

# Kapitola 15

## Spin v rotujícím magnetickém poli

Pro dvouhladinový systém, jako je spin  $\frac{1}{2}$ , je v určitých případech možné exaktně vyřešit Schrödingerovu rovnici i pro časově závislý hamiltonián. Jedním z nich je spin v rotujícím magnetickém poli, který si nyní probereme. Tento model představuje základní fyzikální princip nukleární magnetické rezonance. Ukážeme si i jeho využití v precizní spektroskopii.

### Hamiltonián spinu v magnetickém poli

Uvažujme spin  $\frac{1}{2}$  v magnetickém poli

$$\vec{B}(t) = \vec{B}_0 + \vec{B}_1(t),$$

které lze rozložit na statickou část  $\vec{B}_0$  ve směru osy  $z$

$$\vec{B}_0 = (0, 0, B_0),$$

a časově závislou část  $\vec{B}_1(t)$ , která svírá s osou  $z$  úhel  $\theta$  a rotuje kolem ní úhlovou rychlostí  $\omega$ , tj.

$$\vec{B}_1(t) = (B_1 \sin \theta \cos \omega t, -B_1 \sin \theta \sin \omega t, B_1 \cos \theta).$$

Hamiltonián spinu je na čase závislý

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) &= -\hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{B}(t) = -\frac{\mu B_0}{\hbar} \hat{S}_3 - \frac{\mu B_1}{\hbar} \left[ \sin \theta \left( \hat{S}_1 \cos \omega t - \hat{S}_2 \sin \omega t \right) - \hat{S}_3 \cos \theta \right] \\ &= -(\omega_0 + \omega_1 \cos \theta) \hat{S}_3 - \omega_1 \sin \theta \left( \hat{S}_1 \cos \omega t - \hat{S}_2 \sin \omega t \right), \end{aligned} \quad (15.1)$$

kde jsme zavedli přechodové frekvence spinu v polích intenzity  $B_0$  a  $B_1$

$$\omega_0 = \frac{\mu B_0}{\hbar}, \quad \omega_1 = \frac{\mu B_1}{\hbar}.$$

V reálných aplikacích je  $B_1 \ll B_0$ , takže i  $\omega_1 \ll \omega_0$ .

## Řešení Schrödingerovy rovnice přechodem do rotující soustavy

Využijeme toho, že časově závislá část hamiltoniánu lze napsat jako  $\hat{S}_1$  otočený o úhel  $-\omega t$  okolo osy  $z$

$$\hat{S}_1 \cos \omega t - \hat{S}_2 \sin \omega t = e^{\frac{i}{\hbar} \omega t \hat{S}_3} \hat{S}_1 e^{-\frac{i}{\hbar} \omega t \hat{S}_3} = \hat{R}_z(-\omega t) \hat{S}_1 \hat{R}_z^\dagger(-\omega t).$$

Protože  $\hat{S}_3$  komutuje s operátorem rotace okolo osy  $z$ , můžeme hamiltonián (15.1) zapsat ve tvaru

$$\hat{H}(t) = \hat{R}_z(-\omega t) \left( -(\omega_0 + \omega_1 \cos \theta) \hat{S}_3 - \omega_1 \sin \theta \hat{S}_1 \right) \hat{R}_z^\dagger(-\omega t) = \hat{R}_z(-\omega t) \hat{H}(0) \hat{R}_z^\dagger(-\omega t),$$

tj. časovou závislost lze separovat jako dodatečnou rotaci. Přejdeme do rotující souřadné soustavy

$$|\psi'(t)\rangle = \hat{R}_z^\dagger(-\omega t) |\psi(t)\rangle.$$

Ze Schrödingerovy rovnice pro  $|\psi(t)\rangle$  dostaneme rovnici v rotující soustavě

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\psi'(t)\rangle &= i\hbar \left( \frac{d}{dt} \hat{R}_z^\dagger(-\omega t) \right) |\psi(t)\rangle + \hat{R}_z^\dagger(-\omega t) \underbrace{i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle}_{\hat{H}(t)|\psi(t)\rangle} \\ &= i\hbar \left( -\frac{i}{\hbar} \omega \hat{S}_3 \right) \hat{R}_z^\dagger(-\omega t) |\psi(t)\rangle + \underbrace{\hat{R}_z^\dagger(-\omega t) \hat{H}(t) \hat{R}_z(-\omega t)}_{\hat{H}(0)} \hat{R}_z^\dagger(-\omega t) |\psi(t)\rangle \\ &= \left( \hat{H}(0) + \omega \hat{S}_3 \right) |\psi'(t)\rangle = \hat{H}_{ef} |\psi'(t)\rangle, \end{aligned} \quad (15.2)$$

s efektivním hamiltoniánem nezávislým na čase

$$\hat{H}_{ef} = \hat{H}(0) + \omega \hat{S}_3 = (\Delta - \omega_1 \cos \theta) \hat{S}_3 - \omega_1 \sin \theta \hat{S}_1 = \Omega \vec{n}_\Omega \cdot \hat{S}.$$

