik Apollonios z Pergy. Analyticky můžeme zapsat obecnou rovnici kuželosečky v kartézských souřadnicích jako

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} \;=\; 0\,. \tag{M.76}$$

Zavedeme diskriminant kuželosečky Δ a diskriminant kvadratických členů kuželosečky δ jako

$$\Delta \;=\; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \delta \;=\; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{M.77}$$

Je-li $\Delta = 0$, dostáváme nevlastní (degenerované) kuželosečky, které představují různé dvojice přímek, různoběžných, rovnoběžných či splývajících. Pro $\Delta \neq 0$ máme kuželosečky vlastní. Je-li $\delta \neq 0$ jsou to kuželosečky středové, středově symetrické: *elipsa* ($\delta > 0$) a *hyperbola* ($\delta < 0$). Je-li $\delta = 0$, máme *parabolu*.

Elipsu můžeme definovat jako množinu bodů v rovině, které mají týž součet vzdáleností od dvou daných bodů, ohnisek. Zvolíme-li osy souřadnic v osách symetrie elipsy, dostaneme rovnici elipsy v kartézských souřadnicích

$$\frac{x^2}{a^2} \;+\; \frac{y^2}{b^2} \;=\; 1\,. \tag{M.78}$$

Konstanty $a,\ b$ jsou velká a malá poloosa elipsy.

Hyperbolu můžeme definovat jako množinu bodů v rovině, které mají týž rozdíl vzdáleností od dvou daných bodů, ohnisek. Zvolíme-li osy souřadnic v osách symetrie hyperboly, dostaneme rovnici hyperboly v kartézských souřednicích

$$\frac{x^2}{a^2} \;-\; \frac{y^2}{b^2} \;=\; 1\,. \tag{M.79}$$

Konstanty $a,\ b$ jsou velká a malá poloosa hyperboly.

Parabolu můžeme definovat jako množinu bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od daného bodu (ohnisko, fokus) a dané přímky (řídící přímka, direktrisa). Zvolíme-li osy souřadnic v osách symetrie paraboly, dostaneme rovnici paraboly v kartézských souřadnicích

$$y^2 \;-\; 2\,p\,x \;=\; 0\,. \tag{M.80}$$

Konstanta p se nazývá parametr paraboly a je rovna vzdálenosti ohniska od řídící přímky.

Ve fyzice je někdy výhodnější popisovat kuželosečku nikoli v kartézských, ale v polárních souřadnicích. K odvození rovnice kuželosečky v polárních souřadnicích vyjdeme z obecné definice, podle níž je kuželosečka rovinná křivka, jejíž body mají konstantní *podíl* vzdálenosti od ohniska (r) a od řídící přímky (l) (viz obr. M 16):

$$\frac{r}{l} \;=\; e \;=\; \text{konst}\,. \tag{M.81}$$

obr. M 16

Tento podíl se nazývá *excentricitou* e kuželosečky a podle ní můžeme kuželosečky klasifikovat následujícím způsobem :

$e = 0$	–	kružnice	
$0 < e < 1$	–	elipsa	(křivka 1)
$e = 1$	–	parabola	(křivka 2)
$e > 1$	–	bližší větev hyperboly	(křivka 3)

Počátek polární soustavy souřadnic zvolíme v ohnisku F a polární osu o ve směru k nejbližšímu bodu kuželosečky A_p, který nazveme perihelium. Úhel φ budeme odečítat od této osy proti směru ručiček hodin (obr. M 16). Bod A na obrázku označuje obecný bod kuželosečky se vzdálenostmi r k ohnisku a l k řídící přímce, bod P odpovídá polárnímu úhlu $\varphi = \pi/2$, jeho vzdálenost k ohnisku je rovna p a k řídící přímce p'. Délku p nazveme *parametr* kuželosečky. Bod A' je pata kolmice spuštěné z bodu A na polární osu, bod D průsečík polární osy s řídící přímkou. Nyní již snadno zapíšeme polární rovnici kuželosečky.

Z M.81 máme pro bod P $\quad p/p' = p/FD = e$ a pro obecný bod A

$$l \;=\; FD \;-\; FA' \;=\; \frac{p}{e} \;-\; r\;\cos\varphi\;,$$

a tedy

$$\frac{p}{r} \;=\; 1 \;+\; e\;\cos\varphi\;. \tag{M.82}$$

Podle hodnoty excentricity popisuje tato rovnice kružnici, elipsu, parabolu a bližší větev hyperboly.

Musí platit $p/r > 0$. Pro $e > 1$ této podmínce vyhoví i rovnice

$$\frac{p}{r} \;=\; -\,1 \;+\; e\;\cos\varphi\;. \tag{M.83}$$

Snadno ověříme, že tato rovnice popisuje druhou, od ohniska F vzdálenější větev hyperboly (křivka 4 na obr. M 16).

Vyjádříme nyní některé vlastnosti jednotlivých druhů kuželoseček. Pro excentricitu $e < 1$ dostáváme elipsu, jejíž zvláštním případem je kružnice. Elipsa je kuželosečka finitní, všechny její body leží v konečnu. Na obr. M 16 je označeno i druhé ohnisko elipsy F' a bod elipsy nejvzdálenější od ohniska F, A_a, který nazveme afelium. [4] Vzdálenosti perihelia a afelia od ohniska F označíme r_{min} a r_{max}. Elipsa je středová a osově symetrická kuželosečka se středem S; její velkou a malou poloosu označujeme a a b.

Z obr. M 16 a rovnice M.82 nyní určíme vzdálenost perihelia (odpovídá úhlu $\varphi = 0$) a afelia ($\varphi = \pi$):

$$r_{min} \;=\; \frac{p}{1+e} \qquad\qquad r_{max} \;=\; \frac{p}{1-e}\;. \tag{M.84}$$

Odtud velká poloosa elipsy

$$a \;=\; \frac{r_{min} + r_{max}}{2} \;=\; \frac{p}{1-e^2}\;. \tag{M.85}$$

Malou poloosu musíme určit pomocí Pythagorovy věty z trojúhelníka SFA_s na obrázku, v němž $SA_s = b$, $\quad SF = a - r_{min} = ae$, $\quad FA_s = (SF + FD)\;e = ae^2 + p = a$. Proto

$$b \;=\; \sqrt{a^2 - a^2e^2} \;=\; a\,\sqrt{1-e^2} \;=\; \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}\;. \tag{M.86}$$

Pro parabolu určíme vzdálenost k periheliu jako

$$r_{min} \;=\; \frac{p}{2}\;, \tag{M.87}$$

pro bližší a vzdálenější větev hyperboly

$$r_{minb} \;=\; \frac{p}{1+e} \;=\; a(e-1)\;, \qquad r_{minv} \;=\; \frac{p}{e-1} \;=\; a(e+1)\;. \tag{M.88}$$

[4] Názvy perihelium a afelium jsou odvozeny z astronomických názvů pro nejbližší a největší vzdálenost planety od Slunce. Někdy se říká též perihel a afel. Studujeme-li oběh Měsíce nebo umělé družice kolem Země, používáme názvů perigeum a apogeum, u oběhu kolem hvězdy názvů periastrum a apoastrum. Obecně bychom mohli zavést názvy pericentrum a apocentrum.

a) b)

obr. M 17

Odtud pro poloosy hyperboly máme

$$a = \frac{p}{e^2-1}\,, \qquad b = a\sqrt{e^2-1} = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}}\,. \tag{M.89}$$

Na rozdíl od paraboly má hyperbola asymptoty $a_1,\ a_2$ o rovnicích $y = \pm\frac{b}{a}\,x$.

Přejdeme-li do prostoru, můžeme zapsat obecnou rovnici kvadratické plochy, *kvadriky* v kartézských souřadnicích:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}xz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44} = 0\,. \tag{M.90}$$

Klasifikací případů této rovnice můžeme opět rozlišit různé kvadriky, jednak středové, k nimž patří koule, elipsoid, jednodílný a dvojdílný hyperboloid (a také dvojitá kuželová plocha), jednak nestředové, k nimž patří eliptický paraboloid a hyperbolický paraboloid (a také různé válcové plochy). Zvolíme-li kartézské osy v osách symetrie kvadriky, dostaneme rovnice kvadrik v následujících kanonických tvarech:

Pro *trojosý elipsoid* máme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{c^2}{z^2} = 1\,. \tag{M.91}$$

Zvláštními případy obecného trojosého elipsoidu jsou elipsoidy rotační, které mají dvě poloosy stejné (např. $a = b$). Je-li přitom třetí poloosa c menší, vznikne zploštělý rotační elipsoid, (obr. M 17a), je-li větší, vznikne protáhlý rotační elipsoid (obr. M 17b). Jsou-li všechny tři poloosy stejné, přejde elipsoid v kulovou plochu.

Pro *jednodílný a dvojdílný hyperboloid* dostáváme rovnice

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1\,. \tag{M.92}$$

obr. M 18

obr. M 19

obr. M 20

obr. M 21

Tyto hyperboloidy jsou na obr. M 18 a M 19.

K nestředovým kvadrikám patří *eliptický a hyperbolický paraboloid.* Tyto plochy mají rovnice

$$\frac{x^2}{p} \pm \frac{y^2}{q} = 2\,z\,. \tag{M.93}$$

Eliptický paraboloid (obr. M 20) přechází při $p = q$ ve známý paraboloid rotační. Hyperbolický paraboloid je na obr. M 21. Lze dokázat, že jednodílný hyperboloid a hyperbolický paraboloid lze vytvořit soustavou povrchových přímek.

Příklady

1. Pomocí rozměrové analýzy se pokuste "uhádnout" vzorec pro dráhu tělesa při volném pádu.

2.Vypočítejte povrch a objem koule ve sférických souřadnicích.

3.Ověřte, že transformační matice rotace kolem osy z je ortogonální, tj. že pro

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

platí $\alpha_{ij}\alpha_{ik} = \delta_{jk},\ |\alpha_{ik}| = 1$.

4. Rozepište nebo vypočíejte výrazy $a_{jl}x_l,\ \ \delta_{jk}x_k,\ \ \alpha_{1k}x_k,\ \ \delta_{ii},\ \ \delta_{ij}\delta_{ij},\ \ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}$.

5. Určete $|\vec{i} + 2\vec{j}|,\ \ |\vec{i} - 3\vec{k}|,\ \ |2\vec{i} - 3\vec{j}|,\ \ |\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}|$.

$[\sqrt{5},\ \ \sqrt{10},\ \ \sqrt{13},\ \ \sqrt{6}]$

6. Určete $\vec{i} \times (\vec{j} + \vec{k}),\ \ \vec{i} \times (\vec{i} + \vec{j}),\ \ \vec{i} \cdot (\vec{i} + \vec{k}),\ \ \vec{i} \times (\vec{i} + \vec{k})$.

$[\vec{k} - \vec{j},\ \ \vec{k},\ \ 1,\ \ -\vec{j}]$

7. Vypočítejte $|\vec{i} - \frac{\vec{i}+2\vec{j}}{5}|$.

$[\sqrt{20}/5]$

8. Vypočítejte $|\vec{a} - \frac{\vec{a}-\vec{b}}{3}|$, je-li $a = 1,\ b = 2$ a vektory $\vec{a}, \vec{b}$ svírají úhel $\pi/3$.

$[2\sqrt{3}/3]$

9. Určete $|2\vec{m} - \vec{n}|$, jsou-li $\vec{m},\ \vec{n}$ jednotkové vektory, které svírají úhel $\pi/4$.

$[\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}]$

10. Dokažte, že vektor $\vec{a}$ je kolmý k vektoru $\vec{b}$, platí-li $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$.

11. Určete $(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$.

$[a^2b^2]$

12. Upravte $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$.

$[2\vec{b} \times \vec{a}]$

13. Upravte $\vec{i} \times (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) + (\vec{j} + \vec{k}) \times (\vec{i} - 2\vec{j})$.

$[2\vec{i}]$

14. Které z těchto výrazů jsou stejné: $\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}),\quad (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c},\quad (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b},\quad (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b},\quad (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a}$?

15. Určete k vektoru $\vec{a} = (1, 3, 5)$ vektor jednotkový.

$[(1/\sqrt{35},\ 3/\sqrt{35},\ 5/\sqrt{35}]$

16. Určete jednotkový vektor ve směru $\vec{a} - \vec{b}$, kde $\vec{a} = (3, 2, 0),\quad \vec{b} = (2, 1, 1)$.

$[\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)]$

17. Určete jednotkový vektor ve směru $\vec{a} + \vec{b}$, kde $\vec{a} = (3, 3, 1),\quad \vec{b} = (1, -3, 2)$.

$[\frac{1}{5}(4, 0, 3)]$

18. Najděte jednotkový vektor kolmý k rovině určené vektory $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

$[\pm(2\vec{j} + \vec{k})/\sqrt{5}]$

19. Určete $\vec{a} \times \vec{b}$, kde $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j},\quad \vec{b} = 2\vec{j} + \vec{k}$.

$[4\vec{k} - 2\vec{j} - \vec{i}]$

20. Určete $\vec{a} \cdot \vec{b}$, kde $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j},\quad \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

[3]

21. Určete jednotkový vektor ve směru výslednice vektorů $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

$[(\vec{i} + 2\vec{k})/\sqrt{5}]$

22. Je dán součet a rozdíl dvou vektorů: $\vec{a} + \vec{b} = (4, 2, 1)$, $\vec{a} - \vec{b} = (2, 3, 1)$. Určete vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ a úhel mezi vektory $\vec{a}$, $(\vec{a} + \vec{b})$.

$[(3,\ 2.5,\ 1),\ \ (1,\ -0.5,\ 0),\ \ \cos\varphi = 0,974]$

23. Pomocí vektorového součinu určete plochu trojúhelníka s vrcholy $A(2, 3, 5)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, 6, 4)$.

$[\sqrt{426}/2 \approx 10,3]$

24. Určete objem rovnoběžnostěnu, jehož strany jsou dány vektory $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = 4\vec{j}$, $\vec{c} = \vec{j} + 3\vec{k}$.

[12]

25. Pomocí skalárního součinu vektorů určete úhly, které svírají tělesové úhlopříčky krychle.

$[70^0\ 30',\ \ 109^0\ 30']$

26. Pomocí vektorového počtu dokažte kosinovou větu (stranu c vyjádřete pomocí rozdílu vektorů $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$) a sinovou větu (uvědomte si, že pro vektory stran trojúhelníka platí $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ a použijte vlastností vektorového součinu).

27. Najděte složky vektoru $\vec{a}$ do směru daného jednotkovým vektorem $\vec{n}$ a do směru kolmého.

$[(\vec{n} \cdot \vec{a})\ \vec{n},\ \ (\vec{n} \times \vec{a}) \times \vec{n}]$

28. Jsou dány vektory $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 4\vec{j} - 3\vec{k}$. Vypočítejte $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

$[(23, 3, 4),\ \ (8, -8, 1)]$

29. Dokažte větu "bac minus cab".

30. Kolik nezávislých prvků má obecný symetrický tenzor čtvrtého řádu?

1. KINEMATIKA ČÁSTICE

1.1 Kinematický popis pohybu částice

Nejjednodušší fyzikální soustava je jeden hmotný bod, který se pohybuje v prostoru a čase. Pojem *hmotný bod* je ovšem abstrakce, model, kterým nahrazujeme reálnou částici. Vyjadřujeme jím, že odhlížíme od tvaru a rozměrů částice, považujeme ji za bodovou, a kromě její geometrické polohy v daném okamžiku jí připisujeme pouze jedinou fyzikální vlastnost, hmotnost. V tomto smyslu budeme v mechanice často místo hmotného bodu hovořit prostě o částici.

V kinematice se zajímáme pouze o průběh pohybu částice v prostoru a čase a nepátráme po příčinách tohoto pohybu a jeho změn. Předpokládáme, že částice se pohybuje po spojité křivce, *trajektorii*, a snažíme se určit jednak *tvar* této trajektorie a *zákon pohybu* po ní, tj. polohu částice na trajektorii v závislosti na čase. [5] Spojitá křivka má v každém bodě tečnu a můžeme zavést pojem okamžité rychlosti částice mířící ve směru této tečny.

Předpokládejme nejprve, že trajektorie částice je zadána. Pak můžeme od zvoleného bodu na trajektorii a zvoleného okamžiku měřit *dráhu* částice $s(t)$, tedy délku křivky, kterou částice za určitou dobu prošla (obr. 1.1). V okamžiku t je částice v bodě daném prošlou dráhou s, v okamžiku $t + \Delta t$ v bodě $s + \Delta s$. Dráha s tu vlastně představuje parametr udávající polohu bodu na křivce; tímto způsobem popisujeme například pohyb automobilu na dálnici a udáváme na kterém je právě kilometru.

Přitom můžeme zavést *střední rychlost* částice v intervalu Δt

$$< v > = \frac{\Delta s}{\Delta t}\,, \tag{1.1}$$

okamžitou rychlost částice v okamžiku t

$$v(t) \;=\; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \;=\; \frac{ds}{dt} \;=\; \dot{s}\,. \tag{1.2}$$

a okamžité zrychlení

$$a(t) \;=\; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \;=\; \frac{dv}{dt} \;=\; \frac{d^2 s}{dt^2} \;=\; \dot{v} \;=\; \ddot{s}\,. \tag{1.3}$$

Takto zavedené rychlost a zrychlení jsou skalární funkce času a udávají pouze jak se mění dráha a rychlost při pohybu po zadané trajektorii, ve směru tečny k této trajektorii.

Obecně však musíme udat polohu částice v prostoru vzhledem k nějaké vztažné soustavě. Tato soustava, například kartézská, je spojena s nějakým tuhým tělesem a doplněna

[5] Představa o pohybu částice po trajektorii jako po spojité křivce vyplývá z naší smyslové zkušenosti. Ukazuje se, že v mikrosvětě tato představa neodpovídá skutečnosti a pojem trajektorie tam ztrácí smysl. Částice se v mikrosvětě pohybuje podle zákonů kvantové mechaniky a v daném okamžiku není možné současně přesně stanovit její polohu a rychlost.

obr.1.1 obr.1.2

hodinami umístěnými například v počátku. V místnosti mohou jako kartézské osy sloužit průsečnice stěn a podlahy. Potom udáváme tři kartézské souřadnice částice jako funkce času:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t)\ . \tag{1.4}$$

Soustava tří rovnic (1.4) představuje parametrické vyjádření tvaru trajektorie. Rovnici trajektorie v kartézských souřadnicích dostaneme, vyloučíme-li z rovnic (1.4) čas. Parametrem pohybu může být ovšem i dráha: $x = x(s),\ y = y(s),\ z = z(s)$. Přitom $s = s[x(t), y(t), z(t)]$ vystupuje jako složená funkce času. Výše zavedená skalární rychlost bude

$$v(t) \ = \ \frac{ds}{dt} \ = \ \frac{\partial s}{\partial x}\,\dot{x} \ + \ \frac{\partial s}{\partial y}\,\dot{y} \ + \ \frac{\partial s}{\partial z}\,\dot{z}\ . \tag{1.5}$$

Známe-li kartézské souřadnice částice jeko funkce času, můžeme částici přiřadit *polohový vektor* $\vec{r} = [x(t),\ y(t),\ z(t)]$ vycházející z počátku soustavy souřadnic a mířící do bodu, v němž se částice právě nachází. Potom definujeme *rychlost* částice jako *vektor*, který má velikost rovnou v a směr tečny k trajektorii. Označíme-li jednotkový vektor ve směru tečny v daném bodě jako $\vec{\tau}$, můžeme psát

$$\vec{v}(t) \ = \ v\ \vec{\tau} \ = \ \frac{ds}{dt}\ \vec{\tau}\ . \tag{1.6}$$

Zavedeme-li dále derivování vektorových funkcí podobně jako u skalárních funkcí, dostaneme

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \ = \ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \ = \ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \ = \ \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt} \right)\ . \tag{1.7}$$

Z obr. 1.2 je vidět, že při $\Delta t \to 0$ se velikost vektoru $|\Delta \vec{r}|$ blíží délce oblouku Δs a jeho směr směru tečny v bodě $\vec{r}$. To souhlasí s definicí vektoru rychlosti, jak jsme ji výše zavedli. Máme tedy

$$\vec{v} \ = \ (v_x,\ v_y,\ v_z) \ = \ \frac{d\vec{r}}{dt} \ = \ (\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})\ . \tag{1.8}$$

obr. 1.3 obr. 1.4

Dále definujeme *vektor zrychlení* vztahem

$$\vec{a} \;=\; \frac{d\vec{v}}{dt} \;=\; \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \;=\; (a_x,\; a_x,\; a_z) \;=\; (\dot{v}_x,\; \dot{v}_y,\; \dot{v}_z) \;=\; (\ddot{x},\; \ddot{y},\; \ddot{z})\,. \tag{1.9}$$

Určit směr vektoru zrychlení je však již méně snadné. K tomu účelu zvolíme na trajektorii v těsné blízkosti bodu $\vec{r}$ dva další body. Třemi body, které neleží v přímce, je určena rovina (říkáme jí rovina oskulační) a také kružnice poloměru R (nazýváme jej *poloměr křivosti* trajektorie v daném bodě). V oskulační rovině leží jednak tečna, jednak normála k trajektorii. Jednotkové vektory ve směru tečny a normály (směřující do středu křivosti) označíme $\vec{\tau}$ a $\vec{\nu}$. Kolmo k tečně i normále směřuje binormála s jednotkovým vektorem $\vec{\beta}$ (viz obr. 1.3). Trojice kolmých jednotkových vektorů $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ tvoří pravotočivou soustavu a doprovází obecně prostorovou křivku v každém bodě. Studiem těchto vlastností křivek se zabývá diferenciální geometrie.

Zderivujeme nyní vektor rychlosti (1.6) podle pravidla o derivování součinu funkcí:

$$\vec{a} \;=\; \frac{d\vec{v}}{dt} \;=\; \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} \;=\; \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} \;=\; \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} \;=\; \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v^2\frac{d\vec{\tau}}{ds}\,.$$

Z obr. 1.4 zjistíme, že vektor $d\vec{\tau}$ při $\Delta t \to 0$ nabývá směr normály a pro jeho velikost platí

$$|d\vec{\tau}| \;=\; \frac{|d\vec{\tau}|}{\tau} \;=\; \frac{ds}{R}\,.$$

Máme tedy

$$\vec{a} \;=\; \frac{dv}{dt}\vec{\tau} \;+\; \frac{v^2}{R}\vec{\nu}\,. \tag{1.10}$$

Zrychlení při obecném křivočarém pohybu leží tedy v oskulační rovině a má tečnou složku rovnou derivaci *velikosti* rychlosti podle času a normálovou složku v^2/R: [6]

$$a_t \;=\; \frac{dv}{dt}, \qquad a_n \;=\; \frac{v^2}{R}\,. \tag{1.11}$$

[6] Při rovnoměrném pohybu po kružnici je $a_t = 0$ a $a_n = v^2/R$ známé dostředivé zrychlení.

obr. 1.5 obr. 1.6

Některé křivočaré rovinné pohyby je lépe popisovat v polární soustavě souřadnic $r(t)$, $\varphi(t)$. Derivováním určíme vztahy mezi kartézskými a polárními složkami rychlostí na obr. 1.5. Protože $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$,

$$v_x \;=\; \dot{x} \;=\; \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \quad v_y \;=\; \dot{y} \;=\; \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi\,. \tag{1.12}$$

Složky rychlosti ve směru radiálním a tečném v_r a v_φ dostaneme pootočením souřadných os o úhel φ podle vztahů (M. 37), které můžeme aplikovat i na složky vektoru rychlosti a zrychlení. Dosadíme-li do nich za v_x a v_y podle (1.12), dostaneme po snadné úpravě

$$v_r \;=\; v_x\cos\varphi + v_y\sin\varphi \;=\; \dot{r}, \quad v_\varphi \;=\; -v_x\sin\varphi + v_y\cos\varphi \;=\; r\dot{\varphi}\,, \tag{1.13}$$

odkud

$$v^2 \;=\; v_x^2 + v_y^2 \;=\; v_r^2 + v_\varphi^2 \;=\; \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\,. \tag{1.14}$$

Stejně budeme postupovat i u zrychlení. Derivací složek rychlosti (1.12) dostaneme

$$a_x \;=\; \dot{v}_x \;=\; (\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)\,\cos\varphi-(2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi})\,\sin\varphi, \quad a_y \;=\; \dot{v}_y \;=\; (\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)\,\sin\varphi+(2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi})\,\cos\varphi\,. \tag{1.15}$$

Pro složky zrychlení v polárních souřadnicích pak dostaneme

$$a_r \;=\; a_x\cos\varphi + a_y\sin\varphi \;=\; \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi \;=\; -a_x\sin\varphi + a_y\cos\varphi \;=\; 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\,. \tag{1.16}$$

Shrneme tedy

$$v_r \;=\; \dot{r}\,, \quad v_\varphi \;=\; r\dot{\varphi}\,, \quad a_r \;=\; \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\,, \quad a_\varphi \;=\; 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\,. \tag{1.17}$$

Velikost *úhlové rychlosti* ω a *úhlového zrychlení* ε můžeme zavést jako

$$\omega(t) \;=\; \frac{d\varphi}{dt} \;=\; \dot{\varphi}, \quad \varepsilon \;=\; \frac{d\omega}{dt} \;=\; \dot{\omega} \;=\; \ddot{\varphi}\,. \tag{1.18}$$

Při pootočení o malý úhel můžeme tento úhel považovat za vektor a připsat mu směr osy rotace v pravotočivém smyslu. Stejně pak budou definovány i vektory úhlové rychlosti a úhlového zrychlení $\vec{\omega}$ a $\vec{\varepsilon}$.

1.2 Základní pohyby a jejich skládání

Uvedeme nyní některé základní typy pohybu částice.

1. **Pohyb přímočarý**

Nechť přímočarý pohyb probíhá podél osy x s počátečními podmínkami $x = x_0,\ v_x = \dot{x} = v_{0x}$ při $t = t_0$. Pak rozlišujeme

a) **pohyb rovnoměrný** s konstantní rychlostí v_{0x} a nulovým zrychlením $a_x = 0$. Integrací a použitím počátečních podmínek dostáváme zákon pohybu

$$x(t) \ = \ x_0 + v_{0x}(t - t_0) \tag{1.19}$$

b) **pohyb rovnoměrně zrychlený** s konstantním zrychlením a_{0x} kladným nebo záporným. Integrací a použitím počátečních podmínek dostáváme zákon rychlosti a zákon pohybu:

$$v(t) \ = \ v_{0x} + a_{0x}(t - t_0) \ , \quad x(t) \ = \ x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \frac{1}{2}\ a_{0x}\ (t - t_0)^2 \ . \tag{1.20}$$

Je-li při $t = 0$ $x = 0,\ v = 0$ dostaneme známé vztahy $v = a_{0x}t,\ \ x = \frac{1}{2}a_{0x}t^2$.

c) **pohyb nerovnoměrný** se zrychlením obecně závislým na čase $a(t)$. Pak dostaneme zákon rychlosti a zákon pohybu integrováním

$$v \ = \ v_{0x} + \int_{t_0}^{t} a(t)dt \ , \quad x \ = \ x_0 + v_{0x}t + \int_{t_0}^{t} v(t)dt \ . \tag{1.21}$$

2. Pohyb kruhový

Při pohybu částice po kružnici poloměru R je vhodné použít polárních souřadnic. Potom platí $r = R =$ konst a zákony pohybu se zjednoduší. Ze vztahů (1.17) máme

$$v_r = \dot{R} = 0, \quad v_\varphi = R\dot{\varphi} = R\omega, \quad a_r = -R\dot{\varphi}^2 = -R\omega^2, \quad a_\varphi = R\ddot{\varphi} = R\varepsilon \ . \tag{1.22}$$

Je-li kruhový pohyb **rovnoměrný**, zůstává úhlová rychlost $\omega =$ konst a úhel φ se mění lineárně s časem

$$\varphi(t) \ = \ \varphi_0 + \omega(t - t_0) \ . \tag{1.23}$$

Obvodová rychlost $v_\varphi = v$ je ovšem také konstantní: $v = R\omega$. Obvodové (tečné) zrychlení a_φ je nulové a částice má jen normálové, *dostředivé zrychlení*, rovněž konstantní:

$$a_r \;=\; -a \;=\; -R\omega^2 \;=\; -\frac{v^2}{R} \;=\; \text{konst}\,. \tag{1.24}$$

U rovnoměrného kruhového pohybu zavádíme *dobu oběhu* $T = 2\pi/\omega$ a její převrácenou hodnotu, *počet oběhů za jednotku času* $f = 1/T$.

3. Pohyb harmonický

Pohyb harmonický dostaneme jako projekci rovnoměrného kruhového pohybu kolem počátku do jedné z kartézských os (obr. 1.6). Například v ose y pak máme

$$y(t) \;=\; A\sin(\omega t + \varphi_0)\;, \tag{1.25}$$

kde y je výchylka (elongace), A amplituda, ω úhlová frekvence, $T = 2\pi/\omega$ perioda, $f = 1/T$ frekvence (udávaná v jednotkách Hz), argument harmonické funkce $\omega t + \varphi_0$ je fáze a φ_0 počáteční fáze při $t = 0$ neboli fázová konstanta.

Souřadnice vektorů rychlosti a zrychlení při harmonickém pohybu jsou

$$v_y \;=\; \dot{y} \;=\; \omega A\cos(\omega t + \varphi_0) \;=\; \omega A\sin(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}) \tag{1.26}$$

$$a_y \;=\; \ddot{y} \;=\; -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_0) \;=\; \omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_0 + \pi)\;. \tag{1.27}$$

Z těchto vztahů je vidět, že při harmonickém pohybu rychlost předbíhá výchylku o $\pi/2$ a zrychlení o π (je v protifázi).

Skládání pohybů

Je velmi důležité, že částice může konat současně několik pohybů, že pohyby lze vektorově skládat. Tento netriviální poznatek usnadňuje studium mechanických pohybů. Ukážeme nyní některé zajímavé případy skládání pohybů.

Se skládáním kolmých přímočarých pohybů se setkáváme při **vrhu těles v homogenním tíhovém poli ve vakuu**. Uvažujme rovinný pohyb v rovině x, z, při čemž v záporném směru osy z má pohyb zrychlení velikosti g. Ve směru osy z probíhá tedy rovnoměrně zrychlený pohyb podle (1.20) . Vztáhneme-li počáteční podmínky k okamžiku $t = 0$, máme

$$z(t) \;=\; z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2\;, \qquad v_z(t) \;=\; v_{0z} - gt\;. \tag{1.28}$$

Ve směru osy x je pohyb rovnoměrný:

$$x(t) \;=\; x_0 + v_{0x}t\;, \qquad v_x(t) \;=\; v_{0x} \;=\; \text{konst}\,. \tag{1.29}$$

Zadáním příslušných počátečních podmínek dostaneme nejrůznější případy pohybů. Tak pro $x_0 = 0,\ z_0 = h,\ v_{0x} = v_{0z} = 0$ jde o **volný pád** z výšky h. Pro něj máme

$$z = h - \frac{1}{2}gt^2,\ s = h - z,\ t = \sqrt{\frac{2s}{g}},\ v_z = -gt = -\sqrt{2gs}\;. \tag{1.30}$$

obr. 1.7 obr. 1.8

Pro $x_0 = 0,\ z_0 = 0,\ v_{0x} = 0,\ v_{0z} > 0$ je to **svislý vrh vzhůru**. Označíme dobu letu do vrcholového bodu t_v a jeho výšku z_v a máme

$$z = v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2,\ v_z = v_{0z} - gt,\ t_v = \frac{v_{0z}}{g},\ z_v = \frac{v_{0z}^2}{2g}\ . \tag{1.31}$$

Při $x_0 = 0,\ z_0 = h,\ v_{0x} = 0,\ v_{0z} < 0$ nastává **svislý vrh dolů**. Při něm

$$z = h - |v_{0z}|t - \frac{1}{2}gt^2,\ v_z = -|v_{0z}| - gt\ . \tag{1.32}$$

Počáteční podmínky $x_0 = 0,\ z_0 = h,\ v_{0x} > 0,\ v_{0z} = 0$ určují **vodorovný vrh** ve výšce h. Výsledný pohyb už nebude přímočarý; jde o skládání rovnoměrného přímočarého pohyb rychlostí v_{0x} ve směru osy x a volného pádu ve směru z. Rovnice

$$x = v_{0x}t, \qquad z = h - \frac{1}{2}gt^2 \tag{1.33}$$

představují parametrické rovnice trajektorie. Vyloučíme-li z nich čas t, dostaneme rovnici křivky v kartézských souřadnicích

$$z\ =\ h - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2\ . \tag{1.34}$$

Je to převrácená parabola s vrcholem v bodě $(0, h)$. Snadno zjistíme její parametry - dálku dopadu na úroveň $z = 0$ x_d a dobu letu t_d:

$$x_d\ =\ v_{0x}\sqrt{\frac{2h}{g}}\ , \qquad t_d\ =\ \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{1.35}$$

(jako při volném pádu). Na počítači numericky propočítaná trajektorie vodorovného vrhu je na (obr. 1.7).

Vrh šikmý z počátku pod elevačním úhlem α dostaneme za podmínek $x_0 = 0$, $z_0 = 0$, $v_{0x} = v_0 \cos\alpha > 0$, $v_{0z} = v_0 \sin\alpha > 0$ (obr. 1.8). Jde o skládání rovnoměrného přímočarého pohybu rychlostí $v_0 \cos\alpha$ ve směru osy x a svislého vrhu vzhůru. Rovnice

$$x = v_{0x} t, \qquad z = v_{0z} t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{1.36}$$

představují parametrické rovnice trajektorie. Vyloučíme-li z nich čas t, dostaneme rovnici křivky v kartézských souřadnicích

$$z \;=\; \frac{v_{0z}}{v_{0x}}\, x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}\, x^2 \;=\; x \text{ tg } \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}\, x^2 \,. \tag{1.37}$$

Ve vakuu probíhá tedy šikmý vrh v homogenním tíhovém poli po parabole. Snadno dostaneme souřadnice vrcholu dráhy, dálku doletu a celkovou dobu letu:

$$x_v = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\;, \quad z_v = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}\;, \quad x_d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}\;, \quad t_d = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}\;. \tag{1.38}$$

Odtud je zřejmé, že maximální délka doletu odpovídá úhlu 45^0 a že obecně daného bodu doletu lze dosáhnout pod dvěma různými úhly $45^0 \pm \Delta\alpha$.

Částice může konat současně rovnoměrný kruhový pohyb a rovnoměrný přímočarý pohyb. Koná-li např. rovnoměrný kruhový pohyb kolem počátku a rovnoměrný pohyb ve směru osy z, bude výsledná trajektorie prostorová křivka zvaná **šroubovice** s rovnoměrným stoupáním (obr. 1.9). [7] Parametrické rovnice šroubovice můžeme tedy zapsat jako

$$x = R\, \cos\omega t\;, \quad y = R\, \sin\omega t\;, \quad z = k\, t\;. \tag{1.39}$$

Koná-li částice umístěná na obvodu kružnice o poloměru a složený pohyb tak, že se tato kružnice rovnoměrně valí po ose x, bude výslednou trajektorií křivka zvaná **cykloida** (obr. 1.10). Je to velmi důležitá křivka, s níž se ve fyzice často setkáváme. Z obrázku snadno nahlédneme, že parametrické rovnice cykloidy můžeme zapsat jako

$$x \;=\; a\,(\alpha - \sin\alpha)\;, \qquad y \;=\; a\,(1 - \cos\alpha)\;. \tag{1.40}$$

Jako parametr zde slouží úhel odvalení α. Pokud částice neleží na obvodu kružnice, ale na některém menším poloměru, vznikne tzv. **zkrácená cykloida** (obr. 1.11a), pokud leží na větším poloměru (jako například bod na obrubě železničního kola), vznikne **prodloužená cykloida** (obr. 1.11b).

Částice může konat současně několik harmonických pohybů. Předpokládejme napřed, že koná dva harmonické pohyby s různými amplitudami a úhlovými frekvencemi a touž počáteční fází ve směru osy x. Tyto dva pohyby se vzájemně sčítají, superponují, a můžeme psát

$$x \;=\; A \sin\omega_1 t \;+\; B \sin\omega_2 t \;=\; (A - B)\sin\omega_1 t \;+\; B(\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t)\;. \tag{1.41}$$

[7] Nikoli "spirála".

obr. 1.9 obr. 1.10

obr. 1.11

Nechť jsou amplitudy $A = B$ stejné a úhlové frekvence $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega$ blízké. Označíme rozdíl obou úhlových frekvencí $\omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega$. Potom s použitím součtových goniometrických vzorců dostaneme

$$x \;=\; A(\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t) = 2A\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t = 2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\sin\omega t\ . \qquad (1.42)$$

Výsledný pohyb můžeme popsat tak, že jde o harmonické kmity s úhlovou frekvencí ω, jejichž amplituda se v čase pomalu mění jako $2A\cos\Delta\omega t/2$. Jsou to známé **rázy** neboli **zázněje**. Na obr. 1.12 je znázorněn časový průběh rázů získaný na počítači složením dvou harmonických pohybů o blízkých úhlových frekvencích. Jsou-li amplitudy obou pohybů různé, nebude amplituda výsledných kmitů procházet nulou (obr. 1.13).

Zmíníme se ještě o **skládání harmonických pohybů v kolmých směrech**. Skládáme-li dva takové pohyby o stejné úhlové frekvenci, bude výsledný pohyb probíhat po trajektorii dané parametricky jako

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_{01})\ , \quad y = B\sin(\omega t + \varphi_{02})\ . \qquad (1.43)$$

Označíme fázi kmitů ve směru x jako $\omega t + \varphi_{01} = \varphi$, rozdíl fází obou kmitů jako $\varphi_{02} - \varphi_{01} = \delta$. Dále vyloučíme z parametrických rovnic čas. K tomu cíli vyjádříme $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$ pomocí veličin na čase nezávisejících a použijeme známý vztah $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$. Máme

$$\sin\varphi = \frac{x}{A}, \quad \sin(\varphi+\delta) = \sin\varphi\cos\delta + \cos\varphi\sin\delta = \frac{y}{B}\ , \qquad (1.44)$$

odkud

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sin\delta}\left(\frac{y}{B} - \frac{x}{A}\cos\delta\right) . \tag{1.45}$$

Sečteme-li nyní $\sin^2\varphi$ a $\cos^2\varphi$, dostaneme rovnici trajektorie

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\delta \;=\; \sin^2\delta . \tag{1.46}$$

V závislosti na δ může tato rovnice odpovídat rovnici úsečky, nebo elipsy. Je-li $\delta = n\pi$, probíhají kmity po úsečce, jejíž přímka má směrnici $k = \pm B/A$, je-li $\delta = (n + 1/2)\pi$, je trajektorií elipsa

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 . \tag{1.47}$$

Jsou-li amplitudy kmitů stejné, přejde pro $\delta = (n+1/2)\pi$ elipsa v kružnici. S uvedeným skládáním dvou kolmých kmitů o stejných frekvencích se setkáváme nejen v mechanice, ale například i v elektromagnetismu a optice při studiu polarizace světla. Výsledné trajektorie získané pomocí počítače jsou na obr. 1.14; křivka 1 odpovídá $\delta = 0$, křivka 2 $\delta = \pi$, křivka 3 $\delta = \pi/2$ křivka 4 $\delta = \pi/4$.

Jsou-li úhlové frekvence kolmých kmitů různé, vznikají složité tzv. **Lissajousovy obrazce**. Na obr. 1.15 vidíme dva takové obrazce pro poměr frekvencí 1:2 (křivka 1) a 2:3 (křivka 2). Poměr frekvencí můžeme určit podle počtu bodů, v nichž se obrazec dotýká souřadných os. Jsou-li frekvence v poměru stále větších nesoudělných čísel, stává se obrazec složitější. Jeho tvar závisí ovšem také na rozdílu fází obou kmitů δ.

Úloha:

Určete tečné zrychlení, normálové zrychlení a poloměr křivosti trajektorie vodorovného vrhu.
Řešení:

Pro rychlost a zrychlení máme

$$\vec{v} = (v_{0x},\ -gt,\ 0),\quad v^2 = v_{0x}^2 + g^2t^2,\quad \vec{a} = (0,\ -g,\ 0) .$$

Tedy

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{g^2t}{\sqrt{v_{0x}^2 + g^2t^2}} ,\quad a_n = \sqrt{g^2 - a_t^2} = \frac{gv_{0x}}{\sqrt{v_{0x}^2 + g^2t^2}} ,\quad R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(v_{0x}^2 + g^2t^2)^{3/2}}{gv_{0x}} .$$

Úloha:

Uvažujte množinu trajektorií šikmého vrhu s touž velikostí počáteční rychlosti (výstřelů z téže zbraně) a různými elevačními úhly. Dokažte, že obálkou této množiny trajektorií je tzv. ochranná parabola (místa za touto parabolou nemohou být zasažena) - obr. 1.16.
Řešení:

obr. 1.12

obr. 1.13

obr. 1.14

obr. 1.15

obr. 1.16

Upravíme rovnici trajektorie (1.37) na tvar

$$z = x \text{ tg } \alpha - \frac{g(1 + \text{tg}^2\alpha)}{2v_0^2} x^2$$

a pohlížíme na ni jako na kvadratickou rovnici pro tg α. Body ležící na obálce mohou být dosaženy pouze při jedné hodnotě elevačního úhlu. Položíme proto diskriminant rovnice pro tg α roven nule a dostaneme rovnici obálky

$$z = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + \frac{v_0^2}{2g} .$$

Příklady

1.1 Částice se pohybuje přímočaře po ose x podle zákona $x = At + Bt^2$, kde $A = 5$ cm.s^{-1}, $B = 6$ cm.s^{-2}. Určete okamžitou rychlost částice začátkem desáté a koncem dvanácté sekundy a střední rychlost v intervalu mezi těmito okamžiky.

[113 cm.s^{-1}, 149 cm.s^{-1}, 131 cm.s^{-1}]

1.2 Pilot letadla je od svého cíle vzdálen 200 km na západ, a přitom vane severozápadní vítr o rychlosti 30 km.h^{-1}. Určete vektor rychlosti letadla, chce-li pilot dosáhnout svého cíle za 40 minut (obr. 1.17).

obr. 1.17 obr. 1.18

[$(278,8\ ;\ 21,2)$ km.h^{-1}, osa x míří na východ, osa y na sever]

1.3 Po ramenech pravého úhlu lezou dva brouci. První z bodu A vzdáleného od vrcholu pravého úhlu o vzdálenost l_{10} rychlostí v_1 směrem k vrcholu, druhý po druhém rameni z vrcholu směrem od něho rychlostí v_2 (viz obr. 1.18). V kterém okamžiku si budou brouci nejblíže, jak budou od sebe daleko a jaké budou přitom jejich vzdálenosti od vrcholu?

[$t = \frac{l_{10}v_1}{v_1^2+v_2^2}$, $l = \frac{l_{10}v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$, $l_1 = \frac{l_{10}v_2^2}{v_1^2+v_2^2}$, $l_2 = \frac{l_{10}v_1v_2}{v_1^2+v_2^2}$]

1.4 Dvě částice se pohybují rychlostmi o vektorech $\vec{v}_1 = (2,\ 0)$, $\vec{v}_2 = (0,\ 3)$ (v příslušných jednotkách). V čase $t = 0$ se nacházely v bodech $\vec{r}_{10} = (-3,\ 0)$, $\vec{r}_{20} = (0,\ -3)$. Určete vektor vzájemné polohy částic, čas a délku maximálního sblížení.

[$\vec{r}_{21}(t) = (3-2t, -3+3t)$, $t = 15/13$, $r = 3/\sqrt{13}$ příslušných jednotek]

1.5 Dvě částice se pohybují rovnoměrně přímočaře, první z bodu $A = (0,\ 1)$ rychlostí $v_1 = (3,\ -2)$, druhý z bodu $B = (0,-1)$ rychlostí $v_2 = (6,\ 4)$, vše v příslušných jednotkách. Určete průsečík trajektorií, vektor vzájemné polohy, okamžik maximálního sblížení, a velikost tohoto sblížení.

[$(3/2,\ 0)$, $(3t,\ 6t-2)$, $4/15$, $\sqrt{4/5}$ příslušných jednotek]

1.6 Pohyb částice je určen paramericky jako $x = A_1t^2 + B_1$, $y = A_2t^2 + B_2$, kde $A_1 = 20$ cm.s^{-2}, $B_1 = 5$ cm, $A_2 = 15$ cm.s^{-2}, $B_2 = -3$ cm. Najděte rychlost a zrychlení částice v okamžiku $t = 2$ s.

[$\vec{v} = (80,\ 60)$ cm.s^{-1}, $\vec{a} = (40,\ 30)$ cm.s^{-2}]

1.7 Určete rovnici trajektorie, rychlost a zrychlení u následujících pohybů částice zadaných parametrickými rovnicemi:
a) $x = 4\sin\frac{\pi}{2}t$, $y = 3\sin\frac{\pi}{2}t$, b) $x = 4\cos\frac{\pi}{2}t$, $y = 3\sin\frac{\pi}{2}t$,
c) $x = \left(4\sin\frac{\pi}{2}\right)t$, $y = \left(3\sin\frac{\pi}{2}\right)t$, d) $x = 4\cos^2\frac{\pi}{2}t$, $y = 3\sin^2\frac{\pi}{2}t$.

[a) harmonický pohyb po úsečce $y = \frac{3}{4}x$ v rozmezí
$|x| \leq 4,\ |y| \leq 3$, $\vec{v} = (2\pi\cos\frac{\pi}{2}t,\ \frac{3\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t)$, $\vec{a} = (-\pi^2\sin\frac{\pi}{2}t,\ -\frac{3}{4}\pi^2\sin\frac{\pi}{2}t)$

b) nerovnoměrný pohyb po elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

c) rovnoměrný přímočarý pohyb po přímce $y = \frac{3}{4}x$

d) pohyb po úsečce ležící v přímce $y = -\frac{3}{4}x + 3$ v mezích
$0 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 3$, $\vec{v} = (-2\pi\sin\pi t,\ \frac{3}{2}\pi\sin\pi t)$, $\vec{a} = (-2\pi^2\cos\pi t,\ \frac{3}{2}\pi^2\cos\pi t)$]

1.8 Napište parametrické rovnice pro pohyb částice, která koná harmonický pohyb po úsečce, jejíž nosná přímka má rovnici $y = x-4$. Rovnovážná poloha leží v bodě $A = (2, -2)$, amplituda je rovna $s_0 = 2\sqrt{2}$, úhlová frekvence $\omega = \pi/4$, v okamžiku $t = 0$ je částice v bodě $(4, 0)$ (vše v příslušných jednotkách).

$$[x = 2 + 2\cos\tfrac{\pi}{4}t\ , \quad y = -2 + 2\cos\tfrac{\pi}{4}t]$$

1.9 Určete rychlost a zrychlení částice v polárních souřadnicích, je-li pohyb zadán parametricky jako $x = at, \quad y = bt$, kde $a,\ b$ jsou konstanty.

$$[v_r = \dot{r} = \sqrt{a^2 + b^2}\ , \quad v_\varphi = r\dot{\varphi} = 0\ , \quad a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = 0\ , \quad a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0]$$

1.10 Určete charakter pohybu částice (trajektorii, rychlost, zrychlení) daného parametricky jako $x = l\cos[\phi_0 \sin(\omega t + \varphi_0)]\ , \quad y = l\sin[\phi_0 \sin(\omega t + \varphi_0)]$.

[$r = l=$ konst, $\varphi(t) = \phi_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$, pohyb po oblouku kružnice v rozmezí $|\varphi| \leq \phi_0$,

$$v_r = 0\ , \quad v_\varphi = l\phi_0\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -l\phi_0^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)\ , \quad a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = -l\phi_0\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0)]$$

1.11 Částice se pohybuje po kružnici poloměru $r = 5$ cm se středem v počátku souřadné soustavy, s konstantním úhlovým zrychlením $\varepsilon = 2\ \mathrm{s}^{-2}$ a v okamžiku $t = 0$ je v bodě A o souřadnicích $(0, 5)$ cm. Určete tečné a normálové zrychlení. Řešte v polárních souřadnicích.

$$[a_t = r\varepsilon = 10\ \mathrm{cm.s}^{-2}\ , \quad a_n = \tfrac{v^2}{r} = r\varepsilon^2 t^2 = 20\ \mathrm{cm.s}^{-2}]$$

1.12 Určete amplitudu a fázovou konstantu harmonického pohybu, je-li doba kmitu $T = 3,14$ s a v okamžiku $t = 0$ je výchylka $x_0 = 10$ cm a rychlost $v_0 = 0,4\ \mathrm{m.s}^{-1}$.

$$[A = \sqrt{x_0^2 + \tfrac{v_0^2}{\omega^2}} = 0,22\ \mathrm{m}\ , \quad \varphi_0 = \mathrm{arctg}\ \tfrac{x_0\omega}{v_0} = 0,46]$$

1.13 Částice koná harmonický pohyb. Její maximální rychlost je $6\ \mathrm{m.s}^{-1}$ a maximální zrychlení $24\ \mathrm{m.s}^{-2}$. Určete dobu kmitu, frekvenci, úhlovou frekvenci a amplitudu.

$$[1,57\ \mathrm{s}\ , \quad 0,64\ \mathrm{Hz}\ , \quad 4\ \mathrm{s}^{-1}\ , \quad 1,5\ \mathrm{m}]$$

1.14 Mějme kružnici poloměru R ležící ve svislé rovině. Z jejího vrcholu vycházejí žlábky ve směru tětiv k obvodu kružnice (obr. 1.19). Do žlábků současně vložíme malé kuličky a vypustíme. Dokažte, že všechny kuličky dosáhnou obvodu kružnice za stejnou dobu. Úlohu poprvé řešil v 17. století český učenec Jan Marcus Marci z Kronlandu.

$$[t = \sqrt{\tfrac{4R}{g}}]$$

obr. 1.19

1.15 Těleso je vrženo svisle vzhůru počáteční rychlostí v_0. Zároveň je z výšky h volně puštěno druhé těleso. Obě tělesa dopadnou na zem současně. Z jaké výšky bylo puštěno druhé těleso?

$[\frac{2v_0^2}{g}]$

1.16 Těleso je vrženo v okamžiku $t = 0$ svisle vzhůru. Určitým místem ve výšce h prochází v okamžiku t_1 směrem vzhůru a v okamžiku t_2 směrem dolů. Určete výšku h a počáteční rychlost v_0.

$[h = \frac{gt_1t_2}{2}\ , \qquad v_0 = \frac{g(t_1+t_2)}{2}]$

1.17 Jakou rychlostí v_0 je nutno hodit těleso svisle dolů z výšky h, aby dopadlo o čas τ dříve než při volném pádu?

$[v_0 = g\tau\frac{\sqrt{8hg}-g\tau}{\sqrt{8hg}-2g\tau}]$

1.18 Uvažujte množinu trajektorií šikmého vrhu z počátku soustavy souřadnic s touž počáteční rychlostí v_0 a proměnným elevačním úhlem α. Dokažte, že vrcholy trajektorií leží na elipse

$$x^2 + 4z^2 - \frac{2v_0^2}{g}z = 0\ .$$

obr. 1.20

obr. 1.21

1.19 Uvažujte množinu trajektorií šikmého vrhu z počátku soustavy souřadnic pod týmž elevečním úhlem α a proměnnou počáteční rychlostí v_0. Dokažte, že vrcholy trajektorií leží na přímce

$$z = \frac{1}{2}(\text{tg } \alpha)\ x\ .$$

1.20 Cíl leží v šikmé vzdálenosti $d = 6000$ m pod polohovým úhlem $\varphi = 30^0$. Jaká musí být minimální počáteční rychlost střely, aby byl cíl zasažen? Jaký elevační úhel odpovídá této rychlosti (obr.1.20) ?

$$[v_{0min} = \sqrt{gd(1+\sin\varphi)} = 300 \text{ m.s}^{-1}\ , \qquad \text{tg } \alpha = \tfrac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi} = \sqrt{3}\ , \quad \alpha = 60^0]$$

1.21 Lissajousovy obrazce. Pohyb částice je dán rovnicemi a) $x = A\cos\omega t$, $y = B\cos 2\omega t$, b) $x = A\cos\omega t$, $y = B\cos 3\omega t$. Určete tvar trajektorie.

$[y = \frac{2B}{A^2}x^2 - B$ (obr. 1.21, křivka 1), $\quad y = \frac{4B}{A^3}x^3 - \frac{3B}{A}x$ (křivka 2), $|x| \leq A,\ |y| \leq B]$

2. DYNAMIKA ČÁSTICE

2.1 Pohybové rovnice

2.1.1 Newtonovy zákony

Dynamika je nauka o silách (řec. dynamos = síla) a dokonce celá fyzika se dříve nazývala silozpyt. Přitom pojem síly je netriviální a v celé přednewtonovské fyzice nebyla síla jasně definována. V roce 1687 zformuloval Newton ve svých Principiích tři zákony dynamiky, na jejichž základě je možné napsat takzvané *pohybové rovnice* a jejich řešením studovat pohyb částic a těles. Před Newtonem byla síla chápána v souladu s tzv. "zdravým lidským rozumem" jako příčina pohybu. Newton ukázal, že síla je příčina *změny* pohybu, změny pohybového stavu tělesa. Uvedeme tři Newtonovy zákony v jejich originálním znění a v pokud možno přesném českém překladu:

Zákon setrvačnosti:

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

Každé těleso setrvává ve svém stavu klidu nebo rovnoměrného přímočarého pohybu, pokud a dokud není vtištěnými silami donuceno tento svůj stav změnit.

Zákon síly:

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundam lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Změna pohybu je úměrná hybné vtištěné síle a nastává podél přímky v níž síla působí.

Zákon akce a reakce

Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem; sive: corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

Proti každé akci vždy působí stejná reakce; jinak: vzájemná působení dvou těles jsou vždy stejně velká a míří na opačné strany.

1. <u>K zákonu setrvačnosti:</u>

Pod Newtonovým výrazem "corpus", těleso, je zde třeba podle smyslu chápat hmotný bod, částici. Síla není ovšem Newtonovými zákony přímo definována, vystupuje zde jako

základní pojem, který nabývá významu právě těmito zákony. Tak první zákon říká, že těleso zůstává v klidu nebo se pohybuje setrvačností (latinsky inertia), nepůsobí-li na ně "vtištěné síly". Pod vtištěnými silami rozumíme tzv. *síly pravé*, tj. síly, které jsou částici "vtištěny" jinými tělesy. Jsou to tedy vlastně síly, jimiž jedno těleso působí na druhé a vždy můžeme udat původce takové síly. Nepůsobí-li na částici jiné částice, je částice v klidu nebo se pohybuje rovnoměrně přímočaře. Takové částici říkáme *bezsilová*. Zákon setrvačnosti není původním Newtonovým objevem, jeho autorem je Galilei, od něhož Newton tento zákon převzal.

Pohyb částice můžeme posuzovat pouze vzhledem k nějaké vztažné soustavě, spojené s nějakým tuhým tělesem. Toto těleso se ovšem může samo pohybovat a tak se pohyb částice může jevit v různých soustavách různě. Zákon setrvačnosti umožňuje zavést *inerciální vztažnou soustavu*, tvořenou například třemi kartézskými osami souřadnic a hodinami. Pozorujeme-li pohyb částice v takové soustavě a zjistíme, že v ní platí zákon setrvačnosti, prohlásíme tuto soustavu za inerciální. Zákon setrvačnosti tedy platí pouze v inerciální vztažné soustavě a inerciání vztažná soustava je ta, v níž platí zákon setrvačnosti. To vypadá jako logický kruh, ale ve fyzice jde o to, zda inerciální vztažná soustava existuje, a to můžeme zjistit jen experimentálně.

Tak vztažná soustava spojená s povrchem Země je inerciální, pokud v ní pozorujeme například krátkodobé mechanické pohyby. Při některých pohybech se však bude měnit pohybový stav částice, aniž by na ni působila jiná tělesa. To svědčí o tom, že tato vztažná soustava není inerciální a musíme přejít například ke vztažné soustavě spojené se Sluncem a rovinou ekliptiky. Vidíme, že vztažná soustava může být inerciální do určité míry, pro určité experimenty. V nejvyšší míře inerciální je soustava, jejíž osy míří ke vzdáleným galaxiím. Bylo by možno uvažovat o soustavě spojené s vesmírem jako celkem, kdybychom mohli tento celek vůči něčemu vymezit. Je docela dobře možné, že dokonale inerciální vztažná soustava vůbec neexistuje. To však neubírá na praktickém významu tohoto pojmu, neboť vždy můžeme požadovaný stupeň inerciálnosti zajistit.

Můžeme jít též jinou cestou a netrvat na používání inerciální vztažné soustavy. V neinerciální soustavě však musíme zavést další síly, které už nebudou pravé, a jimž říkáme *síly setrvačné, zdánlivé, nepravé.* U těchto sil nemůžeme ukázat na jejich původce, nevyvolává je žádné těleso. Budeme se jimi zabývat v odstavci o pohybech v neinerciálních vztažných soustavách. Ukazuje se, že setrvačné síly mají těsný vztah k silám gravitačním a na tomto faktu založil Einstein svou obecnou teorii relativity.

Galilei ukázal, že je-li jedna vztažná soustava inerciální, jsou inerciální všechny vztažné soustavy, které se vůči ní pohybují rovnoměrně přímočaře. Je zvykem volit "bez újmy na obecnosti" "laboratorní", nehybnou vztažnou soustavu S a pohybující se soustavu S' tak, aby odpovídající kartézské osy obou soustav byly souhlasně rovnoběžné a osy x, x' splývaly. Soustava S' se přitom pohybuje ve směru osy x konstantní rychlostí $\vec{v}$ (viz obr. 2.1). Galilei a Newton předpokládali, že soustava S je nehybná vůči "absolutnímu prostoru" a čas plyne stejně v obou soustavách. V jednom okamžiku musí počátky obou soustav splynout; tento okamžik můžeme zvolit za nulový pro odečet času v obou soustavách.

Souřadnice a čas se při přechodu od jedné inerciální soustavě k druhé transformují pomocí **Galileiho transformací**:

$$x' = x - vt\,, \qquad y' = y\,, \qquad z' = z\,, \qquad t' = t\,. \tag{2.1}$$

obr. 2.1

Z Galileiho transformací plyne zákon skládání rychlostí:

$$v'_x = v_x - v \ , \qquad v'_y = v_y \ , \qquad v'_z = v_z \tag{2.2}$$

a dále závěr, že zrychlení částice je ve všech inerciálních soustavách stejné:

$$a'_x = a_x \ , \qquad a'_y = a_y \ , \qquad a'_z = a_z \ . \tag{2.3}$$

K zákonu síly:

Zákon síly umožňuje napsat pohybovou rovnici částice. Mluví se v něm o "změně pohybu", resp. "změně množství pohybu". Je třeba říci, jak měříme množství pohybu, abychom mohli určovat jeho změnu. Newton definoval množství pohybu jako součin hmotnosti částice a její rychlosti $\vec{p} = m\vec{v}$, tedy pomocí veličiny, kterou dnes nazýváme *hybnost*. Je to veličina vektorová. [8]

Je-li tedy změna pohybu úměrna vtištěné síle, můžeme zákon síly zapsat ve tvaru [9]

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = k\vec{F} \tag{2.4}$$

a považujeme-li hmotnost m za konstantní, jako

$$m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = m\,\vec{a} = k\vec{F} \ . \tag{2.5}$$

[8] Je možno definovat množství pohybu i jinak - Newtonův současník Leibniz měřil množství pohybu skalární veličinou mv^2, která odpovídá polovině kinetické energie a kterou tenkrát nazývali "živá síla".

[9] Pro změnu hybnosti $\frac{d\vec{p}}{dt}$ byl podle analogie se zrychlením navržen český název "zhybnění", který se však neujal.

Položíme-li konstantu úměrnosti $k = 1$, dostaneme vztah mezi jednotkami hmotnosti a síly. Měříme-li hmotnost v kilogramech, délku v metrech a čas v sekundách, bude síla měřena v newtonech (N) a dostáváme známou pohybovou rovnici

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \,, \tag{2.6}$$

respektive pro konstantní hmotnost

$$m\,\vec{a} = \vec{F} \,. \tag{2.7}$$

Abychom mohli určit jednoznačné řešení této rovnice, musíme znát počáteční podmínky, polohu a rychlost částice v nějakém okamžiku. Máme tedy najít zákon pohybu částice řešením úlohy

$$m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \,, \quad \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \,, \quad \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \,. \tag{2.8}$$

Tato Newtonova pohybová rovnice je vektorová a vyjadřuje vlastně soustavu tří obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu, jejichž řešení závisí na 6 integračních konstantách. Ty musíme určit z počátečních podmínek. Pro řešení úlohy o pohybu jedné částice tedy máme

$$\begin{array}{llllll} m\ddot{x} = F_x & x(t_0) = x_0 & \dot{x}(t_0) = v_{0x} \\ m\ddot{y} = F_y & y(t_0) = y_0 & \dot{y}(t_0) = v_{0y} \\ m\ddot{z} = F_z & z(t_0) = z_0 & \dot{z}(t_0) = v_{0z} \,. \end{array} \tag{2.9}$$

V Newtonových pohybových rovnicích vystupují odvozené fyzikální veličiny *rychlost, zrychlení, hybnost* a *síla*. V soustavě jednotek SI mají rozměr $[v] = \mathrm{LT}^{-1}$, $[a] = \mathrm{LT}^{-2}$, $[p] = \mathrm{LMT}^{-1}$, $[F] = \mathrm{LMT}^{-2}$. Rychlost mříme v jednotkách m.s^{-1}, zrychlení v m.s^{-2}, hybnost v kg.m.s^{-1} a sílu v kg.m.s^{-2}. Pouze jednotka síly má zvláštní název, newton (N).

Newtonova definice hybnosti vyžadovala určit hmotnost částice; tuto hmotnost nazýváme *hmotnost setrvačná*. Pokoušel se o to tak, že hmotnost tělesa definoval pomocí jeho objemu a hustoty a hustotu pak podle počtu atomů v jednotce objemu (což připomíná dnešní pojem látkového množství). Tímto způsobem se mu ovšem hmotnost zavést nepodařilo. Podal však návod, jak určit hmotnost tělesa experimentálně - vážením! Vážením však zjišťujeme tzv. *hmotnost gravitační*, resp. na rotující Zemi hmotnost tíhovou, kombinaci hmotnosti gravitační a setrvačné. Odnikud neplyne, že hmotnost zjišťovaná vážením musí být rovna (nebo alespoň úměrna) hmotnosti, kterou je definována hybnost částice.

A přece je k tomu určitý důvod založený na experimentálním poznatku,že na povrchu Země ve vakuu padají všechna tělesa, bez ohledu na svou hmotnost, vždy se stejným zrychlením; ověřil to právě Galilei. V Newtonově rovnici (2.7) vystupuje na pravé straně síla - ta ovšem také dosud nebyla definována. Za její definici můžeme považovat právě zákon síly, *pokud ovšem udáme nezávislý způsob, jak tuto sílu změřit a matematicky vyjádřit.* Newton proto stanovil další zákon, *zákon gravitační*, podle něhož se silově přitahují dvě částice hmotností m a M:

$$\vec{F} = -\kappa\frac{M\,m}{r^2}\,\vec{r}_0 \,, \tag{2.10}$$

kde $\vec{F}$ je síla, kterou působí částice gravitační hmotnosti M na částici o gravitační hmotnosti m, r je vzdálenost obou částic a $\vec{r}_0$ je jednotkový vektor ve směru spojnice obou

částic. Taková síla je *centrální* (míří ve směru spojnice obou částic) a *izotropní* (závisí pouze na vzdálenosti a nikoli na vzájemné poloze obou částic). Konstanta κ se nazývá gravitační konstanta a pokud máme již jednotky pro měření síly a hmotnosti zvoleny, nemůžeme tuto konstantu položit rovnu jedné a musíme ji určit experimentálně.

Na povrchu Země máme $r = R_Z$, kde R_Z je poloměr Země, a gravitační pole zde můžeme považovat přibližně za homogenní. Jak dále uvidíme, podle Gaussova zákona se kulově symetrická gravitující tělesa *navenek* silově chovají jako bodové částice umístěné ve středu koule, tedy jakoby všechna jejich hmotnost zde byla soustředěna. Sílu, kterou Země přitahuje padající jablko můžeme tedy považovat za sílu mezi dvěma hmotnými body. Také tento poznatek odvodil Newton. Proto můžeme velikost gravitační síly na povrchu Země působící na částici hmotnosti m vyjádřit jako

$$F \;=\; m\,\kappa\frac{M_Z}{R_Z^2} \;=\; m\,a_g\;, \quad \text{kde} \quad a_g \;=\; \frac{\kappa M_Z}{R_Z^2}\;. \tag{2.11}$$

Veličina $\vec{a}_g$ je gravitační zrychlení na povrchu Země. Díky zemské rotaci se toto gravitační zrychlení vektorově sčítá s odstředivým setrvačným zrychlením $\vec{a}_o$ ve výsledné tíhové zrychlení $\vec{g}$, které měříme. [10] Napíšeme-li nyní konečně Newtonovu pohybovou rovnici pro těleso na povrchu Země, na které působí tíhová síla, dostaneme

$$m_s\,\vec{a} \;=\; m_g\,\vec{a}_g + m_s\,\vec{a}_o\;, \tag{2.12}$$

Zde jsme označili m_s setrvačnou hmotnost částice a m_g gravitační hmotnost částice. Jsou-li si tyto hmotnosti vždy úměrné (tj. platí-li pro těleso z jakéhokoli materiálu vždy, že zdvojnásobí-li se jeho setrvačná hmotnost, zdvojnásobuje se také jeho gravitační hmotnost), můžeme je měřit ve stejných jednotkách a učinit sobě rovnými. Jsou-li si tyto dva druhy hmotnosti sobě rovny, můžeme je ovšem ve vztahu (2.12) všechny krátit a dostaneme pro všechna tělesa

$$\vec{a} \;=\; \vec{a}_g + \vec{a}_o \;=\; \vec{g}\;. \tag{2.13}$$

Experimentální fakt, že všechna tělesa nezávisle na materiálu z něhož jsou zhotovena a na jejich hmotnosti padají v tíhovém poli s týmž zrychlením, tedy indikuje, že setrvačná a gravitační hmotnost jsou si úměrné, můžeme je vyjadřovat v týchž jednotkách a hmotnost tělesa můžeme určovat vážením. Pak není třeba příliš hloubat nad tím, co to hmotnost vlastně je ani zavádět různé krkolomné definice a pojem hybnosti má přesně určený význam.

Rovnost setrvačné a gravitační hmotnosti je zjednodušenou formulací tzv. **principu ekvivalence**, na němž Einstein později založil svou teorii gravitace, obecnou teorii relativity. Newton si byl vědom toho, že tento Galieiho poznatek je třeba experimentálně co nejpřesněji ověřit. Místo pokusů s volným pádem prováděl experimenty s kyvadly a zjišťoval zda doba kyvu kyvadla skutečně nezávisí na jeho hmotnosti bez ohledu na to z

[10] O odstředivém setrvačném zrychlení budeme mluvit v odstavci o neinerciálních vztažných soustavách. Tomuto zrychlení odpovídá odstředivá síla velikosti ma_o, kde m je setrvačná hmotnost částice.

jakého materiálu je zátěž kyvadla zhotovena.

Při ověřování úměrnosti setrvačné a gravitační hmotnosti obyčejně určujeme tzv. Eötvösův poměr

$$\eta = \frac{2|\left(\frac{m_g}{m_s}\right)_1 - \left(\frac{m_g}{m_s}\right)_2|}{|\left(\frac{m_g}{m_s}\right)_1 + \left(\frac{m_g}{m_s}\right)_2|} ,$$

kde indexy 1 a 2 se vztahují ke dvěma různým materiálům. Princip ekvivalence platí, je-li Eötvösův poměr roven nule. Od Newtonových dob byl tento poměr mnohokrát experimentálně stanovován, jak pomocí kyvadel, tak s použitím torzních vah a torzních kmitů. Uvedeme orientačně výsledky některých experimentů:

Newton (1687), kyvadla $\eta \leq 10^{-3}$

Bessel (1827), kyvadla $\eta \leq 2.10^{-5}$

Potter (1923), kyvadla $\eta \leq 10^{-6}$
Eötvös (1890), torzní váhy, koule z platiny a osmi různých materiálů, po otočení o 180^0 by v tíhovém poli měla nastat výchylka opačným směrem, $\eta \leq 5.10^{-8}$.

Dicke, Roll, Krotkov (1963), torzní váhy, porovnávání výchylky při západu a východu Slunce
$\eta \leq 3.10^{-11}$

Braginskij aj. (1971), měření periody torzních kmitů, duralové tyčky délky 8 cm, platinová a hliníková závaží celková hmotnost torzního systému 3,9 g, závěs wolframový drátek délky 2,9 m a průměru 5 μm, perioda kmitů 5 h 20 min, vše ve skleněné komoře ve vakuu 10^{-6} Pa, elektrické stínění, tepelná stabilizace, odečet laserovým paprskem $\eta \leq 0,9.10^{-12}$.

Rovnost setrvačné a gravitační hmotnosti je tedy ověřena se značnou přesností, i když v mezích experimentálních možností.

Newtonova vektorová pohybová rovnice (2.6), resp. (2.7), tedy přirovnává změnu hybnosti částice působící síle. Protože zrychlení částice je stejné ve všech inerciálních vztažných soustavách, bude v nich mít levá strana pohybové rovnice stejný tvar. Síla vystupující na pravé straně vyjadřuje působení dalších částic, například gravitační. Tato síla může záviset na vzdálenosti působících částic nebo na jejich vzájemných rychlostech. Bude tedy zůstávat také stejná, přejdeme-li od jedné inerciální soustavy k druhé. Tvar pohybových rovnic je tedy ve všech inerciálních vztažných soustavách stejný, a to je obsahem

Galileiho principu relativity:
Zákony mechaniky mají stejný tvar ve všech inerciálních vztažných soustavách.

Podle tohoto hlubokého fyzikálního principu nemůžeme inerciální vztažné soustavy od sebe odlišit žádnými mechanickými experimenty a pozorováním mechanických pohybů. Budeme-li provádět například experimenty s volným pádem nebo s kyvadlem ve stojícím nebo v jedoucím vlaku, nemůžeme z nich stanovit, jestli je vlak v klidu nebo v pohybu. Galilei sice neznal vlaky, ale měl dokonce lepší příklad - uvažoval kajutu bez oken na plachetnici, která stojí nebo v mírném větru rovnoměrně přímočaře klouže po vodní hladině.

Princip relativity hraje ve fyzice velmi důležitou úlohu. V moderní fyzice jej Einstein rozšířil na všechny fyzikální děje (nejen mechanické) a nahradil Galileiho transformace mezi inerciálními soustavami transformacemi Lorentzovými. V obecné teorii relativity pak zobecnil tento princip i na neinerciální vztažné

soustavy a podle principu ekvivalence popsal neinerciální, setrvačné síly ekvivalentním gravitačním polem.

K zákonu akce a reakce

Zákon akce a reakce umožňuje přejít od mechaniky pohybu jedné částice k mechanice soustavy více částic. V ní pak můžeme rozlišovet síly vnější, externí kterými na soustavu působí jiná tělesa mimo ni, a síly vnitřní, interní, kterými mezi sebou působí částice soustavy navzájem. Pokud na soustavu částic vnější síly nepůsobí, nazýváme takovou soustavu *izolovanou*. Tak naše sluneční soustava je relativně dobře izolovaná soustava.

Vnitřní síly v soustavě se podřizují zákonu akce a reakce, působí-li jedna částice na druhou, působí druhá na první stejně velkou silou opačného směru. To ovšem musí platit v každém okamžiku a dojde-li ke změně silového působení, musí následovat okamžitá reakce. Síly v Newtonově mechanice působí tedy na dálku okamžitě (říká se tomu "actio in distans"), vzájemné působení částic se šíří prostorem nekonečně rychle. Podle teorie relativity se však interakce může přenášet nejvýše rychlostí světla ve vakuu c.

Souhrnně tedy můžeme říci, že na Newtonových zákonech byla vybudována první vědecká fyzikální teorie, Newtonova mechanika. Je to teorie vektorová, jejími základními pojmy jsou hybnost a síla a její zákony platí stejně ve všech inerciálních vztažných soustavách, které jsou vzájemně spojeny Galileiho transformacemi. O silách v Newtonově mechanice předpokládáme, že jsou **centrální**, tj. míří podél spojnice silově vzájemně působících částic, **izotropní**, tj. závisí jen na vzdálenosti, případně vzájemných rychlostech částic a nikoli na směru v prostoru a **okamžité**, šíří se nekonečnou rychlostí. Newton měl na mysli především síly gravitační, které klesají se vzdáleností nepřímo úměrně jejímu čtverci. Lze říci, že Newtonova mechanika byla v podstatě "šita" na pohyby těles ve sluneční soustavě a umožnila zde dosáhnout vynikajících výsledků. Dokonce zavládl názor, že řešením Newtonových pohybových rovnic pro všechny částice ve vesmíru bychom mohli přesně určit všechny jejich polohy a rychlosti v minulosti i budoucnosti a tedy vlastně stav světa v kterémkoli okamžiku. Vyžadovalo by to ovšem znát počáteční podmínky, polohy a rychlosti všech částic v nějakém okamžiku. Takový světový názor, který se snaží vysvětlit všechny děje na základě přesně určeného mechanického pohybu, který pohlíží na svět jako na obrovský hodinový stroj, se nazývá *mechanický determinismus*. Moderní fyzika však ukázala, že svět je mnohem složitější, než jak jej popisuje Newtonova mechanika.

2.1.2 Impuls síly, práce, výkon, energie

Impuls síly $\vec{I}$ vyjadřuje časový účinek síly. Působí-li na částici konstantní síla po dobu $\tau = t_2 - t_1$, je impuls síly dán součinem této síly a času:

$$\vec{I} \;=\; \vec{F}\,\tau \;=\; m\,\vec{a}\,\tau \;=\; m\,\frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\tau}\,\tau \;=\; m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \;=\; \vec{p}_2 - \vec{p}_1\;.$$

Vidíme, že *impuls síly je roven změně hybnosti částice.*

obr. 2.2 obr. 2.3

Je-li síla časově proměnná, je impuls síly definován jako integrál

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \ . \tag{2.14}$$

Síla, jejíž impuls určujeme, bývá často krátkodobá, jako např. při rázu dvou těles, a neznáme ani její časový průběh. Potom můžeme zavést střední sílu působící na těleso vztahem

$$< \vec{F} > = \frac{1}{\tau} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \ , \tag{2.15}$$

takže impuls síly bude roven $\vec{I} =< \vec{F} > \tau$. Odpovídá to situaci na obr. 2.2, kde nahradíme vyšrafovanou plochu integrálu plochou obdélníka. Impuls síly má tedy týž rozměr a měříme jej v týchž jednotkách jako hybnost.

Práce A vyjadřuje dráhový účinek síly. Působí-li na dráze s podél trajektorie na částici konstantní síla, bude práce dána součinem velikosti síly a dráhy:

$$A = F\ s = m\ a\ s = m\ \frac{v_2 - v_1}{\tau} < v > \tau = m\ (v_2 - v_1)\ \frac{v_2 + v_1}{2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \ .$$

Veličinu

$$T = \frac{1}{2}\ m\ v^2 = \frac{p^2}{2m} \tag{2.16}$$

nazveme **kinetickou energií částice**. Vidíme tedy, že *práce síly nad částicí podél dráhy je rovna změně kinetické energie částice.* Je-li síla časově proměnná a míří li pod obecným úhlem k tečnému vektoru trajektorie (obr. 2.3), definujeme práci jako integrál

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d(v^2)}{dt} dt =$$

$$= \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = T_2 - T_1 \ . \tag{2.17}$$

Práce a kinetická energie jsou tedy dvě fyzikální veličiny, které mají v soustavě SI fyzikální rozměr L^2MT^{-2} a měří se v jednotkách kg.m^2.s^{-2}; tato jednotka se nazývá joule (J). Kinetická energie je přitom veličina stavová (popisuje určitý stav částice), zatímco práce charakterizuje určitý proces (přechod z jednoho stavu do druhého).

Výkon N je práce za jednotku času; protože $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, máme

$$N = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \,. \tag{2.18}$$

Výkon má rozměr L^2MT^{-3} a měří se v jednotkách kg.m^2.s^{-3} nazývaných watt (W).

Důležitým případem sil jsou síly potenciální. Existuje-li v prostoru silové pole, t.j. působí-li na částici v každém bodě a v každém okamžiku síla $\vec{F}(x, y, z, t)$, potom může nastat případ, že tato síla může být vyjádřena jako gradient nějaké skalární funkce $U(x, y.z, t)$ nazývané *potenciální funkce*:[11]

$$\vec{F} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \,. \tag{2.19}$$

Taková síla se nazývá **potenciální**.

Pokud potenciální funkce nezávisí explicitně na čase, nazývá se **potenciální energií** a jí odpovídající síly **konzervativní**. Totální diferenciál potenciální energie můžeme zapsat ve tvaru

[11] Operátor ∇ nazývaný "nabla" je formální vektor vytvořený ze symbolů pro parciální derivace $\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{dx}, \frac{\partial}{dy}, \frac{\partial}{dz}\right)$.

$$dU \;=\; -\,\vec{F}\cdot d\vec{r}\,. \tag{2.20}$$

Znaménko minus je voleno proto, abychom prací konanou vnějšími silami *proti* silám pole zvyšovali potenciální energii částice.

Známe-li tedy potenciální energii částice jako funkci souřadnic, určíme snadno sílu na částici působící a naopak:

$$\vec{F} \;=\; -\,\nabla U\;, \qquad U \;=\; -\int \vec{F}\cdot d\vec{r} \;+\; C\,. \tag{2.21}$$

Potenciální energie je určena s přesností na additivní konstantu a můžeme ji volit rovnu nule v libovolně vybraném bodě. Pokud složka síly F_x závisí jen na jedné souřadnici $F_x(x)$ a tato funkce je integrabilní, lze vždy najít potenciální energii $U(x)$ a taková síla je konzervativní:

$$F_x \;=\; -\,\frac{dU}{dx}\;, \qquad U \;=\; -\int F_x dx \;+\; C\,. \tag{2.22}$$

Vyjádříme nyní práci konzervativních sil:

$$A \;=\; \int_1^2 \vec{F}\;\cdot\; d\vec{r} \;=\; -\int_1^2 dU \;=\; U_1 - U_2 \;=\; T_2 - T_1\,. \tag{2.23}$$

Odtud plyne, že v poli konzervativních sil zůstává v každém bodě trajektorie součet kinetické a potenciální energie konstantní:

$$E \;=\; T_1 + U_1 \;=\; T_2 + U_2 \;=\; \text{konst}\,. \tag{2.24}$$

Tuto veličinu nazýváme **energie** částice a měříme ji v joulech. V konzervativním silovém poli se tedy energie částice při pohybu zachovává (konzervuje). Z (2.23) rovněž plyne, že *práce konzervativních sil je rovna rozdílu potenciálních energií v počátečním a koncovém bodě a nezávisí na tom, po jaké trajektorii se částice přemisťovala. Pohybuje-li se částice po uzavřené trajektorii, je práce konzervativních sil nulová.*

Síly mohou být též nekonzervativní, jako například tzv. **disipativní** síly závislé na rychlosti částice (síly tření). V takovém případě se při pohybu částice mechanická energie nezachovává a částečně se předává okolí v podobě tepla, mění se ve vnitřní energii těles. [12] Protože tato vnitřní, tepelná energie nemůže být zpětně beze zbytku přeměněna na energii mechanického pohybu, mluvíme o *disipaci*, rozptylování energie. Působí-li tedy na částici jak konzervativní, tak disipativní síly, bude jejich práce

$$A \;=\; \int_1^2 \vec{F}_{konz}\;\cdot\; d\vec{r} \;+\; \int_1^2 \vec{F}_{dis}\;\cdot\; d\vec{r} \;=\; U_1 - U_2 + \int_1^2 \vec{F}_{dis}\;\cdot\; d\vec{r} \;=\; T_2 - T_1\;, \tag{2.25}$$

takže

$$E_2 - E_1 \;=\; \int_1^2 \vec{F}_{dis}\;\cdot\; d\vec{r}\,. \tag{2.26}$$

Změna energie částice je rovna práci disipativních sil.

[12] Práce a teplo jsou tedy dvě veličiny charakterizující *proces* předávání energie.

obr. 2.4 obr. 2.5

2.1.3 Řešení pohybových rovnic

Nejjednodušší případ nastává, závisí-li pohyb částice jen na jedné souřadnici, probíhá-li například podél osy x. Mluvíme o **jednorozměrném pohybu**. Pak řešíme pouze jednu pohybovou rovnici s počátečními podmínkami. Budeme-li první z pohybových rovnic (2.9) dělit hmotností, dostaneme úlohu najít jednoznačné řešení obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu s počátečními podmínkami:

$$\ddot{x} = f(t,\ x,\ \dot{x})\ , \quad x = x_0\ , \quad \dot{x} = v_0\ , \quad \text{při} \quad t = t_0\ . \tag{2.27}$$

Funkce $f(t,\ x,\ \dot{x})$ je síla vztažená k jednotce hmotnosti (zrychlení).

V teorii diferenciálních rovnic se dokazuje, že tato úloha má jednoznačné řešení, je-li $f(t, x, \dot{x})$ spojitá funkce všech tří proměnných v příslušném oboru hodnot a má-li spojité parciální derivace. Fyzikové zpravidla neověřují, zda tyto podmínky jsou splněny, a tak někdy může dojít k překvapením. Bude-li například $f = x^{1/3}$, zjistíme, že pro nezáporná t má rovnice dvě různá řešení: $x = 0$ a $x = \left(\frac{1}{6}\right)^{3/2} t^3$. To je ovšem proti přírodě, pohyb nemůže probíhat současně dvojím způsobem. Důvodem této nesrovnalosti je to, že funkce $x^{1/3}$ nemá parciální derivaci podle x v bodě $x = 0$ (obr. 2.4).

I když řešení úlohy o jednorozměrném pohybu existuje, může být obtížné ho najít. Uvedeme způsoby řešení této úlohy ve zvláštních případech, kdy síla je funkcí jen jedné proměnné.

1. **Síla konstantní**

Dostáváme rovnici $\ddot{x} = a_x =$ konst pro rovnoměrně zrychlený pohyb, jímž jsme se zabývali v první kapitole (vztahy (1.20)).

2. **Síla závislá na čase**

Dostáváme rovnici $\ddot{x} = a_x(t)$ pro nerovnoměrný pohyb, jímž jsme se zabývali v první kapitole (vztahy (1.21)).

3. **Síla závislá na poloze**

To je případ konzervativních sil $\ddot{x} = f(x)$. Upravíme pohybovou rovnici na tvar

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right) = f(x) .$$

Vyjádříme-li konzervativní sílu pomocí potenciální energie, máme $f(x) = \frac{1}{m}F_x = -\frac{1}{m}\frac{dU}{dx}$, a tedy

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right) = -\frac{1}{m}\frac{dU}{dx} .$$

Po zintegrování a vynásobení m máme

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E = \text{konst} . \tag{2.28}$$

To je ovšem zákon zachování energie v poli konzervativních sil a mohli jsme ho napsat rovnou, bez integrování pohybové rovnice. Konstanta E nám tedy poskytuje první integrační konstantu (integrál pohybu).

Rovnice (2.28) je již diferenciální rovnicí prvního řádu, z níž můžeme vypočítat $\dot{x}$, provést separaci proměnných a zintegrovat:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]} , \quad dt = \pm\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} ,$$

$$t = t_0 \pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} . \tag{2.29}$$

Tímto způsobem jsme úlohu vyřešili do konce, "v kvadraturách". Museli bychom nyní znát konkretní tvar potenciální energie $U(x)$ a spočítat integrál (2.29), což se může (ale také nemusí) podařit v analytické formě, v elementárních nebo speciálních funkcích. Volba mezí integrálu (2.29) automaticky zaručuje splnění počáteční podmínky pro x.Tak dostaneme jednoznačný zákon pohybu ve tvaru $t = t(x)$. Je už jen otázkou vkusu přejít k inverzní funkci $x(t)$, podaří-li se nám to.

V integrálu (2.29) vystupuje jednak dvojí znaménko, které ukazuje, že pohyb může probíhat v kladném i záporném směru času, a dále odmocnina ve jmenovateli integrálu, která musí být nezáporná. To klade omezení na oblast souřadnice x, v níž může pohyb probíhat. Protože kinetická energie částice je vždy nezáporná, musí být celková energie E větší nebo rovna potenciální energii $U(x)$:

$$E \geq U(x) . \tag{2.30}$$

Na obr. 2.5 je znázorněn obecný průběh potenciální energie a vyšrafováním vyznačeny oblasti, kde je pohyb možný. Oblast II je takzvaná **potenciálová jáma**, v níž probíhá

finitní pohyb (souřadnice x je omezena), v oblasti IV probíhá **infinitní pohyb** (částice se může přiblížit z nekonečna a opět se do nekonečna vzdálit). V oblastech I a III pohyb možný není. Oblast III je **potenciálový val (bariéru)**, jíž částice nemůže proniknout. [13]

4. **Síla závislá na rychlosti**

Závisí-li síla na rychlosti, není konzervativní a nemůžeme použít zákon zachování mechanické energie. Pohybovou rovnici $\ddot{x} = f(\dot{x})$ řešíme separací proměnných:

$$\ddot{x} = \frac{dv_x}{dt} = f(v_x) , \qquad dt = \frac{dv_x}{f(v_x)} , \tag{2.31}$$

odkud

$$t = t_0 + \int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{dv_x}{f(v_x)} ; \tag{2.32}$$

určíme-li inverzní funkci $v_x(t) = g(t)$, máme

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(t)dt . \tag{2.33}$$

<u>Úloha</u> (síla závislá na čase)

Nechť síla závisí na čase harmonicky jako $F_x = mk \sin \omega t$, $k, \omega > 0$. Určete zákon pohybu částice při počátečních podmínkách $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = 0$ a stanovte počáteční podmínky tak, aby pohyb byl finitní.

Po dvojím integrování rovnice $\ddot{x} = k \sin \omega t$ s použitím počátečních podmínek dostaneme

$$\dot{x} = -\frac{k}{\omega} \cos \omega t + C_1 = \frac{k}{\omega}(1 - \cos \omega t)$$

$$x = -\frac{k}{\omega^2} \sin \omega t + C_1 t + C_2 = \frac{k}{\omega}\left(t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t\right) .$$

Tento pohyb je infinitní, částice se od počátku stále vzdaluje (obr. 2.6 a).

Finitní pohyb zřejmě nastane, bude-li $C_1 = 0$, tj. při počátečních podmínkách $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = -\frac{k}{\omega}$. Potom (obr. 2.6 b)

$$\dot{x} = -\frac{k}{\omega} \cos \omega t , \qquad x = -\frac{k}{\omega^2} \sin \omega t .$$

<u>Úloha</u> (pohyb s třením)

Při pohybu tělesa s třením nebo s odporem prostředí může síla záviset na rychlosti různým způsobem. Při pomalém pohybu tělesa na podložce (smýkání) uvažujeme sílu

[13] To platí jen v klasické mechanice. V mikrosvětě, kde platí zákony kvantové mechaniky a částice mají vlnové vlastnosti, může částice potenciální bariérou proniknout. Tento kvantový jev se nazývá *tunelový*.

obr. 2.6

tření konstantní a úměrnou kolmé tlakové síle s koeficientem smykového tření, který závisí jen na drsnosti troucích se ploch. Při rychlejším pohybu uvažujeme sílu tření úměrnou buď první mocnině rychlosti nebo druhé mocnině rychlosti. Podobně při pohybu tělesa v odporujícím prostředí, vzduchu či vazké kapalině. Při malých hodnotách Reynoldsova čísla $R = \frac{va}{\nu}$, kde a je rozměr tělesa, v jeho rychlost a ν kinematická vazkost prostředí, je síla tření úměrna první mocnině rychlosti. Pro pohyb malé kuličky padající pomalu ve vazké kapalině je možno tuto sílu určit přesně jako $F_S = 6\pi\eta av$, kde $\eta = \rho\nu$ je dynamická vazkost, součin hustoty a kinematické vazkosti. Je to tzv. *Stokesův vzorec* a popisuje například odpor prostředí při pádu malé kuličky (broku) v oleji. Při pohybu většími rychlostmi ve vzduchu se spíše uplatní *Newtonův vzorec* $F_N = \frac{1}{2}C\rho Sv^2$, kde S je příčný průřez tělesa, ρ hustota prostředí a C koeficient závisející na tvaru tělesa (pro kouli bereme $C = 0,48$, pro polokulovou slupku (padák) $C = 1,33$, pro aerodynamický tvar tělesa $C = 0,01$). V tomto případě nejde vlastně o tření, ale o předávání kinetické energie tělesa pohybujícímu se prostředí. Experimenty ukazují, že například při letu kulky je odporová síla úměrná čtverci rychlosti do hodnot 200 m.s^{-1}, pak prudce roste a od 400 m.s^{-1} opět klesá.

Mějme nyní těleso pohybující se rychlostí v_0, na něž působí jen síla tření úměrná první nebo druhé mocnině rychlosti. V prvním případě může jít o automobil, který dojíždí s vypnutým motorem, ve druhém o plachetnici, která doplouvá se svinutými plachtami. Máme tedy počáteční podmínky $t = 0,\ x = 0,\ \dot{x} = v_0$. V prvním případě řešíme rovnici

$$\ddot{x} = -kv_x\ ,\quad k > 0\ ,\quad dt = -\frac{1}{k}\,\frac{dv_x}{v_x}$$

s výsledkem

$$v_x = v_0\mathrm{e}^{-kt}\ ,\qquad x = \frac{v_0}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt})\ .$$

Vidíme, že rychlost s časem exponenciálně klesá a těleso se postupně blíží k bodu o souřadnici $x = v_0/k$.

Ve druhém případě budeme řešit rovnici [14]

$$\ddot{x} = -\kappa v_x^2 \ , \kappa > 0 \ , \quad dt = -\frac{1}{\kappa}\,\frac{dv_x}{v_x^2}$$

s výsledkem

$$v_x = \frac{v_0}{1+\kappa v_0 t} \ , \qquad x = \frac{1}{\kappa}\ln(1+\kappa v_0 t) \ .$$

Vidíme, že s rostoucím časem se souřadnice x neblíží k žádné limitě, doplouvající plachetnice za dostatečně dlouhou dobu překročí každou vymezenou hranici.

<u>Úloha</u> (volný pád a šikmý vrh s odporem vzduchu)

Uvažujme volný pád tělesa v prostředí, jehož odpor můžeme popsat silu úměrnou první mocnině rychlosti. Pak řešíme úlohu

$$\ddot{z} = -g - kv_z \ , \quad t = 0 \ , \quad z = h \ , \quad \dot{z} = 0$$

s výsledkem

$$v_z = \frac{g}{k}(\mathrm{e}^{-kt} - 1) \ , \qquad z = h - \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}(1 - \mathrm{e}^{-kt}) \ .$$

Snadno ověříme, že při malém odporu v limitě $k \to 0$ dostáváme výsledek pro volný pád ve vakuu a za dostatečně dlouhou dobu se rychlost pádu ustálí na $v_z = -g/k$. Roste-li odporová síla s rychlostí, dříve či později nastane okamžik, kdy se její velikost vyrovná působící síle tíhové a další pohyb je již rovnoměrný. Tak rychlost parašutisty se po rozevření padáku brzy ustálí asi na 6 m.s^{-1}, což zajišťuje bezpečný dopad. V tomto případě bychom však museli řešit úlohu s odporovou silou úměrnou druhé mocnině rychlosti, tj. rovnici

$$\ddot{z} = -g + \kappa v_z^2$$

(odporová síla míří v kladném směru osy z!). Řešení je poněkud obtížnější a lze je nalézt v knize V.Trkala Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa. Dostáváme

$$v_z = -\sqrt{\frac{g}{\kappa}}\mathrm{tgh}\ (\sqrt{\kappa g}t) \approx -gt(1 - \frac{1}{3}\kappa g t^2)$$

$$z = h - \frac{1}{\kappa}\mathrm{lncosh}\ (\sqrt{\kappa g}t) \approx h - \frac{1}{2}gt^2(1 - \frac{1}{6}\kappa g t^2) \ .$$

Podobně bychom mohli řešit úlohu o vrzích v tíhovém poli s odporem vzduchu a nacházet tvar balistických křivek. Bude-li odporová síla úměrná první mocnině rychlosti, dostaneme parametrické vyjádření balistické křivky jako

$$x = \frac{v_{0x}}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt}) \ , \quad z = \left(\frac{v_{0z}}{k} + \frac{g}{k^2}\right)(1 - \mathrm{e}^{-kt}) - \frac{g}{k}t \ .$$

Na obr. 2.7 jsou trajektorie šikmého vrhu tělesa s počáteční rychlostí 100 m.s^{-1} vrženého pod úhlem 35^0 a 45^0. Odpor vzduchu je přitom předpokládán úměrný druhé mocnině

[14] κ *není* gravitační konstanta!

obr. 2.7

rychlosti s koeficientem $\kappa = 4.10^{-3}$ m^{-1}. Všimněte si, že těleso doletí pod úhlem 35^0 *dále* než pod úhlem 45^0. Ve vakuu by dosáhlo maximální dálky pod úhlem 45^0 rovné asi 1 000 m. Pohyby těles ve vzduchu mohou být dále komplikovány jeho pohybem , rozdílnou hustotou a také případnou rotací těles, které vede k jejich snášení z počáteční roviny vrhu (*Magnusův jev*). O vlivu rotace Země na pohyb těles pojednáme v odstavci 2.4.

2.2 Pohyb kmitavý

2.2.1 Harmonický oscilátor

Uvažujme jednorozměrný pohyb částice hmotnosti m například podél osy x, na níž působí síla $F_x = -kx$, $k > 0$. Je to zřejmě síla konzervativní a částice má v tomto silovém poli potenciální energii

$$U(x) = \frac{1}{2}\, k\, x^2 \,. \tag{2.34}$$

Aditivní konstantu jsme volili tak, aby potenciální energie byla nulová při $x = 0$. Částice má při pohybu určitou energii E, která se zachovává, je integrálem pohybu; přitom musí platit podmínka $E \geq U(x)$. Lze tedy říci, že se částice pohybuje v symetrické, parabolické potenciálové jámě a x leží v mezích $-A \leq x \leq A$, kde A je amplituda, největší výchylka (obr. 2.8).

Ukážeme, že taková částice bude vykonávat netlumené harmonické kmity s *vlastní*

obr. 2.8

úhlovou frekvencí

$$\omega_0 \;=\; \sqrt{\frac{k}{m}}\,. \tag{2.35}$$

Tato soustava se proto nazývá **harmonický oscilátor** a má zásadní význam ve všech oblastech fyziky. Její důležitost je v tom, že jakoukoli symetrickou potenciálovou jámu můžeme pro malé kmity vždy aproximovat jámou parabolickou a harmonický oscilátor tedy obecně popisuje libovolné kmitavé pohyby s malou amplitudou. Jeho důležitou vlastností je i to, že jeho vlastní úhlová frekvence (která je jediným parametrem charakterizujícím harmonický oscilátor) nezávisí na amplitudě a že perioda kmitů je vždy stejná nezávisle na počáteční výchylce.

Pohybovou rovnici harmonického oscilátoru

$$m\,\ddot{x} \;=\; -\,k\,x \tag{2.36}$$

upravíme na tvar

$$\ddot{x} \;+\; \omega_0^2\,x \;=\; 0 \tag{2.37}$$

a řešíme podle pravidel pro řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty (viz kapitolu Matematický aparát). Výsledné řešení, závislé na dvou integračních konstantách, můžeme vyjádřit několikerým způsobem:

$$x(t) \;=\; C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + C_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} \;=\; A_1 \cos\omega_0 t + A_2 \sin\omega_0 t \;=\; A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)\,. \tag{2.38}$$

Konstanty $C_1,\ C_2$ jsou obecně komplexní, konstanty $A_1 = C_1 + C_2 = A\sin\varphi_0,\quad A_2 = \mathrm{i}(C_1 - C_2) = A\cos\varphi_0$ reálné.

Derivováním dostaneme rychlost částice jako

$$v_x(t) \;=\; A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)\;. \tag{2.39}$$

Počáteční podmínky nám říkají, jak kmitavý pohyb započal. Částici můžeme uvést do kmitavého pohybu buď tak, že jí udělíme určitou počáteční rychlost, nebo tím, že ji vychýlíme a pustíme, případně obojím způsobem. Obecné podmínky můžeme zapsat tak, že v okamžiku $t = t_0$ bude $x = x_0 > 0$, $v_x = v_0 > 0$. Potom dostaneme pro amplitudu a fázovou konstantu

$$A \;=\; \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}\;, \qquad \mathrm{tg}\;(\omega_0 t_0 + \varphi_0) \;=\; \frac{\omega_0 x_0}{v_0}\;. \tag{2.40}$$

V dalším se omezíme na jednodušší počáteční podmínky $t = 0$, $x = 0$, $v_x = v_0$. Pak máme $A = v_0/\omega_0$ a $\sin\varphi_0 = 0$, odkud $\varphi_0 = 0$. [15] Dostáváme tedy řešení

$$x(t) \;=\; \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t\;, \qquad v_x(t) \;=\; v_0\cos\omega_0 t\;. \tag{2.41}$$

K témuž výsledku můžeme dospět i jinak. Dosadíme-li do (2.29) potenciální energii (2.34) a zintegrujeme, máme

$$t \;=\; \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)}} \;=\; \frac{1}{\omega_0}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} \;=\; \frac{1}{\omega_0}\,\arcsin\frac{x}{A}\;, \tag{2.42}$$

kde

$$A \;=\; \sqrt{\frac{2}{k}E} \;=\; \sqrt{\frac{mv_0^2}{k}} \;=\; \frac{v_0}{\omega_0}\;,$$

neboť celková energii dodaná částici je právě $E = \frac{1}{2}mv_0^2$.

Energii harmonického oscilátoru můžeme zapsat jako

$$E \;=\; \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \;=\; \frac{1}{2}mv_0^2 \;=\; \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2\;. \tag{2.43}$$

Je tedy úměrná čtverci vlastní frekvence a amplitudy. U periodických pohybů má význam určovat střední hodnoty veličin za periodu. Tak dostaneme pro střední hodnoty kinetické a potenciální energie [16]

$$< T > = \;\frac{1}{2}mv_0^2 < \cos^2\omega_0 t > = \;\frac{1}{4}mv_0^2\;, \qquad < U > = \;\frac{1}{2}k\frac{v_0^2}{\omega_0^2} < \sin^2\omega_0 t > = \;\frac{1}{4}mv_0^2\;. \tag{2.44}$$

Vidíme, že střední hodnoty kinetické a potenciální energie harmonického oscilátoru za periodu jsou stejné. Tento zajímavý výsledek plyne z obecné věty zvané *teorém o viriálu.*

2.2.2 Tlumený oscilátor

Netlumený harmonický oscilátor je fyzikální idealizací, předpokládáme, že u něho nedochází k disipaci mechanické energie, neuplatňuje se tření. Ve skutečnosti musíme do

[15] Kdyby bylo $\varphi_0 = \pi$, muselo by být $v_0 < 0$ oproti předpokladu.

[16] Snadno se přesvědčíme, že střední hodnoty funkcí $\sin^2\omega_0 t$ a $\cos^2\omega_0 t$ za periodu jsou rovny 1/2.

pohybové rovnice oscilátoru zahrnout disipativní sílu, kterou obvykle bereme jako úměrnou rychlosti. Pohybovou rovnici

$$m\,\ddot{x} \;=\; -\,k\,x - h\,\dot{x} \tag{2.45}$$

upravíme na tvar

$$\ddot{x} \;+\; 2\,\delta\,\dot{x} \;+\; \omega_0^2\,x \;=\; 0\,. \tag{2.46}$$

Předpokládáme, že konstanty $k > 0$, $h > 0$ jsou kladné a zavádíme další parametr zvaný *dekrement útlumu* δ. Oscilátor je pak charakterizován dvěma parametry

$$\omega_0 \;=\; \sqrt{\frac{k}{m}}\,, \qquad \delta \;=\; \frac{h}{2m}\,.$$

Řešení pohybové rovnice hledáme ve tvaru $x = C\mathrm{e}^{\alpha t}$ a pro α dostáváme charakteristickou rovnici

$$\alpha^2 \;+\; 2\delta\,\alpha \;+\; \omega_0^2 \;=\; 0$$

odkud

$$\alpha \;=\; -\delta \;\pm\; \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \;=\; -\delta \pm D\,, \qquad \text{kde} \qquad D^2 \;=\; \delta^2 - \omega_0^2 \tag{2.47}$$

je diskriminant charakteristické rovnice. Tak dostáváme obecné řešení

$$x(t) \;=\; C_1\mathrm{e}^{(-\delta+D)t} \;+\; C_2\mathrm{e}^{(-\delta-D)t} \;=\; \mathrm{e}^{-\delta t}\,(C_1\mathrm{e}^{Dt} \;+\; C_2\mathrm{e}^{-Dt})\,. \tag{2.48}$$

V závislosti na hodnotě útlumu a tedy diskriminantu rovnice můžeme nyní rozlišit čtyři případy:

1. <u>Případ nulového útlumu</u>

Je-li $\delta = 0$, $D^2 = -\omega_0^2$, dostáváme ideální případ netlumeného harmonického oscilátoru.

2. <u>Případ malého útlumu</u>

Je-li $D^2 = \delta^2 - \omega_0^2 < 0$, zavedeme úhlovou frekvenci

$$\omega \;=\; \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \tag{2.49}$$

a řešení (2.48) přechází na

$$\begin{aligned} x(t) \;&=\; \mathrm{e}^{-\delta t}(C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}) \;=\; A\;\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi_0) \\ v_x(t) \;&=\; A\;\mathrm{e}^{-\delta t}[\omega\cos(\omega t + \varphi_0) - \delta\sin(\omega t + \varphi_0)]\,. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Dochází k periodickým kmitům, jejichž amplituda exponenciálně klesá v čase. Časový průběh takových kmitů za počáteční podmínky $t = 0,\ x = 1,\ v_x = 0$ pro různé hodnoty dekrementu útlumu je znázorněn na počítačovém diagramu na obr. 2.9.

Definujeme-li opět počáteční podmínky $t = 0,\ x = 0,\ v = v_0 > 0$, dostaneme $A = v_0/\omega$, $\varphi_0 = 0$ a řešení bude mít tvar (viz obr. 2.10)

$$x(t) \;=\; \frac{v_0}{\omega}\mathrm{e}^{-\delta t}\sin\omega t\,, \qquad v_x \;=\; v_0\mathrm{e}^{-\delta t}\left(\;\cos\omega t - \frac{\delta}{\omega}\sin\omega t\;\right)\,. \tag{2.51}$$

obr. 2.9

obr. 2.10

Pohyb tlumeného oscilátoru není přesně vzato periodický, neboť amplituda se postupně zmenšuje. Přesto však je zřejmé, že jak výchylka x, tak rychlost v_x podle (2.51) prochází vždy nulovou polohou ve stejných intervalech $T/2$, kde $T = 2\pi/\omega$ (pro v jsou to kořeny rovnice tg $(\omega t + \varphi_0) = \omega/\delta$). Můžeme proto zavést periodu a úhlovou frekvenci, která se poněkud liší od vlastní úhlové frekvence netlumeného oscilátoru $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

Amplituda je dána podmínkou $v_x = 0$ a poměr dvou následujících výchylek na tutéž stranu (tj. vzdálených o periodu) je

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{A\mathrm{e}^{-\delta(t_1+T)}\sin[(\omega(t_1+T)+\varphi_0]}{A\mathrm{e}^{-\delta t_1}\sin(\omega t_1+\varphi_0)} = \mathrm{e}^{-\delta T} . \tag{2.52}$$

Veličina $\vartheta = \delta T$ se nazývá *logaritmický dekrement útlumu.*

Pro energii tlumeného oscilátoru dostaneme

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}v_0^2\mathrm{e}^{-2\delta t}\left[m\left(\cos^2\omega t + \frac{\delta^2}{\omega^2}\sin^2\omega t - 2\frac{\delta}{\omega}\cos\omega t\sin\omega t\right) + \frac{k}{\omega^2}sin^2\omega t\right] . \tag{2.53}$$

Vystředujeme-li tuto energii za periodu [17] a předpokládáme-li, že útlum je malý ($\delta \ll \omega$), dostaneme střední hodnotu energie během jedné periody

$$< E > = \frac{1}{2}mv_0^2\mathrm{e}^{-2\delta t} . \tag{2.54}$$

Tato střední energie s časem klesá, dochází k disipaci kmitavé energie v energii tepelnou. Střední disipovaný výkon bude mít zřejmě velikost

$$< N > = |\frac{d}{dt} < E > | = 2\delta < E > . \tag{2.55}$$

Disipaci energie v tlumeném oscilátoru vyjadřuje bezrozměrná veličina, kterou nazýváme *kvalita* nebo *činitel jakosti* oscilátoru

$$Q = \frac{\omega_0 < E >}{< N >} = \frac{\omega_0}{2\delta} . \tag{2.56}$$

3. Případ kritického útlumu

Je-li $D = 0$, $\delta = \omega_0$, kmitavý pohyb přestává být právě periodický a jde o případ kritického útlumu. Řešení pohybové rovnice bude obecně

$$x = (C_1 + C_2 t)\,\mathrm{e}^{-\delta t} , \quad v_x = C_2\mathrm{e}^{-\delta t} - \delta\,(C_1 + C_2 t)\,\mathrm{e}^{-\delta t} \tag{2.57}$$

a pro námi zvolené počáteční podmínky

$$x = v_0 t\mathrm{e}^{-\delta t} \tag{2.58}$$

(rychlost dostaneme snadno zderivováním). Částice je tedy vychýlena z rovnovážné polohy, dosáhne maxima při $t_{max} = 1/\delta$ a opět se bude vracet do rovnovážné polohy, aniž by

[17] Střední hodnota součinu $\sin\omega t\cos\omega t$ za periodu je rovna nule.

obr. 2.11 obr. 2.12

překmitla na druhou stranu. Časový průběh výchylky je na obr. 2.11. Kritického útlumu se využívá při tlumení ukazatelů měřicích prístrojů, kdy je nechceme rozkmitat a potřebujeme, aby se co nejrychleji ustavila rovnovážná poloha (i když teoreticky vzato to trvá nekonečně dlouho).

4. Případ silného útlumu

Je-li $D^2 = \delta^2 - \omega_0^2 > 0$, potom oba kořeny charakteristické rovnice jsou reálné a dostáváme

$$x = C_1 \mathrm{e}^{(-\delta+D)t} + C_2 \mathrm{e}^{(-\delta-D)t} \tag{2.59}$$

(rychlost dostaneme snadno zderivováním). Pro námi zvolené počáteční podmínky bude

$$x = \frac{v_0}{D} \mathrm{e}^{-\delta t} \sinh Dt \,. \tag{2.60}$$

Časový průběh výchylky je na obr. 2.12. Maxima je dosaženo v okamžiku daném rovnicí

$$\mathrm{tgh}\, Dt = \frac{D}{\delta} \,. \tag{2.61}$$

2.2.3 Rezonance

Nechť na oscilátor působí vnější periodická harmonická síla s periodou Ω. Tato síla bude oscilátor rozkmitávat, vnucovat mu svou frekvenci, dodávat mu energii. Mluvíme o *vynucených kmitech oscilátoru.* Nechť má síla časový průběh například $F_x(t) = F_0 \cos \Omega t$. Pak bude pohybová rovnice nehomogenní:

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F_x(t) \,. \tag{2.62}$$

Označíme $B = F_0/m$ a přepíšeme pohybovou rovnici na tvar

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = B\cos\Omega t\ . \tag{2.63}$$

Podle teorie nehomogenních diferenciálních rovnic (viz Matematický aparát) bude obecné řešení rovnice (2.63) rovno součtu obecného řešení homogenní rovnice (s nulovou pravou stranou) a zvláštního řešení nehomogenní rovnice. Obecné řešení homogenní rovnice známe - jsou to tlumené kmity a s výjimkou nereálného případu nulového tření vždy po určité době se přiblíží k nule. Oscilátor si tedy na počátku trochu zakmitá, ale my vyčkáme, až tyto vlastní kmity odezní a nastoupí režim vynucených kmitů. Je rozumné očekávat, že tyto vynucené kmity budou probíhat s frekvencí Ω a pokusíme se najít řešení (2.63) ve tvaru

$$x(t) \ = \ A\ \sin(\Omega t + \varphi_0)\ . \tag{2.64}$$

Neznámou amplitudu A a fázovou konstantu φ_0 musíme určit tak, aby řešení splňovalo nehomogenní rovnici. Určíme ještě rychlost a zrychlení

$$\dot{x} \ = \ \Omega A\cos(\Omega t + \varphi_0)\ , \quad \ddot{x} \ = \ -\ \Omega^2 A\sin(\Omega t + \varphi_0) \tag{2.65}$$

a dosadíme do (2.63). Tak dostaneme

$$-\Omega^2 A\sin(\Omega t + \varphi_0) + 2\delta\Omega A\cos(\Omega t + \varphi_0) + \omega_0^2 A\sin(\Omega t + \varphi_0) \ = \ B\cos(\Omega t)\ . \tag{2.66}$$

Nyní rozložíme goniometrické funkce součtů $\Omega t + \varphi_0$ na levé straně a přirovnáme koeficienty u $\sin\Omega t$ a $\cos\Omega t$ na obou stranách rovnice; aby rovnice byla splněna v každém okamžiku t, musí se totiž tyto koeficienty nezávisle rovnat. Tak dostaneme soustavu dvou rovnic k určení neznámých A a φ_0:

$$A\ [(\omega_0^2 - \Omega^2)\cos\varphi_0 - 2\delta\Omega\sin\varphi_0] \ = \ 0\ , \qquad A\ [(\omega_0^2 - \Omega^2)\sin\varphi_0 + 2\delta\Omega\cos\varphi_0] \ = \ B\ . \tag{2.67}$$

Z první z těchto rovnic okamžitě dostáváme vztah pro φ_0: [18]

$$\mathrm{tg}\ \varphi_0 \ = \ \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\delta\Omega}\ . \tag{2.68}$$

K určení amplitudy kmitů A budeme postupovat takto: obě rovnice (2.67) umocníme na druhou a sečteme. Přitom nám vypadnou výrazy obsahující φ_0 a máme

$$A \ = \ \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}\ . \tag{2.69}$$

Z tohoto výrazu je patrno, že pokud útlum není příliš velký, amplituda kmitů poroste při přibližování frekvence Ω vlastní frekvenci oscilátoru ω_0. Tomuto jevu se říká **rezonance** a závislost amplitudy na vnějším kmitočtu nazýváme **rezonanční křivkou v amplitudě**.