Zde  $\Delta$  (detuning) značí rozdíl frekvence rotujícího magnetického pole a přechodové frekvence spinu  $\omega_0$

$$\Delta = \omega - \omega_0.$$

Dále jsme zavedli Rabiho frekvenci  $\Omega$  a jednotkový vektor  $\vec{n}_\Omega$  vztahy

$$\Omega = \sqrt{\Delta^2 - 2\Delta\omega_1 \cos^2 \theta + \omega_1^2}, \quad \vec{n}_\Omega = \frac{1}{\Omega} (-\omega_1 \sin \theta, 0, \Delta - \omega_1 \cos \theta). \quad (15.3)$$

V rotující soustavě snadno nalezneme řešení Schrödingerovy rovnice (15.2) (v čase  $t_0 = 0$  se laboratorní a rotující soustava shodují, tj.  $|\psi'(0)\rangle = |\psi(0)\rangle$ )

$$|\psi'(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{ef} t} |\psi'(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \Omega t \vec{n}_\Omega \cdot \hat{S}} |\psi'(0)\rangle = \hat{R}_{\vec{n}_\Omega}(\Omega t) |\psi(0)\rangle, \quad (15.4)$$

lze ho napsat jako rotaci počátečního stavu okolo osy  $\vec{n}_\Omega$  o úhel  $\Omega t$ . Do laboratorní soustavy se vrátíme dodatečnou rotací okolo osy  $z$ , tj.

$$|\psi(t)\rangle = \hat{R}_z(-\omega t) \hat{R}_{\vec{n}_\Omega}(\Omega t) |\psi(0)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} \omega t \hat{S}_3} e^{-\frac{i}{\hbar} \Omega t \vec{n}_\Omega \cdot \hat{S}} |\psi(0)\rangle = \hat{U}(t, 0) |\psi(0)\rangle. \quad (15.5)$$

Zde jsme zavedli evoluční operátor  $\hat{U}(t, 0)$ , který odpovídá časovému vývoji z  $t_0 = 0$  do  $t$ . Protože hamiltonián (15.1) závisí na čase, je evoluční operátor závislý na koncovém i počátečním čase, ne jen jejich rozdílu. Ve standardní bázi tvořené vlastními vektory  $\hat{S}_z$  můžeme matici evolučního operátoru  $\hat{U}(t, 0)$  s využitím rotačních matic pro spin  $\frac{1}{2}$  (3.3) zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}
U(t, 0) &= R_z^{(\frac{1}{2})}(-\omega t) R_{\vec{n}_\Omega}^{(\frac{1}{2})}(\Omega t) \\
&= \left( \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) \mathbb{I} + i \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) \sigma_3 \right) \left( \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \mathbb{I} - i \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \vec{n}_\Omega \cdot \vec{\sigma} \right) \\
&= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega}{2}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - i\frac{\Delta - \omega_1 \cos\theta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) & i\frac{\omega_1 \sin\theta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \\ i\frac{\omega_1 \sin\theta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) & \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i\frac{\Delta - \omega_1 \cos\theta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left[ \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - i\frac{\Delta - \omega_1 \cos\theta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] e^{i\frac{\omega}{2}t} & i\frac{\omega_1 \sin\theta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) e^{i\frac{\omega}{2}t} \\ i\frac{\omega_1 \sin\theta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) e^{-i\frac{\omega}{2}t} & \left[ \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i\frac{\Delta - \omega_1 \cos\theta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] e^{-i\frac{\omega}{2}t} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{15.6}$$

## Rotující pole kolmé na statické

V dalším předpokládáme, že vektor  $\vec{B}_1(t)$  rotuje v rovině  $xy$ , tj.  $\theta = \frac{\pi}{2}$  a

$$\vec{B}_1(t) = (B_1 \cos \omega t, -B_1 \sin \omega t, 0). \tag{15.7}$$

Rabiho frekvence a jednotkový vektor  $\vec{n}_\Omega$  se pak zjednoduší na

$$\Omega = \sqrt{\Delta^2 + \omega_1^2}, \quad \vec{n}_\Omega = \frac{1}{\Omega}(-\omega_1, 0, \Delta). \tag{15.8}$$