Prozkoumáme-li funkci $A(\Omega)$ podrobněji, zjistíme,že při $\Omega = 0$ má hodnotu $A_s = B/\omega_0^2$, kterou nazýváme statická výchylka. Pokud je velký útlum ($\delta > \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$), dosahuje funkce

[18] Kdybychom byli bývali volili řešení ve tvaru $x = A\cos(\Omega t + \varphi_0)$, dostali bychom $\mathrm{tg}\ \varphi_0 = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$.

obr. 2.13

maxima v nule (křivka 1 na obr. 2.13) a jev rezonance nenastává. Při útlumu $\delta < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$, nabývá křivka maxima na rezonanční frekvenci $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$, a to

$$A_{max} = \frac{B}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \,. \tag{2.70}$$

S klesajícím útlumem tato maximální hodnota roste do nekonečna a rezonanční frekvence se přibližuje vlastní frekvenci ω_0 (křivky 2 a 3 na obr. 2.13). Tangens fázového úhlu φ_0 přitom prochází nulou vždy na vlastní frekvenci ω_0 (obr. 2.14).

Vynucené kmity oscilátoru jsou netlumené, soustava se nachází ve stavu energetické rovnováhy - ztráty mechanické energie disipací jsou nahrazovány energií vnějšího zdroje, vynucující síly. Čím jsou ztráty menší, tím s větší účinností je vnější energie absorbována a roste maximální amplituda oscilací. Ta může někdy dosáhnout nebezpečně velkých hodnot (například při rezonančním rozkmitání mostu, vozidla nebo stroje). Na druhé straně rezonance umožňuje zachycovat a pak zesilovat velmi slabé elektromagnetické signály a má i jinak velmi důležité uplatnění ve fyzice a technice. Mohlo by se zdát absurdní, že při dostatečně malém útlumu můžeme s určitým, konečným zdrojem energie dosáhnout libovolně velké amplitudy kmitů, napříkad malý chlapec by teoreticky mohl svým pohybem způsobit zhroucení mostu. Ve skutečně však vždy působí určitý útlum a kromě toho kmity mechanických systémů přesně vzato nikdy neprobíhají jen na jediné frekvenci, vždy existuje určité frekvenční spektrum, takže nekonečné hodnoty amplitudy dosáhnout nelze.

Pro energii oscilátoru v režimu vynucených kmitů máme (podobně jako u netlumeného

obr. 2.14

obr. 2.15

oscilátoru)

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\Omega^2 A^2 = \frac{mB^2\Omega^2}{2[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2]} \,. \tag{2.71}$$

Závislost energie takto nahromaděné v oscilátoru na frekvenci vnější síly nám dává **rezonenční křivku v energii**, která je na obr. 2.15.

Tato křivka se liší od rezonanční křivky ve výchylce na obr. 2.13 a 2.14 jednak tím, že při nulové frekvenci se blíží k nule a tím, že nabývá maxima vždy na vlastním kmitočtu ω_0 (a nikoli na rezonančním kmitočtu Ω_r). Tato maximální energie přitom je

$$E_{max} = \frac{mB^2}{8\delta^2} \,. \tag{2.72}$$

Ztrátový výkon disipativních sil vystředovaný za periodu dostaneme jako

$$< N > = < F_d v_x > = < h\dot{x}^2 > = < hA^2\Omega^2 \cos^2(\Omega t + \varphi_0) > = \frac{1}{2}hA^2\Omega^2 =$$

$$= \frac{\delta m\Omega^2 B^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2} \,. \tag{2.73}$$

Porovnáme-li tento výsledek s výrazem pro energii oscilátoru (2.71), vidíme že $E = 2\delta < N >$ a kvalita oscilátoru je

$$Q = \frac{\omega_0 E}{< N >} \,. \tag{2.74}$$

Energie E zůstává nyní konstantní, rovna své střední hodnotě.

Oscilátor je plně charakterizován svou vlastní frekvencí ω_0 a útlumem, který můžeme vyjádřit kvalitou jako bezrozměrným číslem. Obecnou definici kvality oscilátoru jako poměr součinu vlastní frekvence a energie dělenému středním ztrátovým výkonem můžeme použít na jakýkoli oscilátor bez ohledu na to, jakého původu jsou ztráty energie, zda dochází k tření, odporu prostředí, ohmickému zahřívání na odporech nebo úniku energie ze systému jiným způsobem. Kvalitu můžeme pak přímo určit z rezonanční křivky na obr. 2.15 tak, že určíme šířku této křivky v poloviční výšce. Ze vztahu

$$\frac{mB^2\Omega^2}{2[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2]} = \frac{1}{2}\,\frac{mB^2}{8\delta^2}$$

dostaneme rovnici čtvrtého stupně pro určení kořenů Ω jako frekvencí, při nichž energie nabývá právě poloviny maximální hodnoty:

$$(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2 = 8\delta^2\Omega^2$$

neboli

$$(\omega_0^2-\Omega^2)^2 = 4\delta^2\Omega^2\ , \quad \omega_0^2-\Omega^2 = \pm 2\delta\Omega\ .$$

Rovnice se nám tedy rozpadla na dvě kvadratické rovnice a jejich řešením dostaneme čtyři kořeny odpovídající všem možným kombinacím znamének:

$$\Omega_{1,2,3,4} = \mp\delta \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{2}+\omega_0^2}\ . \tag{2.75}$$

Z nich vyhovují pouze kladné kořeny odpovídající kladnému znaménku před odmocninou. Rozdíl těchto dvou kořenů nám pak dává šířku rezonanční křivky na poloviční výšce:

$$\Delta\Omega = \Omega_2-\Omega_1 = 2\delta = \frac{\omega_0}{Q}\ . \tag{2.76}$$

Šířka rezonanční křivky je tedy nepřímo úměrná kvalitě, čím je menší útlum, tím je rezonanční křivka užší a vyšší. Změříme-li experimentálně průběh rezonanční křivky, můžeme z ní stanovit jak vlastní frekvenci tak kvalitu oscilátoru.

2.2.4 Vázané oscilátory

Představme si dva oscilátory, které jsou nějakým způsobem spojeny, existuje mezi nimi vazba, mohou si vzájemně předávat energii. Taková situace je velmi častá, dokonce míváme celé řetězce vázaných oscilátorů, které se vzájemně rozkmitávají. Charakter této vazby může být různý. Jako příklad si vezměme dvě stejná kyvadla vzájemně spojená pružinou, pak jde o tzv. pružnou vazbu a síla, kterou pružina bude působit na kyvadlo bude úměrná jejímu protažení (obr. 2.16).

Takový systém můžeme snadno exprimentálně realizovat, rozkývat jedno z kyvadel a sledovat děj. Uvidíme, že se druhé kyvadlo začne postupně rozkývávat s vzrůstající amplitudou, energie se začne přelévat od prvního kyvadla k druhému až se první kyvadlo

obr.2.16

zastaví. Pak se děj začne opakovat v obráceném směru. Pohyb kyvadla má tedy charakter rázů, a ty vznikají jak víme superpozicí dvou kmitavých pohybů o blízkých frekvencích.

Pohyb kyvadla můžeme pro malé výkyvy považovat přibližně za harmonický a uvažovat přitom pouze pohyb ve směru osy x. Místo kyvadel můžeme uvažovat i dva hmotné body spojené pružinkou, které mohou harmonicky oscilovat podél osy x. Tření přitom zanedbáme.

Pohybové rovnice obou oscilátorů můžeme zapsat ve tvaru

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \kappa \ (\ x_2 - x_1 \ ) \ , \qquad \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = \kappa \ (\ x_1 - x_2 \ ) \ . \tag{2.77}$$

Předpokládáme, že síly mezi oscilátory působí podle zákona akce a reakce a konstantou κ jsme vyjádřili intenzitu vazby. Obyčejně se zavádí bezrozměrný tzv. **stupeň vazby**

$$K \ = \ \frac{\kappa}{\omega_0^2 + \kappa} \ . \tag{2.78}$$

Soustavu rovnic (2.77) řešíme tak, že obě rovnice sečteme a odečteme a označíme součet a rozdíl $x_1 + x_2 = x_+$, $\quad x_1 - x_2 = x_-$. Pro tyto funkce máme rovnice

$$\ddot{x}_+ + \omega_0^2 x_+ \ = \ 0 \ , \qquad \ddot{x}_- + (\omega_0^2 + 2\kappa) x_- \ = \ 0 \ . \tag{2.79}$$

To jsou dvě rovnice pro netlumené harmonické oscilátory o frekvencích ω_0 a $\Omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\kappa}$. Dostáváme tedy řešení $x_+ = A_+ \sin(\omega_0 t + \varphi_{0+})$, $\quad x_- = A_- \sin(\Omega_0 t + \varphi_{0-})$ a přejdeme-li k funkcím x_1 , x_2, dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 \ &= \ \frac{1}{2}[A_+ \sin(\omega_0 t + \varphi_{0+}) + A_- \sin(\Omega_0 t + \varphi_{0-})] \\ x_2 \ &= \ \frac{1}{2}[A_+ \sin(\omega_0 t + \varphi_{0+}) - A_- \sin(\Omega_0 t + \varphi_{0-})] \ . \end{aligned} \tag{2.80}$$

obr. 2.17 obr. 2.18

Pro případ slabé vazby si budou úhlové frekvence ω_0, Ω_0 blízké a pohyb bude mít charakter rázů.

2.2.5 Matematické kyvadlo

Pod matematickým kyvadlem rozumíme hmotný bod m zavěšený na nehmotném vlákně délky l v tíhovém poli. Předpokládejme, že délka závěsu zůstává stálá a že jde tedy spíš o nehmotnou tuhou tyčku. V takovém případě je pohyb hmotného bodu v prostoru omezen, může se pohybovat jen po kulové ploše o poloměru l. Tato vazba způsobuje, že k popisu pohybu nejsou zapotřebí tři prostorové souřadnice, ale pouze dvě (například úhly φ , ϑ - viz Matematický aparát o sférických souřadnicích). Takový systém nazýváme **sférické kyvadlo** a jeho pohyb si umíme dobře představit udělíme-li obecnou výchylku a počáteční rychlost takto zavěšenému předmětu.

My se však omezíme na jednodušší případ, kdy se hmotný bod bude pohybovat pouze ve svislé rovině. Takový pohyb vznikne tak, že kyvadlo vychýlíme a volně pustíme nebo mu udělíme vodorovnou počáteční rychlost v rovnovážné poloze. Protože na kyvadlo pak působí už jen tíže, která nemá vodorovnou složku, zůstane pohyb kyvadla omezen na rovinu. Hmotný bod bude opisovat oblouk kružnice a k popisu pohybu pak stačí jen jedna souřadnice, polární úhel φ (viz obr. 2.17). Tento systém se nazývá **rovinné matematické kyvadlo**.

Ke studiu pohybu rovinného kyvadla použijeme polární souřadnice. Počátek umístíme v bodě závěsu a polární poloosu namíříme svisle dolů. Pro souřadnici r a φ máme pohybové rovnice

$$\begin{aligned} ma_r &= m\,(\,\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\,) = mg\cos\varphi - F_n \\ ma_\varphi &= m\,(\,2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\,) = -mg\sin\varphi\,. \end{aligned} \tag{2.81}$$

Ve směru radiálním (podél souřadnice r) pohyb nenastává a z první rovnice můžeme určit sílu, jíž je napínán závěs kyvadla:

$$F_n \;=\; mg\cos\varphi + mr\dot{\varphi}^2 \;. \tag{2.82}$$

Tento vztah vyjadřuje skutečnost, že dostředivá síla, která realizuje nerovnoměrný kruhový pohyb hmotného bodu je dána silou napětí závěsu zmenšenou o radiální složku tíhy.

Z druhé rovnice dostaneme pohybovou rovnici pro úhel φ, výkyv:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi \;=\; 0 \;. \tag{2.83}$$

Tato diferenciální rovnice je ovšem obtížně řešitelná. Zkusíme proto využít toho, že tíhové pole je konzervativní a zapíšeme zákon zachování energie:

$$E \;=\; \frac{1}{2}mv^2 + U(\varphi) \;=\; \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi \;=\; -mgl\cos\varphi_0 \;, \tag{2.84}$$

kde φ_0 je počáteční výchylka. Nulu potenciální energie jsme zvolili pro úhel $\varphi = \pi/2$. Pohyb matematického kyvadla můžeme tedy považovat za pohyb v kosinové potenciálové jámě $U(\varphi) = -mg\cos\varphi$ (obr. 2.18). Řešením rovnice pro energii dostaneme

$$\dot{\varphi} \;=\; \frac{d\varphi}{dt} \;=\; \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)} \;, \tag{2.85}$$

odkud

$$t \;=\; \sqrt{\frac{l}{2g}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} \;+\; C \;. \tag{2.86}$$

Tím jsme sice vyřešili úlohu "v kvadraturách", dostali jsme závislost času na úhlu φ vyjádřenu pomocí integrálu, ale tento integrál se nedá obecně řešit pomocí elementárních funkcí, vede na tzv. integrály eliptické. Nebudeme se zajímat o časový průběh $\varphi(t)$, ale pokusíme se určit periodu pohybu T jako čtyřnásobek doby potřebné k pohybu kyvadla mezi nulovou a maximální výchylkou. Pro malá φ můžeme příslušný eliptický integrál rozložit do řady a dostaneme [19]

$$T \;=\; 2\sqrt{2}\,\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} \;=\; 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,\left(\,1 + \frac{1}{16}\varphi_0^2 + \cdots\right) \;. \tag{2.87}$$

Pro malé výkyvy je tedy matematické kyvadlo *izochronní*, [20] tj. jeho perioda nezávisí na amplitudě a je rovna

$$T \;=\; 2\,\pi\,\sqrt{\frac{l}{g}} \;. \tag{2.88}$$

[19] Jest $T = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K(\sin\frac{\varphi_0}{2})$, kde eliptický integrál prvního druhu $K(x)$ je definován jako funkce $K(x) = \int_0^{\pi/2}\frac{d\xi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\xi}}$. Jeho rozklad do řady pro malé hodnoty x lze nalézt v tabulkách speciálních funkcí; viz například příručku K. Rektorys a spolupracovníci: "Přehled užité matematiky", SNTL Praha 1981.

[20] Tento poznatek zjistil poprvé Galilei, když pozoroval kývání lucerny zavěšené na stropě chrámu v Pise. V téže době ho publikoval i náš Marcus Marci.

obr. 2.19

K témuž výsledku jsme však mohli dojít i jednodušeji tak, že rozložíme funkce $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$ do řady a vezmeme pouze členy do druhé mocniny φ:

$$\sin\varphi \;=\; \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \cdots\,, \qquad \cos\varphi \;=\; 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24} - \cdots\,.$$

Pak dostáváme pohybovou rovnici

$$\ddot{\varphi} \;+\; \frac{g}{l}\varphi \;=\; 0\,. \tag{2.89}$$

To je ovšem rovnice harmonického oscilátoru a pro jeho periodu okamžitě plyne (2.88). Poloviční periodu $\tau = T/2$ nazýváme *dobou kyvu.*

Přiblížení malých kyvů vlastně znamená, že aproximujeme kosinovou potenciálovou jámu parabolickou (viz obr. 2.19). Položíme-li přitom nulovou potenciální energii do $\varphi = 0$, dostaneme pro energii

$$E \;=\; \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mgl\varphi^2 \;=\; \frac{1}{2}mgl\varphi_0^2\,. \tag{2.90}$$

Odtud určíme $\dot{\varphi}$ a po separaci proměnných integrací dostaneme periodu jako

$$T \;=\; 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2-\varphi^2}} \;=\; 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left[\arcsin\frac{\varphi}{\varphi_0}\right]_0^{\varphi_0} \;=\; 2\,\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{2.91}$$

<u>Úloha</u> (cykloidální kyvadlo)

Protože matematické kyvadlo je izochronní jen pro malé amplitudy, znamená to, že kyvadlové hodiny půjdou přesně jen při malých rozkyvech. To by ovšem značně omezovalo jejich použitelnost k přesnému měření času, o něž fyzika a astronomie usilovaly. Ch. Huygens v 17. století zjistil, že kdyby hmotný bod tvořící zátěž kyvadla místo oblouku kružnice

obr. 2.20

opisoval oblouk cykloidy, kyvadlo by bylo izochronní pro libovolně velké amplitudy. Můžeme to snadno ověřit. Rovnici cykloidy jsme uváděli v souvislosti se skládáním pohybů (1.40). Nyní trochu pozměníme umístění cykloidy - změníme orientaci osy y, umístíme počátek ve vrcholu cykloidy a místo úhlu α přejdeme k úhlu $\varphi = \alpha - \pi$ - viz obr. 2.20.

Tak dostaneme parametrické rovnice cykliody

$$x \;=\; a\;(\;\varphi + \sin\varphi\;)\;, \qquad y \;=\; a\;(1 - \cos\varphi\;)\;.$$

Zapíšeme nyní energii takového kyvadla:

$$E \;=\; \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy \;=\; \frac{1}{2}ma^2(\dot{\varphi} + \dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + \frac{1}{2}ma^2\;(\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 + mga\;(1 - \cos\varphi) \;=$$

$$= \;\frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2\;(\;1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi\;) + mga\;(\;1 - \cos\varphi) \;=$$

$$= \;ma^2\dot{\varphi}^2\;(1 + \cos\varphi\;) + mga\;(\;1 - \cos\varphi\;) \;=\; 2ma^2\dot{\varphi}^2\cos^2\frac{\varphi}{2} + 2mga\sin^2\frac{\varphi}{2}\;.$$

Označíme-li nyní

$$q \;=\; 4a\sin\frac{\varphi}{2}\;, \qquad \dot{q} \;=\; 2a\dot{\varphi}\cos\frac{\varphi}{2}\;,$$

můžeme energii zapsat ve tvaru

$$E \;=\; \frac{1}{2}m\dot{q}^2 \;+\; \frac{1}{2}\frac{mg}{4a}q^2\;.$$

To je ovšem energie harmonického oscilátoru vzhledem k souřadnici q a jeho perioda

$$T \;=\; 2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}}$$

nezávisí na amplitudě. Zbývá ještě vyřešit technický problém, jak přimět kyvadlo, aby místo kružnice opisovalo cykloidu. K tomu stačí upevnit v blízkosti závěsu dva plíšky tvarované do takové křivky (evoluty cykloidy) aby závěs kyvadla se při větších výkyvech na tyto křivky pokládal a pak se od nich tečně odvíjel (obr. 2.18). Tímto konstrukčním zdokonalením zvýšil Huygens přesnost kyvadlových hodin, což umožnilo další rozvoj experimentální fyziky a astronomie. Teorii pohybu kyvadla Huygens podrobně rozpracoval se svém slavném spise "Horologium oscillatorium" z r. 1673.

2.3 Pohyb v centrálním poli

2.3.1 Obecné vlastnosti pohybu částice v centrálním poli

Dosud jsme se zabývali jednorozměrným pohybem částice, který bylo možno popsat jednou souřadnicí, kartézskou nebo polární. Přejdeme nyní k pohybu částice v prostoru, v němž působí nějaké silové pole. Je-li toto **pole homogenní**, je síla v každém bodě konstantní co do velikosti i směru. Pohybovou rovnici

$$m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \;=\; \vec{F} \;=\; \mathbf{konst} \tag{2.92}$$

s počátečními podmínkami

$$t \;=\; t_0\;,\quad \vec{r} \;=\; \vec{r}_0\;,\quad \vec{v} \;=\; \vec{v}_0 \tag{2.93}$$

pak můžeme řešit přímo ve vektorovém tvaru jako

$$\vec{v} \;=\; \vec{v}_0 \;+\; \frac{1}{m}\,(t-t_0)\,\vec{F}\;,\qquad \vec{r} \;=\; \vec{r}_0 \;+\; (t-t_0)\,\vec{v}_0 \;+\; (t-t_0)^2\,\frac{1}{2m}\,\vec{F}\;. \tag{2.94}$$

Považujeme-li za homogenní například tíhové pole Země v nějakém místě na zemském povrchu a vedeme-li kartézskou osu z svisle vzhůru, položíme $\vec{F} = (0,\ 0,\ -mg)$, $U = mgz + U_0$ a z (2.94) dostaneme všechny případy pádů a vrhů v tíhovém poli, jimiž jsme se už dříve zabývali.

Homogenní silové pole v celém nekonečném prostoru ovšem nemůže existovat, je vždy jen aproximací nějakého lokálního pole. Zemské tíhové pole není homogenní, působící síla míří přibližně do středu Země a při pohybech na vzdálenosti srovnatelné se zemským poloměrem jej musíme považovat za pole centrální.

Centrální silové pole je nejdůležitějším případem silových polí a je buzeno bodovými nebo sféricky symetrickými částicemi a tělesy. Budeme se jím nyní zabývat. Předpokládejme, že existuje silové centrum, s nímž můžeme spojit počátek vztažné soustavy a že tato vztažná soustava bude přitom inerciální. Protože síla působící v centrálním poli na částici hmotnosti m míří do tohoto centra (nebo od něho), můžeme pohybovou rovnici $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ vynásobit *zleva* vektorově polohovým vektorem $\vec{r}$ a dostaneme

$$\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} \;=\; \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) \;-\; \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} \;=\; \vec{r}\times\vec{F}\;. \tag{2.95}$$

Snadno nahlédneme, že součin

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = m\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}\,,$$

a stejně tak **moment síly vzhledem k počátku**

$$\vec{N} \;=\; \vec{r} \times \vec{F} \;=\; 0\,,$$

neboť síla a polohový vektor leží v téže přímce.

Zavedeme nyní novou veličinu, **moment hybnosti částice vzhledem k počátku**

$$\vec{l} \;=\; \vec{r} \times \vec{p}\,.$$

Z (2.95) plyne, že moment hybnosti částice vzhledem k silovému centru se v centrálním silovém poli zachovává:

$$\frac{d}{dt}\,(\vec{r} \times \vec{p}) \;=\; \frac{d\vec{l}}{dt} \;=\; 0 \;\Longrightarrow\; \vec{l} \;=\; \mathbf{konst}\,. \tag{2.96}$$

Zachování momentu hybnosti částice v centrálním poli má závažné důsledky. Protože se zachovává *směr* vektoru $\vec{l}$, plyne odtud, že vektory $\vec{r}$ a $\vec{p}$, tedy polohy a rychlosti, zůstávají stále v téže rovině. Částice tedy vykonává **rovinný pohyb** a je možné se omezit na dvě souřadnice. Obyčejně volíme polární souřadnice r , φ s počátkem v silovém centru a odečítání polárního úhlu od zvoleného směru provádíme proti směru hodinových ručiček.

Protože Země se pohybuje v centrálním silovém poli sluneční gravitace, probíhá její pohyb v rovině, které se říká *rovina ekliptiky.* Poloha roviny ekliptiky ovšem souvisí s počátečními podmínkami vzniku sluneční soustavy. V rovině ekliptiky se pohybuje většina planet s menší nebo větší úhlovou odchylkou. Dráha Měsíce je je skloněna vůči ekliptice asi o 5^0; kdyby obíhal v rovině ekliptiky, měli bychom zatmění Slunce a Měsíce každý měsíc. Je zajímavé, že dráhy komet v rovině ekliptiky neleží. [21]

Vedle směru musí se zachovávat i *velikost* momentu hybnosti částice. Podle definice vektorového součinu a vzhledem k vyjádření složek polohového vektoru a rychlosti v polárních souřadnicích (1.12) máme

$$\vec{l} \;=\; m\,\vec{r} \times \vec{v} \;=\; m \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ r\cos\varphi & r\sin\varphi & 0 \\ \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi & \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} \;=\; m\,r^2\,\dot{\varphi}\,\vec{z}_0 \;=\; \mathbf{konst}\,. \tag{2.97}$$

Zákon zachování velikosti momentu hybnosti planety pohybující se v gravitačním poli Slunce objevil Kepler na základě podrobného zkoumání pohybu Marsu podle měření Tychona Braha. Tehdy ovšem ještě nebyly definovány pojmy hybnosti a momentu

[21] Atom bývá často znázorňován v tzv. planetárním modelu, kdy například elektron v atomu vodíku obíhá kolem protonu jako planeta kolem Slunce. Kvantová fyzika však ukázala, že pohyb elektronů nelze popisovat jako pohyb částice po trajektorii. Kromě toho, podle Newtonovy mechaniky by elektron musel konat rovinný pohyb, podobně jako planeta. To je v rozporu s tím, že atom vodíku je sféricky symetrická soustava.

obr. 2.21

hybnosti a Kepler stanovil *zákon stálosti plošné rychlosti planety.* Podle druhého Keplerova zákona plochy opsané průvodičem planety za stejnou dobu jsou stejné, je -li planeta blíže Slunci, pohybuje se rychleji, je-li dále od Slunce, pohybuje se pomaleji. Určíme tuto plošnou rychlost.

Na obr. 2.21 vidíme plochu opsanou průvodičem částice za malou dobu dt; průvodič se přitom pootočí o úhel $d\varphi$. Plocha opsaná průvodičem bude v limitě rovna polovině obsahu rovnoběžníka vytvořeného vektory $\vec{r}$, $d\vec{r}$, tedy s použitím (2.97)

$$dS \;=\; \frac{1}{2}\,|\vec{r}\times d\vec{r}|\;.$$

Označíme-li plošnou rychlost jako w, dostaneme

$$w \;=\; \frac{dS}{dt} \;=\; \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \;=\; \frac{1}{2}\,|\vec{r}\times\vec{v}| \;=\; \frac{l}{2m} \;=\; \frac{1}{2}\,r^2\dot{\varphi} \;=\; \text{konst}\;. \tag{2.98}$$

Zákon zachování momentu hybnosti částice, a tedy i druhý Keplerův zákon, platí v libovolném centrálním poli (nejen gravitačním). Položme si nyní otázku, kdy bude centrální pole konzervativní. Na obr. 2.22 jsou znázorněny siločáry dvou centrálních polí; větší hustota siločar znamená větší velikost působící síly. Na obr. 2.22a je centrální pole izotropní, siločáry jsou rozloženy rovnoměrně ve všech směrech, na obr. 2.22b je pole neizotropní. Uvažme dále uzavřenou dráhu tvořenou dvěma radiálními úseky a dvěma oblouky kružnice se středem v počátku a určeme práci, kterou vykoná centrální silové pole při přemisťování částice podél této uzavřené dráhy. V případě centrálního pole bude tato práce nulová, protože podél oblouků kružnic síla práci nekoná a práce podél radiálních úseků se vzájemně vyruší - velkost síly je stejná a úseky procházíme v protichůdných směrech. Takové pole bude zřejmě konzervativní. V případě neizotropního pole působí podél radiálních úseků síla nestejné velikosti a práce po uzavřené dráze bude nenulová - pole konzervativní není.

Uvedená ilustrace naznačuje, že **izotropní centrální pole**, jehož síla bude záviset jen na vzdálenosti od počátku, bude konzervativní a bude ho možno vyjádřit pomocí potenciální energie $U(r)$:

$$F_r(r) \;=\; -\,\frac{dU(r)}{dr}\;. \tag{2.99}$$

a) b)

obr. 2.22

Zapíšeme nyní pohybové rovnice částice v izotropním centrálním poli:

$$m\ a_r\ =\ m\ (\ \ddot{r} - r\ \dot{\varphi}^2\ )\ =\ F_r(r)$$

$$m\ a_\varphi\ =\ m\ (\ 2\dot{r}\ \dot{\varphi} + r\ \ddot{\varphi}\ )\ =\ 0 \tag{2.100}$$

Na první pohled je zřejmé, že řešení takové soustavy dvou diferenciálních rovnic bude obtížné. Můžeme však využít toho, že máme k dispozici dvě konstanty, dva integrály pohybu: energii a velikost momentu hybnosti, které se při pohybu zachovávají:

$$l\ =\ m\ r^2\ \dot{\varphi}\ =\ \text{konst}$$

$$E\ =\ \frac{1}{2}m\ v^2 + U(r)\ =\ \frac{1}{2}m\ \dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\ r^2\ \dot{\varphi}^2 + U(r)\ =\ \frac{1}{2}m\ \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + U(r)\ =\ \text{konst}\ . \tag{2.101}$$

Člen

$$\frac{l^2}{2mr^2}$$

vystupující ve výrazu pro energii závisí pouze na vzdálenosti r a říká se mu odstředivá energie. Můžeme jej spojit s potenciální energií $U(r)$ v novou funkci r, kterou nazýváme *efektivní potenciální energie*

$$U_{ef}(r)\ =\ U(r)\ +\ \frac{l^2}{2mr^2}\ .$$

Potom bude energie

$$E\ =\ \frac{1}{2}m\dot{r}^2\ +\ U_{ef}(r)\ =\ \text{konst}\ . \tag{2.102}$$

Soustavu rovnic (2.101) můžeme nyní řešit separací proměnných:

$$\dot{r}\ =\ \frac{dr}{dt}\ =\ \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{ef}(r)]}\ ,$$

odkud

$$t(r) \;=\; \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{ef}(r)]}} \;+\; C_1 \;. \tag{2.103}$$

Tvar trajektorie,tj. závislost úhlu φ na r určíme z

$$\dot{\varphi} \;=\; \frac{d\varphi}{dt} \;=\; \frac{d\varphi}{dr}\frac{dr}{dt} \;=\; \frac{l}{mr^2} \tag{2.104}$$

jako

$$\varphi(r) \;=\; \pm \int \frac{\frac{l}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E - U_{ef}(r)]}} \;+\; C_2 \;. \tag{2.105}$$

Tím je úloha o pohybu částice v centrálním izotropním poli obecně vyřešena. Vztah (2.103) nám udává zákon pohybu, tj. závislost souřadnice r na čase a vztah (2.105) rovnici trajektorie v polárních souřadnicích. Řešení závisí na čtyřech integračních konstantách: dvěma z nich jsou konstanty E a l, konstanty C_1 , C_2 musíme určit z počátečních podmínek. Abychom dostali řešení pro konkretní silové pole, museli bychom zadat potenciální energii $U(r)$ a tím $U_{ef}(r)$.

Z nalezeného řešení můžeme usoudit na některé společné vlastnosti pohybu ve všech centrálních izotropních polích. Shrneme je:

1. Pohyb je *rovinný.*

2. *Plošná rychlost pohybu je konstantní.*

3. *Úhel φ se mění v čase monotónně*, částice musí obíhat centrum stále v témž smyslu a nemůže se vracet. Plyne to z toho, že $mr^2\dot{\varphi} =$ konst a derivace úhlu podle času nemůže měnit znaménko.

4. Při $\dot{r} = 0$ tzv. *body obratu*, kdy se částice přestává vzdalovat a začíná se opět přibližovat k centru) mění odmocnina v integrálech (2.103) a (2.105) znaménko. Časový průběh pohybu i tvar trajektorie jsou tedy *symetrické* vzhledem k okamžikům a směrům do bodů obratu.

5. Pohyb částice je možný pouze za podmínky $E \geq U_{ef}(r)$ a podle průběhu funkce $U_{ef}(r)$ může být buď *infinitní* (částice se může vzdalovat od centra do nekonečna) nebo *finitní* (probíhat v jámě efektivní potenciální energie).

6. Obecně důležitá je otázka tzv. **pádu na centrum**, tj vyjasnění podmínek, za nichž se částice může neomezeně přiblížit silovému centru, tj. "spadnout" na ně. Z rovnice pro energii dostáváme nerovnost

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - U_{ef}(r) = E - U(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \geq 0 \;.$$

Vynásobíme toto nerovnost r^2 a zapíšeme ve tvaru

$$r^2U(r) + \frac{l^2}{2m} \leq r^2E \;.$$

Podmínka pádu na centrum vyžaduje, aby se r, a tedy i pravá strane této nerovnosti, mohlo neomezeně blížit nule. To je zřejmě možné v těchto případech:

1) $l = 0$, $U(r) < 0$. Jinými slovy síla musí být přitažlivá a moment hybnosti nulový. To nastane, dostane-li částice počáteční rychlost buď nulovou nebo radiální. Případ je triviální.

2) $r^2 U(r) < -\frac{l^2}{2m} < 0$. To nastává při

a) $U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$, $\alpha > \frac{l^2}{2m}$

b) $U(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$, $\alpha > 0$, $n > 2$.

V případě Newtonovy gravitační síly je

$$U(r) \;=\; -\;\frac{\alpha}{r}\;, \quad \alpha = \kappa\; M\; m \;>\; 0\;, \tag{2.106}$$

takže k pádu Země či planety na Slunce dojít nemůže. To ovšem platí jen neuvažujeme-li další vlivy a zkoumáme-li pouze Newtonovu sílu mezi Sluncem a Zemí. Pokud by centrální síla byla silnější, její potenciální energie by by rostla s přibližováním k centru nepřímo úměrně vyšší mocnině vzdálenosti, částice by se po stále rychleji se zavíjející spirále neomezeně blížila k centru.

7. Mimořádně zajímavou je otázka, kdy bude trajektorie částice v centrálním izotropním poli tvořena *uzavřenou křivkou* a kdy ne. Představme si finitní pohyb v potenciálové jámě vzhledem k r, který probíhá v mezikruží omezeném minimální a maximální vzdáleností od centra (obr. 2.23).

Trajektorie částice, která splňuje všechny výše uvedené obecné vlastnosti, nemusí být obecně uzavřenou křivkou a může růžicově vyplňovat mezikruží, aniž se konec a počátek trajektorie kdy spojí. Při každém oběhu se přitom bod obratu posune o $\Delta\varphi$; v astronomii se tomu říká posun perihelia planety. Trajektorie se uzavře, bude-li $\Delta\varphi$ racionálním násobkem 2π. Teoretická analýza ukazuje [22] že existují pouze dva případy, kdy trajektorie částice je uzavřena. Je to případ, kdy potenciální energie klesá nepřímo úměrně první mocnině vzdálenosti (**Keplerova úloha**) a kdy potenciální energie roste se čtvercem vzdálenosti (**úloha o prostorovém oscilátoru)**:

$$U(r) \;=\; -\;\frac{\alpha}{r}\;, \alpha > 0 \qquad\qquad U(r) \;=\; \frac{1}{2}\;k\;r^2\;, k > 0\;. \tag{2.107}$$

V obou případech bude trajektorie eliptická. V Keplerově úloze bude ovšem silové centrum ležet v ohnisku elipsy, zatímco v úloze o prostorovém oscilátoru v jejím středu.

Na obr. 2.24 je znázorněna efektivní potenciální energie pro Keplerovu úlohu (křivka 1):

$$U_{ef}(r) \;=\; -\;\frac{\alpha}{r} \;+\; \frac{l^2}{2mr^2}\;. \tag{2.108}$$

[22] Viz např. Appell P.: "Traité de mécanique rationelle" I, Paris 1953, rus. překl. 1960.

obr. 2.23

Jak snadno zjistíme derivováním efektivní potenciální energie dosahuje minima při

$$r_{min} = \frac{l^2}{\alpha m}\,, \qquad \text{a to} \qquad U_{efmin} = -\frac{\alpha^2 m}{2l^2}\,. \tag{2.109}$$

Funkce $U_{ef}(r)$ tedy vytváří potenciálovou jámu, v níž je možný finitní pohyb. Křivka 2 odpovídá odpudivé síle pro $\alpha < 0$. S přitažlivou silou se setkáváme u Newtonova gravitačního pole, s přitažlivou i odpudivou silou nepřímo úměrnou čtverci vzdálenosti se setkáváme u Coulombova elektroststického pole. Vidíme, že efektivní potenciální energie odpudivých sil potenciálovou jámu nevytváří a neumožňuje tak finitní pohyb.

Na obr. 2.25 vidíme efektivní potenciální energii prostorového oscilátoru. Ta dosahuje minima při

$$r_{min} = \sqrt[4]{\frac{l^2}{mk}}\,, \qquad \text{a to} \qquad U_{efmin} = l\sqrt{\frac{k}{m}}\,. \tag{2.110}$$

2.3.2 Gravitační centrální pole

Uvažujme nyní gravitační centrální pole velké sféricky symetrické homogenní hmoty (nebo alespoň tvořené sféricky symetrickými vrstvami), například Země. Tělesa, která se v takovém poli budou pohybovat, nechť mají mnohem menší hmotnost než Země, takže počátek vztažné soustavy umístíme do zemského středu a budeme ji považovat za inerciální.

Newton odvodil velmi důležitý poznatek, který dnes matematicky formulujeme jako tzv. *Gaussův zákon*. Podle tohoto zákona, sféricky symetrické gravitující těleso poloměru

obr. 2.24 obr. 2.25

R se navenek, pro $r > R$, silově projevuje jako hmotný bod téže hmotnosti umístěný ve středu symetrie. Uvnitř tělesa ve vzdálenosti $r < R$ od středu se pak uplatní jen ta část hmotnosti tělesa, která leží uvnitř koule poloměru r. Znamená to, že gravitační pole uvnitř kulové slupky je nulové! [23]

Zapíšeme nyní Newtonův gravitační zákon (2.10) pro sílu, jíž Země působí na částici hmotnosti m ve vzdálenosti $r > R_Z$. Poloměr Země jak známo činí $R_Z = 6\,378$ km a lze jej snadno změřit současným pozorováním výšky Slunce nebo hvězdy nad obzorem ze dvou různých míst poledníku. Složku síly mířící do středu Země budeme označovat F_r a protože míří ve směru zmenšující se vzdálenosti, budeme ji brát jako zápornou. Máme tedy

$$F_r(r) \;=\; -\kappa\,\frac{mM_Z}{r^2} \;=\; -\,\frac{\alpha}{r^2}\;, \quad \alpha = \kappa m M Z > 0\;. \tag{2.111}$$

Potenciální energie částice v tomto poli bude

$$U(r) \;=\; -\,\kappa\,\frac{mM_Z}{r} \;=\; -\,\frac{\alpha}{r} + C\;. \tag{2.112}$$

Konstantu můžeme zvolit tak, aby potenciální energie částice při nekonečném vzdálení od Země byla nulová, což je smysluplné; potom zřejmě $C = 0$.

Mějme nyní částici m pod zemským povrchem, například v myšlené šachtě provrtané středem Země. Pak na ni bude působit jen část hmotnosti Země a určíme-li hustotu Země jako

$$\rho \;=\; \frac{M_Z}{\frac{4}{3}\pi R_z^3} \tag{2.113}$$

dostaneme pro sílu na částici působící

$$F_r(r) \;=\; -\,\kappa m\,\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\,\frac{1}{r^2} \;=\; -\,\kappa\frac{mM_Z}{R_Z^3}\,r \;=\; -\,\frac{\alpha}{R_Z^3}\,r\;. \tag{2.114}$$

Této síle odpovídá potenciální energie

$$U(r) \;=\; \frac{\alpha}{2R_Z^3}\,r^2 + C\;. \tag{2.115}$$

Vidíme, že pohyb nad Zemí odpovídá případu úlohy Keplerovy, pohyb pod Zemí případu prostorového oscilátoru; síla působící zde na částici je kvazielastická, podobná síle harmonického oscilátoru. [24] Konstantu C ovšem nyní nemůžeme položit rovnu nule, musíme ji určit tak, aby potenciální energie byla v celém rozsahu r spojitá a aby na povrchu Země při $r = R_Z$ dávaly (2.112) a (2.115) touž hodnotu. Tak dostaneme

$$C \;=\; -\,\frac{3\alpha}{2R_Z}$$

a souhrnně tedy můžeme napsat pro potenciální energii částice v zemském gravitačním poli

$$r \geq R_Z: \qquad U(r) \;=\; -\,\tfrac{\alpha}{r}$$

$$r \leq R_Z: \qquad U(r) \;=\; \tfrac{\alpha}{2R_Z^3}\,r^2 \;-\; \tfrac{3\alpha}{2R_Z}\;.$$

obr. 2.26

obr. 2.27

Tento průběh potenciální energie a síly zemské gravitace je znázorněn na obr. 2.26.

Vztáhneme-li gravitační sílu a potenciální energii k jednotce hmotnosti částice, dostaneme *intenzitu gravitačního pole* $\vec{\Gamma}$ a *gravitační potenciál* φ_g nad zemí:

$$\vec{\Gamma} = \frac{\vec{F}}{m} = -\kappa \frac{M_Z}{r^2}\vec{r}_0 , \qquad \varphi_g = \frac{U}{m} = -\kappa \frac{M_Z}{r} , \qquad \vec{\Gamma} = -\nabla\varphi_g . \tag{2.116}$$

Zatím jsme neurčili gravitační konstantu κ, kterou je možno najít pouze experimentálně. V blízkosti zemského povrchu, nebudeme-li rozlišovat gravitační a tíhové zrychlení, máme pro přitažlivou sílu

$$\kappa \frac{mM_Z}{R_Z^2} = m\,g , \quad \text{odkud} \quad \kappa M_Z = gR_Z^2 , \quad \kappa\rho = \frac{3g}{4\pi R_Z} . \tag{2.117}$$

Známe-li tedy tíhové zrychlení a poloměr Země, můžeme určit součin gravitační konstanty a hmotnosti Země nebo gravitační konstanty a střední hustoty Země. Zatímco rozměry Země byly známy už starým Řekům, její hmotnost nemohla být určena bez znalosti gravitační konstanty. Určit gravitační konstantu tedy znamená zvážit Zemi.

Newton (1687), mohl pouze odhadovat střední hustotu Země, a tedy i gravitační konstantu z hustoty hornin zemské kůry.

Bouguer (1738), pokusil se zjistit gravitační konstantu z odchylky olovnice na úpatí Chimboraza způsobenou gravitací hory.

[23]Tento výsledek platící analogicky i pro pole elektrostatické dokážeme při výkladu elektřiny a magnetismu.

[24]První z těchto sil se zabýval Newton, druhou jeho soupeř Hooke.

Maskelyne a Hutton (1774), měřili rozdíly ve výšce hvězd přístroji nivelovanými na jižním a severním úbočí horského hřbetu ve Skotsku, stanovili střední hustotu Země v rozmezí 4 500 - 5 000 kg.m^{-3}.

Další měření tíhového zrychlení pomocí kyvadel v různých výškách nad mořem.

Henry Cavendish (1797), poprvé změřil gravitační konstantu v laboratoři pomocí upravených Coulombových torzníh vah a zvážil tak Zemi s velkou přesností (obr. 2.27). [25] Cavendish měřil přitažlivou sílu mezi olověnými koulemi o hmotnostech 730 g a 158 kg. Lehčí kuličky byly umístěny na koncích lehké tyčky z jedlového dřeva, která byla zavěšena na tenkém stříbrném drátku. Těžké koule vyvolávaly svou gravitační silou torzní moment a zkrut vlákna. Systémam pák bylo možno těžké koule přemístit do protilehlé polohy a torzní váhy tak rozkmitat. Z pozorování bodů obratu bylo možno určit rovnovážnou polohu vah. Cavendish, jeden z nejlepších experimentátorů v historii fyziky, určil tak střední hustotu zeměkoule na 5 480 kg.m^{-3} a gravitační konstantu na $\kappa = 6,754.10^{-11}$ SI.

Jolly (1879), měřil rozdíly v údaji dvouramených vah umístěných nad a pod velkou hmotnou koulí.

Boys (1895), využil měření periody torzních kmitů vybuzených hmotnými tělesy.

Luther, Towler (1981), z amerického Národního úřadu pro standardy provedli zatím nejpřesnější měření gravitační konstanty pomocí periody torzních vah s využitím moderních fyzikálních metod. Na křemenném vlákně průměru 10 mikrometrů a délky 40 cm byla zavěšena wolframová tyčka průměru 1 mm a délky 28 mm, na jejíchž koncích byly umístěny wolframové válečky průměru 7 mm a výšky 2,5 mm. Celý systém hmotnosti 7 g byl torzně rozkmitán gravitačním účinkem dvou wolframových koulí hmotnosti 10 kg. Váhy byly umístěny za tlaku 10^{-3} Pa, kmity detekovány pomocí 1024 fotodiod s elektronickým vyhodnocováním. Tato měření dala dnes používanou hodnotu gravitační konstanty

$$\kappa \;=\; 6,672\;59\;.\;10^{-11}\;\;\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-2}.\mathrm{kg}^{-1}\;.$$

Tomu odpovídá hmotnost a střední hustota Země

$$M_Z \;=\; 5,976.10^{24}\;\mathrm{kg}\;\approx\;6.10^{24}\;\mathrm{kg}\;,\qquad \rho\;=\;5\;518\;\mathrm{kg.m}^{-3}\;.$$

Srovnejte tyto údaje s měřeními Cavendishovými.

2.3.3 Keplerova úloha

Keplerova úloha je úloha o pohybu tělesa (planety) v centrálním gravitačním poli. Průběh efektivní potenciální energie pro tento případ je na obr. 2.28, kde jsou též vedeny různé hladiny energie. Je odtud zřejmé, že pohyb tělesa bude možný jen při energii $E \geq U_{efmin}$ dané (2.109). Tato minimální energie odpovídá vzdálenosti od centra zde označené jako r_0. Při záporné energii

$$E_1 \;=\; U_{efmin} \;=\; -\;\frac{\alpha^2 m}{2l^2}\;,\quad \alpha\;=\;\kappa M m$$

bude zůstávat vzdálenost od centra neměnná a pohyb bude tedy probíhat po kružnici o poloměru

$$r_0 \;=\; \frac{l^2}{\alpha m}\;.$$

[25] O podrobnostech viz Brož J., Roskovec V.: "Základní fyzikální konstanty", SPN Praha 1987, str. 202 - 210.

obr.2.28

Vzhledem k symetrii systému musí být pohyb po kružnici rovnoměrný. Jeho periodu snadno zjistíme z podmínky (2.104) jako

$$T \;=\; \frac{4\pi^2}{\kappa M}\, r_0^{3/2}\,. \tag{2.118}$$

Bude-li energie tělesa ležet v mezích $U_{efmin} < E_2 < 0$, bude pohyb finitní a bude probíhat v oblasti mezikruží vymezeného hodnotami r_{min} , r_{max}. Při hodnotě energie $E_3 = 0$ stane se pohyb právě infinitním, těleso se může přiblížit z nekonečna k centru na vzdálenost

$$r'_{min} \;=\; \frac{l^2}{2\kappa m^2 M} \tag{2.119}$$

(v tomto bodě je $\dot{r} = 0$). Konečně při energii $E_4 > 0$ bude pohyb také infinitní.

Všechny tyto výsledky jsme zjistili, aniž bychom znali tvar trajektorie, po níž se bude těleso v gravitačním poli pohybovat. Abychom jej určili, musíme do obecného řešení (2.105) dosadit efektivní potenciální energii (2.108):

$$\varphi \;=\; \int \frac{\frac{l}{r^2}dr}{\sqrt{2m\left[E + \frac{\alpha}{r} - \frac{l^2}{2mr^2}\right]}} \;+\; C \;=\; \int \frac{\frac{l}{r^2}dr}{\sqrt{2mE + \left(\frac{\alpha m}{l}\right)^2 - \left(\frac{l}{r} - \frac{\alpha m}{l}\right)^2}} \;+\; C\,.$$

Provedeme-li substituci

$$u \;=\; \frac{l}{r} - \frac{\alpha m}{l}\,, \qquad u_0^2 \;=\; 2mE + \left(\frac{\alpha m}{l}\right)^2\,,$$

přejde hrozivě vyhlížející integrál pro φ v

$$\varphi \;=\; -\int \frac{du}{\sqrt{u_0^2 - u^2}} \;+\; C \;=\; \arccos\frac{u}{u_0} \;+\; C\,.$$

Konstantu C musíme určit z počáteční polohy polární osy, kdy $\varphi = 0$. Položíme ji rovnu nule a z konečného výsledku pak zjistíme, že jsme tím volili směr polární osy k periheliu, nejbližšímu bodu trajektorie. Upravíme nyní získaný vztah

$$\frac{u}{u_0} = \frac{\frac{l}{r} - \frac{\alpha m}{l}}{\sqrt{2mE + \left(\frac{\alpha m}{l}\right)^2}} = \cos\varphi$$

tak, že zlomek zkrátíme výrazem $\frac{\alpha m}{l}$ a rozdělíme jej na součet dvou zlomků:

$$\frac{\frac{l^2}{\alpha m}}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\alpha^2}}} \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\alpha^2}}} + \cos\varphi \, .$$

V této rovnici už vidíme polární rovnici kuželosečky (M. 82). Označíme-li její parametr a excentricitu

$$p = \frac{l^2}{\alpha m} \, , \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\alpha^2}} \tag{2.120}$$

máme

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos\varphi \, . \tag{2.121}$$

To je tedy obecná rovnice trajektorie při pohybu tělesa v Newtonově gravitačním poli nebo nabité částice v přitažlivém Coulombově elektrostatickém poli. Bude-li síla Coulombova odpudivá, změní se znaménko $\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q\, q$ $\quad$ (Q, q jsou elektrické náboje, ε_0 permitivita vakua), v rovnici kuželosečky se změní znaménko u jedničky na pravé straně a dostaneme rovnici (M.83).

Na základě (2.120) podle třídění kuželoseček provedeného odstavci M 4. (str. 32) můžeme okamžitě rozlišit trajektorie tělesa podle energie takto:

1. $e = 0$, $\quad E = E_{min}$ - pohyb po **kružnici**.

$$E = -\frac{\alpha^2 m}{2l^2} \, , \qquad r = p = \frac{l^2}{\alpha m} \, .$$

2. $0 < e < 1$, $\quad E_{min} < E < 0$ - pohyb po **elipse** s ohniskem v silovém centru. Pro velkou a malou poloosu, vzdálenost perihelia a afelia máme

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|E|} \, , \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{l}{\sqrt{2m|E|}}$$

$$r_{min} = \frac{p}{1+e} = a\,(\,1-e\,) \, , \qquad r_{max} = \frac{p}{1-e} = a\,(\,1+e) \, . \tag{2.122}$$

Všimněte si, že velká poloosa elipsy závisí jen na energii tělesa, zatímco malá poloosa jak na energii tak na momentu hybnosti. Energie tedy určuje celkovou velikost elipsy, moment hybnosti její protáhlost.

3. $e = 1$, $\quad E = 0$ - pohyb po **parabole**.

$$r_{min} = \frac{p}{2} = \frac{l^2}{2\alpha m} \, .$$

4. $e > 1$, $E > 0$ - pohyb po **bližší větvi hyperboly**.

$$r_{min} = \frac{p}{1+e} = a\ (\ e-1\ )\ .$$

5. V případě odpudivé síly pro $\alpha < 0$ opět $e > 1$, $E > 0$ a rovnice trajektorie

$$\frac{p}{r} = -\ 1\ +\ e\ \cos\varphi$$

představuje **vzdálenější větev hyperboly**.

Připomeneme nyní formulaci tří slavných Keplerových zákonů, které umožnily Newtonovi objevit zákon gravitace a vytvořit tak první vědeckou fyzikální teorii. První dva zákony publikoval Kepler ve spise "Astronomia nova" v roce 1609 v Praze, třetí ve spise "Harmonices mundi" ("Harmonie světa") v roce 1619 v Linci.

1. zákon
Planety obíhají kolem Slunce po eliptických drahách a Slunce leží v jejich společném ohnisku.

2. zákon
Plochy opsané průvodičem planety za stejné doby jsou stejné.

3. zákon
Čtverce oběžných dob planet jsou úměrné třetím mocninám velkých poloos.

Především je třeba podotknout, že Kepler považoval Slunce za nehybné a tedy vztažná soustava spojená se středem Slunce vystupuje jako inerciální. První Keplerův zákon tvrdí, že trajektorie planety tvoří elipsu se Sluncem v ohnisku. Kepler to zjistil pečlivým proměřováním trajektorie Marsu na základě dlouholetých pozorování Tycha Braha. Do té doby panovalo přesvědčení, které sdílel i Koperník a Kepler, že planety se pohybují po kruhových drahách, jsou spojeny s nebeskými sférami. Dráha Marsu se od kruhové příliš neliší, odchylka činí asi 8 úhlových minut. Tycho Brahe, jako nejpřesnější pozorovatel předdalekohledové éry v astronomii, však dosáhl přesnosti vyšší než 4' a tato přesnost umožnila Keplerovi nakonec tvar dráhy určit jako eliptický. Znamenalo to oprostit se od starověkých a středověkých představ o "dokonalosti" kruhového pohybu a učinit nelehký krok do novověku.

Planeta se bude pohybovat po uzavřené elipse jen tehdy, bude-li na ni působit přesně jen Newtonova gravitační síla nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti. Ve skutečnosti na ni působí i další planety a nebeská tělesa a také Newtonův zákon nepopisuje přesně sluneční gravitaci - např. z toho důvodu, že Slunce je mírně zploštělé a není dokonale sféricky symetrické. To se projeví tak, že eliptická trajektorie planety se začne pomalu stáčet a přestane tvořit uzavřenou křivku. Zadáme-li malou odchylku od Newtonova zákona, např. závislost $1/r^{2,0001}$, dostaneme počítačovou simulací křivku na obr. 2.29. Stáčení perihelia planet je astronomům dobře známo a jeho měřením můžeme ověřovat, jak se skutečná síla působící na planetu liší od Newtonovy.

obr. 2.29

obr. 2.30

Druhý Keplerův zákon stanoví rychlost, jakou se planeta po své dráze pohybuje - v blízkosti Slunce rychleji, dále od Slunce pomaleji (obr. 2.30). Jde o nerovnoměrný pohyb po elipse a chceme-li vyjádřit závislost např. vzdálenosti planety na čase, museli bychom řešit integrál (2.103). Obyčejně se zákon pohybu planety vyjadřuje parametricky následujícím způsobem

$$r - a = - a\, e \cos\xi \,, \qquad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}\, (\, \xi - e \sin\xi \,) \,. \tag{2.123}$$

K danému časovému okamžiku t najdeme hodnotu parametru ξ a k němu pak hodnotu r a φ. Pomocí počítačů je to dnes snadné.

Třetí Keplerův zákon stanoví úměrnost mezi čtverci oběžných dob a třetími mocninami velkých poloos planet. Odtud, a ze znalosti zákona pro dostředivou sílu, který objevil Huygens 1673, je možno odvodit Newtonův gravitační zákon. Pro případ kruhové dráhy planety je to snadné:

$$F = ma = m\, r\, \omega^2 = \frac{4\pi^2 mr}{T^2} = \frac{\text{konst}}{r^2} \,. \tag{2.124}$$

Newton však provedl odvození i pro eliptické dráhy a dokázal tak, že z Keplerova zákona vyplývá, že gravitační síla klesá se čtvercem vzdálenosti. Předpokládal ekvivalenci obou tvrzení, tedy že i zpětně z platnosti gravitačního zákona plyne, že se planeta musí pohybovat po elipse. My jsme to dokázali integrováním tvaru trajektorie s Newtonovou potenciální energií při řešení Keplerovy úlohy. V Newtonových Principiích však tento důkaz ještě chybí.

Zbývá určit konstantu úměrnosti mezi T^2 a r^3 a zjistit, zda je pro všechny planety stejná (jak předpokládal Kepler), či pro každou planetu jiná. Ze zákona plošné rychlosti máme celkovou plochu elipsy

$$S = w\, T = \frac{l}{2m_p}\, T = \pi\, a\, b \,. \tag{2.125}$$

Dosadíme-li za a a b

$$a = \frac{\alpha}{2|E|} \,, \quad b = \frac{l}{\sqrt{2m|E|}} = \frac{l}{\sqrt{m\alpha}} a^{1/2} \,,$$

máme

$$T = \frac{2\pi m_p ab}{l} = 2\pi\sqrt{\frac{m_p}{\alpha}}\, a^{3/2} = 2\pi\, \sqrt{\frac{1}{\kappa M_S}}\, a^{3/2} \,, \tag{2.126}$$

takže

$$T^2 = \frac{4\,\pi^2}{\kappa\,M_S}\,a^3\,. \tag{2.127}$$

Za předpokladu, že Slunce je nehybné, je tedy konstanta úměrnosti ve třetím Keplerově zákoně stejná pro všechny planety a závisí jen na hmotnosti Slunce.

Pro informaci uvedeme údaje o parametrech planet, z nichž můžete platnost 3. Keplerova zákona snadno ověřit:

	a [10^6 km]	T [r]	e	m_p [kg]
Merkur	58	$0,241$	$0,205$	$3,3.10^{23}$
Venuše	108	$0,615$	$0,006$	$4,9.10^{24}$
Země	150	1	$0,016$	$6,0.10^{24}$
Mars	228	$1,881$	$0,093$	$6,4.10^{23}$
Jupiter	778	$11,86$	$0,048$	$1,9.10^{27}$
Saturn	1 427	$29,46$	$0,056$	$5,7.10^{26}$
Uran	2 870	$84,01$	$0,047$	$8,7.10^{25}$
Neptun	4 497	$167,8$	$0,009$	$1,0.10^{26}$
Pluto	5 900	$248,4$	$0,248$	$6,6.10^{23}$

2.3.4 Kosmické rychlosti

Mějme těleso hmotnosti m ve vzdálenosti $R_0 > R_Z$ od středu Země a udělme mu vodorovnou rychlost v_0. Budeme se zajímat o to, po jaké trajektorii se těleso bude pohybovat. Víme, že rovnicí trajektorie bude rovnice kuželosečky, počáteční bod bude bodem obratu ($\dot{r} = 0$) a z počátečních podmínek stanovíme energii a moment hybnosti tělesa:

$$E = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2\,, \qquad l = m\,v_0\,R_0\,. \tag{2.128}$$

Určíme závislost excentricity trajektorie na počáteční rychlosti:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\alpha^2}} = \sqrt{1 + \beta^2 v_0^4 - 2\beta v_0^2} = |1 - \beta v_0^2|\,, \quad \text{kde} \quad \beta = \frac{m\,R_0}{\alpha}\,. \tag{2.129}$$

obr. 2.31

Závislost excentricity na čtverci rychlosti je na obr 2.31.

Odtud snadno dostaneme následující klasifikaci:

1. Je-li $v_0 = 0$, bude $l = 0$, $p = 0$, $\cos\varphi = -1$ a těleso spadne na povrch Země volným pádem (trajektorie 1 na obr. 2.32).

2. Je-li

$$v_{0k} = \sqrt{\frac{\alpha}{mR_0}} = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{R_0}} = \sqrt{g\frac{R_Z^2}{R_0}} \tag{2.130}$$

bude $e = 0$ a těleso se bude pohybovat po kruhové dráze. Rychlost v_{0k} pak nazýváme **kruhovou rychlostí** (trajektorie 5 na obr. 2.32). [26] Je-li $R_0 = R_Z$, tj. vystřelujeme-li těleso nízko nad Zemí, nazývá se kruhová rychlost **první kosmickou rychlostí**:

$$v_{01} = \sqrt{gR_Z} = 7,91 \text{ km.s}^{-1} . \tag{2.131}$$

První kosmické rychlosti, tedy kruhové dráze nízko nad Zemí odpovídá oběžná doba $T = 5\ 065$ s $= 84,4$ min.

3. Je-li

$$0 < v_0 < \sqrt{\frac{\alpha}{mR_0}} ,$$

bude $0 < e < 1$ a těleso se bude pohybovat po eliptických trajektoriích (2, 3, 4 na obr. 2.32). Přitom $1 - \beta v_0^2 > 0$, odkud

$$r_{max} = \frac{p}{1-e} = R_0 ,$$

[26] Podmínku pro kruhovou rychlost dostaneme ovšem snadno, přirovnáme-li Newtonovu gravitační sílu síle dostředivé

$$\kappa\frac{mM_Z}{R_0^2} = \frac{mv_0^2}{R_0} .$$

Odtud přímo plyne (2.130).

takže výchozí bod leží v apogeu, střed Země je ve vzdálenějším ohnisku elipsy.

4. Při takzvané kritické rychlosti těleso již nedopadne na zemský povrch, elipsa právě Zemi obepne (trajektorie 3 na obr. 2.32). Podmínkou k tomu je, aby se vzdálenost perigea právě rovnala poloměru Země:

$$r_{min} = \frac{p}{1+e} = R_Z \ .$$

Vyloučíme-li nyní ze vztahů $r_{max} = R_0$, $r_{min} = R_z$ excentricitu e, dostaneme

$$p = \frac{2R_0R_Z}{R_0+R_Z} = \frac{m^2v_0^2R_0^2}{\alpha m} = \frac{v_0^2}{v_{01}^2}R_0$$

a kritická rychlost bude

$$v_{kr} = v_{01}\sqrt{\frac{2R_Z}{R_0+R_Z}} \ . \tag{2.132}$$

Vidíme, že při $R_0 = R_Z$, tj. vystřelujeme-li těleso nízko nad zemí, je kritická rychlost právě rovna první kosmické rychlosti.

5. Je-li

$$v_{0p} = \sqrt{\frac{2\alpha}{mR_0}} = \sqrt{\frac{2\kappa M_Z}{R_0}} = \sqrt{2g\frac{R_Z^2}{R_0}} \ , \tag{2.133}$$

bude $e = 1$ a těleso se bude pohybovat po parabolické dráze. Rychlost v_{0p} pak nazýváme **parabolickou, únikovou rychlostí** (trajektorie 7 na obr. 2.32). [27]

Je-li $R_0 = R_Z$, tj. vystřelujeme-li těleso nízko nad Zemí, nazývá se parabolická rychlost **druhou kosmickou rychlostí**:

$$v_{02} = \sqrt{2gR_Z} = \sqrt{2}v_{01} = 11,2 \text{ km.s}^{-1} \ . \tag{2.134}$$

6. Je-li

$$\sqrt{\frac{\alpha}{mR_0}} < v_0 < \sqrt{\frac{2\alpha}{mR_0}} \ ,$$

bude $0 < e < 1$ a těleso se bude opět pohybovat po eliptické trajektorii (6 na obr. 2.32). Na rozdíl od případu 3 bude však tentokrát $1 - \beta v_0^2 < 0$, odkud

$$r_{min} = \frac{p}{1+e} = R_0 \ ,$$

takže výchozí bod leží v perigeu.

[27] Podmínku pro parabolickou rychlost dostaneme ovšem snadno, položíme-li energii tělesa rovnu nule

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \kappa\frac{mM_Z}{R_0} \ .$$

Odtud přímo plyne (2.133).

obr. 2.32

7. Je-li

$$v_0 > \sqrt{\frac{2\alpha}{mR_0}} ,$$

bude $e > 1$ a těleso se bude pohybovat po hyperbolické trajektorii (8 na obr. 2.32).

Na obr. (2.33) vidíme počítačovou simulaci trajektorií tělesa vrženého vodorovně ve výšce 3 000 km nad zemským povrchem rychlostmi 5,5; 6,0; 6,5; 7,0; 7,5; 8,0; 8,5 km.s^{-1}.

Chceme-li vystřelit těleso takovou rychlostí, aby opustilo sluneční soustavu, měli bychom mu udělit parabolickou rychlost odpovídající sluneční gravitaci:

$$v_{0pS} = \sqrt{\frac{2\kappa M_S}{R_S}} = 42,1\text{km.s}^{-1} ,$$

kde $M_S = 1,97.10^{30}$ kg je hmotnost Slunce a $R_S = 1,5.10^8$ km je střední vzdálenost Země od Slunce. To je příliš velká rychlost. Můžeme však využít toho, že se Země na své dráze pohybuje značnou rychlostí $v_Z = 29,7$ km.s^{-1} a vystřelit těleso ve směru pohybu Země jen rychlostí

$$v_{0pS1} = v_{0pS} - v_Z = 12,2 \text{ km.s}^{-1} .$$

Přitom jsme ale nebrali v úvahu gravitaci zemskou; tělesu totiž musíme dodat dostatek kinetické energie k opuštění Země. Tak dostáváme konečnou rychlost potřebnou k vystřelení tělesa za hranice sluneční soustavy

$$v_{03} = \sqrt{v_{0p}^2 + v_{0pS1}^2} = 16,6 \text{ km.s}^{-1} . \tag{2.135}$$

obr. 2.33

Této rychlosti se říká **třetí kosmická rychlost**.

2.3.5 Izotropní prostorový oscilátor

Druhý případ, kdy se při pohybu v centrálním izotropním poli setkáváme s uzavřenou trajektorií, je úloha o izotropním prostorovém oscilátoru. V tom případě je vhodnější použít kartézské souřadnice s počátkem v silovémn centru a s osami x a y (rovinný pohyb!). Pro energii částice pak dostaneme podle (2.107)

$$E = \frac{1}{2}\, m\, v^2 + \frac{1}{2}\, k\, r^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2 \,. \tag{2.136}$$

To je ovšem součet energií dvou lineárních harmonických oscilátorů ve směrech kartézských os o stejných vlastních frekvencích $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Takovou superpozicí pohybů jsme se již zabývali v kapitole 1 (str. 47) a víme, že výslednou trajektorií bude elipsa se středem v počátku.

<u>Úloha</u> (pád meteoru)

Položme si nejprve otázku, jakou rychlostí musíme vrhnout nebo vystřelit těleso na povrchu Země svisle vzhůru, aby se už nevrátilo na zem. Musíme mu zřejmě dodat takovou

kinetickou energii, abychom vykompenzovali jeho zápornou energii potenciální:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \;=\; \kappa\frac{mM_Z}{R_Z}\;,$$

odkud

$$v_0 \;=\; \sqrt{\frac{2\kappa M_Z}{R_Z}}\;. \tag{2.137}$$

Musíme mu tedy dodat druhou kosmickou rychlost. Můžeme očekávat, že takovou rychlostí dopadne na zem i nebeské těleso, které začne padat z velké výšky s nulovou počáteční rychlostí. Odpor nepatrné vrstvy atmosféry v poslední fázi letu přitom můžeme zanedbat.

Bude-li těleso (meteor) padat z konečné výšky h, opět s nulovou počáteční rychlostí, dostaneme pro něj ze zákona zachování energie

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - mg\frac{R_Z^2}{r} \;=\; -mg\frac{R_z^2}{R+h}\;. \tag{2.138}$$

odkud

$$\dot{r} \;=\; -\sqrt{\frac{2gR_Z^2(R_Z+h-r)}{r(R_Z+h)}}\;. \tag{2.139}$$

To je rychlost volného pádu s velké výšky h ve vzdálenosti r od středu Země. Rychlost dopadu na zem odtud dostaneme, položíme-li $r = R_Z$:

$$v_d \;=\; \sqrt{\frac{2gR_Zh}{R_Z+h}}\;. \tag{2.140}$$

Snadno se přesvědčíme, že v limitě malé výšky dostaneme známou rychlost dopadu $\sqrt{2gh}$ a v limitě nekonečně velké výšky druhou kosmickou rychlost $\sqrt{2gR_Z}$. Separací proměnných a integrací (2.139) bychom mohli určit i časový zákon pádu s velké výšky a celkovou dobu pádu. Je to však matematicky náročnější. [28]

<u>Úloha</u> (hmotnost Slunce a Měsíce)

Známe-li gravitační konstantu, potom k určení hmotnosti Slunce stačí udat vzdálenost některé planety od Slunce r a její oběžnou dobu T. Podle 3.Keplerova zákona pak máme (dosadíme třeba údaje pro vzdálenost a oběžnou dobu Země)

$$M_S \;=\; \frac{4\pi^2r^3}{\kappa T^2} \;=\; 1,97.10^{30}\ \mathrm{kg} \;\approx\; 2.10^{30}\ \mathrm{kg}\;. \tag{2.141}$$

Pokud jde o hmotnost Měsíce, je úloha obtížnější - museli bychom znát vzdálenost a oběžnou dobu nějaké umělé družice Měsíce. Jinak můžeme považovat Zemi a Měsíc za soustavu dvou těles, která na sebe působí silami akce a reakce a obě se vzájemně pohybují kolem společného hmotného středu ve vzdálenostech r_M , r_Z, kde $r_M + r_Z = r =$

[28] Viz např. Trkal V.: "Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa", NČSAV Praha 1956, str. 32.

$3,6.10^8$ m je vzdálenost Měsíce od Země. Oběžná doba obou těles kolem hmotného středu je jeden měsíc, tj. $T = 2,36.10^6$ s. Zapíšeme rovnice pro dostředivé síly působící na Měsíc a Zemi:

$$M_M r_M \frac{4\pi^2}{T^2} = \kappa \frac{M_Z M_M}{r^2} , \qquad M_Z r_Z \frac{4\pi^2}{T^2} = \kappa \frac{M_M M_Z}{r^2} .$$

Zkrátíme první rovnici M_M, druhou M_Z a sečteme je:

$$r \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{\kappa}{r^2}(M_Z + M_M) .$$

Odtud již plyne

$$M_M = \frac{4\pi^2 r^3}{\kappa T^2} - M_Z = 7,34.10^{22} \text{ kg} . \tag{2.142}$$

Tato metoda je ovšem tím méně přesná, čím je obíhající těleso lehčí než těleso kolem kterého obíhá (na pravé straně (2.142) je rozdíl dvou velmi blízkých čísel).

<u>Úloha</u> (geostacionární dráha)

Určete výšku v jaké musí obíhat geostacionární družice a její rychlost. Geostacionární družice obíhá po kruhové trajektorii v ekvatoriální (rovníkové) rovině stejnou úhlovou rychlostí s jakou rotuje Země. Družice tedy stále jakoby "visí" nad stejným bodem nad rovníkem a může být využita k telekomunikačním účelům. Musí platit

$$T = \frac{2\pi R_0}{v_{0k}} = 2\pi R_0 \sqrt{\frac{R_0}{g R_Z^2}} = 1 \text{ den} .$$

Odtud

$$R_0 = \left(\frac{g R_Z^2 T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} , \qquad h = R_0 - R_Z = 35\ 800 \text{ km} . \tag{2.143}$$

Kruhová rychlost na geostacionární dráze je $v_{0k} = 3,076$ km.s^{-1}.

<u>Úloha</u> (šachta středem Země)

Představte si šachtu provrtanou napříč zeměkoulí a procházející středem Země a uvažujte, jak se bude pohybovat těleso, které do takové šachty spadne (obr.2.34). Na těleso bude působit kvazielastická síla (2.114)

$$F_r = - m\kappa \frac{M_Z}{R_Z^3} r = - m \frac{g}{R_Z} r = - kr.$$

To je kvazielastická síla, která vyvolává harmonické kmity s periodou

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R_Z}{g}} .$$

Na druhou stranu zeměkoule se tedy těleso propadne za půl periody $\tau = \pi\sqrt{R_Z/g} = 2\ 500$ s, tedy asi 42 minut. Je to zřejmě nejrychlejší způsob dopravy do Austrálie.

Určíme ještě rychlost tělesa při průletu středem Země. Na počátku bude mít vzhledem ke středu Země energii

$$E = \frac{1}{2}\, kR_Z^2 = \frac{1}{2}\, mgR_Z \,.$$

Při průletu středem Země se tato potenciální energie změní na kinetickou, takže těleso dostane první kosmickou rychlost $v_{01} = \sqrt{gR_Z} = 7,9$ km.s^{-1}.

Úloha (pád na Slunce)

Jedna z možností, jak se zbavovat nepohodlného odpadu, včetně radioaktivního, je odhazovat jej na Slunce. Pomineme ekonomické a etické aspekty a určíme, jakou nejmenší rychlost musíme odpadkům dodat, aby spadly na Slunce. Jde zřejmě o to zbavit je momentu hybnosti vůči Slunci, tj. zastavit je na zemské dráze a zároveň jim dodat energii potřebnou k opuštění Země. Je-li v_{02} druhá kosmická rychlost a v_Z rychlost Země na její dráze kolem Slunce, je potřebná rychlost

$$v_{04} = \sqrt{v_{02}^2 + v_Z^2} = 31,8 \text{ km.s}^{-1} \,.$$

Tato rychlost se někdy nazývá čtvrtou kosmickou rychlostí. Je značná a takový způsob likvidace odpadků by byl zřejmě nákladný.

Uvažme ještě, co by se stalo, kdyby se Země náhle zastavila na své dráze a začala padat na Slunce. Určíme jak dlouho by takový pád trval.Zdálo by se, že je to obtížná úloha, protože jde o pád z velké výšky v centrálním gravitačním poli. Můžeme však takový pád považovat za oběh Země kolem Slunce po velmi protáhlé, zdegenerované elipse o velké poloose rovné polovině poloměru zemské dráhy r (obr.2.35). Potom podle 3. Keplerova zákona máme

$$\frac{T}{T_Z} = \frac{r^3}{8r^3} \quad \text{kde} \quad T_Z = 1 \text{ rok} \,.$$

Pád by zřejmě trval půl periody, tj.

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{1}{4\sqrt{2}} T_Z = 65 \text{ dní} \,.$$

Zbývaly by nám tedy asi dva měsíce na uspořádání našich posledních záležitostí, při čemž by nám bylo stále tepleji.

2.4 Pohyb v neinerciální vztažné soustavě

2.4.1 Setrvačné síly

1. **Translační pohyb soustavy**

Předpokládejme nyní, že vztažná soustava, v níž pohyb částice studujeme, je neinerciální. Někdy je vhodné, a dokonce nezbytné s takovou soustavou pracovat. Spojujeme-li

obr. 2.34 obr. 2.35

naši kartézskou soustavu souřadnic se zemským povrchem, považujeme ji v prvním přiblížení za inerciální. Víme však, že Země rotuje a obíhá kolem Slunce. Je-li vztažná soustava spojená se Sluncem a stálicemi inerciální, potom soustava spojená se Zemí inerciální nebude. To ovšem nevadí, pokud jsme si toho vědomi a jsme připraveni na možné efekty, které neinerciálnost vztažné soustavy může způsobit. Obecně lze říci, že můžeme používat i neinerciální vztažnou soustavu, ale musíme do ní uměle zavést další síly, síly setrvačné, aby výsledek našich výpočtů souhlasil s pozorovanými jevy. V tomto odstavci odvodíme tvar těchto setrvačných sil. Odkud se tyto síly berou je otázka, jíž se zabývá obecná teorie relativity.

Uvažujme nejprve translační pohyb vztažné soustavy. Na obr. 2.36 je znázorněna inerciální kartézská soustava S a neinerciální soustava S', jejíž počátek má v soustavě S polohový vektor $\vec{R}(t)$. Ten je obecnou funkcí času, takže soustava S' se pohybuje vůči inerciální soustavě S se zrychlením. Odpovídající kartézské osy obou soustav však zůstávají stále souhlasně rovnověžné, takže soustava S' se vůči soustavě S neotáčí. Pro polohový vektor nějaké částice, její rychlost a zrychlení v nečárkované a čárkované vztažné soustavě pak máme:

$$\vec{r} \,=\, \vec{R} \,+\, \vec{r}' \;, \qquad \vec{v} \,=\, \vec{V} \,+\, \vec{v}' \;, \qquad \vec{a} \,=\, \vec{A} \,+\, \vec{a}' \;,$$

kde

$$\vec{V} \,=\, \frac{d\vec{R}}{dt} \;, \qquad \vec{A} \,=\, \frac{d\vec{V}}{dt} \;.$$

Vektor $\vec{A}$ je tedy translační zrychlení soustavy S'. Pohybová rovnice částice pak bude znít

$$m\,\vec{a}' \,=\, m\,\vec{a} \,-\, m\,\vec{A}\,. \tag{2.144}$$

V neinerciální soustavě se tedy na pravé straně pohybové rovnice objevil další člen $m\vec{A}$, který vyjadřuje setrvačnou sílu. Označíme-li výslednici pravých sil jako $\vec{F}$ a setrvačnou

obr. 2.36 obr. 2.37

sílu translačního pohybu jako $\vec{S}_s$, máme

$$m\,\vec{a}' \;=\; \vec{F} \,+\, \vec{F}_s \;\;, \qquad \vec{F} \;=\; m\,\vec{a}\;, \quad \vec{F}_s \;=\; -m\,\vec{A}\,. \tag{2.145}$$

Existenci setrvačné síly známe dobře z praxe dopravních prostředků. Brzdí-li vagon metra, stává se neinerciální vztažnou soustavou a na pasažéry v něm začne působit setrvačná síla, která vrhá osoby ve směru jízdy (tedy opačným směrem než míří zrychlení soustavy). Paradoxní charakter setrvačných sil je zřejmý z toho, že narazí-li vagon metra náhle na betonovou stěnu a po krátkou dobu v něm bude působit katastrofálně obrovská setrvačná síla, jeví se situace v neinerciální soustavě tak, že vagon zůstává stále v klidu a betonová stěna je proti němu vržena obrovskou rychlostí. S hlediska soustavy spojené s vagonem si nemůžeme vznik této síly nijak vysvětlit. E. Mach se pokusil připsat vznik setrvačných sil celkovému rozložení hmot ve vesmíru (tzv. Machův princip). V denní praxi však tuto sílu spíše připisujeme neobratnosti strojvůdce než účinku vzdálených galaxií. Setrvačné síly nazýváme také silami zdánlivými, ale jejich reálné účinky mohou být leckdy nedozírné.

Souvislost setrvačných a gravitačních sil, která vedla k formulaci principu ekvivalence a vzniku obecné teorie relativity, ilustruje známý myšlený pokus s **Einsteinovou zdviží** (obr. 2.37). V tomto provedení je pokus skutečně lépe provádět pouze jako myšlený. Utrhne-li se výtah s pasažérem, působí na pasažéra v inerciální soustavě spojené s povrchem Země pouze pravá síla $\vec{F} \;=\; m\vec{g} \;=\; (0,\;\; 0,\;\; -\,mg)$, která vyvolává volný pád. V neinerciální soustavě spojené s výtahem padajícím se zrychlením $\vec{g}$ působí na pasažéra kromě pravé síly ještě setrvačná síla $\vec{F}_s = -m\vec{g} = (0,\; 0,\; mg)$, takže v neinerciální soustavě máme

$$m\,\vec{a}' \;=\; m\,\vec{g} \;-\; m\,\vec{g} \;=\; 0\,. \tag{2.146}$$

Vůči kabině výtahu je tedy pasažér v beztížném stavu. Podotýkáme, že nelze říci, že na pasažéra nepůsobí žádné síly (nejde o bezsilovou částici), ale výslednice síly tíhové a síly

obr. 2.38

setrvačné je nulová. Proto je tak důležitá otázka, kterou jsme se již zabývali, zda gravitační a setrvačná hmotnost jsou ekvivalentní. Pokud by se ukázalo, že dlouhodobý pobyt člověka v kosmu ve stavu beztíže, je zdraví škodlivý, bylo by třeba vytvářet umělou tíži působením setrvačných sil (například rotací kosmické stanice).

Rotační pohyb soustavy

Předpokládejme nyní, že inerciální a neinerciální vztažné soustavy mají společný počátek, a že soustava S' rotuje v soustavě S úhlovou rychlostí ω. Pro jednoduchost budeme uvažovat rotaci kolem osy z, takže osy z, z' splývají a zůstávají nehybné (obr. 2.38).

Mějme nyní částici o polohovém vektoru $\vec{r} \equiv \vec{r}'$ nehybnou v rotující neinerciální soustavě. V soustavě S se ovšem bude polohový vektor této částice v čase měnit spolu s rotací soustavy S'. Pootočí-li se osy x a y o malý úhel $\delta\varphi$, změní se polohový vektor $\vec{r}$ o

$$\delta\vec{r} \;=\; \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}\,. \tag{2.147}$$

Plyne to snadno z obr. 2.38. Jako $\delta\vec{\varphi}$ jsme označili vektor v pravotočivém směru osy rotace o velikosti malého úhlu pootočení $\delta\varphi$. Je-li θ úhel mezi polohovým vektorem $\vec{r}$ a osou z, bude zřejmě velikost vektoru $\delta\vec{r}$ rovna

$$\delta r \;=\; r\;\sin\theta\;\delta\varphi\,.$$

To je ovšem velikost vektorového součinu vektorů $\delta\vec{\varphi}$ a $\vec{r}$. Také směr vektorového součinu těchto vektorů odpovídá směru vektoru $\delta\vec{r}$, čímž jsme zdůvodnili (2.147). Lze snadno ukázat, že změna libovolného vektoru $\vec{a}$ v důsledku rotace bude $\delta\vec{a} = \delta\vec{\varphi} \times \vec{a}$.

Přejdeme nyní k diferenciálům. Máme

$$d\vec{r} \;=\; d\vec{\varphi} \times \vec{r}\,, \qquad \vec{v} \;=\; \frac{d\vec{r}}{dt} \;=\; \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} \;=\; \vec{\omega} \times \vec{r}\,.$$

Uvažme nyní obecnější situaci, kdy se částice v rotující soustavě pohybuje, kdy třeba běžíme po roztočeném kolotoči nebo se pohybujeme na povrchu rotující Země. Potom se rychlost částice v inerciální soustavě bude skládat z rychlosti částice v neinerciální soustavě a rychlosti vzniklé rotací této soustavy:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d'\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r} \,. \tag{2.148}$$

Symbolem $\frac{d'}{dt}$ jsme označili derivování podle času v rotující soustavě. Pro rychlosti částice v nehybné soustavě a v rotující soustavě tedy máme

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r} \,. \tag{2.149}$$

Nyní využijeme toho, že vztah (2.148) musí platit pro *jakýkoliv vektor* a použijeme jej pro vektor $\vec{v}'$. Tímto trikem dostaneme zrychlení částice v rotující vztažné soustavě $\vec{a}'$ a s ním všechny setrvačné síly, které v této soustavě působí.

$$\begin{aligned}
\vec{a}' &= \frac{d'\vec{v}'}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} - \vec{\omega} \times \vec{v}' = \frac{d}{dt}\left(\vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r} \right) - \vec{\omega} \times \vec{v}' = \\
&= \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} - \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{\omega} \times \vec{v}' = \\
&= \vec{a} - \vec{\varepsilon} \times \vec{r} - \vec{\omega} \times \left(\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r} \right) - \vec{\omega} \times \vec{v}' = \\
&\vec{a} - \vec{\varepsilon} \times \vec{r} - \omega \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r} \right) - 2\, \vec{\omega} \times \vec{v}' \,.
\end{aligned} \tag{2.150}$$

Pohybová rovnice v rotující soustavě tedy zní

$$m\, \vec{a}' = m\, \vec{a} - m\vec{a}_E - m\, \vec{a}_d - m\, \vec{a}_C \,. \tag{2.151}$$

Vedle pravých sil zde tedy působí tři další setrvačné síly, které mazýváme **síla Eulerova, síla odstředivá a síla Coriolisova**. Jsou to

síla Eulerova: $\vec{F}_E = -m\, \vec{a}_E = -m\, \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$

síla odstředivá: $\vec{F}_o = -m\, \vec{a}_d = -m\, \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r} \right)$

síla Coriolisova: $\vec{F}_C = -m\, \vec{a}_C = -2\, m\, \vec{\omega} \times \vec{v}' \,.$

obr. 2.39

Zde $\vec{\varepsilon}$ je úhlové zrychlení soustavy, $\vec{a}_d$ je dostředivé zrychlení. [29]

2.4.2 Pohyb na povrchu Země

Budeme nyní ilustrovat účinky setrvačných sil při pohybu částice (tělesa) na povrchu Země . Počátek soustavy souřednic umístíme ve středu Země a osy pevně spojíme s rotující Zemí. Pohybová rovnice částice na povrchu Země pak je

$$m\vec{a}' \;=\; m\vec{a}_g - m\vec{A} - m\vec{\varepsilon}\times\vec{r} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}' \;. \tag{2.152}$$

První člen na pravé straně (2.152) představuje jedinou uvažovanou pravou sílu působící na částici, gravitační působení Země. Mohli bychom do ní zahrnout i gravitační působení Slunce, Měsíce a planet, gravitační zrychlení $\vec{a}_g$ nadto závisí na přesném tvaru Země a lokálním rozložení hmot. Předpokládejme však, že se zajímáme o pohyb částice v malé oblasti prostoru na zemském povrchu, například vrh na malou vzdálenost, a že toto silové

[29] Zde bohužel dochází k určité terminologické nedůslednosti. Odstředivá síla odpovídající zrychlení $-\vec{a}_d$ zde vystupuje jako setrvačná síla vznikající v rotující vztažné soustavě a působící v ní na všechna tělesa. V inerciální soustavě existuje síla dostředivá, která vyvolává kruhový pohyb a k ní jako síla reakce síla odstředivá. To jsou ovšem pravé síly, z nichž každá působí na jiné těleso. Roztáčíme-li nad hlavou kámen uvázaný na provázku, působí dostředivá síla na kámen a odstředivou silou působí kámen prostřednictvím provázku na naši ruku. Rotuje-li však prádlo v odstředivce a je nehybné vůči neinerciální soustavě spojené s bubnem odstředivky, působí na kapky vody v prádle setrvačná odstředivá síla. Situace je o to komplikovanější, že matematický výraz pro odstředivou sílu jako pravou sílu reakce na sílu dostředivou a pro setrvačnou odstředivou sílu jsou stejné. Je dobré si tyto pojmy ujasnit.

pole zde budme považovat za homogenní.

Druhý člen vyjadřuje setrvačnou sílu způsobenou nerovnoměrností translačního pohybu Země na její dráze. Rychlost pohybu Země je $v_Z = (29,7 \pm 0,5)$ km.s^{-1} a odchylka směru činí v průměru 1^0 za den. Nerovnoměrnost je dána druhým Keplerovým zákonem, ale v krátkých časových intervalech se pochopitelně neprojevuje. Tuto sílu můžeme proto zanedbat.

Třetí člen vyjadřuje sílu Eulerovu, která by se projevila při zpomalování nebo zrychlování zemské rotace. Tyto změny jsou však zcela zanedbatelné a i Eulerovu sílu můžeme v tomto případě zanedbat. [30]

Čtvrtý člen je síla odstředivá. Míří kolmo od zemské osy, leží v rovině místního poledníku (obr. 2.39) a má velikost

$$F_o \;=\; m\; R_z\; \omega^2\;\; \cos\varphi'\;,$$

kde φ' je geocentrická šířka. Tato síla se sčítá vektorově se silou gravitační na sílu tíhovou (viz obrázek) a v místě o dané geocentrické šířce můžeme považovat výsledné tíhové pole opět za homogenní, tedy tíhu za konstantní. Experimentálně nemáme možnost rozlišit gravitační a odstředivou sílu a měřit můžeme jen sílu tíhovou. Olovnice nám tak ukazuje nikoli směr do středu Země, ale směr mírně odchýlený. Astronomickými přístroji nivelovanými podle vodováhy a olovnice tedy neurčujeme geocentrickou šířku φ', ale geografickou (zeměpisnou) šířku φ. [31]

Považujeme-li Zemi za kouli, vezmeme-li v úvahu, že její rotace je pomalá ve srovnání s krátkodobými pohyby na jejím povrchu ($\omega = 7,3.10^{-5}$ s^{-1}) a zanedbáme-li rozdíl mezi geocentrickou a geografickou šířkou, můžeme pomocí kosinové věty z trojúhelníka na obr. 2.39 odvodit vztah mezi tíhovým a gravitačním zrychlením:

$$g \;=\; \sqrt{\;a_g^2 + a_o^2 - 2a_g a_o \cos\varphi'\;} \;=\; \sqrt{a_g^2 + R_Z^2\omega^4\cos^2\varphi' - 2a_g R_Z\omega^2\cos^2\varphi'} \;=$$

$$=\; a_g\left(\;1\;-\;\frac{2R_Z\omega^2\cos^2\varphi'}{a_g}\;\right)^{1/2} \;\approx\; a_g\;-\;R_Z\omega^2\cos^2\varphi\;. \qquad (2.153)$$

Rozdíl mezi tíhovým zrychlením na pólu a na rovníku by podle tohoto výpočtu měl být $R_Z\omega^2 = 0,034$ m.s^{-2}. Ve skutečnosti činí $0,0516$ m.s^{-2} vzhledem k tomu, že Země je geoid. [32]

[30] Změny délky dne jeví roční odchylky asi 22 ms v důsledku klimatického cyklu, půlroční odchylky kolem 10 ms související s excentricitou zemské dráhy a konečně se den prodlužuje asi o 1 s za 60 000 let slapovým působením.

[31] Závislost tíhového zrychlení na zeměpisné šířce poprvé zjistil francouzský astronom J. Richer, který byl v roce 1671 vyslán do Cayenne provádět astronomická měření. Po příjezdu do Cayenne na rovníku zjistil, že se mu kyvadlové hodiny nastavené v Paříži opožďují o 2 minuty za den. Seřídil je podle místního času a po návratu do Paříže se mu hodiny začaly opět o dvě minuty denně předcházet. Huygens správně vysvětlil tento efekt jako důsledek odstředivé síly vyvolané rotací Země.

[32] Na pólu bylo naměřeno $g_p = 9,8321$ m.s^{-2}, na rovníku $g_r = 9,7805$ m.s^{-2}. Normální tíhové zrychlení $g_n = 9,80665$ m.s^{-2} odpovídá přibližně zeměpisné šířce 45^0.

Podobně bychom mohli podle obr. 2.39 pomocí sinové věty určit rozdíl mezi směrem do středu Země a směrem tíhy:

$$\frac{a_o}{\sin(\varphi - \varphi')} = \frac{g}{\sin\varphi'} ,$$

odkud

$$\varphi - \varphi' \approx \sin(\varphi - \varphi') = \frac{a_o}{g}\sin\varphi' =$$

$$\frac{R_Z\omega^2\cos\varphi'\sin\varphi'}{g} = \frac{R_Z\omega^2\sin 2\varphi'}{2g} \approx 0,00173 \ \sin 2\varphi . \tag{2.154}$$

Maximální odchylka směru tedy nastává na 45^0 šířky, a to 0,00173 = 6'. Ve skutečnosti Země nemá kulový tvar a v prvním přiblížení můžeme brát, že se v důsledku rotace ještě tvárné Země vytvořil tvar rotačního elipsoidu a směr tíhy je kolmý k jejímu povrchu (kdyby nebyl, docházelo by k tečným pohybům na povrchu Země). Určíme-li směr normály k eliptickému poledníkovému řezu, zjistíme že maximální odchylka olovnice od směru do středu Země je opět na 45^0 a činí asi 11'.

Poslední síla vystupující v rovnici (2.152) je síla Coriolisova. Budeme-li nadále označovat rychlost částice vzhledem k rotující Zemi bez čárky jako $\vec{v}$, můžeme napsat pohybovou rovnici ve tvaru

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + 2\vec{v}\times\vec{\omega} . \tag{2.155}$$

Určíme napřed směr působení Coriolisovy síly (viz obr. 2.40 a), b), c), d)) na těleso pohybující se *na severní polokouli*; na jižní polokouli bude směr Coriolisovy síly opačný.

Pohybuje-li se těleso vodorovně ve směru poledníku ze severu na jih, bude Coriolisova síla o velikosti

$$F_C = 2m\ v\ \omega\ \sin\varphi \tag{2.156}$$

působit směrem na západ (obr. 2.40 a). Při pohybu z jihu na sever působí Coriolisova síla směrem na východ (obr. 2.40b). Pro pomalu se pohybující tělesa je tato síla přirozeně malá, ale mohou se projevit její dlouhodobé účinky (podemílání břehů řek tekoucích severojižním směrem, opotřebovávání jedné z kolejnic jednosměrných tratí.) V meteorologii je s Coriolisovou silou třeba počítat, protože ovlivňuje směr pohybu pasátních větrů a mořských proudů, smysl otáčení cyklonů apod.

Pohybuje-li se těleso po rovnoběžce, bude Coriolisova síla mířit kolmo k zemské ose, při pohybu na východ bude odstředivou sílu zvětšovat (obr. 2.40 c), při pohybu na západ zmenšovat (obr. 2.40d) o $2mv\omega$ a nebude záviset na zeměpisné šířce. Tíhové zrychlení tělesa při pohybu v rovnoběžkovém směru bude mít velikost

$$g' = a_g - (R_Z\omega^2\cos\varphi \pm 2v\omega)\cos\varphi . \tag{2.157}$$

V následujících úlohách prostudujeme vliv Coriolisovy síly na některé pohyby na zemském povrchu. Soustavu souřadnic přitom zvolíme jako na obr. 2.41, tj. počátek ve vybraném místě zemského povrchu o zeměpisné šířce φ, osu z svisle vzhůru, osu x na východ a osu y na sever.

obr. 2.40

obr. 2.41

Potom budou vektory

$$\vec{g} \;=\; (\;0,\;0,\;-g\;)\;, \qquad \vec{\omega} \;=\; (\;0,\;\cos\varphi,\;\sin\varphi\;)$$

a pohybovou rovnici (2.155) můžeme rozepsat do složek jako

$$\ddot{x} = 2\dot{y}\omega\sin\varphi - 2\dot{z}\omega\cos\varphi\;, \quad \ddot{y} = -2\dot{x}\omega\sin\varphi\;, \quad \ddot{z} = -g + 2\dot{x}\omega\cos\varphi\;. \tag{2.158}$$

Po první integraci dostaneme

$$\dot{x} = 2y\omega\sin\varphi - 2z\omega\cos\varphi + C_1\;,\;\; \dot{y} = -2x\omega\sin\varphi + C_2\;,\;\; \dot{z} = -gt + 2x\omega\cos\varphi + C_3\;. \tag{2.159}$$

<u>Úloha</u> (volný pád na rotující Zemi)

Počáteční podmínky pro volný pád jsou $t = 0,\; x = y = 0,\; z = h,\; \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$. Odtud určíme integrační konstanty $C_1 = 2h\omega\cos\varphi\;,\quad C_2 = C_3 = 0$, funkce $\dot{x},\; \dot{y},\; \dot{z}$ dosadíme do rovnic pro $\ddot{x},\; \ddot{y},\; \ddot{z}$ a zanedbáme členy druhého řádu obsahující ω^2. V tomto přiblížení dostáváme v souhlase s počátečními podmínkami

$$x \;=\; \frac{1}{3}\,\omega\;g\;t^3\;\cos\varphi\;, \qquad y \;=\; 0\;, \qquad z \;=\; h - \frac{1}{2}gt^2\;. \tag{2.160}$$

Odtud je zřejmé, že padající těleso bude (na severní polokouli) vlivem Coriolisovy síly uchylováno směrem na východ. [33]. Vyloučíme-li z pohybových rovnic pro x a z čas, dostaneme rovnici trajektorie volného pádu

$$z \;=\; h - \frac{1}{2}\,g\,\left(\frac{3}{\omega g\cos\varphi}\right)^{2/3} x^{2/3}\;. \tag{2.161}$$

To je semikubická (Neilova) parabola (obr. 2.42).

Pro $z = 0$ dostaneme odchylku dopadu tělesa od paty kolmice

$$x_d \;=\; \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}\;\frac{\omega g\cos\varphi}{3}\;. \tag{2.162}$$

<u>Úloha</u> (svislý vrh vzhůru na rotující Zemi

Počáteční podmínky pro svislý vrh vzhůru jsou $t = 0,\; x = y = z = 0,\; \dot{x} = \dot{y} = 0,\; \dot{z} = v_0 > 0$. Integrační konstanty dostaneme $C_1 = C_2 = 0,\; C_3 = v_0$. Stejným postupem jako při řešení volného pádu dostaneme

$$x \;=\; \left(\frac{1}{3}\,\omega\;g\;t^3 - \omega\;v_0\;t^2\right)\cos\varphi\;, \qquad y \;=\; 0\;, \qquad z \;=\; v_0\;t - \frac{1}{2}\;g\;t^2\;. \tag{2.163}$$

[33] Ve vyšším přiblížení bychom dostali též malou odchylku na jih, ta je však neměřitelná a srovnatelná s vlivem gravitace Měsíce

obr. 2.42 obr. 2.43

Trajektorie je na obr. 2.43. Odchylka místa dopadu od místa vrhu bude nyní *západní*, a to

$$x_d = -\frac{4}{3}\,\frac{\omega v_0^3 \cos\varphi}{g^2}\,. \tag{2.164}$$

Podobně bychom mohli řešit i šikmý vrh s Coriolisovou silou. Pak záleží na směru výstřelu vzhledem ke světovým stranám. Kdybychom například stříleli ve směru s východním azimutem α vzhledem k severu a počáteční rychlost měla vodorovnou složku v'_{0y} a svislou v_{0z}, dostali bychom výsledek, že místo dopadu střely bude odchýleno od roviny výstřelu o

$$x'_d = \frac{4v_{0z}^2\omega}{g^2}\left(v'_{0y}\sin\varphi - \frac{1}{3}\,v_{0z}\cos\varphi\cos\alpha\right)\,. \tag{2.165}$$

To je v souladu s tím, že například při střelbě z jihu na sever pod nepříliš velkým elevačním úhlem bude střela snášena na východ.

Úloha (Foucaultovo kyvadlo)

Coriolisova síla způsobuje stáčení roviny kyvu matematického kyvadla. Tento pokus provedl J. Foucault a kyvadlo nese jeho jméno; je to názorná demonstrace rotace zemské.[34] Uvažme malé kyvy takového kyvadla, které budeme považovat za harmonický oscilátor pohybující se ve vodorovné rovině x, y. Jeho vlastní úhlová frekvence je $\omega_0 = \sqrt{l/g}$ a kromě toho na ně působí Coriolisova síla. Máme tedy pohybové rovnice

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x \;=\; 2\dot{y}\omega \sin\varphi \;, \qquad \ddot{y} + \omega_0^2 y \;=\; -2\dot{x}\omega \sin\varphi \;. \tag{2.166}$$

Druhou z těchto rovnic vynásobíme imaginární jednotkou i, obě rovnice sečteme a přejdeme ke komplexní proměnné $\xi = x + \mathrm{i}y$. Potom máme

$$\ddot{\xi} + (2\mathrm{i}\omega \sin\varphi)\; \xi + \omega_0^2 \xi \;=\; 0 \;. \tag{2.167}$$

Řešení hledáme ve tvaru $\mathrm{e}^{\alpha t}$ a dostáváme charakteristickou rovnici

$$\alpha^2 + (2\mathrm{i}\omega \sin\varphi)\; \alpha + \omega^2 \;=\; 0 \;.$$

Jejím řešením najdeme pro $\omega \ll \omega_0$

$$\alpha_{1,2} \;=\; -\mathrm{i}\omega \sin\varphi \pm \sqrt{-\frac{\omega^2 \sin^2\varphi}{4} - \omega_0^2} \;\approx\; -\mathrm{i}\omega \sin\varphi \pm \mathrm{i}\omega_0 \;.$$

Výsledné řešení je tedy

$$\xi \;=\; \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}\omega \sin\varphi)t}\; (C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + C_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}) \;. \tag{2.168}$$

To je však řešení pro pohyb lineárního harmonického oscilátoru násobeného komplexní jednotkou

$$\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}\omega \sin\varphi)\; t} \;.$$

Násobení komplexní jednotkou znamená otáčení o úhel $-(\omega \sin\varphi)t$, opačným směrem než rotuje Země. Na severním pólu se tedy Foucaultovo kyvadlo stočí za hodinu o 15^0, na zeměpisné šířce Prahy o 11^0 5'. [35]

[34] Jev byl znám již Galileiho žáku Vivianimu v 17.stol. J. Foucault předvedl své kyvadlo r. 1851 v pařížském Pantheonu; kyvadlo mělo hmotnost 30 kg, délku závěsu 67 m a dobu kyvu 8 s. Dnes jsou podobná kyvadla instalována v řadě světových muzeí a vhodných budov. Foucaultova kyvadla v podobě fyzických kyvadel v Cardanově závěsu lze použít i k přesným měřením.

[35] Samozřejmě jednodušší vysvětlení Foucaultova kyvadla bez zavedení Coriolisovy síly spočívá v tom, že kyvadlo zachovává rovinu kyvu a Země se pod ním otáčí. To ovšem vyžaduje, abychom se orientovali v inerciální vztažné soustavě podle hvězd, což málokdo v denním praktickém životě umí.

obr. 2.44 obr. 2.45

Příklady

2.1 Určete zrychlení těles a sílu napětí vláken v soustavách na obr. 2.44 a 2.45. Hmotnosti kladek a vláken považujte za nulové, tření vláken o kladky zanedbejte.

$$[a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \ , \quad F_n = 2\mu g \ , \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}]$$

$$[a = \frac{2(2m_1 - m_2)}{4m_1 + m_2} g \ , \quad F_n = \frac{3m_1 m_2}{4m_1 + m_2} g]$$

2.2 Určete zrychlení těles a sílu napětí vláken v soustavách na obr. 2.46 a 2.47. Tření těles o podložky zanedbejte.

$$[a = \frac{mg}{m+M} \ , \quad F_n = \frac{mMg}{m+M}]$$

$$[a = \frac{m - M \sin\alpha}{m+M} g \ , \quad F_n = \frac{mM(1+\sin\alpha)}{m+M} g]$$

2.3 Těleso o hmotnosti m pohybující se přímočaře rychlostí v_0 má být zabrzděno konstantní silou velikosti F na dráze s. Určete tuto sílu.

$$[f = \frac{mv_0^2}{2s}]$$

2.4 Po nakloněné rovině s úhlem sklonu α se smýká těleso a pohybuje se přitom konstantní rychlostí. Určete koeficient smykového tření.

obr. 2.46 obr. 2.47

[$f = \text{tg}\ \alpha$]

2.5 Raketa o hmotnosti 20 t dosáhne výšky 5 km za 10 s. Jaký je výkon jejích motorů?

[98 MW]

2.6 Těleso o hmotnosti 50 g pohybující se rychlostí 20 m.s^{-1} narazilo na pevnou stěnu pod úhlem 60^0 (obr. 2.48). Jakou průměrnou silu působilo na stěnu , šlo-li o pružný ráz a trval-li náraz 0,1 s?

[10 N]

2.7 Střela hmotnosti $m = 20$ g narazí rychlostí 600 m.s^{-1} na stěnu tloušťky $d = 12$ cm a vyletí z ní rychlostí 50 m.s^{-1}. Jaká průměrná síla působila na střelu uvnitř stěny?

[2,98 kN]

2.8 Jakou práci je třeba vykonat, aby vlak o hmotnosti 300 t zvětšil svou rychlost z 36 km.h^{-1} na 54 km.h^{-1}?

[18,7 MJ]

2.9 Určete nejmenší koeficient smykového tření mezi koly automobilu a asfaltem, aby vůz mohl projet zatáčku poloměru $r = 200$ m rychlostí $v = 100$ km.h^{-1}.

[$f = 0,39$]

2.10 Sedadlo kolotoče na závěsu délky l se otáčí kolem svislé osy úhlovou rychlostí ω (obr. 2.49). Určete úhel α, který svírá závěs s osou.

obr. 2.48

obr. 2.49

obr. 2.50

obr. 2.51

$[a = \arccos \frac{g}{l\omega^2}]$

2.11 Kuličku o hmotnosti $m = 100$ g zavěšenou na niti délky $l = 30$ cm roztočíme ve svislé rovině dvěma způsoby: 1. s konstantní obvodovou rychlostí 210 cm.s^{-1}, 2. tak, že jí udělíme v nejvyšším bodě trajektorie tečnou rychlost 210 cm.s^{-1}. Jakou silou bude tažena nit v nejnižším a nejvyšším bodě trajektorie v obou případech?

[1. 2,45 N, 0,49 N; 2. 6,38 N, 0,49 N]

2.12 Odstředivka má tvar koule o poloměru R a otáčí se kolem svislé osy konstantní úhlovou rychlostí ω (obr. 2.50). Určete výšku h do které vystoupí malá kulička hmotnosti m, vložíme-li ji do odstředivky. Jakou silou bude tlačit na stěnu odstředivky? Jak se změní situace v případě odstředivky kuželového tvaru?

$[h = R - \frac{g}{\omega^2}\ ,\quad F = mR\omega^2\ ,\qquad h = \text{konst}\frac{g}{\omega^2}]$

2.13 Z nejvyššího místa dokonale hladké koule poloměru R pustíme volně hmotný bod hmotnosti m a necháme jej klouzat po povrchu koule působením tíhové síly (obr. 2.51). V jaké výšce měřené od vrcholu koule opustí bod kouli a po jaké křivce se bude dále pohybovat?

$[h = \frac{R}{3}$, po parabole$]$

2.14 Hmotný bod se pohybuje po hladké dráze, která leží ve svislé rovině a přechází v kruhovou smyčku o poloměru R (obr. 2.52). Z jaké výšky h musíme spustit hmotný bod s nulovou počáteční rychlostí, aby se v nejvyšším bodě smyčky neodtrhl? Jakou rychlost v_0 mu musíme udělit ve výšce h_0?

$[h \geq \frac{5}{2}R\ ,\quad v_0 \geq \sqrt{5gR - 2gh_0}]$

2.15 Z horního konce svislého průměru kružnice vycházejí žlábky ve směru tětiv. Do žlábků současně vložíme a necháme bez tření sklouznout kuličky (obr. 2.53). Za jakou dobu dosáhnou kuličky obvodu kružnice?

$[\sqrt{\frac{4R}{g}}]$

2.16 Těleso klouže bez tření po svislé dráze nakreslené na obrázku 2.54. Vlnovka je tvořena oblouky kružnice poloměru r. Rychlost tělesa v bodě A je rovna nule. Jaká omezení musí platit pro h a α, aby se těleso dostalo z bodu A do bodu C ?

$[\cos\alpha \geq 2/3\ ,\quad h \geq 2r/3]$

2.17 Na hmotný bod m působil impuls síly $\vec{I}$, který vyvolal změnu rychlosti z $\vec{v}_1$ na $\vec{v}_2$. Dokažte, že změna kinetické energie je rovna $\frac{1}{2}\vec{I}\cdot(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$.

obr. 2.52

obr. 2.53

obr. 2.54

2.18 Částice opisuje v silovém poli elipsu $x = a\cos\omega t$, $y = b\sin\omega t$. Určete práci, kterou vykoná silové pole působící na tuto částici za dobu od $t = 0$ do t, konkretně pak do $t = \pi/4\omega$, $t = \pi/2\omega$, $t = \pi/\omega$.

$$[A = \tfrac{1}{2}m\omega^2(a^2\sin\omega t + b^2\cos\omega t - b^2)\ , \quad A = \tfrac{1}{4}m\omega^2(a^2 - b^2)\ , \quad A = \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2)\ , \quad 0]$$

2.19 Určete potenciální energii částice, na kterou působí síla ve směru x nebo r o složce a) $F_x = -mg =$ konst , b) $F_x = -kx$, c) $F_x = -kx^2$, d) $F_x = -kx^3$, e) $F_r = -\frac{\alpha}{r^2}$, f) $F_r = -\frac{\alpha}{r^3}$ (s přesností na integrační konstantu).

$$[mgx\ , \quad \tfrac{1}{2}kx^2\ , \quad \tfrac{1}{3}kx^3\ , \quad \tfrac{1}{4}kx^4\ , \quad -\tfrac{\alpha}{r}\ , \quad -\tfrac{\alpha}{2r^2}]$$

2.20 Vypočítejte, jakou práci vykoná síla $\vec{F} = [2y^2,\ 4x^2,\ -6(x^2 + y^2]$ (koeficenty v odpovídajících jednotkách SI) při přemístění částice hmotnosti $m = 0,2$ kg z bodu (0,-1,0) do bodu (0,1,0) po různých drahách: a) podél osy y, b) po třech úsecích podél osy x do bodu (1,-1,0), podél osy y do bodu (1,1,0) a podél osy x. Je toto silové pole konzervativní?

[0 J , 8 J, není]

2.21 Síla závislá na čase: Částice hmotnosti $m = 2$ kg se může pohybovat bez tření podél osy x. V čase $t = 0$ byla v klidu v bodě $x = 0$. Po dobu 6 sekund na ni pak působila síla $F_x = 2 + 6t$ (koeficienty v odpovídajících jednotkách SI). Určete zrychlení, rychlost, dráhu částice a výkon síly v okamžiku $t = 6$ s.

[19 m.s^{-2} , 60 m.s^{-1} , 126 m , 2 280 W]

2.22 Síla závislá na poloze: Částice hmotnosti $m = 2,4$ kg se může pohybovat bez tření podél osy x. V bodě $x = 0$ byla v klidu. Působením síly $F_x = 2 + 6x$ (koeficienty v odpovídajících jednotkách SI) byla uvedena do pohybu. Určete zrychlení a rychlost částice a výkon síly v bodě $x = 6$ m.

[15,8 m.s^{-2} , 10 m.s^{-1} , 380 W]

2.23 Síla závislá na rychlosti: Částice hmotnosti $m = 3$ kg se může pohybovat podél osy x. V čase $t = 0$ na ni začala působit síla $F_x = 2 - 6v_x$ (koeficienty v odpovídajících jednotkách SI). Určete (i graficky) závislost rychlosti a dráhy částice na čase. Na jaké hodnotě se rychlost částice ustálí?

$$[v_x = \tfrac{1}{3}(1 - \mathrm{e}^{-2t})\ , \quad x = \tfrac{1}{3}\left(t - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right)\ , \quad \tfrac{1}{3}\ \mathrm{m.s}^{-1}]$$

2.24 Lano délky l_0 leží nataženo na hladké desce stolu. V okamžiku $t = 0$ visí úsek lana délky l přes okraj desky a rychlost lana je nulová. V tomto okamžiku začne lano s desky sklouzávat. Určete jak poroste jeho rychlost s časem a jak se bude měnit poloha konce lana. Můžete řešit i obecnější úlohu a vzít v úvahu tření lana o desku stolu.

$$[v = l\sqrt{\tfrac{g}{l_0}}\sinh\sqrt{\tfrac{g}{l_0}}t\ , \quad x = l\left(\cosh\sqrt{\tfrac{g}{l_0}}t - 1\right)]$$

obr. 2.55 obr. 2.56

2.25 Těleso hmotnosti m je připevněno na pružině a otáčí se ve vodorovné rovině konstantní úhlovou rychlostí ω kolem svislé osy, která prochází koncem pružiny. Nezatížená pružina má délku l_0, pružinová konstanta je k. Určete poloměr l kružnice, po které se těleso pohybuje.

$[l = \frac{kl_0}{k-m\omega^2}]$

2.26 Hustoměr v podobě válcové trubky průměru d o hmotnosti m plave v kapalině hustoty ρ. Dáme mu malý vertikální impuls a rozkmitáme ho tak. Určete periodu kmitů hustoměru (obr. 2.55).

$[T = 4\sqrt{\frac{\pi m}{d^2 \rho g}}]$

2.27 Tlumený harmonický kmit má frekvenci 50 Hz a dekrement útlumu $2,3\ \mathrm{s}^{-1}$. Jak se změní jeho frekvence, vymizí-li tlumení?

[50,0013 Hz]

2.28 Těleso hmotnosti 200 g koná vynucené harmonické kmity. Amplituda vynucující síly je 2 N, doba vlastních kmitů tělesa je 0,785 s a koeficient útlumu 4 s^{-1}. Určete rezonanční frekvenci a amplitudu kmitů při rezonanci.

[0,9 Hz, 0,18 m]

2.29 Pro malé kmity matematického kyvadla, které v okamžiku $t = 0$ vychýlíme o úhel φ_0 a pustíme, určete úhlovou rychlost, úhlové zrychlení, tečné zrychlení a normálové zrychlení.

$[\dot{\varphi} = -\sqrt{\frac{g}{l}}\varphi_0 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}t\ ,\quad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t\ ,\quad a_t = -g\varphi_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t\ ,\quad a_n = -g\varphi_0^2 \sin^2\sqrt{\frac{g}{l}}t]$

2.30 Houpačka hmotnosti m na závěsu délky l byla vychýlena o úhel φ_0 a puštěna (obr. 2.56). Určete maximální namáhání závěsu a rychlost houpačky v dolní poloze.

$[(3 - 2\cos\varphi_0)mg\ ,\quad \sqrt{2gl(1-\cos\varphi_0)}]$

2.31 Určete délku sekundového kyvadla na severním pólu, na rovníku a na zeměpisné šířce Prahy (kde je tíhové zrychlení $g = 9,81077$ m.s^{-2}).

[0,9962 m, 0,9909 m, 0,9940 m]

2.32 Předpokládejme, že vaše hmotnost je 100 kg. O kolik budete těžší, když si lehnete? O kolik budete lehčí, když spadnete do škarpy?