Matice evolučního operátoru (15.6) pro  $\theta = \frac{\pi}{2}$  je

$$U(t, 0) = \begin{pmatrix} \left[ \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] e^{i\frac{\omega}{2}t} & i\frac{\omega_1}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) e^{i\frac{\omega}{2}t} \\ i\frac{\omega_1}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) e^{-i\frac{\omega}{2}t} & \left[ \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] e^{-i\frac{\omega}{2}t} \end{pmatrix}. \tag{15.9}$$

## Pravděpodobnost překlopení spinu, $\pi$ - a $\frac{\pi}{2}$ -puls

Uvažujme nyní počáteční stav

$$|\psi(0)\rangle = |z, +\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \psi(0).$$

Stav spinu v čase  $t$  je roven

$$\psi(t) = U(t)\psi(0) = \begin{pmatrix} \left[ \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] e^{i\frac{\omega}{2}t} \\ i\frac{\omega_1}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) e^{-i\frac{\omega}{2}t} \end{pmatrix}. \tag{15.10}$$

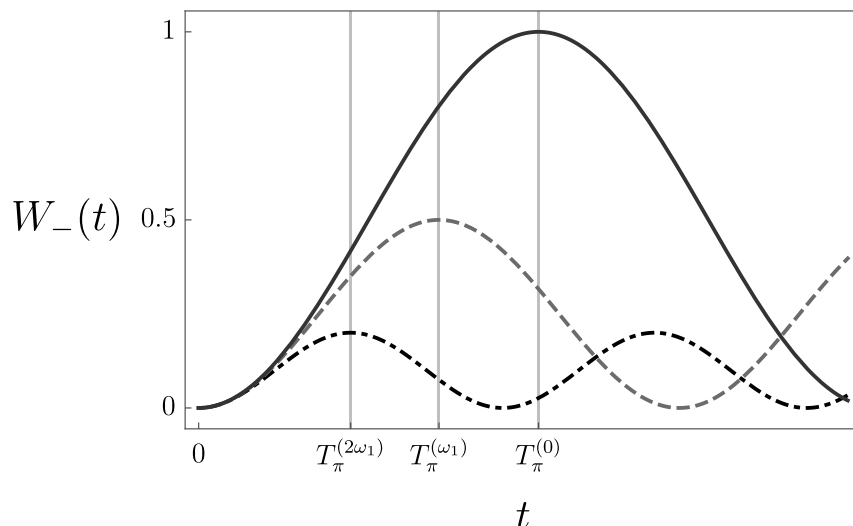
Pravděpodobnost naměření kladné nebo záporné projekce spinu do osy  $z$  v čase  $t$  je

$$\begin{aligned} W_+(t) &= \cos^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + \left(\frac{\Delta}{\Omega}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right), \\ W_-(t) &= \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta}{\omega_1}\right)^2} \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right). \end{aligned} \quad (15.11)$$

Vidíme, že pravděpodobnost překlopení spinu osciluje s Rabiho frekvencí  $\Omega$ . Maximální hodnoty dosáhne po čase  $T_\pi^{(\Delta)}$ , který odpovídá délce tzv.  $\pi$ -pulsu, kdy

$$\Omega T_\pi^{(\Delta)} = \pi.$$

Průběh  $W_-(t)$  s časem je znázorněn na obrázku (15.1) pro  $\Delta = 0, \omega_1, 2\omega_1$ .



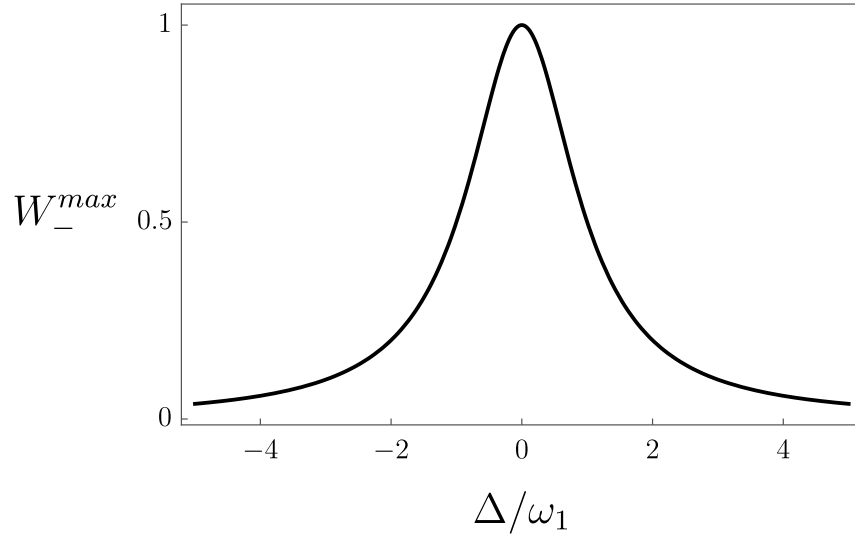
Obrázek 15.1: Průběh pravděpodobnosti překlopení spinu (15.11) v rezonanci  $\Delta = 0$  (modrá čára),  $\Delta = \omega_1$  (červená čárkovaná čára) a  $\Delta = 2\omega_1$  (černá čerchovaná čára). Maxima je dosaženo po  $\pi$ -pulsu pro dané  $\Delta$ .

Maximální pravděpodobnost překlopení spinu je rovna

$$W_-^{max} = \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta}{\omega_1}\right)^2}. \quad (15.12)$$

$W_-^{max}$  má jako funkce  $\Delta\omega_1$  výrazně rezonantní charakter, viz. obrázek 15.2. V rezonanci, kdy  $\omega = \omega_0$  a tedy  $\Delta = 0$ , je  $W_-^{max} = 1$ . Tomuto jevu se říká magnetická rezonance.

Rabiho frekvence se v rezonanci shoduje s frekvencí  $\omega_1$  a délka  $\pi$ -pulsu je tedy  $T_\pi^{(0)} = \frac{\pi}{\omega_1}$ . Pokud puls trvá poloviční dobu ( $\frac{\pi}{2}$ -puls), dojde k překlopení spinu do roviny  $xy$ . Vektor



Obrázek 15.2: Maximální pravděpodobnost překlopení spinu (15.12) jako funkce  $\Delta$ .

$\vec{n}_\Omega$  (15.8) míří v záporném směru osy  $x$ ,  $\vec{n}_\Omega = (-1, 0, 0)$ . V rotující soustavě (15.4) bude spin po  $\frac{\pi}{2}$ -pulsu mířit ve směru osy  $y$

$$|\psi'(T_{\frac{\pi}{2}}^{(0)})\rangle = \hat{R}_{-x}\left(\frac{\pi}{2}\right)|z, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = |y, +\rangle.$$

V laboratorní soustavě musíme udělat dodatečnou rotaci okolo osy  $z$

$$\begin{aligned} |\psi(T_{\frac{\pi}{2}}^{(0)})\rangle &= \hat{R}_z\left(-\pi\frac{\omega_0}{2\omega_1}\right)|\psi'(T_{\frac{\pi}{2}}^{(0)})\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\pi\frac{\omega_0}{4\omega_1}} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi\frac{\omega_0}{4\omega_1}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\pi\frac{\omega_0}{4\omega_1}} \\ ie^{-i\pi\frac{\omega_0}{4\omega_1}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{i\pi\frac{\omega_0}{4\omega_1}} |z, +\rangle + e^{-i\pi\frac{\omega_0}{4\omega_1}} |z, -\rangle \right) = |\vec{p}, +\rangle. \end{aligned}$$

Výsledek odpovídá čistému stavu s vektorem polarizace  $\vec{p} = \left( \cos\left(\pi\frac{\omega_0}{2\omega_1}\right), -\sin\left(\pi\frac{\omega_0}{2\omega_1}\right), 0 \right)$ .

Matice evolučního operátoru od času  $t_0 = 0$  (15.9) se pro  $\frac{\pi}{2}$ - a  $\pi$ -puls zjednoduší na

$$\begin{aligned} U\left(T_{\frac{\pi}{2}}^{(\Delta)}, 0\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\pi\frac{\omega}{4\Omega}} \left(1 - i\frac{\Delta}{\Omega}\right) & i\frac{\omega_1}{\Omega} e^{i\pi\frac{\omega}{4\Omega}} \\ i\frac{\omega_1}{\Omega} e^{-i\pi\frac{\omega}{4\Omega}} & e^{-i\pi\frac{\omega}{4\Omega}} \left(1 + i\frac{\Delta}{\Omega}\right) \end{pmatrix}, \quad (15.13) \\ U\left(T_{\pi}^{(\Delta)}, 0\right) &= \begin{pmatrix} -i\frac{\Delta}{\Omega} e^{i\pi\frac{\omega}{2\Omega}} & i\frac{\omega_1}{\Omega} e^{i\pi\frac{\omega}{2\Omega}} \\ i\frac{\omega_1}{\Omega} e^{-i\pi\frac{\omega}{2\Omega}} & i\frac{\Delta}{\Omega} e^{-i\pi\frac{\omega}{2\Omega}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