[+30 mg, -15 mg]

2.33 Najděte takovou vzdálenost h, aby ve výšce h nad zemí a v hloubce h pod zemí byla gravitační síla stejná.

$[h = 0\ ,\quad h = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)R_Z = 0,618\ R_Z,\quad$ poměr zlatého řezu$]$

2.34 Mějme gravitující těleso v podobě protáhlé homogenní tyče hmotnosti M a délky l ležící v ose x. Ve vzdálenosti x_0 od středu tyče leží na ose x částice hmotnosti m. Určete gravitační sílu, která na částici působí.

$[F_x = -\frac{\kappa m M}{x_0^2 - \frac{l^2}{4}}]$

2.35 Mějme gravitující těleso v podobě homogenní kružnice hmotnosti M a poloměru r a určete gravitační zrychlení na ose kružnice ve vzdálenosti h od roviny kružnice. V jaké vzdálenosti bude toto zrychlení maximální?

$[a_g = \frac{\kappa M h}{(r^2+h^2)^{3/2}}\ ,\quad h_{max} = \pm\frac{r}{\sqrt{2}}]$

2.36 Určete gravitační zrychlení ve výšce $h = 20$ km nad zemským povrchem.

$[9,75$ m.s$^{-2}]$

2.37 Jak velkou rychlost je třeba udělit nějakému tělesu ve výšce $h = 500$ km nad zemským povrchem, aby se pohybovalo jako umělá družice Země po kruhové trajektorii?

$[7,62.10^3$ m.s$^{-1}]$

2.38 Určete gravitační zrychlení na povrchu Slunce a Měsíce. Kolikrát jsme lehčí na Měsíci? Poloměr Slunce je $R_S = 6,96.10^8$ m, Měsíce $R_M = 1,74.10^6$ m.

[274 m.s^{-2} , 1,62 m.s^{-2} , 6×]

2.39 Na desce konající harmonický pohyb $x = A \sin \omega t$ ve vodorovném směru spočívá závaží hmotnosti m. Koeficient smykového tření je $f = 0,5$, $\omega = 10$ s^{-1}. Při jaké amplitudě A začne závaží po desce klouzat?

[$A \geq \frac{fg}{\omega^2} = 5$ cm]

2.40 V železničním voze pohybujícím se se zrychlením 0,3 m.s^{-2} nahoru po svahu se sklonem 10^0 visí na šňůře závaží. Určete úhel, který svírá šňůra se svislým směrem.

[1^0 $40'$]

2.41 Jaké je zrychlení výtahu, kývá-li v něm matematické kyvadlo délky 1 m s dobou kmitu a) $T = 2,3$ s, b) $T = 1,8$ s, c) krouží volně kolem závěsu, d) $T = 4,2$ s s rovnovážnou polohou kolmo nad bodem závěsu?

[2,3 m.s^{-2} dolů; 2,4 m.s^{-2} nahoru; g dolů; 12 m.s^{-2} dolů]

2.42 Ve výtahu jsou pružinové váhy, na kterých visí těleso hmotnosti 1 kg. Jakou sílu budou ukazovat váhy v těchto případech: a) výtah stoupá se zrychlením 4,9 m.s^{-2} mířícím dolů (zastavuje se), b) výtah klesá se zrychlením 4,9 m.s^{-2} mířícím vzhůru (zastavuje se), c) výtah klesá se zrychlením 1 m.s^{-2} mířícím dolů (rozjíždí se), d) výtah stoupá se zrychlením 1 m.s^{-2} mířícím vzhůru (rozjíždí se)?

[5 N, 15 N, 9 N, 11 N]

2.43 Porovnejte velikost Coriolisovy síly a tíhy tělesa, které se v zeměpisné šířce $\varphi = 50^0$ pohybuje rychlostí $v = 100$ km.h^{-1} po poledníku.

[$F_C/mg = 2v\omega \sin \varphi/g = 3,2.10^{-4}$]

2.44 Oč se změní tíhové zrychlení tělesa, které se pohybuje po rovníku rychlostí 1 km.s^{-1} působením Coriolisovy síly?

[o 0,15 m.s^{-2}]

2.45 Jak se odchýlí těleso od paty kolmice při volném pádu z Eiffelovy věže působením Coriolisovy síly?

[o 3 cm na východ]

2.46 V 17. století provedl francouzský matematik a fyzik M. Mersenne pokus s vertikálním výstřelem z děla, aby zjistil, kam náboj vzhledem k rotaci Země dopadne. Byl-li pokus prováděn na 48^0 severní šířky a počáteční rychlost střely byla 300 m.s^{-1}, kde mohl očekávat místo dopadu?

[18 m západně od místa výstřelu)

æ

3. MECHANIKA SOUSTAVY ČÁSTIC

3.1 Zákony zachování

3.1.1 První věta impulsová, těžiště

Přejdeme nyní od mechaniky jedné k částice k mechanice soustavy částic. Mějme celkem N částic (hmotných bodů) a označujme je například řeckými indexy $\alpha,\ \beta, \ldots$. [36] Tyto částice mají každá svou hmotnost, polohový vektor, rychlost a hybnost

$$m_\alpha\ ,\quad \vec{r}_\alpha\ ,\quad \vec{v}_\alpha\ ,\quad \vec{p}_\alpha\ ,\qquad \alpha\ =\ 1\ldots N\ .$$

Částice mohou být buď *volné* (jako třeba planety) nebo *vázané* (pohybují-li se třeba na povrchu Země nebo jsou-li mezi sebou spojeny). Soustava volných částic má $s = 3\ N$ *stupňů volnosti*, tj. je třeba znát tři souřadnice každé částice, abychom znali rozložení částic v prostoru. U vázaných částic se počet stupňů volnosti snižuje.

Předpokládejme, že vztažná soustava, v níž soustavu částic studujeme, je inerciální, tj. že v ní působí jen pravé síly. Tyto síly mohou být jednak *vnitřní, interní*, jimiž působí částice mezi sebou navzájem, jednak *vnější, externí*, jimiž na soustavu působí jiná tělesa mimo ni. Pokud na soustavu vnější síly nepůsobí, je soustava *izolovaná*. Pro pravé síly v inerciální vztažné soustavě můžeme použít Newtonovy zákony.

Zákon síly pro každou částici můžeme zapsat tak, že rozepíšeme síly na vnitřní

$$\vec{F}_\alpha^{(i)}\ =\ \sum_{\beta=1}^{N} \vec{F}_{\alpha\beta} \tag{3.1}$$

($\vec{F}_{\alpha\beta}$ je síla, kterou částice s indexem β působí na částici s indexem α, $\alpha \neq \beta$) a vnější $\vec{F}_\alpha^{(e)}$:

$$\frac{d\vec{p}_\alpha}{dt}\ =\ \vec{F}_\alpha^{(i)}\ +\ \vec{F}_\alpha^{(e)}\ =\ \sum_{\beta=1}^{N}\ \vec{F}_{\alpha\beta}\ +\ \vec{F}_\alpha^{(e)}\ . \tag{3.2}$$

Máme tedy N rovnic (3.2) a všechny je sečteme přes α. Tak dostaneme

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{d\vec{p}_\alpha}{dt}\ =\ \frac{d}{dt}\ \sum_{\alpha=1}^{N}\ \vec{p}_\alpha\ =\ \sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\ \vec{F}_{\alpha\beta}\ +\ \sum_{\alpha=1}^{N}\ \vec{F}_\alpha^{(e)}\ . \tag{3.3}$$

[36] Indexy $i,\ j,\ k$ ponecháme pro souřadnice 1, 2, 3.

Označíme nyní *celkovou hybnost soustavy částic*

$$\vec{P} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{p}_\alpha$$

a *výslednici vnějších sil* působících na soustavu

$$\vec{F}^{(e)} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{(e)} .$$

Zároveň si uvědomíme, že podle zákona akce a reakce se vnitřní síly v soustavě vyruší. Protože je $\vec{F}_{\alpha\beta} = -\vec{F}_{\beta\alpha}$, můžeme je vyjádřit symetrickým způsobem jako

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \vec{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} (\vec{F}_{\alpha\beta} + \vec{F}_{\beta\alpha}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} (\vec{F}_{\alpha\beta} - \vec{F}_{\alpha\beta}) = \vec{0} .$$

Z rovnice (3.3) tedy dostáváme

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(e)} . \tag{3.4}$$

Tento důležitý výsledek je matematickým vyjádřením **první věty impulsové** [37] neboli **věty o hybnosti soustavy částic**:

Časová změna celkové hybnosti soustavy částic je rovna výslednici vnějších sil.

Je-li soustava izolovaná, je výslednice vnějších sil nulová, $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}$ a platí **zákon zachování celkové hybnosti izolované soustavy částic**:

$$\vec{P} = \textbf{konst} ; \tag{3.5}$$

celková hybnost izolované soustavy částic se zachovává. [38]

Zkoumejme nyní, jak se změní celková hybnost soustavy částic, přejdeme-li k jiné vztažné soustavě S', jejíž počátek se pohybuje v původní soustavě S rychlostí $\vec{V}(t)$, při čemž osy souřadnic si zachovávají svou orientaci. Soustava S' nyní ovšem nemusí být inerciální. Pak je třeba transformovat rychlosti všech částic jako $\vec{v}_\alpha = \vec{v}'_\alpha + \vec{V}$ a pro celkovou hybnost dostaneme

$$\vec{P} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{p}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}'_\alpha + \vec{V} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha . \tag{3.6}$$

[37] Název je historický a nepříliš výstižný. Hybnosti se dříve říkalo a v cizích jazycích dosud říká impuls. Také v kvantové fysice se zhusta používá název impuls místo hybnost.

[38] Při odvozování zákona zachování celkové hybnosti jsme použili zákon akce a reakce. V teoretické fyzice se však dokazuje, že tato implikace neplatí obráceně, tj. že k platnosti zákona zachování celkové hybnosti nemusí platit zákon akce a reakce. Jak se ještě zmíníme, zákony zachování v soustavě částic mají těsnou souvislost s vlastnostmi symetrie prostoru a času

Poslední suma však představuje *celkovou hmotnost soustavy* $M = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha$, takže máme

$$\vec{P} \;=\; \vec{P}' \;+\; M\,\vec{V}\;. \tag{3.7}$$

Položíme-li $\vec{P}' = \vec{0}$, dostaneme z (3.7)

$$\vec{V} \;=\; \frac{\vec{P}}{M} \;=\; \frac{\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha}\;.$$

Můžeme tedy mít za to, že v soustavě částic existuje myšlený bod nazývaný *hmotný střed*, *střed hmotnosti* nebo *těžiště* o polohovém vektoru

$$\vec{R} \;=\; \frac{\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha}\;, \tag{3.8}$$

který se pohybuje rychlostí $\vec{V}$ a chová se tak, jakoby v něm byla soustředěna celá hmotnost soustavy:

$$\vec{P} \;=\; M\,\vec{V}\;, \qquad \frac{d\vec{P}}{dt} \;=\; M\frac{d\vec{V}}{dt} \;=\; \vec{F}^{(e)}\;. \tag{3.9}$$

Ve vztažné soustavě spojené s hmotným středem (těžištěm) je celková hybnost $\vec{P}'$ nulová. [39]

V izolované soustavě částic je výslednice vnějších sil nulová, takže **rychlost těžiště zůstává konstantní**:

$$\vec{V} \;=\; \textbf{konst} \tag{3.10}$$

což praví další **zákon zachování rychlosti těžiště izolované soustavy.** Je v podstatě zobecněním zákona setrvačnosti jedné částice na soustavu částic.

Při přechodu od jedné inerciální vztažné soustavy k druhé pomocí vztahu (3.7), kde $\vec{V}=$ **konst** budeme zřejmě mít

$$\frac{d\vec{P}}{dt} \;=\; \frac{d\vec{P}'}{dt} \;=\; \vec{F}^{(e)} \tag{3.11}$$

a první věta impulsová platí stejně ve všech inerciálních soustavách. Hybnost izolované soustavy částic je ovšem v každé z nich jiná, v těžišťové nulová. Víme sice, že všechny inerciální vztažné soustavy jsou si rovnoprávné, platí v nich zákony mechaniky v témž tvaru a tyto soustavy nelze navzájem experimentálně odlišit, ale těžišťová soustava je přece jen "rovnoprávnější", matematicky výhodnější.

3.1.2 Druhá věta impulsová

Vynásobíme nyní pohybovou rovnici každé částice zleva vektorově polohovým vektorem této částice:

$$\vec{r}_\alpha \times \frac{d\vec{p}_\alpha}{dt} \;=\; \sum_{\beta=1}^{N} (\;\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\alpha\beta}\;) \;+\; \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{(e)}\;. \tag{3.12}$$

[39] Přesně vzato hmotný střed soustavy a její těžiště nejsou totožné, například v nehomogenním tíhovém poli se liší. Přesto však je v teoretické fyzice zvykem nazývat soustavu hmotného středu těžišťovou.

Rovnice opět sečteme přes α a dostaneme

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \left(\vec{r}_\alpha \times \frac{d\vec{p}_\alpha}{dt} \right) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \left(\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\alpha\beta} \right) + \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{(e)} \right) . \tag{3.13}$$

Levou stranu (3.13) upravíme na

$$\sum_{\alpha=1}^{N}(\vec{r}_\alpha \times \frac{d\vec{p}_\alpha}{dt}) = \frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{N}(\vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha) - \sum_{\alpha=1}^{N}(\frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} \times \vec{p}_\alpha) =$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{N}(\vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha) - \sum_{\alpha=1}^{N}(\vec{v}_\alpha \times \vec{p}_\alpha) . \tag{3.14}$$

Druhá suma na pravé straně je rovna nule, neboť vektory rychlosti a hybnosti jsou rovnoběžné. Vektorový součin $\vec{l}_\alpha = \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha$ ale představuje moment hybnosti částice vzhledem k počátku souřadnic. Označíme-li nyní *celkový moment hybnosti soustavy částic* [40]

$$\vec{L} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{l}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N}(\vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha) ,$$

máme na levé straně (3.13) časovou derivaci celkového momentu hybnosti $\frac{d\vec{L}}{dt}$. Upravíme nyní pravou stranu (3.13) a označíme *výsledný moment vnějších sil* jako

$$\vec{N}^{(e)} = \sum_{\alpha=1}^{N}(\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{(e)}) .$$

Použijeme opět zákon akce a reakce na vnitřní síly soustavy a napíšeme

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} (\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\alpha\beta}) + \sum_{\alpha=1}^{N}(\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{(e)}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} (\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\alpha\beta} + \vec{r}_\beta \times \vec{F}_{\beta\alpha}) + \vec{N}^{(e)} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \times \vec{F}_{\alpha\beta} + \vec{N}^{(e)} .$$

Budeme dále předpokládat, že síly působící mezi částicemi jsou centrální. Z obr. (3.1) je však vidět, že v tom případě budou vektory $\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta$ a $\vec{F}_{\alpha\beta}$ rovnoběžné, a tedy jejich vektorový součin roven nule. Dospíváme tedy k rovnici

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}^{(e)} , \tag{3.15}$$

která je matematickým vyjádřením **druhé věty impulsové** neboli **věty o momentu hybnosti soustavy částic**:

Časová změna celkového momentu hybnosti soustavy částic je rovna výslednému momentu vnějších sil.

obr. 3.1

[40] V zahraniční literatuře a v kvantové fyzice nazývaný impulsmoment

Moment hybnosti i moment vnějších sil se přitom vztahují k témuž bodu, počátku soustavy souřadnic.

Je-li soustava izolovaná, je výsledný moment vnějších sil nulový, $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$ a platí **zákon zachování celkového momentu hybnosti izolované soustavy částic**:

$$\vec{L} \;=\; \textbf{konst}\;; \tag{3.16}$$

celkový moment hybnosti izolované soustavy částic se zachovává.

Zkoumejme nyní, jak se změní celkový moment hybnosti soustavy částic, budeme-li jej vztahovat k jinému počátku O', který se pohybuje v původní soustavě konstantní rychlostí $\vec{V}$, tj. jeho polohový vektor závisí na čase jako $\vec{r}\,(O') = \vec{r}_0 + \vec{V}t$. Pak je třeba transformovat polohové vektory všech částic jako $\vec{r}_\alpha = \vec{r}'_\alpha + \vec{r}_0 + \vec{V}t$, $\vec{v}_\alpha = \vec{v}'_\alpha + \vec{V}$ a pro celkový moment hybnosti dostaneme

$$\vec{L} \;=\; \vec{L}' \;-\; \vec{V} \times \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}'_\alpha \;+\; \vec{r}_0 \times \vec{P}' \;+\; \vec{r}_0 \times M\vec{V} \;+\; \vec{V}t \times \vec{P}' \,. \tag{3.17}$$

Odtud vidíme, že budou-li oba počátky nehybné, tj. $\vec{V} = \vec{0}$, máme

$$\vec{L} \;=\; \vec{L}' \;+\; \vec{r}_0 \times \vec{P}' \;=\; \vec{L}' \;+\; \vec{r}_0 \times \vec{P}\,. \tag{3.18}$$

Půjde-li o těžišťovou soustavu, kde $\vec{P} = \vec{P}' = \vec{0}$, bude

$$\vec{L} \;=\; \vec{L}'\,, \tag{3.19}$$

a **celkový moment hybnosti soustavy částic nezávisí na volbě počátku.**

Zderivujeme-li (3.17) podle času, dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} \;&=\; \frac{d\vec{L}'}{dt} \;-\; \vec{V} \times \vec{P}' \;+\; \vec{r}_0 \times \frac{d\vec{P}'}{dt} \;+\; \vec{V} \times \vec{P}' \;+\; \vec{V}t \times \frac{d\vec{P}'}{dt} \;= \\ &=\; \frac{d\vec{L}'}{dt} \;+\; \vec{r}\,(O') \times \frac{d\vec{P}'}{dt} \;=\; \frac{d\vec{L}'}{dt} \;+\; \vec{r}\,(O') \times \frac{d\vec{P}}{dt}\,. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Je-li výslednice vnějších sil, a tedy časová změna celkové hybnosti, nulová, platí

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \;=\; \frac{d\vec{L}'}{dt} \;=\; \vec{N}^{(e)} \tag{3.21}$$

a druhá věta impulsová platí stejně ve všech inerciálních soustavách.

3.1.3 Věta o energii soustavy částic

Vynásobíme nyní pohybovou rovnici každé částice skalárně její rychlostí $\vec{v}_\alpha$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v}_\alpha \;=\; \vec{F}_\alpha^{(i)} \cdot \vec{v}_\alpha \;+\; \vec{F}_\alpha^{(e)} \cdot \vec{v}_\alpha \tag{3.22}$$

a sečteme

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{d\vec{p}_\alpha}{dt} \cdot \vec{v}_\alpha \;=\; \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{(i)} \cdot \vec{v}_\alpha \;+\; \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{(e)} \cdot \vec{v}_\alpha \;. \tag{3.23}$$

Na levé straně nyní máme veličinu

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{d\vec{p}_\alpha}{dt} \cdot \vec{v}_\alpha \;=\; \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \frac{d\vec{v}_\alpha}{dt} \cdot \vec{v}_\alpha \;=\; \frac{dT}{dt} \;, \tag{3.24}$$

kde

$$T \;=\; \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}_\alpha^{\,2} \tag{3.25}$$

představuje *celkovou kinetickou energii soustavy částic.* Pravou stranu (3.23) upravíme na

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{(i)} \cdot \vec{v}_\alpha \;+\; \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{(e)} \cdot \vec{v}_\alpha \;=\; \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{(i)} \cdot \vec{v}_\alpha \;+\; Q^{(e)} \;. \tag{3.26}$$

Symbolem $Q^{(e)}$ jsme označili *výkon vnějších sil.* Jsou-li vnitřní síly konzervativní, lze zavést *potenciální energii soustavy částic* $U(x,\ y,\ z)$ tak, že

$$\vec{F}_\alpha^{(i)} \;=\; -\,\nabla_\alpha U \;=\; -\left(\frac{\partial U}{\partial x_\alpha},\ \frac{\partial U}{\partial y_\alpha},\ \frac{\partial U}{\partial z_\alpha}\right) \;=\; -\,\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\alpha} \;. \tag{3.27}$$

Potom na pravé straně (3.23) stojí

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{(i)} \cdot \vec{v}_\alpha \;+\; Q^{(e)} \;=\; -\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\alpha} \cdot \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} \;+\; Q^{(e)} \;=\; -\,\frac{dU}{dt} \;+\; Q^{(e)} \;. \tag{3.28}$$

Označíme-li *celkovou energii soustavy částic* $E \;=\; T + U$, dostáváme **větu o energii soustavy částic**

$$\frac{dE}{dt} \;=\; Q^{(e)} \;, \tag{3.29}$$

tj. **časová změna celkové energie soustavy částic je rovna celkovému výkonu vnějších sil**. Je-li soustava částic izolovaná, je výkon vnějších sil nulový, a platí **zákon zachování celkové energie izolované soustavy částic**:

$$E \;=\; T \;+\; U \;=\; \text{konst} \;; \tag{3.30}$$

celková energie izolované soustavy částic se zachovává.

Přejděme k vztažné soustavě S', jejíž počátek se pohybuje v původní inerciální soustavě S obecnou rychlostí $\vec{V}(t)$, při čemž osy souřadnic si zachovávají svou orientaci. Kinetickou energii soustavy částic pak budeme transformovat do nové soustavy souřadnic takto:

$$T \;=\; \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}_\alpha^{\,2} \;=\; \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} (\vec{v}'_\alpha + \vec{V})^2 \;=$$

$$= \frac{1}{2}M\ V^2 + \vec{V}\cdot\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}'_\alpha + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{v}'^2_\alpha = \frac{1}{2}M\ V^2 + \vec{V}\cdot\vec{P}' + T' . \tag{3.31}$$

Je-li soustava S' těžišťová, bude $\vec{P}' = \vec{0}$ a dostáváme

$$T = \frac{1}{2}M\ V^2 + T' , \tag{3.32}$$

tj. **kinetická energie soustavy částic je rovna součtu kinetické energie jejího těžiště a vnitřní kinetické energie (tj. kinetické energie v těžišťové vztažné soustavě)**. To je obsahem tzv. **Königovy věty**. Je-li soustava částic izolovaná, bude její celková energie dána součtem kinetické energie těžiště a celkové *vnitřní energie*, tj. kinetické a potenciální energie v těžišťové soustavě.

3.1.4 Deset zákonů zachování v izolované soustavě částic

Při studiu izolované soustavy částic jsme zjistili, že při jejím pohybu se zachovává deset skalárních veličin: [41]

3 souřadnice vektoru celkové hybnosti $\vec{P}$

3 souřadnice vektoru rychlosti těžiště $\vec{V}$

3 souřadnice vektoru celkového momentu hybnosti $\vec{L}$

1 skalární veličina celkové energie E.

Těchto deset konstant představuje vlastně integrály pohybu dané počátečními podmínkami a jejich znalost nám usnadňuje integrování pohybových rovnic soustavy částic.

V teoretické fyzice se dokazuje, že tyto konstanty souvisejí s vlastnostmi symetrie prostoru a času, a sice

zákon zachování celkové hybnosti s homogenitou prostoru (symetrie vůči translaci v prostoru)

zákon zachování celkového momentu hybnosti s izotropií prostoru (symetrie vůči rotaci v prostoru)

zákon zachování energie s homogenitou času (symetrie vůči translaci v čase)

zákon zachování rychlosti těžiště s Galileiho transformacemi (symetrie vůči přechodu

[41] Připomeňme, že pro jednu bezsilovou (tj. izolovanou) částici se zachovává hybnost, a tedy i rychlost, v poli centrálních sil moment hybnosti vzhledem k centru a v poli konzervativních sil energie.

od jedné inerciální soustavy k druhé). [42]

Ve fyzice elementárních částic se setkáváme i s dalšími symetriemi, jimž odpovídají další zákony zachování (například zákon zachování elektrického náboje). Vztahy mezi symetriemi prostoru a času a zákony zachování zformulovala německá matematička Emmy Noetherová a jsou obsahem takzvaných teorémů Noetherové.

[42] Ve speciální teorii relativity vystupují místo Galileiho transformací obecnější transformace Lorentzovy. S matematického hlediska tvoří množina uvedených deseti transformací desetiparametrickou grupu, které říkáme grupa Galileiho, v relativistické mechanice grupa Poincarého. Teorie grup patří k nejabstraktnějším matematickým disciplinám a zabývá se právě studiem symetrií .

V dalším uvidíme, jak lze zákonů zachování využívat při studiu pohybu izolovaných soustav částic. Jako první krok zpravidla využíváme zákona zachování rychlosti těžiště a přecházíme do těžišťové soustavy souřadnic, která je v tom případě inerciální.

Úloha (pohyb tělesa s proměnnou hmotností)

Dosud jsme vždy předpokládali, že hmotnost částice je konstantní a že změnu její hybnosti můžeme zapsat jako součin hmotnosti a zrychlení. Nemusí tomu být tak vždy a Newtonův zákon síly to nevyžaduje. Můžeme si představit situaci, kdy se hmotnost částice v čase mění podle zadané funkce $m(t)$ a pak dostaneme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\,\frac{dm}{dt}\,. \tag{3.33}$$

Není ovšem snadné si fyzikálně představit důvod, proč by se hmotnost takovým způsobem měnila. Komplikovanější situace nastává při relativistickém pohybu částice rychlostí blízkou rychlosti světla, kdy dostáváme pohybovou rovnici

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \vec{F}\,.$$

Budeme se jí zabývat ve speciální teorii relativity.

Naproti tomu se často vyskytuje pohyb těles, kdy dochází ke změně hmotnosti v důsledku oddělování nebo přibírání dalších těles - výfuku plynů motorových vozidel, vystřelování plynů tryskami při raketovém pohonu, přibírání vzduchu při oxidaci zápalné směsi tryskových letadel, ztrácení nákladu, nastupování a vystupování pasažérů aj. V tomto případě však nejde o pohyb jednoho tělesa, jedné částice s proměnnou hmotností, ale o pohyb soustavy těles a k jeho řešení musíme místo Newtonova zákona síly použít první větu impulsovou. Uvidíme, že tak dostaneme rovnici lišící se od (3.33).

Uvažme například pohyb rakety, která vystřeluje plyny relativní rychlostí $\vec{u}$ (rychlost plynů vůči raketě daná konstrukcí motorů). Určíme změnu celkové hybnosti soustavy raketa + plyn za malou dobu dt. Změna hmotnosti rakety bude přitom záporná, $dm < 0$. Máme tedy

$$d\vec{p} = (\,m - |dm|\,)\,(\,\vec{v} + d\vec{v}\,) + |dm|\,(\,\vec{v} + d\vec{v} + \vec{u}\,) - m\,\vec{v} = m\,d\vec{v} - \vec{u}\,dm\,.$$

Odtud dostáváme podle první věty impulsové rovnici

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{u}\,\frac{dm}{dt} = \vec{F}\,, \tag{3.34}$$

která se nazývá *rovnice Meščerského* a zřejmě se liší od (3.33). Můžeme ji též zapsat ve tvaru

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} - (\,\vec{v} + \vec{u}\,)\,\frac{dm}{dt} = \vec{F}\,. \tag{3.35}$$

Pokud plyny nebo jiná oddělující se tělesa nejsou vystřelovány a jejich relativní rychlost vůči vozidlu je nulová ($\vec{u} = 0$), jako když se z jedoucího auta sype písek nebo obilí,

dostáváme rovnici

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}\,, \qquad \text{resp.} \qquad \frac{d(m\vec{v})}{dt} - \vec{v}\,\frac{dm}{dt} = \vec{F}\,, \tag{3.36}$$

která se rovněž liší od (3.33).

Předpokládejme nyní, že výslednice vnějších sil $\vec{F}$ je nulová (raketa se nepohybuje v tíhovém poli) a pohyb probíhá tak, že rychlost plynů má opačný směr než rychlost rakety.[43] Zvolíme-li směr pohybu rakety podél osy x za kladný, má rychlost $\vec{u}$ souřadnice $\vec{u} \equiv (-u,\ 0,\ 0)$. Pak máme ve složkách

$$m\,\frac{dv}{dt} = -u\,\frac{dm}{dt}\,, \qquad \text{neboli} \qquad dv = -u\,\frac{dm}{m}\,. \tag{3.37}$$

Tato slavná rovnice pohybu rakety se nazývá *rovnicí Ciolkovského.* Udává nám, jak se mění rychlost rakety s úbytkem její hmotnosti. V rovnici (3.37) máme již rozděleny proměnné, takže integrací dostáváme okamžitě řešení

$$v = -\,u\,\ln m + C\,. \tag{3.38}$$

Za počátečních podmínek $v = 0,\ m = m_0$ (startovací hmotnost) dostáváme

$$v = u\,\ln\frac{m_0}{m}\,, \qquad m = m_0 \mathrm{e}^{-\frac{v}{u}}\,. \tag{3.39}$$

Z tohoto výsledku plyne důležitý závěr pro konstruktéry raket. Jediný způsob, jak dosáhnout maximální rychlosti rakety je zvýšit relativní rychlost vystřelovaných plynů (nejvýše na rychlost světla u fotonové rakety) a zvolit co největší podíl startovní a konečné hmotnosti. To má ovšem své meze, nakonec musí v raketě zůstat aspoň kosmonaut. Žádná jiná konstrukční zdokonalení raketových motorů konečnou rychlost rakety nezvýší. Závislost rychlosti rakety na její hmotnosti je na obr. 3.2.

[43] Raketa se urychluje; kdyby rychlost plynů měla stejný směr jako rychlost rakety, raketa by se brzdila.

obr. 3.2 obr. 3.3 obr. 3.4

3.2 Úloha dvou těles

Řešení pohybových rovnic soustavy částic není snadné. Ve skutečnosti lze matematicky přesně řešit jen pohyb izolované soustavy dvou částic - říká se tomu *úloha dvou těles* a patří k nejslavnějsím fyzikálním úlohám, kterou se fyzikové zabývali po celá staletí. Máme-li dvě částice o hmotnostech $m_1,\ m_2$ a polohových vektorech $\vec{r}_1,\ \vec{r}_2$, musíme řešit soustavu šesti diferenciálních rovnic druhého řádu pro souřadnice polohových vektorů těchto částic a řešení bude záviset na dvanácti integračních konstantách - počátečních polohách a rychlostech obou částic. Zákony zachování nám poskytují deset integračních konstant, integrálů pohybu. Zbývá tedy určit z počátečních podmínek jen dvě konstanty, a ukazuje se, že to jde. Úlohu lze analyticky zintegrovat, najít řešení "v kvadraturách".

V případě tří částic vzniká neméně slavná *úloha tří těles*, kde je třeba určit osmnáct integračních konstant. Po úsilí trvajícím několik staletí se nakonec zjistilo, že úlohu v obecnosti zintegrovat nelze, že deset integrálů pohybu, které máme k dispozici k tomu nestačí a podařilo se najít jen některá speciální řešení. Přitom úloha tří těles má nesmírný praktický význam, bez jejího řešení bychom nemohli zkoumat pohyb soustavy Země - Měsíc - Slunce nebo Země - Měsíc -raketa a nebyla by možná kosmonautika. V minulém století byly k takovým výpočtům vytvořeny (zásluhou Gaussovou a dalších) přibližné, numerické metody, které umožnily určovat poruchy pohybu planet vyvolané vlivem dalších nebeských těles a předpovědět tak i polohu těles dosud neznámých (planetka Ceres, Neptun). Tyto výpočty jsou však pracné a zabírají mnoho času. Proto jednou z nezbytných podmínek moderní kosmonautiky je použití počítačů, které umožňují provádět takové výpočty v reálném čase a korigovat tak i parametry pohybu umělých kosmických těles. Výsledky získané při řešení úlohy tří těles lze najít v monografiích o nebeské mechanice.

Je zřejmé, že není možno analyticky integrovat ani úlohu čtyř a více těles, a teprve u velkého počtu těles, například molekul plynu, můžeme použít statistických metod. Přitom ovšem nesledujeme trajektorie jednotlivých molekul, ale určujeme statisticky střední veličiny. Největší problémy tedy činí úloha o malém počtu těles, jakou představuje například atomové jádro. Zde je problém navíc komplikován tím, že neznáme ani zákon silového působení mezi jednotlivými nukleony. Vraťme se však k řešitelné úloze dvou těles.

Na obr. 3.3 máme znázorněny polohy dvou částic (pod tělesem stále rozumíme částici), které se pohybují pouze pod vlivem vzájemného silového působení, například gravitačního. Okamžitě můžeme využít jeden ze zákonů zachování a zapsat energii této soustavy jako

$$E \;=\; \frac{1}{2}\, m_1\, v_1^2 \;+\; \frac{1}{2}\, m_2\, v_2^2 \;+\; U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)\;. \tag{3.40}$$

Využijeme nyní zákona zachování rychlosti těžiště a zákona zachování celkové hybnosti soustavy k tomu, abychom snížili potřebný počet integračních konstant z dvanácti na šest. Zvolíme počátek soustavy souřadnic v těžišti; také tato vztažná soustava bude inerciální. Pro polohové vektory obou částic máme

$$m_1\, \vec{r}_{1s} \;+\; m_2\, \vec{r}_{2s} \;=\; 0\;, \qquad\qquad \vec{r}_{1s} \;-\; \vec{r}_{2s} \;=\; \vec{r}\;. \tag{3.41}$$

V těžišťové soustavě jsou oba polohové vektory vždy kolineární, částice musí v každém okamžiku ležet na opačných stranách od těžiště (obr. 3.4). Jako $\vec{r}$ jsme označili vektor spojující obě částice; označíme též $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. Řešením soustavy rovnic (3.41) dostaneme

$$\vec{r}_{1s} \;=\; \frac{m_2}{m_1 + m_2}\, \vec{r}\;, \qquad \vec{r}_{2s} \;=\; -\, \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, \vec{r}\;. \tag{3.42}$$

a pro rychlosti

$$\vec{v}_{1s} \;=\; \vec{v}_1 - \vec{v}_S \;=\; \frac{m_2}{m_1 + m_2}\, \vec{v}\;, \quad \vec{v}_{2s} \;=\; \vec{v}_2 - \vec{v}_S \;=\; -\, \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, \vec{v}\;. \tag{3.43}$$

Zde

$$\vec{v}_S \;=\; \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{3.44}$$

představuje rychlost těžiště v původní soustavě.

Energie v těžišťové soustavě (vnitřní energie soustavy) bude opět integrálem pohybu a bude rovna

$$E_s \;=\; \frac{1}{2} m_1\, v_{1s}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2s}^2 + U(r) \;=\; \frac{1}{2}\, \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, v^2 + U(r) \;=\; \frac{1}{2} m_r\, v^2 + U(r)\;. \tag{3.45}$$

Přitom jsme do výrazu pro energii dosadili polohové vektory (3.42) a rychlosti (3.43) a zavedli tzv. *redukovanou hmotnost*

$$m_r \;=\; \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\;.$$

obr. 3.5

Při pohledu na výraz pro energii (3.45) zjišťujeme, že jsme vlastně *převedli úlohu dvou těles na úlohu o pohybu jednoho tělesa o redukované hmotnosti m_r pohybujícího se v centrálním silovém poli $U(r)$.* Polohový vektor a rychlost tohoto fiktivního tělesa jsou přitom $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Tuto úlohu jsme však už řešili - v případě gravitačních sil šlo o úlohu Keplerovu. Můžeme tedy použít výsledku Keplerovy úlohy a chceme-li přejít k původní inerciální vztažné soustavě S, stačí přetransformovat rychlosti podle vztahů

$$\vec{v}_1 \;=\; \vec{v}_{1s} \;+\; \vec{v}_S \quad , \qquad \vec{v}_2 \;=\; \vec{v}_{2s} \;+\; \vec{v}_S \; . \tag{3.46}$$

V úloze dvou těles můžeme rozlišit dva důležité případy:

1. Jedno z těles je mnohem těžší než druhé, $m_1 \gg m_2$. Potom je redukovaná hmotnost $m_r \approx m_2$ přibližně rovna hmotnosti lehčího tělesa. V limitě dostáváme případ nehybného Slunce a planety obíhající kolem něj nebo Země a umělé družice. Těžiště soustavy zůstává přitom nehybné v blízkosti středu těžkého tělesa. Přesně vzato však např. Slunce nezůstává nehybné a koná složité periodické pohyby kolem těžiště sluneční soustavy, na nichž je patrný zejména vliv velkých planet, Jupiteru a Saturnu. Situace připomíná pohyb vrhače sportovního kladiva, který při roztáčení kladiva musí vykonávat sám malé kruhové pohyby. Na obr. 3.5 je znázorněn pohyb dvou těles, z nichž jedno je poloviční hmotnosti než druhé a která obíhají po přibližně kruhových trajektoriích.

2. Obě tělesa jsou stejně těžká, $m_1 = m_2 = m$, takže redukovaná hmotnost je rovna poloviční hmotnosti tělesa: $m_r = \frac{1}{2}m$. To může být případ dvojhvězdy o dvou stejných složkách. Podobná situace je na obr. 3.6. Budou-li tělesa stejně těžká a bude-li vzdálenost mezi nimi zůstávat konstantní ($r =$ konst), budou se vzájemně "honit" po obvodu kružnice.

obr. 3.6

Víme, že uzavřená trajektorie může existovat jen v případě gravitační přitažlivé síly přesně úměrné převrácenému čtverci vzdálenosti (a v případě prostorového oscilátoru). Působí-li na těleso další poruchy, dojde ke stáčení perihelia a pohyb dvojhvězdy pak probíhá podobně jako na obr. 3.7.

Na obrázcích 3.8 a 3.9 jsou znázorněny trajektorie dvou těles, z nichž jedno je poloviční hmotnosti než druhé a která na sebe působí přitažlivými silami úměrnými $1/r^{2,5}$ (obr. 3.8) a $r^{1,5}$ (obr. 3.9). [44]

Vraťme se ještě ke Keplerově úloze a uvažme, jak se změní její řešení pro pohyb planet, vzdáme-li se Keplerova předpokladu, že Slunce je nehybné a spojíme-li počátek inerciální vztažné soustavy s těžištěm sluneční soustavy. Třetí Keplerův zákon jsme psali ve tvaru (2.126) jako

$$T \;=\; 2\pi \sqrt{\frac{m_p}{\alpha}}\; a^{3/2} \;.$$

Zde m_p představuje hmotnost planety a interakční konstanta $\alpha = \kappa m_p M_S$. Nyní musíme hmotnost planety ovšem nahradit redukovanou hmotností

$$m_r \;=\; \frac{m_p M_S}{m_p + M_S} \;,$$

[44] Tyto a další situace odpovídající různým zákonům silového působení a různým počátečním podmínkám si můžete snadno simulovat na počítači například pomocí programu Famulus.

obr. 3.7

obr. 3.8

obr. 3.9

zatímco interakční konstanta se nemění. Tak dostáváme třetí Keplerův zákon

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\kappa(m_p + M_S)}}\, a^{3/2} . \tag{3.47}$$

Vidíme tedy, že platí úměrnost mezi čtverci oběžných dob a třetími mocninami velkých poloos, ale konstanta úměrnosti je pro každou planetu trochu jiná. Podotkněme ještě, že jsme tento jev využili v úloze o určení hmotnosti Měsíce (vztah (2.142)).

3.3 Srážky částic a ráz těles

3.3.1 Pružné srážky

Důležitým fyzikálním jevem, se kterým se setkáváme nejen v mechanice, ale i v atomové, jaderné a částicové fyzice, jsou srážky částic. Jde-li o srážku těles konečných rozměrů, mluvíme o rázu těles. Srážku můžeme chápat jako *časově a prostorově omezenou interakci částic, při níž dochází k přerozdělování hybnosti a energie.* Před srážkou se částice pohybovaly odděleně, nepůsobily na sebe, a pak se dostaly do interakční oblasti vzájemného více či méně intenzivního působení. Studium srážek částic slouží k tomu, abychom určili zákony vzájemného silového působení mezi částicemi. Dnes k tomu slouží obrovské urychlovače, které patří k největším experimentálním zařízením, která byla kdy vytvořena.

Charakter srážek může být velmi rozmanitý a můžeme je klasifikovat podle nejrůznějších hledisek. Nejdůležitější je rozlišování srážek *pružných* a *nepružných.* [45] Při srážce předpokládáme,že částice tvoří izolovanou soustavu a že v ní platí zákony zachování hybnosti a energie. Při pružné srážce působí pouze konzervativní síly a zachovává se mechanická, kinetická energie částic před srážkou a po srážce.Při nepružné srážce se v izolované soustavě sice také zachovává celková energie soustavy, ale část mechanické energie se může změnit ve vnitřní nebo deformační energii částic a těles. Předpokládáme přitom, že částice mají nějakou vnitřní strukturu, jako například atom nebo makroskopické těleso. Typicky nepružnou srážkou je srážka dvou automobilů, ale nepružnou může být i srážka elektronu s atomem nebo neutronu s atomovým jádrem. Pružnou srážku můžeme dobře demonstrovat při dopadu ocelové kuličky na skleněnou destičku nepružnou při dopadu na olověnou destičku.

Dochází-li ke srážce pouze dvou částic, mluvíme o srážce *binární*, srazí-li se více částic nebo automobilů najednou, jde o srážku *kolektivní.* Nastává-li srážka až při těsném sblížení částic, jako třeba při rázu dvou kulečníkových koulí, jde o srážku *blízkou*, působí-li částice či tělesa na sebe na dálku gravitačními nebo elektrickými silami, jde o srážku *dalekou.* U dalekých srážek je někdy obtížné určit, co se má ještě za srážku považovat. Přiblíží-li se kometa ke Slunci, změní svůj směr a opět se vzdálí, jde vlastně také o pružnou dalekou srážku, i když obě tělesa do sebe nenarazila. Otázka matematického popisu kolektivních

[45] Rozlišení pružných a nepružných srážek koulí provedl poprvé český vědec Jan Marcus Marci v roce 1639.

obr. 3.10 obr. 3.11

dalekých srážek má velký význam ve fyzice plazmatu, kde na sebe současně působí velké množství elektricky nabitých částic.

Ještě větší rozmanitost nastává při *rázu těles*. Zde ovšem záleží na tvaru tělesa, umístění jeho těžiště, vlastnostech povrchu, způsobu nárazu. Je-li povrch srážejících se těles dokonale hladký, uplatní se při rázu jen síly ve směru normály k povrchu. U drsných těles je situace mnohem složitější a tělesa mohou být při rázu uvedena do rotace. Pak je výpočet pohybu takových těles po rázu velmi obtížný. V praxi známe tuto situaci ze sportu, kdy například hráči stolního tenisu nebo kulečníku záměrně udělují míčku nebo kouli "faleš" a ztěžují tak soupeři odhad jejich pohybu.

V bodě dotyku těles při rázu můžeme vést společnou tečnou rovinu obou těles a k ní normálu. Leží-li spojnice těžišť obou těles na této normále, nazýváme takový ráz *středovým*, není-li tomu tak, jde o ráz *výstředný*. Nejčastěji se studuje ráz dokonale hladkých koulí; takový ráz je středovým vždy. Přitom však můžeme rozlišovat ráz *přímý* a *šikmý*. U přímého rázu obr. 3.10 leží vektor vzájemné rychlosti obou koulí na společné normále v bodě dotyku; naproti tomu u šikmého rázu je vzájemná rychlost od této normály odchýlena (obr.3.11). V těžišťové soustavě se koule při přímém rázu pohybují před rázem i po něm v téže přímce, při šikmém rázu se tato přímka po rázu pootočí.

Všimněme si nyní binární pružné srážky dvou částic, jejíž průběh je obdobný jako u pružného rázu dvou koulí. Jde přitom vlastně o jiný pohled na úlohu dvou těles. Budeme předpokládat, že neznáme zákon síly, jíž na sebe obě částice působí a máme k dispozici pouze zákony zachování celkové hybnosti a celkové kinetické energie. Nechť se částice m_1, m_2 blíží rychlostmi $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ do interakčního prostoru a vylétají z něho rychlostmi $\vec{v}_1'$, $\vec{v}_2'$ (obr. 3.12).

Co se děje v interakčním prostoru nevíme, je to pro nás černá skříňka. Přesto však můžeme na základě zákonů zachování soudit na vztahu mezi rychlostmi před srážkou a po srážce. Především musí zůstávat neměnná rychlost těžiště této soustavy částic; ta je dána výrazem (3.44). Od směru této rychlosti můžeme udávat úhly θ_1, θ_2, o které se odkloní částice po srážce; říkáme jim *úhly rozptylu v laboratorní soustavě*. Někdy nastává srážka tak, že letící částice m_1 narazí na nehybnou částici m_2. Ta se pak nazývá terčem. Jinak

obr. 3.12 obr. 3.13

můžeme tuto situaci vyjádřit tím způsobem, že přejdeme z laboratorní vztažné soustavy S do terčové soustavy S_2 (obr. 3.13). Potom nazýváme úhel θ_1 *úhlem rozptylu*, úhel θ_2 *úhlem zpětného rázu* a jejich součet *úhlem rozletu*.

Naším úkolem je najít rychlosti částic po srážce, známe-li rychlosti částic před srážkou. K tomu účelu je nejvýhodnější přejít do těžišťové soustavy pomocí vztahů (3.43). Pro celkovou hybnost a kinetickou energii soustavy před srážkou máme

$$m_1\vec{v}_{1s} + m_2\vec{v}_{2s} = 0$$

$$m_1 v_{1s}^2 + m_2 v_{2s}^2 = m_1 \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 v^2 + m_2 \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 v^2 = m_r\, v^2 = \text{konst}\,. \tag{3.48}$$

Stejné zákony zachování ovšem platí i pro rychlosti po srážce. Z první rovnice (3.48) plyne, že částice se budou v těžišťové soustavě pohybovat před srážkou proti sobě po jedné přímce (a srazí se v těžišti) a po srážce se budou opět pohybovat od sebe po jedné přímce; tyto přímky však nemusí být totožné. Úhel χ, o který se linie srážky po srážce pootočí, se nazývá *úhel rozptylu v těžišťové soustavě* (obr. 3.14).

Řešením rovnic (3.48) pro rychlosti *po* srážce dostaneme pro ně stejné výrazy jako (3.43) pouze pohyb bude probíhat podél jiné přímky, jejíž jednotkový směrový vektor označíme $\vec{n}$. Máme tak

$$\vec{v}'_{1s} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\, v\, \vec{n}\ , \qquad \vec{v}'_{2s} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\, v\, \vec{n}\,. \tag{3.49}$$

Tím jsme našli rychlosti částic po srážce s jedinou neurčitostí v úhlu rozptylu χ. Zákony zachování nám neumožňují tento úhel určit. Chceme-li pak přejít k laboratorní vztažné soustavě, stačí prostě spočítat

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}'_{1s} + \vec{v}_S\ , \qquad \vec{v}'_2 = \vec{v}'_{2s} + \vec{v}_S\,. \tag{3.50}$$

obr. 3.14

Úplné řešení jsme dostali pro případ *přímé srážky (přímého rázu koulí)*, kdy se částice pohybují před srážkou i po ní ve stejné přímce a v opačném směru (úhel rozptylu $\chi = \pi$!). Pak můžeme psát

$$\vec{v}_1' = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\,\vec{v} + \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\,\vec{v} + \vec{v}_2 = \frac{(m_1-m_2)\,\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$$

$$\vec{v}_2' = \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\vec{v} + \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{2m_1}{m_1+m_2} + \vec{v}_2 = \frac{(m_2-m_1)\,\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1+m_2}\,. \tag{3.51}$$

Výsledné řešení je samozřejmě symetrické vzhledem k výměně indexů 1 a 2. Rovnice (3.51) popisují obecný případ přímé pružné srážky a je z nich možno odvodit výsledky pro mnoho speciálních případů (těžší částice narazí na lehčí, lehčí na těžší, jedna z částic je nehybná, částice se pohybují v protisměru, částice se pohybují v témž směru, lehčí částice dohání těžší, těžší dohání lehčí apod.). Laskavý čtenář si tyto případy jistě s potěšením rozebere. Zejména je z těchto rovnic patrno, že budou-li hmotnosti obou částic (koulí) stejné, při srážce si prostě vymění rychlosti. Všimneme si ještě situace, kdy jedna z částic byla před srážkou v klidu. Potom $\vec{v}_2 = \vec{0}$ a máme

$$\vec{v}_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\,\vec{v}_1 \quad , \qquad \vec{v}_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\,v_1\,. \tag{3.52}$$

Budou-li přitom ještě částice stejně těžké, letící částice se po srážce zastaví a stojící převezme její rychlost. Tento experiment lze snadno demonstrovat u rázu dvou pružných koulí.

Zajímavá je ještě otázka po účinnosti předání energie od jedné částice k druhé. Představme si, že máme dvě částice různých hmotností, z nichž jedna stojí a druhá na ní

nalétává. Určíme, jaká část kinetické energie se předá od letící částice nehybné:

$$T_2' \;=\; \frac{1}{2}\, m_2\, v_2'^2 \;=\; \frac{1}{2}\, \frac{4m_1^2 m_2}{(m_1+m_2)^2}\, v_1^2 \;=\; \frac{4m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}\; T_1 \;=\; \eta T_1\,. \tag{3.53}$$

Koeficient η představuje podíl převzaté a původní energie. Budou-li obě částice stejně těžké, bude předána celá energie letící částice. Bude-li rozdíl hmotností obou částic velký, bude předána malá část energie, lhostejno zda lehká částice naráží na těžkou (pingpongový míček na olověnou kouli) nebo těžká částice na lehkou (olověná koule na pingpongový míček). Studium účinnosti předání energie při pružných srážkách je důležité například v jaderné fyzice. Neutronové záření je možno v látce účinně zbrzdit, budou-li se neutrony pružně srážet s částicemi málo se lišící hmotnosti (protony, deuterony apod.). Proto se jako moderátorů (zpomalovačů neutronů) v jaderných reaktorech využívá vody, těžké vody, grafitu apod. Naproti tomu těžké kovy, jako např. olovo, jejichž atomová jádra jsou mnohem těžší než neutrony, slouží k pohlcování záření gama, ale k ochraně před neutronovým zářením se nehodí.

Zmiňovali jsme se o tom, že zákony zachování nám dovolily řešit pouze případ přímé srážky a a u šikmé srážky úhel rozptylu v těžišťové soustavě zůstává neurčen. Přesto však můžeme získat o vztazích mezi úhly rozptylu v těžišťové a laboratorní soustavě ještě další informace pomocí tzv. *srážkových diagramů*. Při konstrukci těchto diagramů vycházíme z toho, že redukovaná hmotnost a velikost vzájemné rychlosti částic zůstávají konstantní. Místo rychlostí částic pracujeme přitom s jejich hybnostmi. Opíšeme kružnici poloměru $p_0 = m_r v$ a jejím středem vedeme přímku směrem vektoru $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$, tj. směrem pohybu těžiště v laboratorní soustavě. Od této přímky odečteme neznámý úhel rozptylu v těžišťové soustavě χ a vyznačíme tak na obvodu kružnice bod C (viz obr. 3.15).

Ukazuje se, že na přímce $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ lze vyznačit body A, B tak, aby vektor AC odpovídal hybnosti $\vec{p}_1'$ vektor CB hybnosti $\vec{p}_2'$. Vektor OC přitom odpovídá $\vec{p}_0 = m_r v \vec{n}$. Je totiž

$$\vec{p}_1' \;=\; m_1 \vec{v}_1' \;=\; m_1 \vec{v}_{1s}' + m_1 \vec{v}_S \;=\; \vec{p}_0 + \frac{m_1}{m_1+m_2}\,(\,\vec{p}_1 + \vec{p}_2\,) \;=\; \vec{p}_0 + AO$$

$$\vec{p}_2' \;=\; m_2 \vec{v}_2' \;=\; m_2 \vec{v}_{2s}' + m_2 \vec{v}_S \;=\; -\,\vec{p}_0 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\,(\,\vec{p}_1 + \vec{p}_2\,) \;=\; -\,\vec{p}_0 + OB\,.$$

Na obr. 3.15 jsou vyznačeny i úhly rozptylu v laboratorní soustavě θ_1 , θ_2.

Tento obecný srážkový diagram se zjednoduší, bude-li částice 2 před srážkou nehybná, tj. $\vec{p}_2 = \vec{0}$. Snadno si ověříme, že v tom případě bude bod B ležet na kružnici diagramu. Dále je zřejmé, že poměr délek

$$\frac{AO}{OB} \;=\; \frac{m_1}{m_2} \;=\; \gamma$$

udává poměr hmotností obou částic. Pak můžeme diskutovat tři různé případy:

obr. 3.15

obr. 3.16

obr. 3.17

obr. 3.18

1. $\gamma < 1$, lehčí částice nalétává na těžší, obr. 3.16.

Bod A leží uvnitř kružnice. Bude-li bod C probíhat po celé kružnici bude úhel rozptylu θ_1 nabývat všech možných hodnot, částice se může rozptýlit pod libovolným úhlem. Závislost úhlu θ_1 na χ je jednoznačná. Zároveň platí $\theta_1+\theta_2 > \pi/2$, úhel rozletu je větší než pravý.

2. $\gamma = 1$, obě částice jsou stejně těžké, obr. 3.17.

Bod A leží na kružnici. Potom platí $\theta_1 = \chi/2$ a $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$, částice se po srážce rozletí pod pravým úhlem. Tento jev je možno jednoduše odvodit a experimentálně ověřit na rázu dvou hladkých koulí, z nichž jedna je v klidu a druhá na ni šikmo nalétává.

3. $\gamma > 1$, těžší částice nalétává na lehčí, obr. 3.18.

Bod A leží vně kružnice. Probíhá-li bod C po celé kružnici, může úhel θ_1 nabývat pouze hodnot vymezených maximálním úhlem θ_{1max}, pro nějž platí

$$\sin\theta_{1max} = \frac{p_0}{AO} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\frac{m_1+m_2}{m_1^2} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{\gamma}\,.$$

Nalétávající částice se tedy nemůže rozptýlit pod velkými úhly nazpět a úhel rozletu je menší než pravý, $\theta_1+\theta_2 < \pi/2$. Závislost úhlu χ na θ_1 není jednoznačná, jednomu úhlu θ_1 mohou odpovídat dva různé úhly χ. Zaregistrujeme-li tedy v laboratorní soustavě částice rozptýlené pod úhlem θ_1, zahrnují tyto částice dvě skupiny, které se rozptýlily v těžišťové soustavě pod dvěma různými úhly χ a mají různé velikosti rychlosti a různou kinetickou energii.

Zatímco teoreticky je výhodnější pracovat v soustavě těžišťové, experimenty pochopitelně probíhají v soustavě laboratorní a získané výsledky je třeba porovnávat. Srážkové diagramy nám pak poslouží k přepočítávání úhlů rozptylu χ na úhly rozptylu θ_1, θ_2 a naopak. Na obr. 3.19 máme zvětšený trojúhelník ABC s vyznačenými délkami stran. Určíme-li úhel rozptylu v těžišťové soustavě χ, můžeme odtud určit úhly rozptylu a energie rozptýlených částic v laboratorní soustavě a naopak.

Protože jde o snadné, čistě geometrické výpočty, uvedeme jen výsledky:

$$\mathrm{tg}\,\theta_1 = \frac{\sin\chi}{\gamma+\cos\chi}\quad,\qquad \theta_2 = \frac{\pi-\chi}{2}$$

$$\cos\chi = -\gamma\,\sin^2\theta_1 \pm \cos\theta_1\,\sqrt{1-\gamma^2\sin^2\theta_1}$$

$$v_1' = \frac{v}{m_1+m_2}\sqrt{m_1^2+m_2^2+2m_1m_2\cos\chi}\quad,\qquad v_2' = \frac{2m_1 v}{m_1+m_2}\,\sin\frac{\chi}{2}\,.$$

Nyní můžeme upřesnit podíl energie předávané letící částicí částici nehybné, není-li srážka přímá, ale šikmá. Dostáváme

$$T_2' = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\,\sin^2\frac{\chi}{2}\,T_1\,.$$

obr. 3.19

V případě přímé srážky je $\chi = \pi$ a dostaneme (3.53).

3.3.2 Pružný rozptyl částic

Abychom mohli přesně předpovědět výsledek srážky, tj. stanovit pod jakým úhlem se částice rozptýlí, museli bychom znát zákon síly, kterou na sebe částice působí. Víme, že jde v podstatě o řešení úlohy dvou těles, která na sebe působí konzervativními silami. Budeme samozřejmě řešit úlohu v těžišťové soustavě, tj. předpokládat, že nalétající částice má redukovanou hmotnost a rozptylové centrum je v inerciální vztažné soustavě nehybné. Při řešení úlohy dvou těles vystupují dvě konstanty, dva integrály pohybu - energie E a velikost momentu hybnosti l. V úloze o rozptylu zavádíme jiné dvě konstanty, které s E a l jednoznačně souvisí. Jde o tzv. *asymptotickou rychlost* v_∞, tj. velikost rychlosti nalétající částice před srážkou a tzv. *srážkový parametr* ρ, tj. vzdálenost přímky (asymptoty), po níž se částice ve velké vzdálenosti pohybuje, od osy srážky procházející silovým centrem (viz obr. 3.20). [46]

[46] Úloha o rozptylu má velkou důležitost v mnoha oblastech fyziky, zejména atomové, jaderné a částicové, protože umožňuje experimentálně zkoumat silové působení mezi částicemi. V těchto případech je ovšem třeba počítat rozptyl na základě zákonů kvantové mechaniky.

Mezi těmito konstantami platí vztahy

$$E = \frac{1}{2} m_r v_\infty^2 , \quad l = m_r \rho v_\infty .$$

Naším úkolem tedy je určit úhel rozptylu v těžišťové soustavě χ, známe-li sílu, resp. potenciální energii vzájemného působení částic $U(r)$ a naopak. Ke srovnání výsledku s experimentem bude pak třeba přepočítat úhly rozptylu do laboratorní soustavy, což může být pracné, ale není to principiální záležitost. Bude-li terčová částice mnohem těžší než částice nalétávající, budou těžišťová a laboratorní soustavy prakticky totožné.

obr. 3.20

Budeme postupovat následovně. Řešením úlohy dvou těles získáme rovnici trajektorie částice v polárních souřadnicích; polární úhel φ měříme opět od směru do bodu největšího přiblížení částice centru, periheliu. Potom asymptotický polární úhel částice pohybující se v nekonečnu je φ_∞. Působí-li mezi částicemi odpudivá síla, bude z důvodu symetrie trajektorie platit

$$\chi = \pi - 2\varphi_\infty \tag{3.54}$$

(viz obr. 3.20).

Uvedeme dva nejdůležitější případy pružného rozptylu - rozptyl na tvrdé kuličce (*izotropní rozptyl*) a rozptyl v coulombovském, resp. newtonovském poli (*Rutherfordův rozptyl*).

Rozptyl na tvrdé kuličce poloměru a (obr. 2.20) lze popsat potenciální energií $U(r) = \infty$ pro $r \leq a$ a $U = 0$ pro $r > a$. Znamená to, že pokud částice nalétá na tvrdou kuličku s parametrem $\rho > a$, proletí mimo a nebude silově nijak ovlivněna. Je-li parametr $\rho < a$, bude působit nekonečně velká síla ve směru kolmém k povrchu kuličky a nedovolí částici proniknout do oblasti $r < a$. Částice se tedy odrazí od povrchu kuličky podle zákona odrazu; úhly dopadu a odrazu jsou rovny φ_∞. [47] Závislost mezi srážkovým parametrem a úhlem rozptylu pak dostaneme snadno jako

$$\rho = a \sin\varphi_\infty = a \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2}\right) = a \cos\frac{\chi}{2} . \tag{3.55}$$

Rozptyl nalétávající částice alfa na atomech zlata studoval E. Rutherford při svém slavném pokusu, který vedl k objevu atomového jádra. Jde o dvě elektricky kladně nabité částice, které se odpuzují silou nepřímo úměrnou čtverci vzdálenosti (obr. 3.21). Výsledek pokusu by se však příliš nezměnil, kdyby částice měly opačné znaménko nábojů nebo kdyby šlo o rozptyl částic působících gravitačními přitažlivými silami (obr. 3.22). V případě přitažlivé síly by místo (3.54) platilo

[47] Ve skutečně se při takové pružné srážce koule poněkud deformuje, ale tento proces je vratný. Po odpružení získá dopadající částice svou energii zpět.

obr. 3.21

obr. 3.22

$$\chi \;=\; 2\varphi_\infty \;-\; \pi\;. \tag{3.56}$$

Víme, že v obou případech bude pohyb probíhat po větvích hyperboly.

Použijeme rovnici trajektorie (2.121)

$$\varphi \;=\; \arccos\,\frac{\pm 1 + \frac{p}{r}}{e} \;=\; \arccos\,\frac{\pm 1 + \frac{l^2}{\alpha m_r}\frac{1}{r}}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{m_r\alpha^2}}}\;, \tag{3.57}$$

kde horní znaménko odpovídá síle odpudivé, dolní síle přitažlivé.

Asymptotický polární úhel nyní dostaneme, budeme-li limitovat $r \to \infty$:

$$\varphi_\infty \;=\; \arccos\,\frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{m_r\;\alpha^2}}} \;=\; \arccos\,\frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \left(\;\frac{m_r\;\rho\;v_\infty^2}{\alpha}\;\right)^2}}\;,$$

odkud

$$\cos\varphi_\infty \;=\; \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_r\;\rho\;v_\infty^2}{\alpha}\right)^2}}\;, \quad \mathrm{tg}\;\varphi_\infty \;=\; \pm\frac{m_r\;\rho\;v_\infty^2}{\alpha}\;.$$

Protože $\varphi_\infty = \frac{\pi}{2} \mp \frac{\chi}{2}$, máme

$$\mathrm{tg}\;\varphi_\infty \;=\; \mathrm{tg}\;\left(\;\frac{\pi}{2} \;\mp\; \frac{\chi}{2}\;\right) \;=\; \pm\mathrm{cotg}\;\frac{\chi}{2} \;=\; \pm\frac{m_r\;\rho\;v_\infty^2}{\alpha}\;.$$

obr. 3.23

Dostáváme tedy výsledek

$$\rho \;=\; \frac{\alpha}{m_r\; v_\infty^2}\;\mathrm{cotg}\;\frac{\chi}{2}\;. \tag{3.58}$$

Všimněte si, že funkce $\rho(\chi)$ je klesající. To znamená, že čím větší srážkový parametr, čím větší vzdálenost v níž částice nabíhá, tím méně se bude při srážce odklánět.

Ve skutečnosti nikdy neexperimentujeme s jednou částicí, ale při studiu rozptylu vysíláme celý svazek částic. Předpokládejme, že tento svazek byl zkolimován a je monoenergetický, tj. že částice letí po rovnoběžných přímkách stejnou rychlostí. Kromě toho nechť hustota toku částic n, tj. počet částic, které proletí za jednotku času jednotkou průřezu svazku, je konstantní (obr.3.23).

Pak zavádíme důležitou měřitelnou veličinu nazývanou *diferenciální srážkový průřez* rozptylu a označujeme jej $d\sigma$. Je to poměr počtu částic dN, které se rozptýlí za jednotku času v rozmezí úhlů $\chi\;-\;(\chi+d\chi)$ k hustotě toku částic n; tato veličina má zřejmě rozměr plochy a můžeme si ji představovat jako symbolickou plošku terčíku. [48] Z obr. 3.23 je vidět, že v udaném rozmezí úhlů se rozptýlí právě ty částice, které se pohybují v rozmezí srážkového parametru $\rho\;-\;(\rho+d\rho)$, tedy vytínají v průřezu svazku mezikruží s těmito poloměry. Máme tedy

$$d\sigma \;=\; \frac{dN}{n} \;=\; 2\pi\;\rho\;d\rho = 2\pi\;\rho\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|\;d\chi\;. \tag{3.59}$$

Absolutní hodnota derivace $d\rho/d\chi$ byla zvolena proto, abychom dostali kladnou veličinu $d\sigma$. Obyčejně vyjadřujeme $d\sigma$ nikoli vzhledem k intervalu úhlů $d\chi$, ale vzhledem k prostorovému úhlu $d\Omega$. Je-li svazek osově symetrický, představuje tento element prostorového úhlu rozmezí směrů mezi dvěma kuželi s vrcholovými úhly $\chi\;\;\chi+d\chi$. Přitom

$$d\Omega \;=\; 2\pi\;\sin\chi\;d\chi\;.$$

Určíme nyní srážkové průřezy izotropního a Rutherfordova rozptylu.

[48] Diferenciální srážkový průřez může charakterizovat pravděpodobnost i jakýchkoli dalších reakcí, které s částicemi nastanou a má ve fyzice velmi obecné použití.

Pro **izotropní rozptyl** máme podle (3.55)

$$d\sigma \;=\; 2\pi\;\rho\;\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right| d\chi \;=\; \pi\;a^2\;\cos\frac{\chi}{2}\;\sin\frac{\chi}{2} \;=\; \frac{1}{2}\;\pi\;a^2\;\sin\chi\;d\chi \;=\; \frac{1}{4}\;a^2\;d\Omega\;. \tag{3.60}$$

Vidíme, že izotropní rozptyl nezávisí na směru (proto se tak jmenuje), počet rozptýlených částic závisí jen na velikosti prostorového úhlu. Mohli bychom zintegrovat diferenciální srážkový průřez přes plný prostorový úhel a určit celkový počet částic, které se na tvrdé kuličce rozptýlí v poměru k hustotě dopadajícího toku. Integrální srážkový průřez pak je

$$\sigma \;=\; \int_\Omega d\sigma \;=\; \frac{1}{4}\;a^2\;\int_\Omega d\Omega \;=\; \pi\;a^2\;. \tag{3.61}$$

Je to tedy prostě průřez kuličky.

Trochu složitější výpočet vyžaduje diferenciální srážkový průřez **Rutherfordova rozptylu**. Použijeme (3.58) a máme

$$d\sigma \;=\; 2\pi\;\rho\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right| d\chi \;=\; 2\pi\left(\;\frac{\alpha}{m_r\;v_\infty^2}\;\right)^2 \operatorname{cotg}\frac{\chi}{2}\;\frac{1}{2}\;\frac{d\chi}{\sin^2\frac{\chi}{2}} \;=\; \left(\;\frac{\alpha}{2m_r\;v_\infty^2}\;\right)^2\;\frac{2\pi\;\sin\chi\;d\chi}{\sin^4\frac{\chi}{2}} \;=$$

$$=\;\left(\;\frac{\alpha}{2m_r\;v_\infty^2}\;\right)^2\;\frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\chi}{2}}\;. \tag{3.62}$$

To je slavný **Rutherfordův vzorec**. Aplikujeme-li jej na rozptyl částice alfa o náboji $2e$ na atomovém jádře o náboji Ze, dostaneme

$$d\sigma \;=\; \frac{1}{4}\;\left(\;\frac{Ze^2}{E}\;\right)^2\;\frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\chi}{2}}\;. \tag{3.63}$$

.

Jak vidíme, rozptyl velmi silně závisí na úhlu χ. Kdybychom se pokusili najít celkový, integrální průřez rozptylu, dostali bychom nekonečnou hodnotu. To souvisí s dalekým působením sil nepřímo úměrných převrácenému čtverci vzdálenosti, i při velmi velkých hodnotách parametru se částice nepatrně odchyluje. Pak je ovšem třeba vzít v úvahu stínící účinek ostatních částic.

3.3.3 Nepružné srážky

Při nepružných srážkách se část mechanické (kinetické) energie částic (těles) mění nevratně na jiné formy energie - vnitřní tepelnou energii, energii plastické deformace apod. Dobře známe takové nepružné srážky automobilů. Při srážkách atomů se může část kinetické energie přeměnit na excitační energii atomu, ten může přejít do vybuzeného stavu a po čase tuto energii vyzářit v podobě kvanta elektromagnetického záření. [49] Omezíme se

[49] K tomu je ovšem třeba podle kvantové fyziky určité rezonanční podmínky - energie se může pohlcovat jen v energetických kvantech odpovídajících vzdálenosti energetických hladin atomu. Pružné a nepružné srážky atomů lze dobře studovat při tzv. Franckově - Hertzově pokusu.

a b c

obr. 3.24

však na přímý ráz dvou koulí, který může být buď dokonale pružný, částečně pružný nebo dokonale nepružný.

Narazí-li na sebe dvě koule dokonale pružným přímým rázem, budou se deformovat, na jejich styku vznikne postupně se zvětšující rovinná ploška až do maximálního přiblížení středů obou koulí. Kinetická energie se přitom mění v energii elastickou, energii konzervativních pružných sil. Pak se začnou středy koulí opět vzdalovat, elastická energie se začne zpětně měnit v kinetickou energii a koule od sebe opět odskočí. [50] Při takové srážce nezáleží na poloměru obou koulí; v limitě můžeme předpokládat, že rovina je koule o nekonečném poloměru a studovat pružné srážky podle dopadu a odrazu malé kuličky na rovinnou plochu.

Na obr. 3.24 a je znázorněn časový průběh síly působící na takovou kuličku při dokonale pružném rázu. Vidíme, že síla mířící proti směru dopadu kuličky nejdříve rychle vzrůstá a při odpružování opět klesá, při čemž tato časová závislost je symetrická. Plocha vyčárkované oblasti I je rovna hybnosti částice - při pružném dopadu na rovinu (ocelové kuličky na skleněnou desku) se hybnost částice změní na opačnou.

Ve skutečnosti ráz není nikdy dokonale pružný a při odrazu kulička již nezíská svou původní hybnost (obr. 3.24 b). Při dokonale nepružném rázu (ocelová kulička na olověný plech, ráz dvou koulí z plastelíny) se obě tělesa po rázu spojí a pohybují se dále jako jedno těleso, případně je-li jedno z nich nehybná deska, nedojde k odrazu (obr. 3.24 c).

Stupeň pružnosti při srážce udáváme tzv. *koeficientem restituce* k. Je dán podílem relativních rychlostí částic po srážce a před srážkou:

$$k = \frac{v_1' - v_2'}{v_2 - v_1} \,. \tag{3.64}$$

[50] Matematický výpočet průběhu tohoto procesu je znám jako tzv. Hertzova kontaktní úloha, která se řeší v teorii pružnosti. Úloha je nazvána podle Heinricha Hertze, na rozdíl od Gustava Hertze, který je spoluautortem Franckova - Hertzova pokusu.

Dopadá-li těleso z výšky h na nehybnou podložku a po odrazu vystoupí do výšky h', můžeme koeficient restituce určit jako

$$k = -\frac{v_1'}{v_1} = \sqrt{\frac{h'}{h}} \tag{3.65}$$

(rychlosti v_1 a v_1' mají opačná znaménka). Koeficient restituce můžeme také stanovit z impulsů síly při přímém (I_1) a zpětném (I_2) pohybu tělesa (poměru ploch II a I na obr. 3.24). Po dobu kontaktu mají tělesa společnou rychlost v, takže

$$I_1 = m_1 (v - v_1) , \quad I_2 = m_1 (v_1' - v) , \quad -I_1 = m_2 (v - v_2) , \quad -I_2 = m_2 (v_2' - v)$$

a vyloučíme-li odtud m_1, m_2 a v, dostaneme

$$k = \frac{I_2}{I_1} . \tag{3.66}$$

Hodnotu koeficientu restituce určujeme ovšem experimentálně (sklo na sklo $k = 0,94$, ocel na ocel $k = 0,93$, slonovina na ocel $k = 0,86$, pryž na mramor $k = 0,82$ apod.). Pro dokonale pružný ráz je $k = 1$, pro dokonale nepružný $k = 0$. Musíme mít též na paměti, že koeficient restituce není konstantní a že při malých rychlostech nárazu se blíží jedné.

Příklady

3.1 Je dána soustava tří hmotných bodů o hmotnostech m_1 =1 kg, m_2 = 2 kg a m_3 = 3 kg a jejich polohové vektory jako funkce času:

$$\vec{r}_1 = (2t,\ 4t,\ 5) , \quad \vec{r}_2 = (t^2 + 2,\ 1,\ 0) , \quad \vec{r}_3 = (1,\ t^2 + 2,\ 0).$$

Údaje jsou v metrech a sekundách. Určete výslednici vnějších sil a výsledný moment vnějších sil vzhledem k počátku souřadnic.

$$[\vec{F} = (4,\ 6,\ 0) \text{ N} , \quad \vec{L} = (0,\ 0,\ 2) \text{ N.m}]$$

3.2 Dvě loďky plují proti sobě rovnoběžným směrem. Když se setkají, vymění si pytle s pašovaným zbožím o stejných hmotnostech m = 50 kg. Následkem toho se první loďka zastaví a druhá se pohybuje dál rychlostí $v = 8,5$ m.s^{-1} v původním směru. Jaké jsou rychlosti loděk v_1 , v_2 před výměnou pytlů, jsou li hmotnosti loděk m_1 =500 kg, m_2 =1 000 kg?

$$[1 \text{ m.s}^{-1} , \quad -9 \text{ m.s}^{-1}]$$

3.3 Tři loďky stejné hmotnosti M jedou za sebou stejnou rychlostí v. Ze střední loďky byla rychlostí u vzhledem k této loďce vyhozena ve stejnou dobu dvě závaží téže hmotnosti m do přední a zadní loďky. Jaké jsou rychlosti loděk v_1 , v_2 , v_3 po přehození závaží?

obr. 3.25 obr. 3.26

$$[v_{1,3} = \frac{Mv+m(v\pm u)}{M+m} \ , \quad v_2 = v]$$

3.4 Granát, který byl v klidu, se při explozi rozdělil na dvě části o hmotnostech m a $4m$. Část o hmotnosti m odletěla s kinetickou energií 100 J. Určete celkovou uvolněnou kinetickou energii.

[125 J]

3.5 Střela hmotnosti m =10 g byla vystřelena do dřevěného bloku hmotnosti M =2 kg ležícího na dřevěné podložce a uvízla v něm (obr. 3.25). Přitom jej posunula o 25 cm. Součinitel smykového tření bloku o podložku je $f = 0,2$. Určete práci síly tření, rychlost střely před nárazem a dobu pohybu bloku.

[0,985 J, 199 m.s^{-1}, 0,505 s]

3.6 **Balistické kyvadlo**. Na obr. 3.26 je balistické kyvadlo tvořené bedničkou s pískem hmotnosti M na závěsu délky l, které se používá k určování rychlosti střely. Určete rychlost střely hmotnosti m, která při nárazu do balistického kyvadla jej vychýlí o úhel α, jestliže
a) střela po nárazu v bedničce uvízne
b) střela po nárazu odskočí zpět rychlostí v_0
c) střela po nárazu ztratí rychlost a spadne dolů.

$$[v = \frac{M+m}{m}\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)} \ , \quad v = \frac{M}{m}\sqrt{} - v_0 \ , \quad v = \frac{M}{m}\sqrt{}]$$

3.7 Stanovte zrychlení a rychlost vozíku, působí-li na něj stálá vodorovná síla velikosti F, a je-li na vozíku písek, který vypadává otvorem v podlaze. Za jednotku času se vysype μ písku. V čase $t = 0$ byla rychlost vozíku rovna nule, hmotnost vozíku s pískem M.

$$[a = \frac{F}{M-\mu t} \ , \quad v = \frac{F}{\mu} \ \ln\frac{M}{M-\mu t}]$$

3.8 Dvě koule o hmotnostech m_1 =0,5 kg a m_2 =1 kg pohybující se proti sobě rychlostmi $v_1 = 5$ m.s^{-1} a $v_2 = 8$ m.s^{-1} se nepružně srazí. Určete, jak velká mechanická energie se přitom přemění na energii jiného druhu (tepelnou, akustickou atd).

[1,5 J]

3.9 Dvě koule o hmotnostech m_1 a m_2 se pohybují proti sobě a srazí se. Srážka je dokonale nepružná. Před srážkou byly kinetické energie koulí v poměru $T_1/T_2 = 20$. Za jaké podmínky se budou koule po srážce pohybovat ve směru původního pohybu druhé koule?

[$m_2/m_1 > 20$]

3.10 Dvě koule o hmotnostech $m_1 = 5$ kg a $m_2 = 3$ kg se pohybují proti sobě po téže přímce rychlostmi $v_1 = 12$ cm.s^{-1}, $v_2 = 4$ cm.s^{-1} a přímo na sebe narazí. Určete jejich rychlosti po srážce, je-li ráz a) dokonale pružný, b) dokonale nepružný.

[a) 6 cm.s^{-1}, 14 cm.s^{-1} , b) 9 cm.s^{-1}]

3.11 Dvě ocelové kuličky jsou zavěšeny na nitích tak, že když se dotýkají, jsou jejich středy ve vzdálenosti l =1 m od bodů závěsu a nitě jsou svislé. Hmotnosti kuliček jsou $m_1 = 800$ g a $m_2 = 200$ g.
a) Lehčí kuličku vychýlíme o úhel 90^0 a pustíme. Ráz kuliček je dokonale pružný. Určete výšky h_1 , h_2, do kterých vystoupí kuličky.

[$h_1 = \frac{4m_2^2 l}{(m_1+m_2)^2} = 16$ cm , $h_2 = \frac{(m_2-m_1)^2 l}{(m_1+m_2)^2} = 36$ cm]

b) Co se stane, vychýlíme-li těžší kuličku o 90^0 a pustíme?

[Těžší kulička vystoupí do výšky 36 cm, menší opíše celou kružnici.]

c) Při jakém poměru hmotností kuliček budou výšky výstupu obou kuliček po rázu stejné?

[3:1]

3.12 Dvě částice o hmotnostech m_1 a m_2 se nacházejí na ose x, první v počátku, druhá ve vzdálenosti l od počátku. V okamžiku $t = 0$ se začnou k sobě přibližovat působením vzájemné konstantní přitažlivé síly $\vec{F}$. Kdy a kde se srazí a jakou rychlostí?

[$t = \sqrt{\frac{2m_1 m_2 l}{(m_1+m_2)F}}$, v těžišti , $v = \sqrt{\frac{2(m_1+m_2)Fl}{m_1 m_2}}$]

3.13 Jak se změní situace v předchozím příkladě, budou-li se částice přitahovat gravitačními silami?

[bodové částice se srazí opět v těžišti nekonečnou rychlostí;
půjde-li o koule s poloměry r_1, r_2, srazí se rychlostí $v = \sqrt{\frac{2\kappa(m_1+m_2)(l-r_1-r_2)}{r_1+r_2}}$]

4. MECHANIKA TUHÉHO TĚLESA

4.1 Kinematika tuhého tělesa

Dosud jsme se zabývali mechanikou částice a soustavy částic. Pokud jsme používali název "těleso", ztotožňovali jsme ho s částicí. Považovali jsme tedy částici za určitý hmotný objekt, který se pohybuje jako celek a jehož pohyb lze popsat zadáním souřadnice jednoho bodu. Nezabývali jsme se tedy vzájemným pohybem *částí* takového tělesa.

Ve fyzice nazýváme tělesem určitý objem V, v němž je nějakým způsobem rozložena hmotnost, ať již spojitě nebo nespojitě. Víme, že všechna tělesa jsou tvořena molekulami a atomy, atomy jádry a elektrony atd. Je-li však těleso tvořeno velkým množstvím atomů, můžeme od jeho nespojité struktury odhlédnout a považovat rozložení hmotnosti v tělese za spojité. Jde tedy o spojitost ve fyzikálním smyslu - v sebemenším uvažovaném objemu spojitého tělesa musí být stále dosti atomů. Nekonečně malý objem tuhého tělesa dV nemůžeme tedy limitovat k nule v matematickém smyslu, ale musíme ho chápat jako dostatečně malý, tak aby uvažované veličiny charakterizující těleso v něm bylo možno považovat za konstantní.

To nám umožňuje zavést pojem *hustoty* tělesa v daném bodě. Zvolíme v tělese bod A o souřadnicích $x,\ y,\ z$ a obklopíme ho myšleným malým objemem ΔV, v němž je uzavřena hmotnost Δm. Vytvoříme nyní posloupnost takových do sebe vložených stále se zmenšujících objemů, které se stahují kolem bodu A. Pak definujeme hustotu tělesa v daném bodě jako limitu

$$\rho\ (x, y, z)\ =\ \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}\ . \tag{4.1}$$

Předpokladem ovšem je, že taková limita existuje a nezávisí na tom jakou posloupnost zmenšujících se objemů vybereme. [51] Hustotu můžeme též definovat pomocí celkové hmotnosti tělesa M integrálním vztahem

$$M\ =\ \int_V \rho\ (\ x,\ y,\ z\ )\ dV\ . \tag{4.2}$$

Je-li těleso homogenní, s konstantní hustotou, je jeho hustota prostě

$$\rho\ =\ \frac{M}{V}\ =\ \text{konst}\ . \tag{4.3}$$

Hustota má fyzikální rozměr $[\rho]\ =\ \mathrm{L}^{-3}\mathrm{M}$ a měří se v jednotkách $\mathrm{kg.m}^{-3}$. U plošných útvarů můžeme zavést *plošnou hustotu* (hmotnost na jednotku plochy) σ, u lineárních útvarů *lineární hustotu* (hmotnost na jednotku délky) τ.

[51] Někdy se hustota zavádí jako derivace $\rho\ =\ \frac{dm}{dV}$. Není to ovšem korektní, neboť funkce $m(V)$ není definována.

obr. 4.1 obr. 4.2

Těleso podle povahy můžeme tedy popisovat buď jako nespojité rozložení hmotnosti (je to vlastně soustava hmotných bodů v nějakém objemu) a udávat hmotnosti m_α a polohové vektory $\vec{r}_\alpha$ jednotlivých bodů, nebo jako spojité rozložení hmotnosti a udávat funkci $\rho\ (x,\ y,\ z)$. V prvním případě je celková hmotnost $M = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha$, ve druhém $M = \int_V \rho dV$.

V této kapitole se budeme zabývat důležitým případem *tělesa tuhého*. Pojem tuhého tělesa je opět pouhou fyzikální idealizací, modelem, a reálná tělesa se mu mohou více nebo méně blížit. U tuhého tělesa předpokládáme, že vzájemné vzdálenosti jeho částí se nemohou měnit, tuhé těleso se nemůže deformovat. [52] To ovšem podstatně zjednodušuje popis pohybu takového tělesa. Považujeme-li tuhé těleso za soustavu N hmotných bodů v neměnných vzájemných vzdálenostech, je celkový počet stupňů volnosti tuhého tělesa dán počtem stupňů volnosti těchto bodů zmenšený o počet nezbytných vazeb mezi nimi. Přitom poloha tuhého tělesa je dána, známe-li polohu tří jeho bodů neležících v přímce - víme z praxe, že těleso stačí upevnit ve třech bodech. Tyto tři body, jsou-li volné, mají 9 stupňů volnosti. Protože jsou však vzájemně vázány třemi neměnnými vzdálenostmi, bude celkový počet stupnů volnosti takového tělesa tvořeného třemi body roven 9 - 3 = 6. Připojení dalších bodů nebude již počet stupňů volnosti zvětšovat. Každý nový bod má sice tři stupně volnosti, ale musí být upevněn třemi vazbami.

Můžeme tedy očekávat, že pohyb tuhého tělesa bude záviset na dvanácti integračních konstantách a alespoň pro izolované tuhé těleso bude možno najít řešení jeho pohybu v kvadraturách. Pohyb tuhého tělesa může být zásadně dvojí - *translační* a *rotační*; každý z nich vyžaduje obecně tři stupně volnosti. Translační pohyb lze popsat jako pohyb jednoho bodu pevně spojeného s tělesem, například těžiště, který můžeme zvolit za počátek kartézské soustavy S', v inerciální kartézské soustavě S (obr. 4.1). Soustava S' spojená s tělesem nemusí být obecně inerciální. Pouze tehdy, nebude-li na těleso působit výslednice vnějších sil, inerciální bude, a počátek O' se bude pohybovat rovnoměrně přímočaře.

[52] V teorii relativity je existence tuhého tělesa dokonce principiálně vyloučena. Zapůsobí-li na jeden konec takového tělesa silový impuls, musí se tuhé těleso dát do pohybu najednou jako celek. To ovšem znamená, že silové působení se musí rozšířit v objemu tělesa nekonečně rychle, což teorie relativity nepřipouští.

Sledování translačního pohybu tuhého tělesa nám nepřináší nic nového - lze jej popsat pohybovou rovnicí těžiště. Budeme se tedy zajímat především o rotační pohyb tuhého tělesa. Pak je vhodné spojit počátky obou soustav S a S' v jeden a zajímat se jen o změny směru os soustavy S' vzhledem k soustavě S. Popis rotace tuhého tělesa se pak redukuje na vzájemný pohyb dvou kartézských soustav se společným počátkem (obr. 4.2).

Při takovém přístupu považujeme jeden bod tuhého tělesa za nehybný a jde o *rotaci tělesa kolem bodu*. Vedle toho může těleso konat též známou *rotaci kolem osy*, při čemž tato osa může být buď *pevná* nebo *volná*. Kola automobilu rotují kolem pevné osy (která se však přemisťuje translačním pohybem), zeměkoule nebo umělá družice uvedená do rotace rotuje kolem volné osy.

Lze ukázat, že jakékoli pootočení kolem bodu lze nahradit pootočením kolem osy. Opíšeme-li totiž bodu kulovou plochu, přejdou v důsledku pootočení nějaké dva body A, B na povrchu koule v nové dva body A', B'. Roviny symetrie úseček AA', BB' se protnou v přímce, která představuje hledanou osu rotace. Při rotaci kolem této náhradní osy nebude však těleso obecně procházet týmiž mezipolohami, jako při rotaci kolem bodu. Půjde-li však o nekonečně malé pootočení, je možno je vždy považovat za *rotaci kolem okamžité osy*, jejíž poloha se může každým okamžikem měnit.

Rozložíme nyní obecný okamžitý pohyb tuhého tělesa na translaci počátku vztažné soustavy O' spojené s tělesem rychlostí $\vec{V}$ a pootočení tělesa kolem okamžité osy rotace procházející tímto počátkem úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}$. Rychlosti jednotlivých bodů tvořících těleso v inerciální soustavě S budou podle (2.149) rovny

$$\vec{v} \;=\; \vec{V} \;+\; \vec{\Omega} \times \vec{r}' \,. \tag{4.4}$$

Vzniká ovšem otázka, jak se změní tento výsledek, zvolíme-li v tělese jiný počátek vztažné soustavy O''. Nechť vektor spojující tyto dva počátky je $O'O'' = \vec{R}$. Podle (4.4) bude

$$\vec{v} \;=\; \vec{V} \;+\; \vec{\Omega} \times \vec{R} \;+\; \vec{\Omega} \times \vec{r}'' \,. \tag{4.5}$$

Počátek O'' však není o nic lepší než počátek O'; zatím jsme ani o žádném z nich nepředpokládali, že by musel ležet v těžišti. Proto i vzhledem k počátku O'' musí platit stejný vztah jako (4.4), kde označíme $\vec{V}^*$ rychlost tohoto počátku v soustavě S a $\vec{\Omega}^*$ úhlovou rychlost rotace vybraného bodu kolem okamžité osy procházející O'':

$$\vec{v} \;=\; \vec{V}^* \;+\; \vec{\Omega}^* \times \vec{r}'' \,. \tag{4.6}$$

Aby vztahy (4.5) a (4.6) mohly platit pro každý bod tělesa, musí být

$$\vec{V}^* \;=\; \vec{V} \;+\; \vec{\Omega} \times \vec{R} \;\;, \qquad \vec{\Omega}^* \;=\; \vec{\Omega} \,. \tag{4.7}$$

Odtud můžeme učinit důležitý závěr, že úhlová rychlost $\vec{\Omega}$ rotace kolem okamžité osy je společná všem bodům tělesa, nezávisí ne volbě bodu jímž osa rotace prochází a **charakterizuje tedy rotační pohyb tělesa jako celku**. Obecný pohyb tělesa v každém okamžiku můžeme tedy rozložit na pohyby dva:

1. Je-li $\vec{V} \perp \vec{\Omega}$, tj. pohybuje-li se těleso translačním pohybem kolmo k ose rotace, leží podle (4.4) rychlosti všech bodů tělesa v rovinách kolmých k ose rotace a můžeme vybrat počátek O'' (polohu osy) tak, aby $\vec{V}^* = 0$. Potom pohyb představuje *čistou rotaci kolem*

obr. 4.3 obr. 4.4

okamžité osy. Tak pohyb kola automobilu nebo valení válce po rovině můžeme popsat dvojím způsobem: jako translační pohyb osy symetrie a současné rotace kolem ní nebo jako čistou rotaci kolem dotekové přímky s rovinou.

2. Má-li vektor $\vec{V}$ složku ve směru osy rotace, koná těleso navíc translační pohyb podél osy rotace rychlostí $\vec{V} \cdot \vec{\Omega}$. To je případ smyku automobilového kola.

4.2 Dynamika tuhého tělesa

4.2.1 Silová dvojice

Působí-li na tuhé těleso vnější síly a jejich momenty, můžeme opět použít první a druhou větu impulsovou. Je-li $\vec{P}$ hybnost tuhého tělesa a $\vec{L}$ jeho moment hybnosti, $\vec{F}$ a $\vec{N}$ výslednice vnějších sil a výsledný moment hybnosti vnějších sil, platí

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}\,, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}\,. \tag{4.8}$$

Při určování výslednice vnějších sil a výsledného momentu vnějších sil musíme však uvážit, v kterých bodech tělesa tyto síly působí. Síly nemůžeme považovat za volné vektory, nanejvýš za klouzavé (můžeme je posouvat po přímce jejich působení). Vnější síly mohou přitom ovlivnit jak translační tak rotační pohyb tělesa. Můžeme postupovat tak, že zvolíme nějaký bod tuhého tělesa za působiště vnějších sil, všechny síly do tohoto bodu přeneseme a určíme jejich výslednici. Takové přenášení sil je na obr. 4.3.

Působí-li síla $\vec{F}_\alpha$ v bodě A_α tuhého tělesa, můžeme ji přenést do nového působiště A tak, že v tomto bodě jakoby umístíme dvě stejné proti sobě působící síly $\vec{F}_\alpha$ a $-\vec{F}_\alpha$; tím se

samozřejmě na uspořádání sil nic nezmění. Můžeme však nyní mít za to, že síla $\vec{F}_\alpha$ působí v bodě A a navíc na těleso působí *dvojice sil* $\vec{F}_\alpha$, $-\vec{F}_\alpha$, jejichž působiště spojuje vektor $\vec{a}_\alpha$. Taková silová dvojice vyvolává rotaci tělesa.

Sečteme-li momenty sil této dvojice, dostaneme *moment silové dvojice*, který nezávisí na volbě počátku soustavy souřadnic (obr. 4.3):

$$\vec{D}_\alpha \;=\; \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha \;-\; \vec{r}_A \times \vec{F}_\alpha \;=\; (\;\vec{r}_\alpha \;-\; \vec{r}_A\;) \;\times \vec{F}_\alpha \;=\; \vec{a}_\alpha \times \vec{F}_\alpha\;. \tag{4.9}$$

Jeho velikost je zřejmě rovna součinu velikosti síly a ramene silové dvojice, tj. vzdálenosti obou přímek, v nichž síly dvojice působí. Pootočí-li se těleso tvaru válce například působením silové dvojice tečných sil o úhel φ, vykoná silová dvojice práci (obr. 4.4)

$$A \;=\; 2\int_0^\varphi F\;R\;d\varphi \;=\; \int_0^\varphi D\;d\varphi\;. \tag{4.10}$$

Působí-li na tuhé těleso v různých bodech síly $\vec{F}_\alpha$, přeneseme je popsaným způsobem do jednoho zvoleného bodu (například těžiště) a najdeme zde výslednici těchto sil $\vec{F} = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha$. Dále musíme sečíst momenty všech silových dvojic

$$\vec{D} \;=\; \sum_\alpha (\;\vec{r}_\alpha - \vec{r}_A\;) \times F_\alpha \;=\; \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha \;-\; \vec{r}_A \times \sum_\alpha \vec{F}_\alpha \;=\; \vec{N} \;-\; \vec{r}_a \times \vec{F}\;. \tag{4.11}$$

Je-li výslednice vnějších sil nulová, je výsledný moment silových dvojic právě roven výslednému momentu vnějších sil, $\vec{D} = \vec{N}$, a nezávisí na poloze bodu A.

Představme si nyní tuhé těleso v homogenním tíhovém poli. Výslednice rovnoběžných tíhových sil, které působí v jednotlivých bodech tělesa, bude zřejmě

$$\vec{F} \;=\; \sum_\alpha m_\alpha\;\vec{g} \;=\; M\;\vec{g}.$$

Výsledný moment vnějších sil bude

$$\sum_\alpha m_\alpha(\;\vec{r}_\alpha \times \vec{g}\;) \;=\; (\sum_\alpha m_\alpha\;\vec{r}_\alpha)\;\times\;\vec{g} \;=\; \frac{\sum_\alpha m_\alpha\;\vec{r}_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha}\;\times\;\vec{F} \;=\; \vec{R}\;\times\;\vec{F}\;, \tag{4.12}$$

kde $\vec{R}$ je polohový vektor těžiště. Odtud je vidět, že výsledná tíhová síla působí v homogenním tíhovém poli skutečně v těžišti. Poloha těžiště (hmotného středu) je přitom definována bez ohledu na vnější pole, pouze na základě rozložení hmoty v tělese. Bude-li těleso v nehomogenním tíhovém poli (například velmi rozměrné těleso v zemském tíhovém poli), nelze už obecně tvrdit, že výsledná tíhová síla působí v hmotném středu (těžišti).

4.2.2 Tenzor momentu setrvačnosti

Nechť se tuhé těleso tvořené hmotnými body m_α pohybuje tak, že počátek vztažné soustavy spojené s tělesem se pohybuje obecnou rychlostí $\vec{V}(t)$ a těleso koná rotaci obecnou úhlovou rychlostí $\Omega(t)$. Potom jeho kinetická energie bude

$$T \;=\; \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha\;\vec{v}_\alpha^2 \;=\; \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha\;(\;\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}'_\alpha\;)^2 \;=$$

$$= \frac{1}{2}\, M\, V^2 \;+\; \vec{V}\cdot\vec{\Omega}\times\sum_\alpha m_\alpha\, \vec{r}'_\alpha \;+\; \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha\, (\vec{\Omega}\times\vec{r}'_\alpha)^2\,. \tag{4.13}$$

Využijeme nyní výhody těžišťové soustavy a umístíme počátek O' do těžiště tělesa. Potom bude druhý člen na pravé straně (4.13) roven nule a máme

$$T \;=\; \frac{1}{2}M\, V^2 \;+\; \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha\, (\,\vec{\Omega}\times\vec{r}'_\alpha\,)^2 \;=\; T_p \;+\; T_r\,. \tag{4.14}$$

Kinetickou energii tak můžeme rozdělit v souladu s Königovou větou na kinetickou energii postupného pohybu těžiště a vnitřní kinetickou energii rotačního pohybu.

Upravíme nyní výraz pro rotační kinetickou energii s pomocí Lagrangeovy identity (M.64), z níž plyne

$$(\,\vec{a}\times\vec{b}\,)^2 \;=\; a^2b^2 \;-\; (\,\vec{a}\cdot\vec{b}\,)^2\,.$$

Tak dostaneme

$$T_r \;=\; \frac{1}{2}\,\sum_\alpha m_\alpha\, (\,\vec{\Omega}\times\vec{r}'_\alpha\,)^2 \;=\; \frac{1}{2}\,\sum_\alpha m_\alpha\, [\,\Omega^2\, r'^2_\alpha \;-\; (\vec{\Omega}\;\cdot\;\vec{r}'_\alpha)^2\,] \;=$$

$$= \frac{1}{2}\,\vec{\Omega}\;\cdot\;\sum_\alpha m_\alpha\, [r'^2_\alpha\,\vec{\Omega} \;-\; (\,\vec{\Omega}\;\cdot\;\vec{r}'_\alpha\,)\,\vec{r}'_\alpha]\,. \tag{4.15}$$

Podobně upravíme výraz pro moment hybnosti tuhého tělesa s použitím věty o dvojitém vektorovém součinu (M.63). Protože se zajímáme pouze o rotaci tělesa, můžeme ztotožnit počátky soustav souřadnic O, O' a máme

$$\vec{r}_\alpha \;=\; \vec{r}'_\alpha\,, \quad \vec{v}'_\alpha \;=\; 0\,, \quad \vec{v}_\alpha \;=\; \vec{\Omega}\times\vec{r}'_\alpha\,.$$

Potom moment hybnosti tělesa bude

$$\vec{L} \;=\; \sum_\alpha m_\alpha\, \vec{r}_\alpha\times\vec{v}_\alpha \;=\; \sum_\alpha m_\alpha\, \vec{r}'_\alpha\times(\,\vec{\Omega}\times\vec{r}'_\alpha) \;=\; \sum_\alpha m_\alpha[\,r'^2_\alpha\vec{\Omega} \;-\; (\,\vec{\Omega}\;\cdot\;\vec{r}'_\alpha\,)\,\vec{r}'_\alpha\,]\,. \tag{4.16}$$

Porovnáním (4.15) a (4.16) zjistíme, že mezi kinetickou energií rotačního pohybu a momentem hybnosti platí vztah

$$T_r \;=\; \frac{1}{2}\,\vec{L}\;\cdot\;\vec{\Omega}\,. \tag{4.17}$$

Upravíme nyní výraz pro moment hybnosti (4.16) dále. Přejdeme přitom ke složkovému vyjádření a budeme používat Einsteinovo sumační pravidlo (M.39). Potom

$$L_i \;=\; \sum_\alpha m_\alpha\, (\Omega_i\, x'_{\alpha j}\, x'_{\alpha j} \;-\; \Omega_k\, x'_{\alpha k}\, x'_{\alpha i}\,)\,. \tag{4.18}$$

V tomto výrazu probíhá sčítání přes všechny elementy tuhého tělesa, ale složky $\vec{\Omega}$ se tohoto sčítání nezúčastní. Bylo by proto vhodné vytknout tyto složky před celou sumu. Protože zde však vystupuje jednak složka Ω_i a jednak Ω_k, využijeme vlastností Kroneckerova symbolu δ_{ik}:

$$L_i \;=\; \sum_\alpha m_\alpha\, (\Omega_k\delta_{ik}\, x'_{\alpha j}\, x'_{\alpha j} \;-\; \Omega_k\, x'_{\alpha i}\, x'_{\alpha k}\,)\,. \tag{4.19}$$

Nyní můžeme složku Ω_k vytknout a psát

$$L_i \;=\; \Omega_k \sum_\alpha m_\alpha \;(\; x'_{\alpha j}\; x'_{\alpha j}\; \delta_{ik} \;-\; x'_{\alpha i}\; x'_{\alpha k} \;)\;. \tag{4.20}$$

Získaná suma vyjadřuje pouze rozložení hmoty v tělese rotujícím kolem těžiště a závisí na dvou indexech, i a k, je tvořena součiny složek vektorů s těmito indexy. Je to tedy tenzor a nazýváme jej *tenzorem setrvačnosti* vzhledem k těžišti:

$$I_{ik} \;=\; \sum_\alpha m_\alpha \;(\; x'_{\alpha j}\; x'_{\alpha j}\; \delta_{ik} \;-\; x'_{\alpha i}\; x'_{\alpha k} \;)\;. \tag{4.21}$$

Je-li hmota v tělese rozložena spojitě, máme místo (4.21) integrál

$$I_{ik} \;=\; \int_V \rho \;(\; x'_j\; x'_j\; \delta_{ik} \;-\; x'_i x'_k \;)\; dV\;. \tag{4.22}$$

Pomocí tenzoru setrvačnosti můžeme vyjádřit složky momentu hybnosti tělesa a jeho rotační kinetickou energii jako

$$L_i \;=\; I_{ik}\; \Omega_k \quad , \qquad T_r \;=\; \frac{1}{2}\; I_{ik}\; \Omega_i\; \Omega_k\;. \tag{4.23}$$

Zapíšeme tenzor setrvačnosti v podobě matice; v dalším budeme vynechávat čárkování souřadnic.

$$I_{ik} \;=\; \begin{pmatrix} \sum_\alpha m_\alpha (y_\alpha^2 + z_\alpha^2) & -\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha y_\alpha & -\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha z_\alpha \\ -\sum_\alpha y_\alpha x_\alpha & \sum_\alpha m_\alpha (x_\alpha^2 + z_\alpha^2) & -\sum_\alpha m_\alpha y_\alpha z_\alpha \\ -\sum_\alpha m_\alpha z_\alpha x_\alpha & -\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha y_\alpha & \sum_\alpha m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) \end{pmatrix}\;. \tag{4.24}$$

Je-li hmota v tělese rozdělena spojitě, bude tenzor setrvačnosti

$$I_{ik} \;=\; \begin{pmatrix} \int_V \;\rho\; (y^2 + z^2)\; dV & -\int_V \;\rho\; x\; y\; dV & -\int_V \;\rho\; x\; z\; dV \\ -\int_V \;\rho\; y\; x\; dV & \int_V \;\rho\; (x^2 + z^2)\; dV & -\int_V \;\rho\; y\; z\; dV \\ -\int_V \;\rho\; z\; x\; dV & -\int_V \;\rho\; z\; y\; dV & \int_V \;\rho\; (x^2 + y^2)\; dV \end{pmatrix}\;. \tag{4.25}$$

Tenzor momentu setrvačnosti je symetrický, jak se snadno přesvědčíme. Nyní se nám hodí poznatky o vlastnostech symetrických tenzorů, které jsme načerpali ve třetím odstavci kapitoly Matematický aparát. Především víme, že symetrické tenzory lze diagonalizovat, tj. najít takové směry os souřadnic, že tenzor setrvačnosti bude mít v těchto osách tvar

$$I_{ik} \;=\; \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \int_V \;\rho\; (y^2 + z^2)\; dV & 0 & 0 \\ 0 & \int V\; \rho\; (x^2 + z^2)\; dV & 0 \\ 0 & 0 & \int_V \;\rho (x^2 + y^2)\; dV \end{pmatrix}\;. \tag{4.26}$$

Veličiny $I_1,\ I_2,\ I_3$ se nazývají *hlavní momenty setrvačnosti* a takto zvolené osy *hlavní osy setrvačnosti.* V tuhém tělese tedy existuje nejen význačný bod těžiště, ale tři význačné kolmé směry z těžiště vycházející (směry hlavních os setrvačnosti). Nediagonální prvky tenzoru momentu setrvačnosti $I_{ik},\ i \neq k$ nazýváme *deviační momenty.*

Dále víme, že symetrický tenzor je možno geometricky vyjásřit středovou kvadrikou, kvadratickou plochou, která je invariantní, s tělesem jakoby pevně spojená. Rovnici této kvadriky pro tenzor setrvačnosti můžeme napsat v kanonickém tvaru jako

$$I_1\, x^2 \,+\, I_2\, y^2 \,+\, I_3\, z^2 \,=\, 1\,. \tag{4.27}$$

Jednička na pravé straně má ovšem příslušný fyzikální rozměr. Protože všechny tři hlavní momenty setrvačnosti jsou kladné a konečné, leží body této kvadriky v konečnu. Takovou kvadrikou je elipsoid, říkáme mu *elipsoid setrvačnosti.* Elipsoid setrvačnosti plně určuje tenzor setrvačnosti a tím i rotační vlastnosti tělesa, jeho moment hybnosti, kinetickou energii rotačního pohybu atd. Tato skutečnost si zaslouží zvláštní pozornosti - u libovolného tělesa sebekomplikovanějšího tvaru stačí znát jen polohu těžiště a tři poloosy elipsoidu setrvačnosti, abychom vystihli všechny možné rotace takového tělesa. Bude-li tedy například rotovat umělá družice s různými nepravidelnými výstupky a anténami nebo baletka či krasobruslařka, lze tato tělesa, alespoň z hlediska rotace, nahradit krásnou a jednoduchou symetrickou geometrickou plochou jakou je trojosý elipsoid!!

V hlavních osách setrvačnosti bude moment hybnosti tělesa a jeho rotační kinetická energie (4.23)

$$L_x \,=\, I_1\, \Omega_x\,, \quad L_y \,=\, I_2\, \Omega_y\,, \quad L_z \,=\, I_3\, \Omega_z$$

$$T_r \,=\, \frac{1}{2}\,(I_1\, \Omega_x^2 \,+\, I_2\, \Omega_y^2 \,+\, I_3\, \Omega_z^2)\,. \tag{4.28}$$

Ptejme se nyní, jak určit moment setrvačnosti tělesa, které rotuje kolem osy procházející těžištěm, ale svírá s hlavními osami obecný směr daný jednotkovým vektorem $\vec{n}$. Pod momentem setrvačnosti I přitom rozumíme veličinu, která souvisí s momentem hybnosti a kinetickou energií rotačního pohybu vztahy

$$\vec{L} \,=\, I\, \vec{\Omega}\,, \quad T_r \,=\, \frac{1}{2}\, I\, \Omega^2\,. \tag{4.29}$$

Známe-li hlavní momenty setrvačnosti tělesa, určíme moment setrvačnosti vzhledem k dané ose prostě jako

$$I \,=\, I_1\, n_x^2 \,+\, I_2\, n_y^2 \,+\, I_3\, n_z^2\,, \tag{4.30}$$

jak vyplývá z (4.23). Hlavní momenty setrvačnosti tedy odpovídají kinetické energii rotace kolem hlavních os setrvačnosti.

Známe-li elipsoid setrvačnosti, můžeme stanovit moment setrvačnosti vzhledem k libovolné ose procházející těžištěm geometricky. Pro hlavní osy setrvačnosti je to zřejmé - z rovnice elipsoidu plyne, že $I_1,\ I_2,\ I_3$ jsou převrácenými čtverci odpovídajících poloos elipsoidu. Míří-li osa rotace směrem $\vec{n}$, máme

$$I \,=\, I_1\, n_x^2 \,+\, I_2\, n_y^2 \,+\, I_3\, n_z^2 \,=\, \frac{1}{r^2}\,(I_1\, x^2 + I_2\, y^2 + I_3\, z^2) \,=\, \frac{1}{r^2}\,, \tag{4.31}$$

kde r je délka průvodiče z těžiště k průsečíku osy rotace s elipsoidem setrvačnosti.

Steinerova věta

Často bývá výhodné a nutné určovat moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose, která **neprochází** těžištěm. K tomu se používá tzv. Steinerova věta. Přejděme v tělese od počátku O' ležícím v těžišti k novému počátku O'' mimo těžiště; nechť vektor vedený z počátku O' k O'' jest $\vec{R}$. Potom pro moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející novým počátkem (a rovnoběžné s původní osou) máme

$$I^*_{ik} \;=\; \sum_\alpha m_\alpha \;(\; x''_{\alpha j}\; x''_{\alpha j}\; \delta_{ik} - x''_{\alpha i}\; x''_{\alpha k} \;) \;=$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha [\; (\; x'_{\alpha j} - R_j \;)\; (\; x'_{\alpha j} - R_j \;)\; \delta_{ik} \;-\; (\; x'_{\alpha i} - R_i \;)\; (\; x'_{\alpha k} - R_k \;)\;] \;=$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha\; x'_{\alpha j}\; x'_{\alpha j}\; \delta_{ik} \;-\; 2R_j \sum_\alpha m_\alpha\; x'_{\alpha j} \;+\; R_j\; R_j \delta_{ik} \sum_\alpha m_\alpha \;-$$

$$- \sum_\alpha m_\alpha\; x'_{\alpha i}\; x'_{\alpha k} \;+\; R_i \sum_\alpha m_\alpha\; x'_{\alpha k} \;+\; R_k \sum_\alpha m_\alpha\; x'_{\alpha i} \;-\; R_i\; R_k \sum_\alpha m_\alpha \;.$$

V těžišťové soustavě druhý, pátý a šestý člen tohoto výrazu jsou rovny nule, takže zbývá

$$I^*_{ik} \;=\; \sum_\alpha m_\alpha \;(\; x'_{\alpha j}\; x'_{\alpha j}\; \delta_{ik} \;-\; x'_{\alpha i}\; x'_{\alpha k} \;) \;+\; M \;(\; R_j\; R_j\; \delta_{ik} \;-\; R_i\; R_k \;) \;.$$

Podle Steinerovy věty je tedy vztah mezi momenty setrvačnosti I a I^*

$$I^*_{ik} \;=\; I_{ik} \;+\; M \;(\; R_j\; R_j\; \delta_{ik} \;-\; R_i\; R_k \;) \;. \tag{4.32}$$

V praxi se ovšem setkáváme s jednodušší podobou Steinerovy věty. Rotuje-li těleso například kolem osy z procházející těžištěm a posune-li se tato osa rovnoběžně o vzdálenost a, půjde pouze o transformaci složky momentu setrvačnosti $I = I_{33}$. Potom bude

$$I^* \;=\; I \;+\; M \;(\; R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 \;-\; R_3^2 \;) \;=\; I \;+\; M \;(\; R_1^2 \;+\; R_2^2 \;) \;=\; M\; a^2 \;.$$

<u>Úloha</u> (Momenty setrvačnosti symetrických těles)

Určíme hlavní momenty setrvačnosti nejčastěji se vyskytujících symetrických těles:

Rotátor

Pod rotátorem rozumíme dva hmotné body o stejné hmotnosti m pevně spojené nehmotnou tyčkou délky l ("činku"). V kvantové mechanice se podobně chovají dvouatomové molekuly tvořené stejnými atomy. Podle obr. 4.5 umístíme rotátor ve směru osy z s těžištěm v počátku.

Podle definice hlavních momentů setrvačnosti

$$I_1 \;=\; I_2 \;=\; 2m \left(\frac{l}{2}\right)^2 \;=\; \frac{1}{2} m\; l^2 \;, \quad I_3 \;=\; 0 \;.$$

obr. 4.5 obr. 4.6

Dvouatomová molekula

Jsou-li hmotné body tvořící "činku" nestejné hmotnosti $m_1,\ m_2$, vznikne těleso, které je obdobou dvouatomové molekuly tvořené různými atomy (např. HCl). Umístíme je opět na ose z tak, že souřadnice obou bodů budou $z_1,\ z_2$ (obr. 4.6). Protože počátek je v těžišti, platí jak víme

$$z_1 \ = \ \frac{m_2\ l}{m_1 + m_2} \ , \qquad z_2 \ = \ - \ \frac{m_1\ l}{m_1 + m_2} \ .$$

Potom

$$I_1 \ = \ I_2 \ = \ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ l^2 \ = \ m_r\ l^2 \ ,$$

kde m_r je redukovaná hmotnost.

Obruč

Obruč hmotnosti M a poloměru R umístíme v rovině $x,\ y$ s osou symetrie z (obr. 4.7).