V rezonanci dostaneme

$$U\left(T_{\frac{\pi}{2}}^{(0)}, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\pi\frac{\omega_0}{4\omega_1}} & ie^{i\pi\frac{\omega_0}{4\omega_1}} \\ ie^{-i\pi\frac{\omega_0}{4\omega_1}} & e^{-i\pi\frac{\omega_0}{4\omega_1}} \end{pmatrix},$$

$$U\left(T_{\pi}^{(0)}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 & ie^{i\pi\frac{\omega_0}{2\omega_1}} \\ ie^{-i\pi\frac{\omega_0}{2\omega_1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

## Nukleární magnetická rezonance

Nalezená odezva spinu na rotující magnetické pole zachycuje základní fyzikální princip nukleární magnetické rezonance, které lze využít např. v zobrazování a diagnostice (magnetic resonance imaging - MRI), nebo ve spektroskopii. V medicínských aplikacích MRI se využívá spinu jádra vodíku (protonu) v molekule vody. Za běžných teplot a bez magnetického pole jsou spiny orientovány náhodně. Silným statickým polem  $\vec{B}_0$  se dostatečně velká část spinů orientuje ve směru osy  $z$ , vznikne tzv. longitudinální magnetizace. Následně se aplikuje rezonanční  $\frac{\pi}{2}$ -puls, který spiny překlápí do roviny  $xy$ . Po skončení pulsu spiny dále rotují v této rovině s frekvencí  $\omega_0$  a vytváří oscilující magnetické pole, které je zaznamenáno detekční cívkou. Síla signálu je úměrná hustotě spinů - je tedy možné určit množství molekul vody v daném místě a tak rozlišit různé tkáně. Signál navíc exponenciálně klesá v důsledku vzájemné interakce spinů s časovou škálou  $T_2$  (střední doba poklesu signálu na  $1/e$  původní hodnoty). Určením  $T_2$  lze např. detekovat abnormální akumulaci tekutin v daném místě (otok). Spiny se také postupně vrací do rovnováhy s okolím, tj. znovu se orientují ve směru osy  $z$  a dojde obnovení longitudinální magnetizace. Tento proces probíhá na časové škále  $T_1$  (řádově jedna sekunda), která se liší pro různé tkáně a je možné ji dále ovlivnit např. použitím kontrastních látek. Typické MRI přístroje používají statické magnetické pole  $B_0$  intenzity v jednotkách  $T$ . Další tzv. gradientní magnety lokálně ovlivňují hodnotu  $B_0$ , a tedy i frekvence  $\omega_0$  - tím lze dosáhnout prostorového rozlišení řádově v desetinách milimetru.

## Precizní spektroskopie

Magnetické rezonance lze využít k velmi přesnému určení vlastní přechodové frekvence  $\omega_0$ . Z předchozího víme, že pravděpodobnost překlapaní spinu závisí na rozdílu frekvencí rotujícího pole a spinu  $\Delta$ , a také na době působení pole. Maximální pravděpodobnost překlapaní lze dosáhnout pro  $\Delta = 0$ . Přesnost určení  $\omega_0$  pak závisí na šířce maxima  $\delta$  okolo rezonance (tzv. full width at half maximum - FWHM). Ukážeme si základní principy dvou metod měření  $\omega_0$ . V obou postupech částice prolétávají přístrojem rychlostí  $v$  magnetickými poli. V bezinterakční oblasti je pouze statické pole ve směru osy  $z$   $\vec{B}_0$ , v interakční oblasti je navíc pole  $\vec{B}_1(t)$  rotující v rovině  $xy$  (15.7). Doba působení pole závisí na rychlosti částice a délce oblasti.

## Rabiho metoda měření $\omega_0$

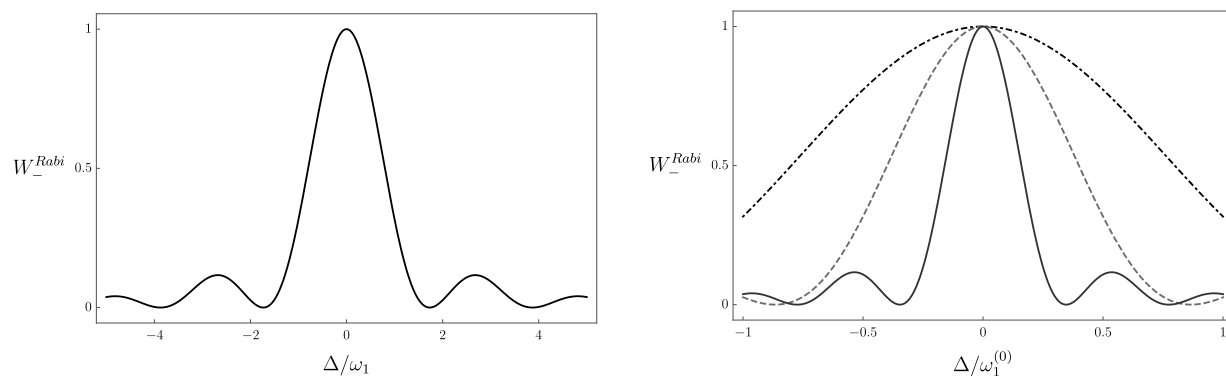
V Rabiho přístroji máme pouze jednu interakční oblast délky  $L$ . Dobu, kterou v ní částice stráví, označíme jako  $\tau = \frac{L}{v}$ . Pravděpodobnost překlopení spinu po průletu Rabiho přístrojem je daná vztahem (15.11). Délka interakční oblasti se zvolí tak, že je rovná  $\pi$ -pulsu pro hledanou rezonanci, tj.