Moment setrvačnosti vzhledem k ose z určíme snadno, uvážíme-li, že všechna hmota obruče je rozložena ve vzdálenosti R od osy rotace:

$$I_3 \ = \ \int_V \rho\ (\ x^2 + y^2\ )\ dV \ = \ \int_V \rho\ R^2\ dV \ = \ R^2 \int_V \rho\ dV \ = \ M\ R^2 \ .$$

Pokud jde o momenty $I_1,\ I_2$, budou stejné. Je výhodné počítat jejich součet a pak jej dělit dvěma:

$$I_1 \ = \ I_2 \ = \ \frac{1}{2}\,(I_1 + I_2) \ = \ \frac{1}{2} \int_V \rho\ (\ y^2 + z^2 + x^2 + z^2\ )\ dV \ = \ \frac{1}{2} \int_V \rho\ R^2\ dV \ = \ \frac{1}{2}\ M\ R^2 \ .$$

Moment setrvačnosti kolem hlavních os ležících v rovině obruče je tedy poloviční vzhledem k momentu setrvačnosti kolem osy symetrie a tato rotace je nestabilní. Volně visící obruč roztočená kolem této osy má snahu přejít do rotace kolem osy symetrie, tj. rotovat ve vodorovné poloze.

obr. 4.7 obr. 4.8

Tyč

Snadno určíme momenty setrvačnosti tenké homogenní tyče délky l a hmotnosti M rozložené s lineární hustotou τ, umístěné ve směru osy z (obr. 4.8):

$$I_1 \;=\; I_2 \;=\; \int_{-l/2}^{l/2} \tau\; z^2\; dz \;=\; \frac{1}{12}\,\tau\; l^3 \;=\; \frac{1}{12}\; M\; l^2\;.$$

Kvádr

Mějme homogenní kvádr s těžištěm v počátku a hranami $a,\; b,\; c$ rovnoběžnými s osami $x,\; y,\; z$ (obr. 4.9). Trojnásobnou integrací v kartézských souřadnicích dostáváme

$$I_1 \;=\; \int_V \rho\;(\; y^2 + z^2\;)\; dV \;=\; \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-c/2}^{c/2} \rho\;(\; y^2 + z^2\;)\; dxdydz \;=$$

$$=\; \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \left(\int_{-c/2}^{c/2} y^2\; dz \;+\; \int_{-c/2}^{c/2} z^2\; dz \right) \;=\; \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \left(cy^2 + \frac{c^3}{12} \right) \;=$$

$$=\; \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \left(\frac{cb^3}{12} + \frac{bc^3}{12} \right) \;=\; \rho\; a\; b\; c\; \frac{b^2 + c^2}{12} \;=\; \frac{1}{12}\; M\;(\; b^2 + c^2\;)\;.$$

Podobně

$$I_2 \;=\; \frac{1}{12}\; M\;(\; a^2 + c^2\;)\;\;, \qquad I_3 \;=\; \frac{1}{12}\; M\;(\; a^2 + b^2\;)\;.$$

obr. 4.9 obr. 4.10

Válec

U válce (obr. 4.10) je výhodné použít cylindrických souřadnic. Pro hlavní moment vzhledem k ose rotační symetrie máme

$$I_3 \;=\; \int_V \rho\, r^2\, dV \;=\; \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} r^2\; r\; dr\; d\varphi\; dz \;=\; 2\pi\; h\; \rho \int_0^R r^3\; dr \;=$$

$$= \frac{1}{2}\, \rho\pi\; h\; R^4 \;=\; \frac{1}{2}\; M\; R^2\; .$$

Ve výrazu nevystupuje výška válce, takže ho lze použít i na případ **tenké kruhové desky**.

Pro osy rotace kolmé k ose válce využijeme opět symetrie válce a určíme

$$I_1 \;=\; I_2 \;=\; \frac{1}{2}\,(I_1 + I_2) \;=\; \frac{1}{2} \int_V \rho\; (\; x^2 + y^2 + 2z^2\;)\; dV \;=$$

$$= \frac{1}{2} \left(\rho \int_V r^3\; dr\; d\varphi\; dz \;+\; 2\rho \int_V z^2\; r\; dr\; d\varphi\; dz \right) \;=$$

$$\frac{1}{4}\; M\; R^2 \;+\; \frac{1}{2}\; 2\rho\; 2\pi\; \frac{R^2}{2}\; \frac{h^3}{12} \;=\; \frac{1}{4}\; M\; \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right)\; .$$

Válcová slupka

Pro tenkostěnný dutý válec (válcovou slupku) je $r = R =$ konst a označíme-li plošnou hustotu jako σ, dostaneme

$$I_3 \;=\; M\; R^2 \qquad \text{jako obruč}$$

obr. 4.11 obr. 4.12

$$I_1 \;=\; I_2 \;=\; \frac{1}{2}(I_1 + I_2) \;=\; \frac{1}{2}\left(\sigma \int_S R^3 \, d\varphi \, dz \;+\; 2\sigma \int_S z^2 \, R \, d\varphi \, dz \right) \;=$$

$$= \; \frac{1}{2} \, M \left(R^2 \;+\; \frac{h^2}{6} \right) .$$

Kužel

Jak víme, těžiště kužele leží ve vzdálenosti 3/4 jeho výšky od vrcholu. Budeme opět integrovat v cylindrických souřadnicích, při čemž umístíme počátek souřadnic ne do těžiště, ale do vrcholu kužele (obr. 4.11).

Rovnice povrchové přímky kužele je vzhledem k tomuto počátku $z = \frac{h}{R} \, r$. Hlavní moment I_3 se při tomto posunutí počátku nezmění, takže máme

$$I_3 \;=\; \int_V \rho \, r^2 \, r \, dr \, d\varphi \, dz \;=\; \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{hr/R}^h r^3 \, dr \, d\varphi \, dz \;=$$

$$2\pi \, \rho \int_0^R r^3 \left(h - \frac{h}{R} \, r \right) dr \;=\; 2\pi \, h \, \rho \left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^5}{5R} \right) \;=\; 2\pi \, h \, \rho \, \frac{R^4}{20} \;=\; \frac{3}{10} \, M \, R^2 \, .$$

Pokud jde o momenty setrvačnosti kolem osy kolmé k ose kužele, bude výhodné najít moment kolem osy procházející vrcholem kužele a pak pomocí Steinerovy věty přejít k hlavnímu mumentu procházejícím těžištěm. Tedy

$$I_1^* \;=\; I_2^* \;=\; \frac{1}{2} \, (I_1^* + I_2^*) \;=\; \frac{1}{2} \, \rho \int_V (\, x^2 + y^2 + 2z^2 \,) \, dV \;=$$

$$= \frac{1}{2} \left(\rho \int_V r^3 \, dr \, d\varphi \, dz \; + \; 2\rho \int_V z^2 \, r \, dr \, d\varphi \, dz \right) \; = \; \frac{3}{20} \, M \, (\, R^2 \; + \; 4h^2 \,) \, .$$

Hlavní momenty setrvačnosti $I_1, \; I_2$ pak budou

$$I_1 \; = \; I_2 \; = \; I_1^* \; - \; \frac{9}{16} \, M \, h^2 \; = \; \frac{3}{20} \, M \, \left(\, R^2 \; + \; \frac{h^2}{4} \, \right) \, .$$

Koule

Všechny tři hlavní momenty setrvačnosti koule jsou zřejmě stejné (obr. 4.12). Použijeme-li sférických souřadnic, dostaneme

$$I \; = \; \frac{1}{3} \, (I_1 + I_2 + I_3) \; = \; \frac{2}{3} \, \rho \int_V (\, x^2 + y^2 + z^2 \,) \, dV \; = \; \frac{2}{3} \, \rho \int_V r^2 \, r^2 \, \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \; =$$

$$\frac{2}{3} \, \rho \int_\Omega d\Omega \int_0^R r^4 \, dr \; = \; \frac{2}{3} \, \rho \, 4\pi \, \frac{R^5}{5} \; = \; \frac{2}{5} \, M \, R^2 \, .$$

Kulová slupka

Pro tenkostěnnou dutou kouli (kulovou slupku) s plošnou hustotou σ máme

$$I \;=\; \frac{2}{3}\,\sigma \int_S R^2\; dS \;=\; \frac{2}{3}\,\sigma\; R^4 \int_\Omega d\Omega \;=\; \frac{2}{3}\,\sigma\; 4\pi\; R^4 \;=\; \frac{2}{3}\; M\; R^2\;.$$

Elipsoid

Homogenní trojosý elipsoid má všechny tři hlavní momenty setrvačnosti různé. Jejich výpočet lze usnadnit, provedeme-li substituci $x = a\xi,\;\; y = b\eta,\;\; z = c\zeta$, kde $a,\; b,\; c$ jsou poloosy elipsoidu. V nových proměnných má povrch elipsoidu rovnici $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$, tedy představuje kouli k jednotkového poloměru. Pro moment I_1 máme

$$I_1 \;=\; \rho \int_V (y^2 + z^2)\; dV \;=\; \rho\; abc \int_{V_k} (\; b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 \;)\; dV_k\;.$$

Integrály funkcí η^2 a ζ^2 přes objem jednotkové koule určíme snadno jako

$$\int_{V_k} \eta^2\; dV_k \;=\; \int_{V_k} \zeta^2\; dV_k \;=\; \frac{1}{3} \int_{V_k} (\; \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \;)\; dV_k \;=\; \frac{1}{3}\,\frac{4\pi}{5}\;,$$

a protože objem elipsoidu je $V = \frac{4}{3}\pi abc$, dostáváme

$$I_1 \;=\; \frac{1}{5}\; M\; (b^2 + c^2)\;.$$

Druhé dva momenty dostaneme cyklickou záměnou $a,\; b,\; c$.

4.2.3 Pohybové rovnice tuhého tělesa

Protože tuhé těleso představuje soustavu mnoha částic, byť pevně vázaných, můžeme jeho pohyb řešit pomocí první a druhé věty impulsové (4.8). Tyto rovnice lze dobře použít zejména tehdy, rotuje-li těleso kolem osy, která nemění svůj směr. Přitom je jedno, je-li osa upevněna v ložiscích (rumpál, kolo na hřídeli) nebo zda se rovnoběžně posouvá. To je případ valení kola nebo válce po rovině, vodorovné nebo svislé, pohyb hračky známé jako jojo, pohyb fyzického kyvadla apod.

Na obr. 4.13 je krásný jednoduchý pokus demonstrující účinek momentu síly na pohyb tělesa. Na cívce, která se může valit po vodorovné rovině, je navinuta nit. Táhneme-li nití, která svírá s rovinou malý úhel, bude se nit navíjet a cívka k nám přibližovat. Táhneme-li pod velkým úhlem, bude se nit odvíjet a těleso se bude vzdalovat. Existuje hraniční úhel, kdy síla právě protíná okamžitou osu rotace a nepůsobí momentem. Pak cívka nemůže rotovat, a budeme-li táhnout, bude se smýkat po rovině. Názorně jsou tyto případy ukázány na obr. 4.15.

Je-li moment setrvačnosti vzhledem k ose rotace procházející těžištěm roven I, můžeme pohybové rovnice upravit na

$$M\;\frac{d\vec{V}}{dt} \;=\; \vec{F}\;\;, \qquad I\;\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \;=\; \vec{N}\;. \tag{4.33}$$

obr. 4.13

obr. 4.14

obr. 4.15

Úloha (Valení těles na nakloněné rovině)

Použití těchto rovnic lze dobře ukázat na úloze o valení těles na nakloněné rovině (obr. 4.14). Jde-li o drsnou rovinu, po níž se těleso valí bez prokluzování, působí na těleso dvě síly - síla tíhová v těžišti a síla tření v bodě dotyku s rovinou. Přeneseme-li sílu tření rovněž do těžiště, máme zde pohybovou rovnici pro složku rychlosti ve směru svahu

$$M \frac{dV}{dt} = M\ g\ \sin\alpha - F_t\ . \tag{4.34}$$

Rotaci vyvolává silová dvojice o velikosti $F_t R$, kde F_t je velikost síly tření a R vzdálenost těžiště od bodu dotyku, tedy např. poloměr válce. Máme tedy druhou rovnici

$$I \frac{d\Omega}{dt} = R\ F_t\ . \tag{4.35}$$

Přitom zřejmě $V = R\,\Omega$. Z rovnic (4.34), (4.35) vyloučíme neznámou sílu tření a dostaneme

$$(\ I + M\ R^2\ ) \frac{d\Omega}{dt} = R\ M\ g\ \sin\alpha\ . \tag{4.36}$$

Tuto rovnici však můžeme chápat tak, že těleso koná čistě rotační pohyb kolem okamžité osy rotace (přímky doteku), vzhledem k níž má moment setrvačnosti $I^* = I + MR^2$.

Dosadíme nyní za I moment setrvačnosti konkretního tělesa. Jde-li o válec, máme $I = \frac{1}{2}MR^2$, a tedy

$$\frac{3}{2}\ M\ R^2 \frac{d\Omega}{dt} = R\ M\ g\ \sin\alpha\ .$$

Válec se bude valit po nakloněné rovině s postupným zrychlením

$$a = R \frac{d\Omega}{dt} = \frac{2}{3}\ g\ \sin\alpha\ , \tag{4.37}$$

které nezávisí na jeho poloměru. Stejně tak zjistíme, že dutý válec se bude valit se zrychlením $a = \frac{1}{2}g\sin\alpha$, koule $a = \frac{5}{7}g\sin\alpha$, dutá koule $a = \frac{3}{5}g\sin\alpha$ atd. Připomeňme, že po ideálně hladké rovině by se těleso smýkalo se zrychlením $a = g\sin\alpha$.

Poněkud jiná situace nastává, neudržuje-li osa rotace stálý směr, rotuje-li těleso například kolem bodu obecným způsobem. Přitom okamžitá osa rotace tělesa může měnit svůj směr, a to jak v prostoru, **tak v tělese**, tj. vzhledem k soustavě souřadnic pevně spjaté s tělesem. To ovšem znamená, že v každém okamžiku těleso rotuje s jiným momentem setrvačnosti a pak nemůžeme dost dobře použít pohybové rovnice (4.33). Vzniká tak **úloha o pohybu setrvačníku**, kterou se zabýval L. Euler. Euler zformuloval **setrvačníkové rovnice**, které popisují změnu vektoru úhlové rychlosti tělesa v soustavě souřadnic spojených s tělesem, tj. se souřadnými osami ve směru hlavních os setrvačnosti tělesa. Přitom předpokládáme, že jeden bod tělesa je pevný a zvolíme ho za společný počátek soustav souřadnic $O \equiv O'$.

Vyjdeme opět z druhé věty impulsové a přetransformujeme ji do soustavy S'. Víme, že změna nějakého vektoru v soustavě S a v soustavě S' souvisí vztahem (2.148). Z druhé věty impulsové tak dostaneme

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d'\vec{L}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{L} = \vec{N} \,. \tag{4.38}$$

Rozepíšeme-li tuto rovnici do složek a vezmeme-li v úvahu, že

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \frac{d'\vec{\Omega}}{dt} \,,$$

dostaneme

$$\frac{d'L_i}{dt} + (\,\vec{\Omega} \times \vec{L}\,)_i = \frac{d'(I_{ik}\Omega_k)}{dt} + (\,\vec{\Omega} \times \vec{L}\,)_i =$$

$$= I_{ik}\,\frac{d'\Omega_k}{dt} + \varepsilon_{ikl}\,\Omega_k\,L_l = I_{ik}\,\frac{d\Omega_k}{dt} + \varepsilon_{ikl}\,\Omega_k\,I_{lj}\,\Omega_j = N_i \,,$$

kde ε_{ikl} je Levi-Civitův tenzor (viz M.58). Souhrnně tedy můžeme zapsat Eulerovy setrvačníkové rovnice

$$I_{ik}\,\frac{d\Omega_k}{dt} + \varepsilon_{ikl}\,I_{lj}\,\Omega_k\,\Omega_j = N_i \,. \tag{4.39}$$

V hlavních osách setrvačnosti tedy

$$I_1\,\frac{d\Omega_1}{dt} + (\,I_3 - I_2\,)\,\Omega_2\,\Omega_3 = N_1$$

$$I_2\,\frac{d\Omega_2}{dt} + (\,I_1 - I_3\,)\,\Omega_3\,\Omega_1 = N_2$$

$$I_3\,\frac{d\Omega_3}{dt} + (\,I_2 - I_1\,)\,\Omega_1\,\Omega_2 = N_3 \,. \tag{4.40}$$

Uvažme nyní pohyb setrvačníků, na něž nepůsobí výsledná vnější síla ani moment síly. Měli bychom je nazývat "bezsilové" a "bezmomentové", ale je zvykem jim říkat "volné". V takovém případě můžeme mít za to, že těžiště setrvačníku je v klidu a že momenty setrvačnosti I_1, I_2, I_3 jsou hlavními momenty setrvačnosti vzhledem k hlavním osám procházejícím těžištěm.

Pohyb setrvačníků pak závisí na jejich symetrii. V nejsymetričtějším případě má setrvačník všechny tři hlavní momenty setrvačnosti stejné, $I_1 = I_2 = I_3 = I$. Říkáme mu *kulový* setrvačník, neboť jeho elipsoid setrvačnosti přechází v kulovou plochu. Přitom kulovým setrvačníkem je například i krychle!

Pro volný kulový setrvačník se Eulerovy rovnice zjednodušší na

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = 0, \tag{4.41}$$

a tedy

$$\vec{\Omega} = \text{konst} \,. \tag{4.42}$$

obr. 4.16

Volný kulový setrvačník může být buď v klidu nebo může konat rovnoměrnou rotaci kolem některé z os procházejících těžištěm. V tomto tvrzení je možno spatřovat určité zobecnění zákona setrvačnosti na rotační pohyb.

Mějme nyní volný setrvačník, který má jen dva hlavní momenty setrvačnosti stejné, $I_1 = I_2 \neq I_3$. Takovému setrvačníku říkáme *symetrický.* Ze setrvačníkových rovnic pro něj plyne

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = \omega_p \, \Omega_2 \, , \qquad \frac{d\Omega_2}{dt} = - \, \omega_p \, \Omega_1 \, , \qquad \frac{d\Omega_3}{dt} = 0 \, , \tag{4.43}$$

kde

$$\omega_p = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \, \Omega_3 \tag{4.44}$$

se nazývá *úhlová rychlost precese v tělese.* Odtud plyne, že $\Omega_3 = \text{konst}$, těleso koná rotační pohyb s konstantní úhlovou rychlostí kolem osy z'. Kromě toho však se mění v čase složky úhlové rychlosti Ω_1 a Ω_2.

Ze setrvačníkových rovnic pro tyto složky dostaneme

$$\frac{d^2\Omega_1}{dt^2} + \omega_p^2 \, \Omega_1 = 0 \, .$$

Tuto rovnici vyřešíme obvyklým způsobem a pak z první setrvačníkové rovnice určíme i Ω_2:

$$\Omega_1 = A \, \sin(\omega_p \, t + \alpha) \, , \quad \Omega_2 = A \, \cos(\omega_p \, t + \alpha) \, , \quad \Omega_1^2 + \Omega_2^2 = A^2 = \text{konst} \, . \tag{4.45}$$

Složka úhlové rychlosti v rovině x', y' tedy koná rovnoměrný kruhový pohyb úhlovou rychlostí (4.44) a zachovává si svou velikost. To je možné tak, že vektor úhlové rychlosti opisuje plášť kruhového přímého kužele (obr. 4.16). Tomuto pohybu se říká *precese osy*

rotace v tělese a opisovaný kužel byl nazván řeckým slovem *polhodiový.* [53]

Za takový volný symetrický setrvačník můžeme přibližně považovat naši Zemi, bereme-li její tvar jako tvar rotačního elipsoidu. Jeho poloosy mají délky 6 378 km a 6 357 km [54] a určíme-li odtud její hlavní momenty setrvačnosti, dostaneme úhlovou rychlost precese v tělese

$$\omega_p \;=\; -0,0033\;\Omega_3 \;\approx\; \frac{\Omega_3}{300}\;.$$

To znamená, že osa zemské rotace opisuje kuželovou plochu s uvedenou úhlovou rychlostí, tedy s periodou 10 měsíců, kolem osy geodynamické symetrie. Tato precese probíhá v opačném smyslu než zemská rotace (znaménko minus!). [55]. Kinematický pól Země přitom opisuje malou kružnici kolem geodynamického pólu (tzv. Eulerova kružnice). Ve skutečnosti se ukazuje, že perioda této precese je o něco delší, asi 14 měsíců, vzhledem k tomu, že Země není dokonale tuhým tělesem. Kružnice s touto periodou se nazývá Chandlerova.

Položme si nyní otázku, za jakých podmínek bude těleso rovnoměrně rotovat kolem **volné osy**. V praxi může jít například o umělou družici obecného tvaru, kterou chceme z důvodu stabilizace uvést do rotace. Na volnou osu přitom nesmí působit žádné síly ani momenty sil. Počátek soustavy souřadnic spojené s tělesem můžeme zvolit na volné ose, která má být nehybná. Potom na těžiště tělesa budou v neinerciální vztažné soustavě působit setrvačné síly [56]

$$\vec{F} \;=\; -M\;[\;\vec{\varepsilon}\times\vec{r}' \;+\; \vec{\Omega}\times(\;\vec{\Omega}\times\vec{r}'\;) \;+\; 2\;\vec{\Omega}\times\vec{v}'\;]\;.$$

Eulerova síla bude nulová, bude-li $\varepsilon = 0$, rotace bude rovnoměrná. Odstředivá síla bude rovna nule, budou-li vektory $\vec{\Omega}$ a $\vec{r}'$ rovnoběžné, tj. bude-li osa rotace procházet těžištěm. Coriolisova síla se neuplatní, protože body na ose rotace musí být vůči tělesu v klidu. Zbývá ještě vyšetřit vliv momentů vnějších sil. Je-li jedinou nenulovou složkou vektoru úhlové rychlosti Ω_3, dostaneme ze setrvačníkových rovnic (4.39)

$$I_{13}\;\frac{d\Omega_3}{dt} \;-\; I_{23}\;\Omega_3^2 \;=\; N_1$$

$$I_{23}\;\frac{d\Omega_3}{dt} \;+\; I_{13}\;\Omega_3^2 \;=\; N_2$$

$$I_{33}\;\frac{\Omega_3}{dt} \;=\; N_3\;.$$

Jsou-li nyní momenty vnějších sil nulové, bude především ze třetí rovnice $\Omega_3 = \text{konst}$. Dále musí platit

$$-I_{23}\;\Omega_2^2 \;=\; 0\;, \qquad I_{13}\;\Omega_3^2 \;=\; 0\;.$$

[53] Řecky polos = pól, hodos = cesta

[54] Ve skutečnosti je vzhledem k nerovnoměrnému rozložení kontinentů Země elipsoid trojosý a její přesný tvar a rozložení hmotnosti v ní jsou stále předmětem výzkumu.

[55] Mluvíme o geodynamické symetrii, protože hlavní osa setrvačnosti je dána nejen geometrickým tvarem, ale i rozložením hmoty v tělese. Kdyby Země byla homogenním tělesem, její geodynamická osa by byla totožná s osou geometrickou.

[56] Působení pravých vnějších sil na těžiště neuvažujeme, neboť to vyvolává pohyb tělesa jako celku a neovlivňuje rotaci.

Deviační momenty vzhledem k volné ose rotace musí být tedu nulové.

Můžeme tedy shrnout: Těleso libovolného tvaru a rozložení hmotnosti může být uvedeno do stavu rotace kolem volné osy za předpokladů, že

1. Volná osa bude procházet těžištěm
2. Volná osa bude jednou z hlavních os setrvačnosti
3. Rotace bude rovnoměrná.

Zbývá ještě otázka. zda taková rotace bude **stabilní**, tj. zda při malém vychýlení volné osy se tato bude vracet do původní polohy. V teoretické mechanice se dokazuje, že u těles, která mají všechny tři hlavní momenty setrvačnosti různé, bude možná stabilní rotace pouze **kolem osy s největším a nejmenším momentem setrvačnosti.** U symetrických těles, která mají dva hlavní momenty setrvačnosti stejné, nastane stabilní rotace pouze **kolem osy s větším momentem setrvačnosti.** Těleso bude mít snahu rozmístit hmotu co nejdále od osy rotace.

Tento zajímavý jev můžeme pozorovat při rotaci válce. Roztočíme-li jej kolem osy jeho symetrie, bude záležet na poměru jeho výšky a poloměru podstavy. Vysoký, podlouhlý válec nebude rotovat stabilně, ale bude se snažit přejít do rotace v rovině kolmé k ose. [57] Nízký, krátký válec (kotouč) stabilně rotovat bude. Zřejmě existuje určitý poměr výšky a poloměru podstavy, kdy se válec stane kulovým setrvačníkem a pak bude rotovat stabilně kolem kterékoliv osy procházející těžištěm.

4.2.4 Fyzické kyvadlo

Důležitým případem rotace tělesa kolem (pevné) osy je pohyb *fyzického kyvadla.* Pod fyzickým kyvadlem rozumíme těleso, které je zavěšeno nad těžištěm tak, aby mohlo působením tíhy kývat kolem osy daného směru. Vzhledem k tomu, že matematické kyvadlo, o němž jsme mluvili v kap. 2 je pouze určitou idealizací a reálná kyvadla jsou vždy fyzická, je třeba odvodit vztahy, které platí pro kývání kyvadla fyzického. Fyzické kyvadlo je důležitým nástrojem fyziků, zejména k měření tíhového zrychlení a jeho složek, slapových sil, uplatňuje se v gravimetrii, seismografii i jinde.

Důležitou charakteristikou fyzického kyvadla je vzdálenost jeho těžiště od osy rotace l (obr. 4.17). Budeme předpokládat, že osa rotace je vodorovná a že hlavní osy setrvačnosti kyvadla s ní svírají úhly α, β, γ. Rychlost pohybu těžiště bude dáno jako $V = l\ \dot{\varphi}$. Omezíme-li se ze známých důvodů na malé kyvy, můžeme zapsat energii fyzického kyvadla jako

$$E \ = \ \frac{1}{2} M\ l^2 \dot{\varphi}^2 \ + \ \frac{1}{2}\ (\ I_1\ \cos^2\alpha + I_2\ \cos^2\beta + I_3\ \cos^2\gamma\ )\ \dot{\varphi}^2 \ + \ \frac{1}{2} M\ g\ l\ \varphi^2\ . \qquad (4.46)$$

To je ovšem energie harmonického oscilátoru s periodou

$$T \ = \ 2\pi \sqrt{\frac{Ml^2 + I_1 \cos^2\alpha + I_2 \cos^2\beta + I_3 \cos^2\gamma}{Mgl}}\ . \qquad (4.47)$$

Obyčejně však nastává jednodušší situace, kdy jedna z hlavních os setrvačnosti je rovnoběžná s osou rotace a druhé dvě k ní kolmé: $\alpha = \pi/2$, $\beta = \pi/2$, $\gamma = 0$. Nechť moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm $I_3 = I$ a moment setrvačnosti

[57] Vzpomeňme na pohyb akrobatky, která začne rotovat ve svislé poloze.

obr. 4.17 obr. 4.18

obr. 4.19

vzhledem k ose rotace podle Steinerovy věty $I^* = I + Ml^2$. Pak se perioda zjednodušší na

$$T \;=\; 2\pi\sqrt{\frac{Ml^2 + I}{Mgl}} \;=\; 2\pi\sqrt{\frac{I^*}{Mgl}}\;. \tag{4.48}$$

Redukovanou délkou fyzického kyvadla l_r nazýváme délku matematického kyvadla, které kýve s touž periodou. Je zřejmě

$$l_r \;=\; \frac{M\;l^2 + I}{M\;l} \;=\; \frac{I^*}{M\;l}\;. \tag{4.49}$$

Na obr. 4.19 je znázorněna závislost čtverce periody na vzdálenosti l, tedy funkce $(Ml^2 + I)/Mgl$. Je z něho patrno, že bude-li kyvadlo zavěšeno příliš blízko nebo příliš daleko od těžiště, bude perioda příliš velká. Existuje vzdálenost na obou stranách od

těžiště, kdy bude perioda kmitů nejmenší, těleso tedy bude kývat nejrychleji. Je to

$$l_{min} = \sqrt{\frac{I}{M}} = \frac{l_r}{2} , \tag{4.50}$$

tedy právě polovina redukované délky. Redukovanou délku kyvadla můžeme tedy určit jako dvojnásobek délky l_{min}. Minimální doba kyvu pak je

$$T_{min} = \sqrt[4]{\frac{4I}{Mg^2}} . \tag{4.51}$$

Funkce na obr. 4.19 je ovšem sudá a obě části této funkce jsou vzdáleny právě o redukovanou délku. Vidíme, že pro danou periodu $T > T_{min}$ existují právě čtyři způsoby zavěšení kyvadlo, vždy dvě na každé straně od těžiště. Najdeme-li polohu dvou os na opačných stranách těžiště, a to nikoli symetrickou, při nichž je doba kyvu stejná, bude vzdálenost těchto os rovna redukované délce. Takové dvě osy se nazývají *sdružené*.

Vyhledávání sdružených os se provádí pomocí reverzního kyvadla (obr. 4.18). Reverzní kyvadlo je kovová tyč s dvěma rovnoběžnými osami otáčení, které jsou realizovány dvěma trojbokými hranoly obrácenými ostřím proti sobě.Po tyči se může pohybovat závaží, jehož posouváním měníme polohu těžiště a tím i moment setrvačnosti vzhledem k osám otáčení. Najdeme-li takovou polohu závaží, aby kyvadlo kývalo kolem obou os se stejnou periodou, představuje jejich vzdálenost redukovanou délku kyvadla. Pak můžeme z této periody určit například tíhové zrychlení ze vztahu

$$g = \frac{4\pi^2 \, l_r}{T^2} . \tag{4.52}$$

4.3 Setrvačníky

Shrneme nyní poznatky o pohybu setrvačníků, tedy o obecné rotaci tuhého tělesa kolem daného bodu. Víme, že okamžitá osa rotace může přitom měnit svůj směr jak v prostoru, tak v tělese. Budeme opět používat dvou vztažných soustav S, S', jedné inerciální a druhé spojené s rotujícím tělesem, při čemž obě budou mít týž počátek. Připomeneme, že setrvačník podle symetrie může být

1. **kulový** - $I_1 = I_2 = I_3$, elipsoid setrvačnosti je kulová plocha

2. **symetrický** - $I_1 = I_2 \neq I_3$, elipsoid setrvačnosti je rotační

3. **asymetrický** - všechny tři hlavní momenty setrvačnosti různé, elipsoid setrvačnosti je trojosý

4. **rotátor** - $I_1 = I_2,\ I_3 = 0$, elipsoid setrvačnosti degeneruje v kružnici.

Podle toho, zda na setrvačník působí momenty vnějších sil, rozeznáváme setrvačník **volný** a **těžký**. Volný setrvačník je bezmomentový, pod těžkým setrvačníkem rozumíme pohyb setrvačníku v tíhovém poli.

Zatímco úloha o volném setrvačníku je řešitelná analyticky ("v kvadraturách") za použití zákonů zachování momentu hybnosti a energie, úloha o těžkém setrvačníku může být vyřešena jen v některých speciálních případech. Jsou to:

a) **Úloha Eulerova** - případ vyváženého setrvačníku s nehybným těžištěm

b) **Úloha Lagrangeova** - případ symetrického setrvačníku s pevným bodem na hlavní ose rotace z' pod těžištěm (pohyb dětského vlčku v tíhovém poli)

c) **Úloha Kovalevské** - speciální případ pohybu symetrického setrvačníku, který má $I_1 = I_2 = 2I_3$ a pevný bod v rovině $x',\ y'$.

Nejdříve se budeme zabývat volným setrvačníkem. Jde-li o setrvačník kulový nebo rotátor, je úloha snadná. Platí totiž

$$\vec{L} \ = \ I\,\vec{\Omega} \ = \ \mathbf{konst}, \quad \text{odkud} \quad \vec{\Omega} \ = \ \mathbf{konst}. \tag{4.53}$$

Volný kulový setrvačník může tedy být v klidu nebo vykonávat čistě rotační rovnoměrný pohyb kolem kterékoli osy procházející těžištěm. Rotátor může vykonávat takový pohyb kolem osy kolmé k přímce rotátoru. Rotátorem může být činka, tenká tyč apod.

Mějme nyní **volný symetrický setrvačník** (obr. 4.20). Platí

$$L_1 \ = \ I_1\,\Omega_1, \qquad L_2 \ = \ I_1\,\Omega_2, \qquad L_3 \ = \ I_3\,\Omega_3 \tag{4.54}$$

(souřadnice vektorů 1, 2, 3 se rozumí v hlavních osách setrvačnosti $x',\ y', z'$). Vektory momentu hybnosti, úhlové rychlosti a osy rotace z' mají tedy obecně v každém okamžiku různý směr. Protože se zachovává směr momentu hybnosti, můžeme zvolit v jeho směru osu z inerciální vztažné soustavy. Vektory $\vec{L}$ a z' určují rovinu, v níž můžeme vést osu x'. Fixujeme tedy polohu setrvačníku v okamžiku, kdy je osa y' kolmá k nákresně. Přitom ovšem $L_2 = 0$, a tedy i $\Omega_2 = 0$.

Odtud plyne, že tři vektory $\vec{L}$ (osa z), $\vec{\Omega}$ a osa z' leží v každém okamžiku v jedné rovině. Body na ose z' mají v každém okamžiku rychlost $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$. To je možné pouze tak, že osa z' opisuje kolem směru vektoru $\vec{L}$ kuželovou plochu s konstantním vrcholovým úhlem θ, kterému se říká *nutační úhel*. Takový pohyb osy rotace kolem nehybného směru v prostoru nazýváme **precese osy rotace v prostoru**. Protože nutační úhel zůstává stálý, nazývá se taková precese *regulární*. Volný symetrický setrvačník může tedy konat rovnoměrnou rotaci kolem osy z' a současně *regulární precesi* kolem osy z.

Vektor úhlové rychlosti $\vec{\Omega}$ musí zůstávat v rovině $z,\ z'$, a tedy musí též opisovat kuželovou plochu kolem vektoru $\vec{L}$. Tento kužel se nazývá herpolhodiový. [58] Víme však, že vektor $\vec{\Omega}$ opisuje polhodiový kužel kolem směru z'. Pohyb tedy musí probíhat tak, že oba

[58] Řecky herpo = plazím se

obr. 4.20 obr. 4.21

kužele se po sobě valí a úhlová rychlost leží v dotykové přímce (viz obr. 4.21). Podle **Poinsotovy věty** lze každý otáčivý pohyb kolem pevného bodu vytvořit valením polhodie po herpolhodii. [59]

Vraťme se nyní k obr. 4.20, z něhož můžeme určit úhlové rychlosti precese v prostoru i v tělese. Úhlovou rychlost tělesa $\vec{\Omega}$ můžeme rozložit do složek v hlavních osách setrvačnosti x', z'. Složka $\vec{\Omega}_3$ pak udává konstantní úhlovou rychlost rotace

[59] Názvy zavedl právě Poinsot [puanso].

$$\Omega_3 \;=\; \frac{L_3}{I_3} \;=\; \frac{L\;\cos\theta}{I_3} \;=\; \text{konst}\;.$$

Vektor úhlové rychlosti však také můžeme rozložit do složek ve směru os z, z'. Složka do každého z těchto směrů vyjadřuje tu část rotačního pohybu, při němž se daný směr nemění. Složka do směru z tak udává úhlovou rychlost precese v prostoru Ω_p, složka do směru z' úhlovou rychlost precese v tělese ω_p. Z obr. 4.20 máme

$$\Omega_p \;=\; \frac{\Omega_1}{\sin\theta} \;=\; \frac{L_1}{I_1\sin\theta} \;=\; \frac{L\;\sin\theta}{I_1\;\sin\theta} \;=\; \frac{L}{I_1}. \tag{4.55}$$

Touto úhlovou rychlostí opisuje vektor úhlové rychlosti a osa rotace tělesa precesní kužel kolem pevného směru v prostoru $\vec{L}$. Určíme nyní precesi v tělese:

$$\omega_p \;=\; \Omega_3' \;=\; \Omega_3 \;-\; \Omega_p\;\cos\theta \;=\; \frac{L\;\cos\theta}{I_3} \;-\; \frac{L}{I_1}\;\cos\theta \;=\; L\;\cos\theta\frac{I_1-I_3}{I_1 I_3} \;=\; \frac{I_1-I_3}{I_1}\;\Omega_3\;. \tag{4.56}$$

Tento výsledek jsme však již odvodili z Eulerových setrvačníkových rovnic jako (4.44).

Případ obecně **asymetrického setrvačníku**, volného nebo vyváženého (Eulerova úloha), je sice analyticky řešitelný, ale vede na eliptické integrály. Důležité je, že trajektorie takového pohybu není uzavřena, že se takový setrvačník nikdy nevrací do původní polohy.

Všimněme si ještě úlohy o **těžkém symetrickém setrvačníku** (Lagrangeova úloha). Je to setrvačník v homogenním tíhovém poli s nehybným bodem pod těžištěm na ose rotace - tedy například opřený hrotem o podložku. Také tato úloha je analyticky řešitelná a vede na eliptické integrály; řešení lze nalézt v monografiích o teoretické mechanice. V daném případě netvoří již setrvačník izolovanou soustavu a vektor momentu hybnosti se nezachovává. Laboratorní inerciální vztažnou soustavu můžeme nyní zvolit tak, aby osa z mířila proti směru vnějšího tíhového pole. Ukazuje se, že vektor momentu setrvačnosti bude nyní opisovat precesní kužel kolem nehybné osy z. Protože však zároveň bude osa rotace opisovat rovněž precesní kužel kolem směru $\vec{L}$, nebude precese v prostoru regulární, ale nutační úhel se bude periodicky měnit. Těžký symetrický setrvačník bude tedy konat současně tři pohyby: **rovnoměrnou rotaci, (neregulární) precesi** a **nutaci**. Různé případy nutačního pohybu vidíme na obr. 4.22.

Zvláštním případem pohybu těžkého symetrického setrvačníku s pevným bodem pod těžištěm je přiblížení tzv. **rychlého setrvačníku**. Rotuje-li setrvačník rychle, bude kinetická energie jeho rotačního pohybu mnohem větší než energie jeho pohybu precesního a o ní předpokládáme, že je opět mnohem menší, než potenciální energie setrvačníku v tíhovém poli. Označíme-li vzdálenost těžiště od bodu opory l a nutační úhel vzhledem k pevnému směru η, můžeme zapsat energii takového setrvačníku jako

$$E \;=\; \frac{1}{2}\;I_3\;\Omega_3^2 \;+\; \frac{1}{2}\;I_1^*\;(\Omega_1^2+\Omega_2^2) \;+\; M\;g\;l\;\cos\eta$$

(prvky momentu setrvačnosti označené hvězdičkou jsou vztaženy k pevnému bodu na podložce), kde první člen je mnohem větší než druhý a ten zas mnohem větší než třetí.

obr. 4.22

Těleso přitom rychle rotuje kolem osy z', ta koná pomalou precesi s malým nutačním úhlem kolem směru $\vec{L}$ a vektor $\vec{L}$ pak velmi pomalou precesi v tíhovém poli. Výsledkem je, že precesní kužel vytvořený v tíhovém poli je jen velmi mírně zvlněn, takže precese je téměř regulární. Říkáme jí **pseudoregulární precese**. Jak uvidíme, takovou pseudoregulární precesi koná právě naše Země v tíhovém poli Slunce a Měsíce (lunisolární precese).

Situaci můžeme dobře ilustrovat na pohybu známého dětského vlčku. Postavíme-li jeho osu svisle a roztočíme, mohl by vlček konat čistou rotaci. Poruchy však způsobí, že se jeho osa mírně nakloní a osa vlčku začne konat precesi kolem svislého směru. Tato precese bude zpočátku regulární, pak přejde v pseudoregulární, precesní kužel se mírně zvlní. Vlivem tření a odporu prostředí začne vlček ztrácet svou rotační energii a přestane být rychlým setrvačníkem. Precese přejde v neregulární, výkyvy vlčku se začnou zvětšovat, až nakonec dopadne na podložku.

Určíme úhlovou rychlost precese rychlého těžkého setrvačníku (obr. 4.23). Z druhé věty impulsové máme

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} = l\ \vec{z}_0' \times M\ \vec{g}\,.$$

Vektor $\vec{z}_0'$ je jednotkový vektor ve směru osy z'. Protože tento vektor koná rychlou precesi kolem vektoru $\vec{L}$ (ve srovnání s rychlostí precese vektoru $\vec{L}$ v tíhovém poli), můžeme ho vystředovat a nahradit vektorem

$$z_0' \approx \frac{\vec{L}}{L}\ \cos\theta\,.$$

Pak dostaneme

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\ \frac{M\ l\ \cos\theta}{L}\ \vec{g}\ \times\ \vec{L}\,. \tag{4.57}$$

Rovnice

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega}_t\ \times\ \vec{L} \tag{4.58}$$

obr. 4.23 obr. 4.24

však vyjadřuje, že vektor $\vec{L}$ koná v inerciální soustavě rotační pohyb úhlovou rychlostí Ω_t. Pro úhlovou rychlost precese rychlého těžkého setrvačníku jsme tak dostali

$$\Omega_t \;=\; \frac{M\ l\ \cos\theta\ g}{L} \;=\; \frac{M\ l\ g\ \cos^2\theta}{I_3\ \Omega_3} \;\approx\; \frac{M\ l\ g}{I_3\ \Omega}\ . \tag{4.59}$$

Předpokládali jsme, že úhel θ je velmi malý a úhlová rychlost rotace má převažující složku ve směru osy z' ($\cos\theta = L_3/L$).

Na pohybu těžkého rychlého setrvačníku lze demonstrovat tzv. **gyroskopický efekt**. Na obr. 4.24 je těžký setrvačník opřený spodním hrotem na podložce a s osou rotace ve vodorovné poloze. Zdá se neuvěřitelné, že tíha působící v jeho těžišti nezpůsobí jeho pád. Ve skutečnosti působí tíhová síla momentem $\vec{r} \times \vec{F}$ mířícím vodorovně, kolmo k vektoru momentu hybnosti. Tedy

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \;=\; \vec{N} \;=\; \vec{r}\ \times\ \vec{F} \;=\; \vec{\Omega}_t\ \times\ \vec{L}$$

a změna vektoru momentu hybnosti leží ve vodorovné rovině. Tento vektor se otáčí kolem svislého směru. Těleso se dává do pohybu nikoli směrem působící síly, ale kolmo k němu. Nespadne, ale musí konat precesní pohyb.

Nakonec ještě shrneme pohyb Země jako symetrického setrvačníku. Víme, že Země koná rotační pohyb kolem své osy symetrie s periodou jednoho dne. Tato osa vykonává volnou regulární precesi kolem směru momentu hybnosti s periodou 14 měsíců. Nutační úhel je přitom velmi malý, u pólu činí výchylka řádově 10 metrů. Astronomové ji však přesto mohou změřit, protože jakákoli změna směru osy zemské rotace se projeví na zdánlivém pohybu oblohy a změně polohy světového severního pólu.

Dále koná Země pseudoregulární precesi v tíhovém poli nebeských těles. Tato lunisolární precese probíhá s velkým nutačním úhlem ($23,5^0$), ale s periodou 26 000 let. Tomuto období se říká platónský rok. Během něho míří zemská osa na různá místa na obloze a světový pól se tak posouvá. Staří Egypťané

určovali na obloze sever podle hvězdy Thuban v souhvězdí Draka. My se dnes orientujeme podle Polárky, za 10 000 let bude ukazovat sever hvězda $\alpha-$Cygni v souhvězdí Labutě, za 14 000 let Vega a za 26 000 let opět Polárka.

Precese zemské osy se projevuje též posouváním jarního bodu, tedy místa na obloze, kde se nachází Slunce v den jarní rovnodennosti. Leží ve směru průsečnice roviny ekliptiky a roviny světového rovníku, která se naklání. Vlivem lunisolární precese se jarní bod posouvá o 50,41" za rok směrem k Slunci, při planetární precesi o 0,12" za rok od Slunce a při tzv. geodetické precesi (efekt speciální teorie relativity) o 0,02" za rok, rovněž od Slunce. Vedle toho Měsíc způsobuje nutační pohyb zemské osy s periodou 19 let.

Příklady

4.1 Čtyři částice o hmotnostech m_1 =1 g, m_2 =2 g, m_3 =3 g, m_4 =4 g, jsou spojeny nehmotnými pevnými tyčkami délky 10 cm do uspořádání na obr. 4.25. Určete polohu těžiště těchto těles.

[a) x_s =20 cm, b) x_s =5 cm, y_s =7 cm, c) x_s =1 cm, y_s =2 cm, z_s=3 cm]

4.2 Určete polohu těžiště tenké tyčky délky l, jejž lineární hustota lineárně vzrůstá od τ_1 do τ_2.

[$x_s = \frac{l}{3}\ \frac{\tau_1+2\tau_2}{\tau_1+\tau_2}$]

4.3 Určete polohu těžiště homogenního rotačního kužele.

[ve vzdálenosti 3/4 výšky od vrcholu)

4.4 Částice téže hmotnosti m jsou umístěny v rozích krychle a spojeny pevnými nehmotnými tyčkami délky a. Určete moment setrvačnosti tohoto tělesa vzhledem k tělesové úhlopříčce krychle.

[$I = 4ma^2$]

obr. 4.25

4.5 Určete moment setrvačnosti tyčky délky l a hmotnosti m rotující kolem osy kolmé k tyčce a procházející a) jejím koncem, b) ve vzdálenosti $l/4$ od konce.

$$[I = \frac{1}{3}ml^2, \quad I = \frac{7}{48}ml^2]$$

4.6 Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního dutého válce o poloměrech r_1, r_2 a hmotnosti M vzhledem k jeho ose rotační symetrie.

$$[I = \frac{1}{2}M\ (\ r_1^2 + r_2^2\ )]$$

4.7 Je dán homogenní válec výšky h a poloměru podstavy R. Jaký musí být poměr h/R, aby tento válec byl kulovým setrvačníkem?

$$[\sqrt{3}]$$

4.8 Určete, s jakým zrychlením bude klesat k zemi (a opět stoupat) hračka zvaná jojo a jakou silou bude napínáno vlákno (obr. 4.26).

$$[a = \frac{2}{3}g\ , \quad F_n = \frac{1}{3}mg]$$

4.9 Určete, jakou rychlostí bude klesat vědro s vodou o hmotnosti m, jehož závěs se odvíjí z rumpálu hmotnosti M a poloměru r (obr. 4.27)

$$[v = \frac{2mg}{2m+M}\ t]$$

4.10 Určete kinetickou energii obruče, plného válce a koule, které se valí po rovině postupnou rychlostí v.

$$[mv^2, \quad \frac{3}{4}mv^2, \quad \frac{7}{10}mv^2]$$

4.11 Na vodorovném homogenním kotouči hmotnosti M a poloměru R (kolotoči) stojí člověk hmotnosti m ve vzdálenosti r od svislé osy procházející středem kotouče, který se může otáčet bez tření. Jak velkou úhlovou rychlostí se bude otáčet kotouč, půjde-li člověk po kružnici poloměru r opsané kolem středu kotouče relativní rychlostí v vzhledem ke kotouči?

obr. 4.26

obr. 4.27

$[\omega = \frac{mvr}{\frac{1}{2}MR^2+mr^2}]$

obr. 4.28

4.12 Určete rychlost postupného pohybu válce a koule, které se začnou valit po nakloněné rovině o sklonu α, a klesnou přitom o výšku h.

$$[\sqrt{\tfrac{4}{3}hg}, \quad \sqrt{\tfrac{10}{7}hg}]$$

4.13 Určete rychlost postupného pohybu válce a koule, které se začnou valit po nakloněné rovině o sklonu α, za stejnou dobu t.

$$[\tfrac{2}{3}gt\sin\alpha, \quad \tfrac{5}{7}gt\sin\alpha]$$

4.14 *Atwoodův padostroj.* Přes kladku představující kotouč o momentu setrvačnosti I jsou na nehmotném závěsu zavěšena dvě břemena, s jedné strany břemeno hmotnosti m_1, s druhé strany břemeno o hmotnosti m_2. Závěs na kladce neprokluzuje. S jakým zrychlením bude klesat těžší břemeno?

$$[a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}}\, g]$$

4.15 Po nakloněné rovině svírající s vodorovnou rovinou úhel α se valí bez prokluzování plný homogenní válec. Určete a) velikost síly smykového tření válce na nakloněné rovině, b) maximální úhel α, při němž se válec bude ještě valit bez prokluzování, je-li koeficient smykového tření f.

$$[F_{st} = \tfrac{1}{3}mg\sin\alpha, \quad \text{tg}\ \alpha_{max} = 3f]$$

4.16 Homogenní dřevěná tyč délky $l = 40$ cm a hmotnosti $M = 1$ kg se může otáčet kolem osy, která je k ní kolmá a prochází těžištěm. Na konec tyče narazí střela hmotnosti $m = 10$ g rychlostí 200 m.s^{-1} ve směru kolmém k ose i tyči. Určete úhlovou rychlost ω, kterou nabude tyč, jestliže v ní střela uvázne.

$[\omega = \frac{6mv}{(M+3m)l} = 29,5\ \mathrm{s}^{-1}]$

4.17 Jakou rychlostí musí narazit střela hmotnosti m kolmo na spodní konec svisle zavěšené tyče hmotnosti M a délky l, aby ji vychýlila o úhel 90^0 ? Střela v tyči uvízne.

$$[v = \frac{1}{m}\sqrt{gl(M+2m)\ (\frac{M}{3}+m)}]$$

4.18 Tenká homogenní tyč hmotnosti M a délky l kývá kolem osy, která je k mí kolmá a prochází jejím horním koncem. a) Určete periodu malých kyvů. b) Existuje na tyči místo, do kterého můžeme připevnit těleso malých rozměrů (hmotný bod) o značné hmotnosti, aby se doba kyvu nezměnila? Kde?

$$[T = 2\pi\ \sqrt{\frac{2}{3}\ \frac{l}{g}}, \text{ je vzdáleno od bodu závěsu o } \frac{2}{3}l]$$

4.19 Fyzické kyvadlo hmotnosti M je vytvořeno ze dvou stejných tyčí délky l spojených do tvaru T. Přitom může kývat zavěšeno za spodní konec dvěma způsoby: a) v rovině kolmé k rovině téčka, b) v rovině téčka (viz obr. 4.28). Určete periodu malých kyvů v těchto případech.

$$[T = 2\pi\ \sqrt{\frac{17}{18}\ \frac{l}{g}}\ , \quad T = 2\pi\ \sqrt{\frac{16}{18}\ \frac{l}{g}}]$$

4.20 Plný homogenní kotouč poloměru $r = 10$ cm kývá kolem osy, která prochází jeho okrajem a je kolmá k ose kotouče. Určete redukovanou délku tohoto kyvadla.

$$[l_r = \frac{3}{2}\ r = 15 \text{ cm}]$$

5. MECHANIKA KONTINUA

5.1 Mechanika pružného tělesa

5.1.1 Matematický popis pohybu kontinua

Uváděli jsme, že dokonale tuhá tělesa neexistují, že je to jen ideální fyzikální model. Ve skutečně lze každé těleso deformovat; přitom vzájemné vzdálenosti hmotných bodů tvořících těleso nezůstávají stejné. Protože těleso může být tvořeno velkým počtem hmotných bodů, má taková mechanická soustava nekonečný počet stupňů volnosti a vyžaduje jiný matematický popis než soustavy s konečným počtem stupňů volnosti. Její pohyb popisují parciální diferenciální rovnice.

Omezíme se pouze na malé deformace těles vyvolané působením vnějších sil. Přestanou-li tyto vnější síly působit, těleso se opět vrací do původního stavu. V takovém případě nazýváme těleso *pružným, elastickým.* [60]

[60] Ani dokonale pružná tělesa neexistují. Po deformaci se těleso již nikdy nevrací do původního stavu, malá zbytková deformace vždy zůstává.

Existují i *pevná tělesa* jiných vlastností - jestliže je těleso tvárné a po deformaci zůstává ve výsledném stavu, nazýváme je *plastickým*. Je-li deformace příliš velká, může dojít k porušení spojitosti tělesa, *dislokaci*. [61] Reálná tělesa se obyčejně chovají v některých podmínkách jako pružná, v jiných jako plastická a mohou mít i další mechanické vlastnosti, jimiž se zde nebudeme zabývat. Podotkněme jen, že studium mechanických vlastností materiálů má obrovský význam pro moderní techniku a vedle fyzikální teorie elasticity se přitom uplatňuje i teorie plasticity, teorie dislokací, lomová mechanika a další obory.

Pružné těleso jako zvláštní případ pevného tělesa budeme považovat za spojité, kontinuální. Vedle pevných látek však známe i jiná spojitá prostředí tvořená například *kapalinami* nebo *plyny*. Na rozdíl od pružných těles kapaliny mění snadno svůj tvar, zaujímají tvar nádoby, ale málo mění svůj objem (jsou málo stlačitelné). Plyny pak se vyznačují velkou stlačitelností a snaží se zaplnit vždy celý objem, který mají k dispozici. Kapaliny a plyny zahrnujeme pod společný název *tekutiny*. Přes tyto rozdíly můžeme všechny tyto případy zahrnout pod jeden pojem *kontinua* a popisovat je jednotným matematickým způsobem. Charakter kontinua, spojitého prostředí, má i *pole*, například elektromagnetické či gravitační. Přestože teorie relativity a kvantová fyzika ukázala na některé zásadní rozdíly mezi polem a látkovým prostředím, má i matematický popis polí společné rysy s popisem kontinua.

V mechanice kontinua nám tedy půjde o

1. pružná tělesa

2. tekutiny

a) kapaliny

b) plyny

[61] Rozlišení těles na pružná, plastická a křehká provedl poprvé v 17. století český vědec Jan Marek Marci.

obr. 5.1 obr. 5.2

Ke studiu pohybu kontinua lze v zásadě použít dvě metody. Můžeme rozdělit kontinuum na jednotlivé hmotné body (elementy objemu) a sledovat jejich pohyb - to je **metoda Lagrangeova**. Můžeme se se ale také zaměřit na jednotlivé body prostoru a sledovat pohyb střídajících se hmotných bodů kontinua, které do těchto bodů prostoru vstupují; to je **metoda Eulerova**. Můžeme si představit, že Lagrange a Euler zkoumají pohyb vody v řece. Lagrange přitom hází do vody plovoucí tělíska, běží po břehu a sleduje jejich pohyb. Euler naproti tomu sedí na břehu řeky a mapuje rychlost vody v jednotlivých místech. Při studiu pohybu pružného tělesa, kdy se hmotné body příliš nevzdalují ze svých poloh, je zřejmě výhodnější metoda Lagrangeova, při zkoumání pohybu tekutin může být výhodnější metoda Eulerova.

Přejdeme nyní k matematickému popisu deformace a pohybu kontinua. Na obr. 5.1 máme dva blízké hmotné body tvořící kontinuum $A,\ B$ s polohovými vektory $\vec{r},\ \ \vec{r}+d\vec{r}$. Při deformaci se bod A přesune o vektor $\vec{\eta}$ [62], kterému říkáme *vektor posunutí*, a zaujme novou polohu $\vec{r}'$. Bod B se posune o $\vec{\eta}+d\vec{\eta}$ bude mít polohový vektor $\vec{r}'+d\vec{r}'$.

Vyjádříme nové polohové vektory bodů $A',\ B'$ ve složkách:

$$A':\quad x_i' \;=\; x_i+\eta_i, \qquad B':\quad x_i'+dx_i' = x_i+dx_i+\eta_i+d\eta_i\ .$$

[62] Často označovaný též $\vec{u}$.

Vektor posunutí $\vec{\eta}$ je obecně v každém bodě tělesa různý, je funkcí souřadnic. Vyjádříme nyní posunutí bodu B nekonečně blízkého k bodu A a využijeme přitom Einsteinova sumačního pravidla:

$$\eta_i(x_j + dx_j) \;=\; \eta_i(x_j) \;+\; d\eta_i \;=\; \eta_i(x_j) \;+\; \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} dx_j \;=$$

$$= \eta_i \;+\; \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \right) \right] dx_j \tag{5.1}$$

(přičetli jsme a zároveň odečetli $\partial \eta_j / \partial x_i$).