$$\frac{L}{v} = \tau = T_{\pi}^{(0)} = \frac{\pi}{\omega_1}. \quad (15.14)$$

Pravděpodobnost překlopení spinu jako funkce  $\Delta/\omega_1$  je potom rovna

$$W_-^{Rabi} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta}{\omega_1}\right)^2} \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta}{\omega_1}\right)^2} \right). \quad (15.15)$$

Průběh této funkce je na obrázku 15.3 vlevo. Šířka maxima  $\delta$  je úměrná  $\omega_1 \sim \frac{1}{\tau}$ , jak lze vidět z grafu vpravo pro různé hodnoty  $\omega_1$ . Přesnost určení frekvence  $\omega_0$  lze tedy zlepšit současným prodloužením délky interakční oblasti (zvětší  $\tau$ ) a snížením intenzity rotujícího magnetického pole (zmenší  $\omega_1 \sim B_1$ ) tak, že stále platí podmínka (15.14). Ve skutečnosti tu hrají podstatnou roli další faktory (částice mají nějaké netriviální rozdělení rychlostí, rotující magnetické pole není dostatečně homogenní v celé interakční oblasti), které šířku maxima zvětšují. Vliv těchto poruch roste s délkou interakční oblasti. Přesnost určení  $\omega_0$  tedy nelze zlepšovat prodloužováním interakční oblasti dle libosti. Existuje nějaká optimální délka  $L$ , pro kterou dosáhneme nejlepší přesnosti.



Obrázek 15.3: Vlevo je znázorněná pravděpodobnost překlopení spinu v Rabiho přístroji (15.15). Vpravo je stejná funkce pro  $\omega_1 = \omega_1^{(0)}$  (čerchovaná černá čára),  $\omega_1 = \omega_1^{(0)}/2$  (čárkovaná červená čára) a  $\omega_1 = \omega_1^{(0)}/5$  (modrá čára). Šířka maxima klesá s klesajícím  $\omega_1$ , je úměrná  $\omega_1 \sim \frac{1}{\tau}$ .

## Ramseyho interferometr

Lepší přesnosti určení  $\omega_0$  lze dosáhnout pomocí Ramseyho interferometru, který se skládá ze tří oblastí. V 1. a 3. je zapnuté rotující magnetické pole, ve 2. je pouze statické pole ve

směru osy  $z$ . Délka interakčních oblastí je stejná, označme ji opět  $L$ . Volí se tak, že doba průletu interakční oblastí  $\tau$  odpovídá  $\frac{\pi}{2}$ -pulsu pro hledanou rezonanci

$$\frac{L}{v} = \tau = T_{\frac{\pi}{2}}^{(0)} = \frac{\pi}{2\omega_1}.$$

Délku bezinterakční oblasti označme  $L_0$ , dobu průletu  $T = \frac{L_0}{v}$ . Ukážeme, že šířka maxima okolo rezonance bude nepřímo úměrná  $T$ .

Celkový evoluční operátor pro Ramseyho interferometr  $\hat{U}_R$  lze zapsat jako součin tří evolučních operátorů pro jednotlivé oblasti

$$\hat{U}_R = \hat{U}(T + 2\tau, T + \tau) \hat{U}_0(T + \tau, \tau) \hat{U}(\tau, 0).$$

Operátor  $\hat{U}(\tau, 0)$  máme v rovnici (15.9).  $\hat{U}_0$  je evoluční operátor v bezinterakční oblasti, kde je pouze statické magnetické pole  $\vec{B}_0$  ve směru osy  $z$ , tj.

$$\hat{U}_0(T + \tau, \tau) = \hat{U}_0(T) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0T} = e^{i\omega_0\hat{S}_3T} \equiv \begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega_0}{2}T} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega_0}{2}T} \end{pmatrix} \quad (15.16)$$

Evoluční operátor  $\hat{U}(t, t_0)$  s libovolným počátečním časem  $t_0$  určíme s využitím vlastnosti (14.4) a unitarity

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t, 0) \hat{U}(0, t_0) = \hat{U}(t, 0) \hat{U}^\dagger(t_0, 0).$$

Z tvaru evolučního operátoru  $\hat{U}(t, 0)$  (15.5) pak dostaneme

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar}\omega t \hat{S}_3} e^{-\frac{i}{\hbar}\Omega t \vec{n} \cdot \hat{S}} e^{\frac{i}{\hbar}\Omega t_0 \vec{n} \cdot \hat{S}} e^{-\frac{i}{\hbar}\omega t_0 \hat{S}_3} = e^{\frac{i}{\hbar}\omega t \hat{S}_3} e^{-\frac{i}{\hbar}\Omega(t-t_0)\vec{n} \cdot \hat{S}} e^{-\frac{i}{\hbar}\omega t_0 \hat{S}_3}. \quad (15.17)$$

Matice tohoto operátoru ve standardní bázi je

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= R_z^{(\frac{1}{2})}(-\omega t) R_{\vec{n}\Omega}^{(\frac{1}{2})}(\Omega(t-t_0)) R_z^{(\frac{1}{2})}(\omega t_0) \\ &= \begin{pmatrix} \left[ \cos\left(\frac{\Omega(t-t_0)}{2}\right) - i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega(t-t_0)}{2}\right) \right] e^{i\frac{\omega}{2}(t-t_0)} & i\frac{\omega_1}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega(t-t_0)}{2}\right) e^{i\frac{\omega}{2}(t+t_0)} \\ i\frac{\omega_1}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega(t-t_0)}{2}\right) e^{-i\frac{\omega}{2}(t+t_0)} & \left[ \cos\left(\frac{\Omega(t-t_0)}{2}\right) + i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega(t-t_0)}{2}\right) \right] e^{-i\frac{\omega}{2}(t-t_0)} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (15.18)$$

všimněme si, že v exponenciálách na antidiagonále je součet časů  $t - t_0$ .

Určíme nejprve amplitudu pravděpodobnosti překlopení spinu po průchodu interferometrem

$$\mathcal{A}_- = \langle z, - | \hat{U}_R | z, + \rangle = \langle z, - | \hat{U}(T + 2\tau, T + \tau) \hat{U}_0(T + \tau, \tau) \hat{U}(\tau, 0) | z, + \rangle.$$



Výpočet rozdělíme na dvě části, určíme zvlášť  $\hat{U}_0(T + \tau, \tau) \hat{U}(\tau, 0)|z, +\rangle$  a  $\langle z, -|\hat{U}(T + 2\tau, T + \tau)$ . Pro první část s použitím matice (15.16) a výsledku (15.10) dostaneme

$$\begin{aligned} \hat{U}_0(T + \tau, \tau) \hat{U}(\tau, 0)|z, +\rangle &\equiv U_0(T) U(\tau)\psi(0) = U_0(T)\psi(\tau) \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega_0}{2}T} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega_0}{2}T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\cos(\frac{\Omega\tau}{2}) - i\frac{\Delta}{\Omega} \sin(\frac{\Omega\tau}{2})] e^{i\frac{\omega}{2}\tau} \\ i\frac{\omega_1}{\Omega} \sin(\frac{\Omega\tau}{2}) e^{-i\frac{\omega}{2}\tau} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [\cos(\frac{\Omega\tau}{2}) - i\frac{\Delta}{\Omega} \sin(\frac{\Omega\tau}{2})] e^{i\frac{\omega}{2}\tau} e^{i\frac{\omega_0}{2}T} \\ i\frac{\omega_1}{\Omega} \sin(\frac{\Omega\tau}{2}) e^{-i\frac{\omega}{2}\tau} e^{-i\frac{\omega_0}{2}T} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (15.19)$$

Druhá část je díky (15.18), kam dosadíme  $t = T + 2\tau$ ,  $t_0 = T + \tau$ , rovna

$$\begin{aligned} \langle z, -|\hat{U}(T + 2\tau, T + \tau) &\equiv \\ &\left( i\frac{\omega_1}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) e^{-i\frac{\omega}{2}(2T+3\tau)}, \left[ \cos\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) + i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \right] e^{-i\frac{\omega}{2}\tau} \right). \end{aligned} \quad (15.20)$$