Posunutí bodu B lze tedy rozložit na tři části. První z nich, η_i je zřejmě stejná jako posunutí bodu A a jde tedy o společnou *translaci* obou bodů. Lze ukázat, že třetí část vyjadřuje pootočení bodu B kolem bodu A beze změny vzdálenosti mezi nimi, tedy *rotaci*.

Antisymetrický tenzor

$$\varphi_{ij} \;=\; \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \eta_j}{x_i} \right)$$

lze vyjádřit pomocí axiálního vektoru φ_i, kterému se říká duální, vztahem

$$\varphi_{ij} \;=\; -\varepsilon_{ijk} \varphi_k$$

(ε_{ijk} je Levi-Civitův tenzor). Potom

$$\varphi_{ij} dx_j \;=\; -\varepsilon_{ijk} \varphi_k dx_j \;=\; \varepsilon_{ijk} \varphi_j dx_k \;=\; (\vec{\varphi} \times d\vec{r})_i \;,$$

kde $\vec{\varphi}$ je vektor malého úhlu pootočení.

Protože ani první ani třetí člen (5.1) nemění vzdálenost mezi body A a B, musí deformaci vyjadřovat člen druhý. Příslušný symetrický tenzor

$$e_{ij} \;=\; \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \right) \tag{5.2}$$

proto nazveme *tenzorem malých deformací*.

Pro posunutí bodu B v blízkosti bodu A tedy máme

$$\eta_i(x_j + dx_j) \;=\; \eta_i(x_j) \;+\; \varepsilon_{ijk} \varphi_j dx_k \;+\; e_{ij} dx_j \tag{5.3}$$

a označíme-li rychlosti translace, rotace a deformace $v_i,\ \omega_i,\ \dot{e}_{ij}$, dostaneme rychlost bodu B

$$v_i(x_j + dx_j) \;=\; v_i(x_j) \;+\; \varepsilon_{ijk} \omega_j dx_k \;+\; \dot{e}_{ij} dx_j \;. \tag{5.4}$$

V blízkém okolí daného bodu lze pohyb kontinua rozložit na pohyb translační, rotační a deformační.

Uvedené tvrzení se někdy nazývá *Helmholtzova věta*.

5.1.2 Tenzor malých deformací

Všimneme si nyní blíže vlastností tenzoru malých deformací (5.2). Především určíme, jak se při deformaci změní vzdálenost bodů A a B. S přesností prvního řádu dostaneme

$$dl'^2 - dl^2 = dx'_i dx'_i - dx_i dx_i = (dx_i + d\eta_i)\,(dx_i + d\eta_i) - dx_i dx_i \approx d\eta_i dx_i + d\eta_i dx_i \approx$$

$$\approx \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} dx_k dx_i + \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} dx_j dx_i = \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right) dx_j dx_k = 2\, e_{jk}\, dx_j\, dx_k\,,$$

neboť sčítací index si můžeme označit jak potřebujeme (pokud není už v daném členu použit).

Vyjádříme nyní **relativní změnu vzdálenosti** bodů A a B, opět v přiblížení malých deformací, kdy $dl' \approx dl$:

$$\frac{dl'^2 - dl^2}{dl^2} = \frac{dl' + dl}{dl}\,\frac{dl' - dl}{dl} \approx 2\,\frac{dl' - dl}{dl} = 2\, e_{jk}\,\frac{dx_j}{dl}\frac{dx_k}{dl}\,.$$

Uvažme nyní, že bod B se přiblíží nebo vzdálí od bodu A ve směru osy x. Potom relativní změna jejich vzdálenosti (prodloužení nebo zkrácení) bude

$$\frac{dl' - dl}{dl} = e_{11}\,. \tag{5.5}$$

Diagonální prvky tenzoru malých deformací mají tedy názorný fyzikální význam - představují **relativní prodloužení nebo zkrácení ve směru souřadných os.**

Vedle čistého zkrácení nebo prodloužení vzdálenosti dvou bodů může v okolí bodu A dojít i k *deformaci smykové*. Máme-li v blízkosti bodu A body B a C ležící na osách x a y, takže úsečky AB, AC svírají před deformací pravý úhel, může se stát, že po deformaci se tento pravý úhel změní a tyto úsečky budou svírat s osami x a y malé smykové úhly α_1, α_2. Lze dokázat [63], že nediagonální prvky tenzoru malých deformací e_{ij}, $i \neq j$ jsou právě rovny polovinám příslušných smykových úhlů.

Důležitou charakteristikou tenzoru, invariantem, je jeho stopa, součet diagonálních prvků. Ukážeme, že stopa tenzoru malých deformací je rovna relativní změně objemu při deformaci. Mějme objem ve tvaru kvádru o stranách l_1, l_2, l_3, $V = l_1 l_2 l_3$, ležících v souřadných osách. Po deformaci se objem kvádru změní na

$$V' = l_1\,(\,1 + e_{11}\,)\,l_2\,(\,1 + e_{22}\,)\,l_3\,(\,1 + e_{33}\,) \approx V\,(\,1 + e_{11} + e_{22} + e_{33}\,)\,,$$

takže relativní změna objemu (tzv. *kubická dilatace*)

$$\theta = \frac{V' - V}{V} = e_{11} + e_{22} + e_{33} = e_{ii} = \mathrm{Sp}\; e_{ij}\,. \tag{5.6}$$

Diagonální prvky tenzoru malých deformací vyjadřují tedy relativní prodloužení nabo zkrácení vzdáleností podél souřadných os, nediagonální prvky odpovídají polovičním smykovým úhlům a stopa udává kubickou dilataci. Deformace tělesa může být tvarová, objemová nebo tvarová i objemová. Pokud se mění pouze tvar tělesa beze změny objemu, bude kubická dilatace $\theta = 0$.

[63] Viz například Brdička M.: "Mechanika kontinua", NČSAV Praha 1959

Tenzor malých deformací je symetrický a jako takový může být znázorněn symetrickou kvadratickou plochou, kvadrikou

$$e_{ij}\, x_i\, x_j \;=\; \pm 1\,. \tag{5.7}$$

Takovým kvadrikám se říká *Cauchyho* [64] *kvadriky deformací* .V každém bodě tělesa lze vést tři kolmé směry, *hlavní osy deformací* takové, že tenzor malých deformací má v těchto osách diagonální tvar:

$$\begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix}.$$

Diagonální prvky $e_1,\ e_2,\ e_3$ se nazývají *hlavní deformace* a vyjadují zkrácení a prodloužení ve směru hlavních os. Mohou tedy být jak kladné tak záporné. V hlavních osách zapíšeme tedy rovnici Cauchyho kvadriky deformací

$$e_1 x^2 \;+\; e_2 y^2 \;+\; e_3 z^2 \;=\; \pm 1\,. \tag{5.8}$$

Pak můžeme rozlišovat několik případů:

1. $e_1 > 0,\ \ e_2 > 0,\ \ e_3 > 0$ - na pravé straně (5.8) musíme vzít +1, dochází k všestrannému roztažení tělesa

2. $e_1 < 0,\ \ e_2 < 0,\ \ e_3 < 0$ - na pravé straně (5.8) musíme vzít -1, dochází k všestrannému stlačení tělesa
V obou těchto případech představuje Cauchyho kvadrika **trojosý elipsoid**.

3. $e_1 > 0,\ \ e_2 > 0,\ \ e_3 < 0$ - na pravé straně (5.8) můžeme vzít buď +1, pak dostáváme rovnici **jednodílného hyperboloidu**, nebo -1 a máme rovnici **dvojdílného hyperboloidu**. Případ lze samozřejmě obměnit i pro ostatní souřadné osy.

4. $e_1 < 0,\ \ e_2 < 0,\ \ e_3 > 0$ - případ je obdobný předchozímu, pouze oblasti stlačení a roztažení jsou vyměněny.

Třetí případ je znázorněn na obr. 5.2. Ve směrech na dvoudílný hyperboloid dochází ke stlačení tělesa, ve směrech na jednodílný hyperboloid k jeho roztažení. Oba hyperboloidy jsou odděleny asymptotickým kuželem. Deformace ve směrech ležících v této kuželové ploše jsou čistě smykové.

Rovnici Cauchyho kvadriky můžeme normovat tak, aby nám udávala velikost a směr deformace. Nechť r je délka průvodiče k příslušné kvadrice. Potom

$$r \;=\; \sqrt{x_i x_i}, \quad \Delta r \;=\; \frac{x_i}{\sqrt{x_i x_i}}\,\Delta x_i$$

a relativní prodloužení

$$\frac{\Delta r}{r} \;=\; \frac{x_i \Delta x_i}{r^2} \;=\; \frac{e_{ij} x_i x_j}{r^2}\,.$$

[64] Čti kóšiho.

(malá deformace ve směru x_i je $\Delta x_i = e_{ij} x_j$). Z rovnice kvadriky pak dostaneme pro relativní prodloužení ve směru průvodiče podle (5.7)

$$\frac{dr}{r} = \pm \frac{1}{r^2} \tag{5.9}$$

Lze ukázat, že směr tohoto prodloužení (zkrácení) je dán směrem normály ke Cauchyho kvadrice.

5.1.3 Tenzor napětí

Zabývejme se nyní silami, které vyvolávají deformaci těles. Tyto síly mohou být *objemové* nebo *plošné*. Objemové síly působí současně na všechny elementy objemu tělesa, pronikají celým tělesem. Typickou objemovou silou je síla tíhová, u elektricky nabitých těles například síla elektrostatická. Zavedeme-li objemovou hustotu síly $\vec{\mathcal{F}}$, můžeme zapsat výslednici objemových sil

$$\vec{F} = \int_V \vec{\mathcal{F}}\, dV, \qquad F_i = \int_V \mathcal{F}_i\, dV\ .$$

Tak se těleso bude deformovat tíhovou silou, je-li například zavěšeno nebo jinak upevněno v tíhovém poli. Objemová hustota tíhové síly pak je $\vec{\mathcal{F}} = \rho\vec{g}$.

Druhým důležitým případem jsou síly plošné, působící na povrch tělesa. Jsou to například síly jimiž působí píst na kapalinu, břemeno zavěšené na konci nosníku nebo moment síly kroutící tyč. Tyto plošné síly můžeme popsat pomocí *vektoru napětí* $\vec{\mathcal{T}}$. Mechanickým napětím rozumíme sílu vztaženou k jednotce plochy. Přitom ovšem záleží na vzájemné orientaci síly a plochy. Působí-li síla ve směru normály k ploše, může vyvíjet tlak nebo tah, působí-li tečně, vyvolává smyk. Obecně tedy můžeme vektor napětí rozdělit na dvě složky, napětí tečné $\vec{T}$ a normálové $\vec{N}$ (viz obr. 5.3).

Mějme tedy malou plošku dS o jednotkovém vektoru normály $\vec{n}$, takže ji můžeme považovat za vektor $d\vec{S} = dS\ \vec{n}$. Abychom vyjádřili napětí v nějakém bodě kontinua, museli bychom v tomto bodě umístit malou plošku, pro každou její orientaci udat sílu, která na ni působí, a tuto sílu pak dělit velikostí plošky. Stačí nám tedy, abychom ke každému vektoru $\vec{n}$ dokázali přiřadit vektor napětí $\vec{\mathcal{T}}$. Bez hlubšího zdůvodňování můžeme usoudit, že mezi složkami obou vektorů bude platit vztah

$$\mathcal{T}_i = \sigma_{ij}\, n_j\ . \tag{5.10}$$

Lze dokázat, že veličiny σ_{ij} tvoří prvky tenzoru, a to tenzoru *symetrického*. Říká se mu *tenzor napětí* a plně nám popisuje působení plošných sil v každém bodě kontinua.

Protože tenzor napětí je symetrický, můžeme jej opět znázornit kvadrikami, jimž se říká Cauchyho kvadriky napětí. Platí o nich totéž co o kvadrikách deformací. Kladné diagonální prvky tenzoru napětí vyjadřují tah, záporné tlak v daném bodě, nediagonální prvky popisují napětí tečná, smyková. Opět lze zavést hlavní osy napětí, v nichž působí pouze tlak nebo tah. Je-li tlak nebo tah všestranný, bude Cauchyho kvadrika elipsoidem. Působí-li například ve směru osy z tlak a ve směru druhých dvou os tah, dostaneme kombinaci dvojdílného a jednodílného hyperboloidu oddělených kuželem (obr. 5.2).

obr. 5.3

V hlavních osách napětí bude mít tenzor napětí diagonální tvar

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} .$$

Veličinám σ_1, σ_2, σ_3 se říká *hlavní napětí* a jejich zadání plně popisuje rozložení plošných sil v kontinuu.

V tekutinách, kde podle Pascalova zákona působí v každém bodě všestranný tlak p a neeexistují napětí smyková, má tenzor napětí v libovolně orientovaných osách tvar

$$\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} . \tag{5.11}$$

Znaménko minus je voleno proto, že veličina p udává tlak tekutiny, tedy reakční sílu proti vnějším silám napětí.

Odvodíme nyní obecnou rovnici rovnováhy kontinua. Rovnováha zřejmě nastane, bude-li výslednice všech vnějších sil, objemových i plošných, a jejich momentů nulová. Protože musí být v rovnováze jak kontinuum jako celek, tak i jejich dílčí objemy ohraničené dílčími plochami navzájem, musí být nulová výslednice plošných sil na každé uzavřené ploše v kontinuu. Můžeme ji zapsat (ve složkách) jako plošný integrál

$$F_{ip} \;=\; \oint_S \mathcal{T}_i dS \;=\; \oint_S \sigma_{ij} n_j dS \;=\; \oint_S \sigma_{ij} dS_j \; .$$

Ve vektorové a tenzorové analýze se dokazuje *Gaussova věta*, [65] která umožňuje přejít od plošného integrálu přes uzavřenou plochu k objemovému integrálu přes objem touto plochou ohraničenému. Pro vektory můžeme tuto větu zapsat ve tvaru [66]

$$\oint_S F_i dS_i \;=\; \int_V \frac{\partial F_i}{\partial x_i}\, dV$$

a pro tenzory

$$\oint_S \sigma_{ij} dS_j \;=\; \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\, dV\ .$$

Vyjádříme nyní výslednici všech, objemových i plošných sil pomocí jediného objemového integrálu a položíme ji rovnu nule:

$$F_{ip} \;+\; F_{io} \;=\; \oint_S \sigma_{ij} dS_j \;+\; \int_V \mathcal{F}_i dV \;=\; \int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \;+\; \mathcal{F}_i \right) dV \;=\; 0\ . \tag{5.12}$$

To je podmínka rovnováhy kontinua v integrálním tvaru. Měli bychom ještě zkoumat podmínku nulové výslednice momentu vnějších sil. Ukáže se však, že ta bude pro plošné síly automaticky splněna díky tomu, že tenzor napětí je symetrický. Stačí pak uvažovat jen síly objemové. Protože podmínka rovnováhy (5.12) musí platit pro libovolný objem kontinua, musí být nulová i integrovaná funkce a tak dostanema parciální diferenciální *rovnici rovnováhy kontinua* ve tvaru

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \;+\; \mathcal{F}_i \;=\; 0\ . \tag{5.13}$$

Abychom našli jednoznačné řešení této rovnice, musíme ovšem znát i okrajové podmínky.

Pro tekutinu v tíhovém poli přejde tato obecná rovnice rovnováhy na

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} \;=\; \rho\ g_i \tag{5.14}$$

nebo ve vektorovém tvaru

$$\nabla p \;=\; \rho\ \vec{g}\ . \tag{5.15}$$

Od rovnice rovnováhy kontinua můžeme přejít i k obecné *pohybové rovnici kontinua* vztaženou k jednotce jeho objemu. Zrychlení jednotky objemu je pak dáno druhou derivací podle času vektoru posunutí:

$$\rho \frac{\partial^2 \eta_i}{\partial t^2} \;=\; \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \;+\; \mathcal{F}_i\ . \tag{5.16}$$

5.1.4 Hookeův zákon

Zavedli jsme dva tenzory, tenzor malých deformací e_{ij} a tenzor napětí σ_{ij}, které popisují deformaci kontinua a rozložení mechanického napětí v něm. Deformace a napětí v kontinuu

[65] V jednoduché podobě jsme se s ní setkali při výpočtu gravitačního pole uvnitř kulové hmoty.

[66] Suma $\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \mathrm{div}\ \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$ se nazývá *divergence vektoru* $\vec{F}$, podobně pro tenzor.

obr. 5.4 obr. 5.5

spolu ovšem souvisí. Je-li například těleso vystaveno vnějšímu tlaku nebo tahu, dojde k posunutí jeho jednotlivých částí vzhledem k původnímu, nedeformovanému stavu a ustaví se nová rovnováha mezi vnějšími silami a silami vnitřního napětí v kontinuu.

Uvažujme jednoduchý příklad tenké tyče, která je namáhána například tahem. Její deformaci pak lze popsat jediným prvkem tenzoru malých deformací e_{11} a napětí jako tah podél tyče σ_{11}. Pro malé deformace můžeme očekávat, že deformace bude úměrná napětí:

$$\sigma_{11} \;=\; E\; e_{11}\;. \tag{5.17}$$

To je známý Hookeův zákon v nejjednodušší podobě a konstanta úměrnosti E je *Youngův modul* materiálu v tahu.

Přímá úměrnost mezi deformací a napětím se však udrží jen pro malé deformace a při větších hodnotách se bude tato funkce měnit. Tahový diagram tenké tyče je naznačen na obr. 5.4. Bod A, kde Hookeův zákon přestává platit nazýváme *mez úměrnosti.* Za ní roste napětí pomaleji a od bodu B (*mez kluzu*) pokračuje deformace prakticky při konstantním napětí, materiál jako by tekl. V bodě C (*mez pevnosti*) začíná docházet k porušení tyče. Její příčný průřez se rychle zmenšuje, napětí klesá a tyč se nakonec přetrhne.

Vedle těchto charakteristických bodů je důležitá ještě *mez pružnosti* ohraničující oblast, kdy je deformace ještě vratná. Překročíme-li tuto mez, zůstane při nulovém napětí zbytková deformace a závislost deformace a napětí bude tvořit tzv. *hysterezní křivku* (obr. 5.5).

Obecná závislost mezi deformací a napětím je ovšem značně složitější než u deformace tenké homogenní tyče tahem. V mezích úměrnosti bude Hookeův zákon představovat obecný vztah mezi dvěma tenzory [67]

$$\sigma_{ij} \;=\; C_{ijkl}\; e_{kl}\;, \tag{5.18}$$

kde C_{ijkl} je tenzor čtvrtého řádu tvořený 81 prvky (!), takzvanými elastickými koeficienty. Vzhledem k symetrii tenzorů napětí a deformace je však mnoho z těchto prvků stejných

[67] Předpokládáme, že deformace je homogenní a že koeficienty úměrnosti mezi napětím a deformací nezávisí na souřadnicích

a v nejobecnějším případě deformace krystalů trojklonné soustavy je třeba znát jen 21 elastických koeficientů. Tento počet se dále snižuje s růstem symetrie kontinua. [68] U izotropního kontinua by se zdálo, že vystačíme s jediným elastickým koeficientem. Ukazuje se však, že je obecně třeba udat koeficienty dva, z nichž jeden popisuje deformaci tvarovou a druhý objemovou. Hookeův zákon v izotropním kontinuu (pružném tělese) zní

$$\sigma_{ij} \;=\; \lambda\, \delta_{ij}\, \theta \;+\; 2\mu\, e_{ij}\;. \tag{5.19}$$

Koeficienty λ, μ se nazývají *Laméovy koeficienty*, při čemž první z nich vyjadřuje změnu objemu (θ je kubická dilatace) a druhý, označovaný též jako G, je *modul smyku*. Vedle těchto dvou elastických koeficientů užíváme dále *Youngův modul*, definovaný vztahem

$$E \;=\; \frac{\sigma_{11}}{e_{11}}\;, \tag{5.20}$$

Poissonovu konstantu

$$\sigma \;=\; \left|\frac{e_{22}}{e_{11}}\right| \tag{5.21}$$

(vyjadřuje poměr zúžení a prodloužení tyče) a *modul stlačitelnosti*

$$K \;=\; -\,\frac{p}{\theta} \tag{5.22}$$

(stopa tenzoru deformace je $e_{ii} = \theta$, tenzoru napětí $\sigma_{ii} = -3p$.)

Všechny tyto elastické koeficienty nejsou ovšem nezávislé. Stačí znát jen dva z nich a ostatní jsou tím už určeny. V tabulkách obyčejně najdeme hodnoty Youngova modulu a (bezrozměrnou) Poissonovu konstantu pro daný materiál. Zbylé koeficienty pak určíme ze vztahů

$$\lambda \;=\; \frac{E\,\sigma}{(1+\sigma)\,(1-2\sigma)}, \qquad \mu \;=\; \frac{E}{2\,(1+\sigma)}, \qquad K \;=\; \frac{E}{3\,(1-2\sigma)}\;. \tag{5.23}$$

V tekutinách, kde neexistují smykové deformace, se situace podstatně zjednoduší, je zde $\mu = 0$, $E = 0$, $\sigma = 1/2$, $K = \lambda$. Stačí tedy znát jen jeden koeficient, stlačitelnost kapaliny nebo plynu. Nezmiňujeme se o tom, že elastické koeficienty závisí též na teplotě a na termodynamických parametrech procesu deformace (jde-li o deformaci pomalou, izotermickou, nebo rychlou, adiabatickou).

<u>Úloha</u> (Deformace svislé tyče v tíhovém poli)

Mějme tyč délky l a průřezu S zavěšenu v tíhovém poli (obr. 5.6). Na každý jednotkový objemový element tyče působí síla $\rho\, g$. Rozdělíme tyč na malé vrstvičky délky dz, z nichž každá se prodlouží o $dl = e_{zz}dz$. Na vrstvičku přitom působí tíha celé části tyče pod ní $\rho\, g\, S\, z$ tj. napětí $\sigma_{zz} = \rho\, g\, z$. Podle Hookeova zákona

$$e_{zz} \;=\; \frac{1}{E}\,\sigma_{zz}\;,$$

[68] Je dobře známo, jak rozdílné mechanické vlastnosti má například dřevo ve směru růstu stromu a kolmo k němu.

obr. 5.6 obr. 5.7

takže celkové prodloužení tyče

$$\Delta l \;=\; \int_0^l e_{zz} dz \;=\; \frac{\rho\, g}{E} \int_0^l z dz \;=\; \frac{\rho\, g\, l^2}{2E}\;.$$

Kdybychom vzali v úvahu konečný průřez tyče a řešili i rovnice pro deformaci ve směru kolmém k tyči, zjistili bychom, že okrajové přímky tyče přestanou být svislými a pro tyč kruhového průřezu dolní podstava přejde v rotační paraboloid.

Úloha (torze kruhové tyče nebo vlákna)

Mějme tyč kruhového průřezu S poloměru R upevněnou dolní podstavou na podložce. Nechť na horní podstavu působí silový moment vyvolávající torzi (kroucení) tyče (obr. 5.7). Máme určit úhel zkrutu tyče. Získaný výsledek lze uplatnit i na případ vlákna zakrucovaného na dolním konci, například u torzních vah.

Umístíme počátek souřadnic ve vybraném kolmém řezu na ose tyče. Při pootočení se bod ve vzdálenosti r od osy posune tak, že $\delta\vec{r} = \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}$, kde $\delta\vec{r} = (\eta_x, \eta_y, 0)$, $\delta\vec{\varphi} = (0, 0, \varphi), \vec{r} = (x, y, 0)$. Předpokládáme, že kolmé řezy tyče zůstávají během torze rovinnými a že tedy jde o čistě smykovou deformaci - ukazuje se, že to platí za předpokladu, že průřez tyče je kruhový. Označíme úhel zkroucení připadající na jednotku délky tyče jako τ. Potom máme

$$\eta_x = -\varphi y = -\tau\, y\, z, \quad \eta_y = \varphi\, x = \tau\, x\, z\,.$$

Podle definice tenzoru malých deformací (5.2)

$$e_{xz} = e_{zx} = -\frac{1}{2}\,\tau\, y, \quad e_{yz} = e_{zy} = \frac{1}{2}\,\tau\, x\,.$$

Ostatní prvky tenzoru jsou nulové. [69] Dále podle Hookeova zákona pro smyk

$$\sigma_{ij} = 2\mu\eta_{ij}, \quad \sigma_{xz} = -\mu\,\tau\, y, \quad \sigma_{yz} = \mu\,\tau\, x\,.$$

Okrajovou podmínku na horní podstavě můžeme formulovat tak, že zde působí plošný moment síly

$$N_z = \oint_S \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} dS_l = \oint_S (x\sigma_{yz} - y\sigma_{xz}) dS = \tau\mu \oint_S (x^2+y^2) dS = \tau\mu \oint_S r^2 2\pi r dr = \tau\mu \frac{\pi R^4}{2}\,.$$

Celkový úhel zkroucení tyče pak bude

$$\varphi_0 = \tau l = \frac{2}{\pi}\frac{N_z\, l}{\mu\, R^4} = \frac{N_z\, l}{D}\,,$$

kde $D = \frac{\pi}{2}\mu R^4$ se nazývá tuhostí v torzi. Vidíme, že tato tuhost roste s vysokou mocninou poloměru tyče či vlákna a že při zmenšení poloměru vlákna o jeden řád zmenší se potřebný kroutící moment o čtyři řády. Tím je dána mimořádně vysoká citlivost torzních vah.

5.2 Mechanika tekutin

5.2.1 Rovnováha tekutin

Z rovnice rovnováhy tekutin (5.14), (5.15), vyplývají známé poznatky hydrostatiky a aerostatiky. Mějme napřed nestlačitelnou kapalinu, v níž $\rho =$ konst. Můžeme-li zanedbat vliv tíhové síly na ni, máme

$$\nabla p = 0, \quad p = \text{konst}\,, \tag{5.24}$$

[69] Odpovídá to poznatku, že nediagonální prvky tenzoru malých deformací jsou poloviční smykové úhly.

což je vyjádřením *Pascalova zákona* o tom, že tlak v kapalině je všude stejný. Zvětší-li se tlak v kapalině, například působením pístu na její povrch, vzroste tlak opět v celém objemu kapaliny stejně.

Bude-li působit tíhová síla, poroste tlak kapaliny s hloubkou:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho\, g, \quad p = -\rho\, g\, z + C\,. \tag{5.25}$$

Míří-li osa z vzhůru, odečítáme-li souřadnici z od hladiny a položíme-li tlak na hladině roven nule a hloubku $h = -z$, máme známý výraz pro hydrostatický tlak

$$p = \rho\, g\, h\,. \tag{5.26}$$

Chceme-li zjistit, jak roste tlak atmosféry s výškou, musíme vzít v úvahu, že vzduch je stlačitelná tekutina v tíhovém poli a musíme znát termodynamický vztah mezi jeho hustotou a tlakem $\rho\,(p)$. Pro izotermické děje můžeme vzít Boyleův - Mariotteův zákon

$$\rho = k\, p\,.$$

Pak máme rovnici

$$\frac{dp}{dz} = -\rho\, g = -k\, g\, p, \quad dz = -\frac{1}{kg}\,\frac{dp}{p}\,,$$

$$z = -\frac{1}{kg}\,\ln p + C, \quad p = \text{konst}\ \mathrm{e}^{-kgz}\,.$$

Určíme-li konstantu integrování tak, aby při $z = 0$ byly $p = p_0$, $\rho = \rho_0 = kp_0$ hodnoty tlaku a hustoty atmosféry při mořské hladině, dostáváme takzvaný *barometrický vzorec*

$$p = p_0\ \mathrm{e}^{-\frac{\rho_0}{p_0}gz}\,. \tag{5.27}$$

Ten udává rozložení tlaku vzduchu v atmosféře za předpokladu, že její teplota je všude stejná. Výška atmosféry pak vychází nekonečně velká, s exponenciálně klesajícím tlakem a hustotou. Ve skutečnosti, jak víme, se teplota atmosféry s výškou mění. Vezmeme-li jiný vztah mezi hustotou a tlakem, například rovnici adiabaty $\rho = k\, p^{1/\kappa}$, kde κ je tzv. Poissonova plynová konstanta, dostaneme jiný průběh tlaku a hustoty s výškou, odpovídající lineárnímu poklesu teploty atmosféry s výškou. Taková atmosféra pak končí ve výšce asi 50 km, což dává dobrý souhlas se skutečností.

Z rovnice rovnováhy tekutin dostaneme i známý *Archimedův zákon*. Na vybraný objem v nestlačitelné kapalině působí plošná síla

$$F_{ip} = -\int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} dV\,.$$

Z rovnice rovnováhy

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho\, g\,,$$

a tedy

$$F_{xp} \;=\; F_{yp} \;=\; 0, \qquad F_{zp} \;=\; g \int_V \rho \, dV \; . \tag{5.28}$$

Poslední výraz představuje Archimedův vztlak. Moment plošné síly působící na takový objem nemá složku ve směru z, takže vztlaková síla působí v těžišti tohoto objemu. Moment síly může ovšem těleso pod vodou (ponorku) převrátit.

Úloha (tlak ve středu Země)

Odhadneme tlak ve středu Země za předpokladu, že Země je tvořena nestlačitelnou kapalinou hustoty $5,5.10^3$ kg.m^{-3}. Lze ukázat, že kdybychom ji považovali za pružné těleso, hodnota tohoto tlaku by se příliš nezměnila. Hledaný tlak je způsoben gravitačními silami, které Zemi svírají. Uvnitř zeměkoule roste tato síla s první mocninou vzdálenosti od středu, takže z rovnice rovnováhy kapaliny máme

$$\frac{dp}{dr} \;=\; -\frac{g}{R_Z} \, \rho \, r, \qquad p \;=\; -\frac{g \, \rho}{2R_Z} \, r^2 \;+\; C \; .$$

Položíme-li tlak roven nule na povrchu Země, dostaneme $C = \rho \; g \; R_Z/2$ a tlak ve středu Země

$$p \; (0) \;=\; \frac{1}{2} \, \rho \; g \; R_Z \;=\; 1,7.10^5 \text{ MPa} \; .$$

Výsledek koresponduje s geologickými odhady ($3,5.10^5$ MPa).

Úloha (Newtonovo vědro)

Úlohu setrvačných sil demonstrovat Newton na známém pokusu s rotujícím vědrem. Naplnil vědro vodou, zavěsil je na zakroucený provaz a roztočil. Během rotace se postupně dostala do rotačního pohybu i voda ve vědru a její povrch vytvořil rotační paraboloid. S hlediska inerciální vztažné soustavy je zřejmé, že na vodu působí jednak síla tíhová a jednak síly tření se strany rotujícího vědra. Rotační pohyb se pak předává dalším válcovým vrstvám vody v důsledku jejího vnitřního tření, vazkosti. Protože rychlost pohybu se směrem k ose vědra snižuje, vznikají zde gradienty rychlosti. Tímto způsobem by bylo možno tvar hladiny vody vysvětlit.

Snadněji však vyřešíme úlohu ve vztažné soustavě spojené s rotujícím vědrem. V ní totiž je vědro i voda v klidu, ale působí zde setrvačná, odstředivá síla. Stačí tedy řešit úlohu o rovnováze nehybné kapaliny pod vlivem objemové síly

$$\vec{\mathcal{F}} \;=\; \rho \; (\; \omega^2 \; x, \; \omega^2 \; y, \; -g \;) \; .$$

Dostaneme

$$\frac{\partial p}{\partial x} \;=\; \rho \, \omega^2 \; x, \quad \frac{\partial p}{\partial y} \;=\; \rho \, \omega^2 \; y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} \;=\; -\rho \; g \; .$$

Zintegrujeme tyto rovnice:

$$p \;=\; \rho \, \omega^2 \frac{x^2}{2} + f_1(y,z), \quad p \;=\; \rho \, \omega^2 \frac{y^2}{2} + f_2(x,z), \quad p \;=\; -\rho \; g \; z + f_3(x,y) \; ,$$

obr. 5.8 obr. 5.9

kde $f_1,\ f_2,\ f_3$ jsou neznámé funkce uvedených proměnných. Aby všechna tato vyjádření tlaku p platila současně, musí zřejmě být

$$p \;=\; -\rho\, g\, z \;+\; \frac{1}{2}\,\rho\,\omega^2\,(\,x^2+y^2\,)\;+\;C\,.$$

Tvar hladiny dostaneme tak, že položíme $p = 0$. Tím získáme rovnici rotačního paraboloidu:

$$z \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{\omega^2}{g}\,(\,x^2+y^2\,)\;+\;C\,.$$

5.2.2 Proudění tekutin

Přejdeme k pohybu kontinua. Tekutiny se mohou v prostoru přemisťovat, proudit. Podobně jako při mechanickém pohybu těles toto proudění může být doprovázeno disipací energie, třením tekutiny o stěny a *vnitřním třením, vazkostí (viskozitou)* tekutiny. Při vnitřním tření se část mechanické energie proudění nevratně mění v energii tepelného pohybu, uplatní se nekonzervativní síly. Přitom se v tekutině objeví tečná, smyková napětí úměrná příčnému gradientu rychlosti. Proudí-li například vazká kapalina trubicí ve směru osy x, bude rozložení rychlostí v kapalině jako na obr. 5.8 - u stěn vznikne nehybná hraniční vrstva, maximální rychlost bude v ose trubice a vektory rychlostí vytvoří parabolický profil.

Tečné napětí působící mezi proudícími vrstvami kapaliny (označíme je τ) pak je

$$\tau \;=\; \eta\,\frac{dv}{dy}\,, \tag{5.29}$$

kde koeficient η se nazývá *dynamická vazkost* kapaliny. Dělíme-li dynamickou vazkost hustotou, dostáváme tzv. *kinematickou vazkost*

$$\nu \;=\; \frac{\eta}{\rho}\,. \tag{5.30}$$

Dynamická vazkost se měří v jednotkách Pa.s a její hodnoty pro různé tekutiny jsou tabelovány. Například pro vodu je $\eta = 0{,}001$ Pa.s, pro glycerin $\eta = 1{,}48$ Pa.s. Vztah (5.29) se nazývá *Newtonův zákon pro vazké napětí* a kapaliny, které se mu podřizují, se nazývají *newtonovskými*. Newtonovskou kapalinou je například voda, která při rotaci ve válcové nádobě vytváří hladinu ve tvaru rotačního paraboloidu. Víme však, že existují i nenewtonovské kapaliny, kde závislost napětí na gradientu rychlosti je jiná. Nenewtonovsky se chová například zmrzlina, asfalt, bahno v močálu a další. Prouděním vazkých tekutin se zabývá obor zvaný *reologie*.[70]

Pokud kapalina neproudí příliš rychle, bude její proudění *laminární*, jednotlivé částice kapaliny se budou pohybovat po křivkách zvaných proudnice a ty pak budou vytvářet proudové trubice. Proudění probíhá jakoby v nezávislých vrstvách, které po sobě kloužou. Při velkých rychlostech se proudění změní v *turbulentní*, objeví se v něm víry, bude chaotické. Nástup turbulentního proudění závisí také na stupni vazkosti kapaliny a průměru trubice, jíž kapalina proudí. Lze zavést bezrozměrné *Reynoldsovo číslo*

$$R = \frac{v\,a}{\nu}\,, \tag{5.31}$$

kde v je rychlost kapaliny, a charakteristický rozměr a ν kinematická vazkost. Je-li zhruba $R < 1\,000$, bude proudění laminární.

Reálná kapalina je tedy obecně vazká a stlačitelná. U některých kapalin však můžeme jejich vazkost zanedbat a použít modelu *ideální kapaliny.* [71] V ideální kapalině se pak uplatňují zákony zachování hmotnosti a a mechanické energie.

Výrazem zákona zachování hmotnosti je *rovnice kontinuity.* Protéká-li kapalina rychlostí v průřezem ΔS, proteče jím za sekundu hmotnost $\Delta m = \rho\ v\ \Delta S$. Jsou-li rychlost a vektor normály k ploše ΔS orientovány pod obecným úhlem, bude průtok hmotnosti $\Delta m = \rho\ \vec{v} \cdot \Delta\vec{S}$. Můžeme tedy zavést hustotu hmotnostního toku, hmotnost protékající jednotkou plochy za jednotku času, jako $\vec{j} = \rho\ \vec{v}$. Vytéká-li nyní kapalina uzavřená v objemu V hraniční plochou, musí se hmotnost vytékající kapaliny rovnat úbytku kapaliny v tomto objemu. Matematicky to můžeme vyjádřit vztahem

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\ dV\ . \tag{5.32}$$

To je vyjádření rovnice kontinuity v integrálním tvaru. Plošný integrál však můžeme upravit podle Gaussovy věty na

$$\oint_S j_i\ dS_i = \int_V \frac{\partial j_i}{\partial x_i} dV\ ,$$

a porovnáme-li pak levou a pravou stranu (5.32), dostaneme

$$\frac{\partial j_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}\,, \tag{5.33}$$

nebo, ve vektorovém tvaru,

$$\mathrm{div}\ \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}\ . \tag{5.34}$$

[70] Různé reologické modely tekutin jsou podrobně probrány v učebnici Kvasnica J. a kol. "Mechanika", Academia, Praha 1988.

[71] Existuje dokonce dokonale ideální kapalina bez vnitřního tření, které říkáme supratekutá. Supratekutost se projevuje například u kapalného helia při teplotách blízkých absolutní nule a její existence vyplývá z kvantové fyziky.

obr. 5.10

To je rovnice kontinuity v diferenciálním tvaru.

S jednoduchou podobou rovnice kontinuity se setkáváme při proudění kapaliny v trubici. Mějme myšlený objem trubice mezi průřezy S_1, S_2. Hmotnost kapaliny, která vtéká průřezem S_1 musí zřejmě vytékat objemem S_2, jinak by se v tomto objemu kapalina hromadila jako Cimrmanovi horníci. Pak můžeme rovnici kontinuity zapsat jako

$$\rho_1 \; S_1 \; v_1 \; = \; \rho_2 \; S_2 \; v_2 \; . \tag{5.35}$$

Je-li kapalina navíc nestlačitelná, musí se zachovávat nejen hmotnostní, ale i objemový tok v trubici, takže (obr. 5.9)

$$S_1 \; v_1 \; = \; S_2 \; v_2 \; . \tag{5.36}$$

Vidíme, že v zúženém místě pohybuje se nestlačitelná kapalina rychleji. Ne tak proudící lidský dav, který naopak v zúžených místech neracionálně zpomaluje. Dav ovšem představuje kapalinu stlačitelnou a jeho proudění nebývá stacionární, ale mění se v čase.

V ideální nestlačitelné kapalině se zachovává mechanická energie. Vyjadřuje to známá *Bernoulliova rovnice*. Mějme trubici proměnného průřezu, v níž proudí kapalina v tíhovém poli (obr. 5.10). Práci zde koná jednak tíhová síla, jednak plošná síla tlaková. Posune-li se přitom kapalina v průřezu S_1 o vzdálenost ds_1 a totéž množství kapaliny v průřezu S_2 o vzdálenost ds_2, bude přírůstek kinetické energie

$$\frac{1}{2} dm \; v_2^2 \; - \; \frac{1}{2} dm \; v_1^2 \; = \; (h_1 - h_2) \; g \; dm \; + \; p_1 \; S_1 \; ds_1 \; - \; p_2 \; S_2 \; ds_2 \; .$$

Protože v nestlačitelné kapalině $S_1 ds_1 = S_2 ds_2 = dV$, $\quad \rho = dm/dV$, máme

$$\frac{1}{2} \rho \; v_2^2 \; + \; \rho \; g \; h_2 \; + \; p_2 \; = \; \frac{1}{2} \rho \; g \; h_1 \; + \; p_1 \; ,$$

neboli

$$\frac{1}{2}\rho\, g\, h \;+\; p \;=\; \text{konst}\,. \tag{5.37}$$

To je Bernoulliova rovnice vyjadřující zákon zachování mechanické energie v jednotce hmotnosti ideální nestlačitelné kapaliny. Je-li tekutina stlačitelná, je třeba vzít v úvahu ještě práci vykonávanou při změně její hustoty.

Vytéká-li kapalina z nádoby otvorem ve stěně v hloubce h pod povrchem, dostaneme z Bernoulliovy rovnice známý Torricelliho vztah pro rychlost výtoku

$$\frac{1}{2}\rho\, v^2 \;=\; \rho\, g\, h, \qquad v \;=\; \sqrt{2h\, g}\,. \tag{5.38}$$

Při řešení úlohy o proudění ideální tekutiny máme za úkol najít závislost hustoty ρ a rychlosti $\vec{v}$ na prostorových souřadnicích a čase. Mohli bychom vyjít z obecné rovnice kontinua (5.16), která ovšem popisuje posunutí jednotlivých částic kontinua. U tekutin je výhodnější použít Eulerovu metodu a sledovat změnu hustoty a rychlosti v daném bodě prostoru. V každém bodě se však bude rychlost měnit jednak v přímé závislosti na čase, ale také v závislosti na pohybu tekutiny v blízkém okolí. Úplnou časovou změnu rychlosti (zrychlení) tedy musíme vyjádřit jako

$$\frac{dv_i}{dt} \;=\; \frac{\partial v_i}{\partial t} \;+\; \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\,\frac{dx_k}{dt} \;=\; \frac{\partial v_i}{\partial t} \;+\; \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\, v_k\,.$$

Tak dostáváme vektorovou *Eulerovu rovnici*

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \;=\; \vec{g} \;-\; \frac{1}{\rho}\,\nabla p\,, \tag{5.39}$$

kterou řešíme spolu s rovnicí kontinuity a termodynamickou stavovou rovnicí udávající vztah mezi ρ p. Soustava těchto tří rovnic je výchozí pro řešení úloh hydrodynamiky ideální tekutiny.

Je-li tekutina vazká, je třeba uvážit i síly vnitřního tření závislé na rychlosti a tak dostaneme tzv. *Navierovu - Stokesovu rovnici*, kterou zde nebudeme uvádět a odkážeme na literaturu. Řešení Navierovy - Stokesovy rovnice pro vazkou kapalinu je obtížné (je to rovnice nelineární) a podařilo se najít řešení jen v některých zjednodušených případech. K nim patří *Stokesův vzorec* udávající sílu, která působí na malou kuličku poloměru r pohybující se malou rychlostí v ve vazké kapalině

$$F \;=\; 6\,\pi\,\eta\, r\, v \tag{5.40}$$

a Poiseuilleův vzorec, který udává objemový průtok vazké kapaliny tenkými trubičkami poloměru r a délky l při tlakovém spádu Δp (například krve v cévách)

$$Q \;=\; \frac{\pi\,\Delta p}{8\,\eta\, l}\, r^4\,. \tag{5.41}$$

Na tomto vztahu je pozoruhodná silná závislost na poloměru trubice, a tedy i obrovský rozdíl při průtoku krve vlásečnicemi a většími cévami při témž tlaku.

5.3 Zvuk

V pružném prostředí a v tekutině jsou částice mezi sebou vázány nebo na sebe působí při srážkách. Tyto vazby způsobují, že oscilace částic se kontinuem přenášejí a dochází k

šíření mechanického vlnění. Z velkého bohatství vlnových jevů probíhajících v kontinuu si všimneme jen dvou jednoduchých situací, a to šíření podélného vlnění v tenké pružné tyči a šíření zvuku v tekutině.

Při podélném kmitání dochází ke změnám relativního prodloužení malých úseků tyče, které se šíří podél tyče. Toto relativní prodloužení je

$$\varepsilon \;=\; \frac{\Delta\eta}{\Delta x} \;\rightarrow\; \frac{\partial\eta}{\partial x}$$

a jeho přírůstek

$$d\varepsilon \;=\; \frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\,dx \;=\; \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\,dx\;.$$

Vyvolává je síla rovná podle Hookeova zákona

$$dF \;=\; \Delta S\;E\;d\varepsilon \;=\; \Delta S\;E\;\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\,dx\;.$$

Hmotnost tohoto malého úseku tyče je $dm = \rho\Delta S dx$, takže sílu dF můžeme z Newtonova pohybového zákona vyjádřit jako

$$dF \;=\; a\;dm \;=\; \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\;\rho\;\Delta S\;dx\;.$$

Porovnáme-li nyní obě vyjádření síly dF, dostaneme rovnici

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} \;-\; \frac{\rho}{E}\,\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} \;=\; 0. \tag{5.42}$$

Snadno se přesvědčíme, že obecná rovnice

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} \;-\; \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} \;=\; 0 \tag{5.43}$$

představuje *vlnovou rovnici.* Vyhovuje jí řešení $\eta(x,t)$ rovinné harmonické vlny šířící se podél osy x fázovou rychlostí c. Odtud plyne, že podélné mechanické vlnění se bude šířit podél tyče rychlostí

$$c \;=\; \sqrt{\frac{E}{\rho}}\;, \tag{5.44}$$

kde E je Youngův modul a ρ hustota materiálu tyče.

V tekutinách je situace obdobná. Síla působící kolmo na malý průřez tekutiny ΔS je ovšem rovna

$$dF \;=\; \Delta S\;p\;d\varepsilon$$

a stejným způsobem jako u podélných vln v tyči dostaneme rychlost podélného vlnění v tekutině

$$c \;=\; \sqrt{\frac{p}{\rho}}\;. \tag{5.45}$$

Podélné vlnění v tekutinách v oblastí frekvencí 20 - 20 000 Hz je vnímáno jako zvuk a zabývá se jím akustika. Rychlost šíření (5.45), kterou jsme odvodili, by se ovšem uplatnila za předpokladu, že proces šíření vln je izotermický, že periody vlnění jsou dostatečně

dlouhé k tomu, aby se teploty kmitajících částí tekutiny stačily vyrovnávat. Tento předpoklad ovšem splněn není, proces je ve skutečnosti adiabatický. Potom lze rychlost zvuku vyjádřit tzv. *Laplaceovým vzorcem*

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}\,, \tag{5.46}$$

který dobře souhlasí s výsledky experimentu. Konstanta κ je Poissonova plynová konstanta, o které jsme se zmiňovali v souvislosti s barometrickým vzorcem. Ve vzduchu při 20^0 C je rovna 1,402. Rychlost zvuku ve vzduchu za normálních podmínek pak vychází rovna 332 m.s^{-1}, ve vodě 1 485 m.s^{-1}, v železe 5 100 m.s^{-1}.

Příklady

5.1 Kovová tyč délky $l_0 = 1$ m a průřezu $S = 4$ cm^2 je deformována tahem silou $F = 800$ N. Přitom se prodlouží o 10^{-5} m. Určete Youngův modul materiálu tyče a podle tabulek odhadněte, z jakého materiálu by tyč mohla být.

[$E = 2,0.10^{11}$ Pa, ocel]

5.2 Je dán tenzor napětí v určitém bodě pružného tělesa (údaje v Pa):

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} 500 & 500 & 800 \\ 500 & 0 & -780 \\ 800 & -780 & -300 \end{pmatrix}$$

Určete tečné a normálové napětí působící na plošku s normálou $\vec{n} \equiv (1/2,\ 1/2,\ 1/\sqrt{2})$.

[$\vec{\mathcal{T}} = (1\ 066,\ -281,\ -187)$ Pa, $\quad N = \mathcal{T}_i n_i = 260$ Pa, $\ T = \sqrt{\mathcal{T}^2 - N^2} = 1\ 087$ Pa]

5.3 V jednom rameni spojených nádob je voda, ve druhém olej. Výška vody nad společným rozhraním obou kapalin je 4,5 cm, oleje 5,0 cm. Určete hustotu oleje (obr. 5.11).

[900 kg.m^{-3}]

5.4 Jakou výslednou silou působí voda na čtvercovou stěnu akvária, je-li délka stěny a ?

[$\frac{1}{2}\rho g a^3$]

obr. 5.11 obr. 5.12

5.5 Jakou výslednou silou působí voda na říční přehradu tvaru lichoběžníka o základnách $z_1 = 10$ m (dolní), $z_2 = 15$ m (horní) a výšce $h = 5$ m. V jaké hloubce leží působiště výsledné síly?

$$[F = \frac{1}{3}\rho g h^2 \left(z_1 + \frac{z_2}{2}\right) = 1,43.10^6 \text{ N}, \quad h_0 = \frac{1}{2}\frac{3z_1+z_2}{2z_1+z_2}h = 3,2 \text{ m}]$$

5.6 *Archimedes.* Na plnou kouli působí ve vzduchu tíhová síla 390 N, na tutéž kouli ponořenou do vody síla 340 N. Jaký je objem koule a z jaké látky je koule zhotovena?

$$[5,1 \text{ dm}^3, \text{ nejspíš ze železa}]$$

5.7 Na koncích nerovnoramenné páky jsou zavěšena dvě homogenní tělesa zhotovená a) z téže látky, b) z různých látek. Ve vzduchu jsou obě tělesa v rovnováze. Zůstane rovnováha zachována, ponoříme-li obě tělesa do nádoby s vodou?

5.8 *Redukce vážení na vakuum.* Předmět o hustotě ρ je na vzduchu vyvážen na rovnoramenných váhách mosazným závažím o hmotnosti m_z. Stanovte skutečnou hmotnost předmětu, je-li hustota mosazi ρ_z a hustota vzduchu v místě a okamžiku vážení ρ_v.

$$[m = m_z \left(1 + \rho_v \frac{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_z}}{1 - \frac{\rho_v}{\rho}}\right) \approx m_z \left[1 + \rho_v \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_z}\right)\right]]$$

5.9 Nádoba na stole je naplněna vodou do výšky h. Dokažte, že voda z každého otvoru ve stěně nádoby dopadá na stůl se stejnou rychlostí a určete ji. V jaké výšce musí být otvor, aby proud vody z něho vytékající dopadl na stůl nejdále od nádoby?

$[\sqrt{2hg},\ h/2]$

5.10 Válcová nádoba je do výšky $h = 70$ cm naplněna vodou. Plocha dna je 600 cm^2. Otvorem ve dně nádoby plochy 1 cm^2 voda vytéká. Za jakou dobu se nádoba vyprázdní do poloviny a za jakou úplně?

[66 s, 225 s]

5.11 Z trysky vodotrysku s průřezem 1,5 cm^2 vystřikuje voda rychlostí 24 m.s^{-1}. Jak velká je rychlost proudu v přívodním potrubí, jehož průřez má obsah 18 cm^2?

[2,0 m.s^{-1}]

5.12 *Pitotova trubice.* Trubici zalomenou do pravého úhlu vložíme do proudící kapaliny (obr. 5.12). Do jaké výšky h_2 vystoupí kapalina v ohnuté trubici, jestliže v rovné trubici vložené do téhož místa vystoupí do výšky h_1 a jestliže rychlost proudící kapaliny v daném místě je v ?

$[h_2 = h_1 + \frac{v^2}{2g}]$

5.13 *Venturiova trubice.* Jak velkou rychlostí proudí voda vodorovnou trubicí s průřezem $S_1 = 15$ cm^2, jestliže v zúženém místě o průřezu $S_2 = 5$ cm^2 se zmenší tlak o 500 Pa ?

[35 cm.s^{-1}]

5.14 Určete tvar rotační nádoby, aby voda vytékající malým otvorem plochy ΔS ve dně klesala rovnoměrně rychlostí v.

$[z = \frac{\pi^2 v^2}{2g\Delta S^2}\ r^4]$

Otázky:

01. Fyzikální veličiny, jejich rozměr a jednotky, rozměrová analýza
02. Kinematika částice, dráha, rychlost a zrychlení přímočarého pohybu
03. Tečné a normálové zrychlení
04. Kinematika kruhového a harmonického pohybu
05. Skládání pohybů, Lissajousovy obrazce
06. Newtonův zákon setrvačnosti, Galileiův princip relativity
07. Newtonův zákon síly, síly pravé, setrvačné, vazbové
08. Hmotnost gravitační a setrvačná
09. Newtonův zákon akce a reakce
10. Impuls síly a změna hybnosti
11. Práce a změna kinetické energie, výkon, síly potenciální, konzervativní a disipativní
12. Řešení pohybových rovnic - síly závislé na čase
13. Řešení pohybových rovnic - síly závislé na rychlosti
14. Řešení pohybových rovnic - síly závislé na poloze, potenciálová jáma a bariéra
15. Netlumený lineární harmonický oscilátor
16. Tlumený oscilátor a jeho režimy
17. Vynucené kmity a rezonance, rezonanční křivky, činitel jakosti
18. Matematické kyvadlo, perioda, napětí závěsu
19. Vrh v homogenním silovém poli
20. Pohyb částice v centrálním silovém poli
21. Newtonův gravitační zákon, určování gravitační konstanty
22. Keplerova úloha a Keplerovy zákony
23. Kosmické rychlosti
24. Prostorový oscilátor
25. Neinerciální vztažná soustava, setrvačné síly
26. První věta impulsová, těžiště soustavy částic
27. Rovnice pohyby rakety
28. Druhá věta impulsová
29. Věta o celkové energii soustavy, věta Königova
30. Úloha dvou těles
31. Pružné srážky a srážkové diagramy
32. Rozptyl izotropní a Rutherfordův
33. Nepružné srážky, koeficient restituce
34. Kinematika tuhého tělesa
35. Tenzor momentu setrvačnosti, Steinerova věta
36. Eulerovy setrvačníkové rovnice
37. Pevná a volná osa rotace
38. Pohyb volného symetrického setrvačníku
39. Pohyb těžkého rychlého symetrického setrvačníku
40. Fyzické kyvadlo
41. Pohyb válce a koule po nakloněné rovině
42. Kinematika kontinua, tenzor deformace
43. Tenzor napětí, Hookeův zákon
44. Torze a torzní váhy
45. Rovnováha tekutin, Pascalův zákon

46. Barometrický vzorec
47. Archimedův zákon
48. Proudění tekutin, rovnice kontinuity
49. Bernoulliova rovnice
50. Mechanické vlnění, zvuk a jeho šíření

Pokyny pro zkoušející

1. Před zahájením zkoušení vysvětlete zkoušenému, že na správnosti jeho odpovědí závisí celá jeho další odborná kariéra, a tedy vlastně celý život. Zdůrazněte mu hned na začátku vážnost situace.

2. Začněte vždy nejtěžší otázkou. Je-li první otázka dostatečně složitá, zkoušený znervozní a nebude schopen odpovídat ani na další, sebelehčí otázky.

3. Ke zkoušenému se chovejte přísně a zdrženlivě, k dalším zkoušejícím naopak vesele a žoviálně. Čas od času se na ně obracejte a jízlivými poznámkami zesměšňujte odpovědi zkoušeného. Chovejte se přitom, jako by v místnosti nebyl.

4. Donuťte zkoušeného, aby při řešení úlohy postupoval vaším způsobem, zejména je-li to způsob neobvyklý. Během řešení doplňujte různá další omezení a předpoklady, dávejte dodatečné otázky a pokyny. Tímto způsobem je možno i jednoduchou úlohu učinit dostatečně obtížnou.

5. Nechte zkoušeného udělat triviální chybu, aby si nad ní lámal hlavu co možná nejdéle. Jestliže hrozí nebezpečí, že na chybu přijde sám, rychle mu ji opravte, dříve než se mu podaří najít správný postup.

6. Když zkoušený začne tonout a neví kudy kam, zívněte a přejděte k další otázce.

7. Čas od času se při zkoušení ptejte: "Copak jste se to neučili na základní škole?"

8. Nedovolte zkoušenému, aby kladl vyjasňující otázky a nikdy neopakujte vlastní vysvětlení nebo tvrzení.

9. Každou chvíli se zkoušeného ptejte, jestli není nervozní.

10. Pokud jsou zkoušející dva, musí se posadit tak, aby se zkoušený nacházel v křížové palbě jejich pohledů. Ptejte se vždy v okamžiku, kdy je zkoušený obrácen k druhému

zkoušejícímu.

11. Při zkoušení si berte tmavé brýle - neproniknutelnost znervozňuje.
12. Zkoušení ukončete ponurou výzvou: "Počkejte za dveřmi, budete zavolán!"

Podle S. D. Masona, Proceedings of the IRE, 1965.