Vynásobením vektorů (15.19) a (15.20) dostaneme amplitudu překlopení spinu

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_- &= i\frac{\omega_1}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) e^{-i\frac{\omega}{2}(2T+3\tau)} \left[ \cos\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) - i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \right] e^{i\frac{\omega}{2}\tau} e^{i\frac{\omega_0}{2}T} \\ &\quad + i\frac{\omega_1}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) e^{-i\frac{\omega}{2}\tau} e^{-i\frac{\omega_0}{2}T} \left[ \cos\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) + i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \right] e^{-i\frac{\omega}{2}\tau} \\ &= i\frac{\omega_1}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} e^{-i\frac{\omega}{2}T} \left( \left[ \cos\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) - i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \right] e^{-i\frac{\Delta}{2}T} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \cos\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) + i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \right] e^{i\frac{\Delta}{2}T} \right) \\ &= 2i\frac{\omega_1}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} e^{-i\frac{\omega}{2}T} \left( \cos\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \cos\left(\frac{\Delta T}{2}\right) - \frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta T}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

Pravděpodobnost překlopení spinu po průchodu Ramseyho interferometrem je pak

$$W_- = |\mathcal{A}_-|^2 = 4 \left( \frac{\omega_1}{\Omega} \right)^2 \sin^2\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \left[ \cos\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \cos\left(\frac{\Delta T}{2}\right) - \frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta T}{2}\right) \right]^2.$$

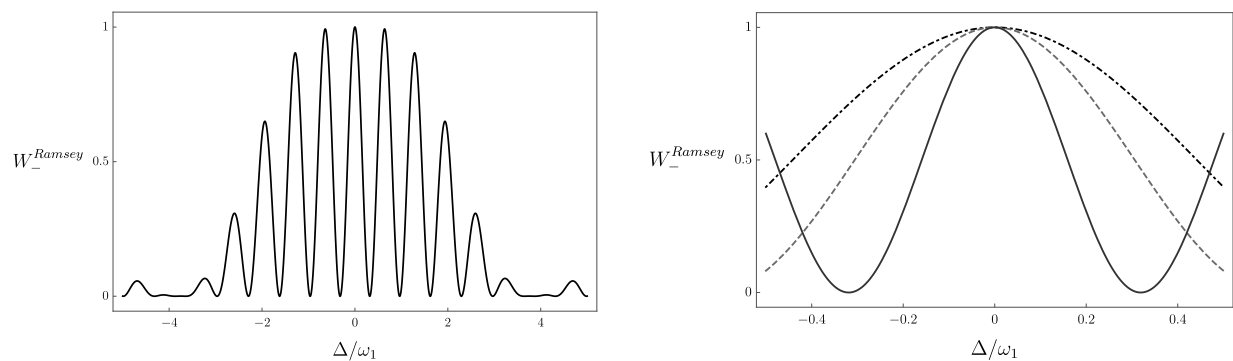
Pro  $\tau = T_{\frac{\pi}{2}}^{(0)} = \frac{\pi}{2\omega_1}$  lze pravděpodobnost překlopení spinu upravit do tvaru

$$\begin{aligned} W_-^{Ramsey} &= \frac{4}{1 + \left(\frac{\Delta}{\omega_1}\right)^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{4} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta}{\omega_1}\right)^2}\right) \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta}{\omega_1}\right)^2}\right) \cos\left(\frac{\Delta T}{2}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta}{\omega_1}\right)^2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta}{\omega_1}\right)^2}\right) \sin\left(\frac{\Delta T}{2}\right) \right]^2. \end{aligned} \quad (15.21)$$

Průběh této funkce pro  $T = 5\tau$  je na obrázku 15.4 vlevo. Jsou zde vidět typické úzké ostré píky (Ramsey fringes). Blízko rezonance lze vztah (15.21) aproximovat pomocí

$$\Delta \approx 0 \implies W_-^{Ramsey} \approx \cos^2\left(\frac{\Delta T}{2}\right). \quad (15.22)$$

Šířka píku okolo  $\Delta = 0$  je tedy nepřímo úměrná době průletu bezinterakční oblasti  $T$  (viz. graf vpravo pro různé hodnoty  $T$ ). Vyšší přesnosti určení  $\omega_0$  tak lze dosáhnout jejím prodloužením, což je technicky jednodušší, než v případě Rabiho přístroje.



Obrázek 15.4: Vlevo je znázorněná pravděpodobnost překlopení spinu po průchodu Ramseyho interferometrem (15.21) jako funkce  $\Delta/\omega_1$  pro  $T = 5\tau = \frac{5\pi}{2\omega_1}$ . Vpravo je pak okolí rezonančního maxima pro různé délky bezinterakční oblasti -  $T = \tau$  (čerchovaná černá čára),  $T = 2\tau$  (čárkovaná červená čára) a  $T = 5\tau$  (modrá čára). Šířka maxima klesá s rostoucím  $T$ .