

Kapitola 13

Radioaktivní rozpad α

Radioaktivní rozpad α je z pohledu klasické fyziky velkou záhadou. Pro daný izotop jsou vyletující α částice v podstatě monoenergetické. Zatímco rozsah kinetických energií α částic pro různé izotopy je zhruba od 4 do 10 MeV, poločasy rozpadu se mohou lišit až o 25 řádů, např. pro $^{152}_{62}\text{Sm}$ je $T_{1/2} \simeq 2.5 \cdot 10^{11}$ let $\simeq 7.9 \cdot 10^{18}$ s, ale v případě $^{214}_{85}\text{At}$ je $T_{1/2} \simeq 10^{-6}$ s. Velké rozdíly mohou nastat i pro dva izotopy jednoho prvku, např. pro $^{210}_{84}\text{Po}$ je $T_{1/2} \simeq 138$ dní $\simeq 1.2 \cdot 10^8$ s, zatímco pro $^{212}_{84}\text{Po}$ je $T_{1/2} \simeq 3 \cdot 10^{-7}$ s. Na základě experimentálních dat formulovali v roce 1911 Geiger a Nuttall vztah, který dává do souvislosti střední dobu života $\tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}$, protonové číslo jádra po rozpadu Z a kinetickou energii α částice E

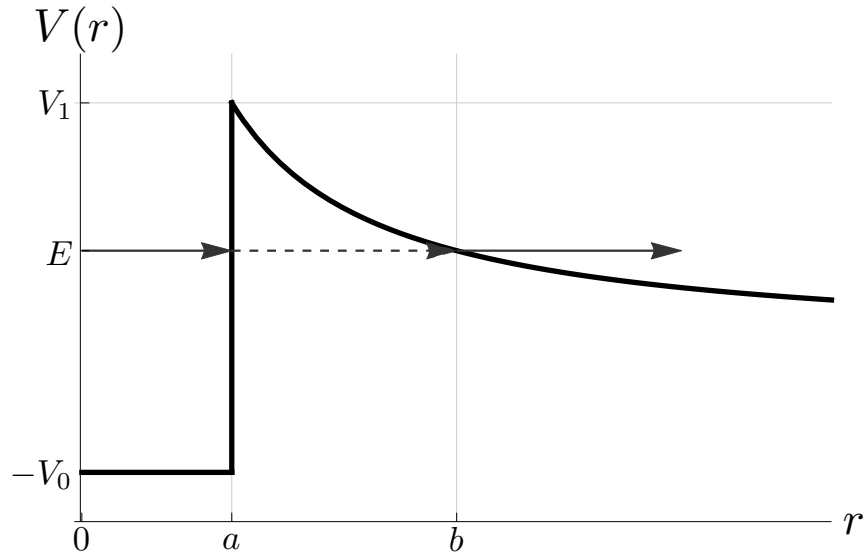
$$\ln \tau = C_1 \frac{Z}{\sqrt{E}} + C_2, \quad (13.1)$$

kde C_i jsou konstanty. Geigerův-Nuttallův vztah ukazuje, že poločas rozpadu závisí exponenciálně na kinetické energii vyletující α částice.

Vysvětlení exponenciální závislosti poločasu rozpadu na energii α částice představili v roce 1928 nezávisle na sobě G. Gamow a R. W. Garney s E. Condonem a hrálo důležitou roli pro přijetí kvantové teorie širší fyzikální komunitou. Na α částici uvnitř jádra působí přitažlivé jaderné síly, které mají krátký dosah řádově 10^{-14} m. Vně jádra je naopak odpuzovaná Coulombickou interakcí. Z klasického pohledu α částice nemá dostatečnou kinetickou energii k překonání potenciálové bariéry jaderných sil, kvantově mechanicky ale může bariérou protunelovat. Pravděpodobnost průchodu bariérou je sice extrémně malá, ale k nárazům na bariéru dochází řádově 10^{20} × za sekundu, což vede ke konečnému poločasu rozpadu. Exponenciální závislost pravděpodobnosti průchodu bariérou na energii α částice pak vysvětluje Geigerův-Nuttallův empirický vztah (13.1).

Uvažujme nyní zjednodušený model α rozpadu popsany částicí ve sféricky symetrickém potenciálu $V(r)$. Z rozptylových experimentů α částic na jádře víme, že pro $r > a$, kde $a \simeq 1.6A^{\frac{1}{3}}$ fm a A je nukleonové číslo dceřiného jádra po α rozpadu, je potenciál čistě Coulombický

$$V(r) = \frac{2Zq}{r}, \quad r \geq a.$$



Obrázek 13.1: Schéma potenciálu $V(r)$.

Zde jsme označili $q = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$. Na kratších vzdálenostech ale dominují přitažlivé jaderné interakce, které vážou α částici v jádře. Pro jednoduchost budeme považovat potenciál pro $r < a$ za konstantní

$$V(r) = -V_0, \quad r < a.$$

Průběh potenciálu je znázorněn na obrázku 13.1. Výška potenciálové bariery, kterou α částice musí protunelovat, je

$$V_1 \simeq \frac{2Zq}{a} \simeq 1.8 \frac{Z}{A^{1/3}} \text{ MeV}.$$

Typická hodnota V_1 pro těžká jádra je zhruba 25 MeV, tj. 3 – 5× větší, než je kinetická energie vyletující α částice.

Určíme nejprve pravděpodobnost průniku potenciálovou bariérou při jednom nárazu, která je dána Gamowovým koeficientem

$$T = \exp \left(-\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2M(V(r) - E)} dr \right)$$

Horní mez integrálu je určena podmínkou

$$V(b) = E \quad \Rightarrow \quad b = \frac{2Zq}{E}.$$

Integrál postupně upravíme do tvaru

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{2M(V(r) - E)} dr &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{r}{b} = t, \\ dr = bdt \end{array} \right\} = \underbrace{2Zq\sqrt{\frac{2M}{E}}}_{\kappa} \int_{\frac{a}{b}}^1 \sqrt{\frac{1}{t} - 1} dt \\ &= \left\{ \begin{array}{l} t = u^2, \\ dt = 2udu \end{array} \right\} = 2\kappa \int_{\sqrt{\frac{a}{b}}}^1 \sqrt{1 - u^2} du. \end{aligned} \quad (13.2)$$

K integrálu na pravé straně nalezneme primitivní funkci

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - u^2} du &= \left\{ \begin{array}{l} u = \sin z, \\ du = \cos z dz \end{array} \right\} = \int \cos^2 z dz = \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2z) dz \\ &= \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{2} \sin 2z \right) = \frac{1}{2} (z + \sin z \cos z) \\ &= \frac{1}{2} \left(\arcsin u + u\sqrt{1 - u^2} \right). \end{aligned}$$

Dosazením do (13.2) nalezneme

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{2M(V(r) - E)} dr &= \kappa \left[\arcsin u + u\sqrt{1 - u^2} \right]_{\sqrt{\frac{a}{b}}}^1 \\ &= \kappa \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{a}{b}} \left(1 - \frac{a}{b} \right) \right) \\ &= \kappa \left(\arccos \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{a}{b}} \left(1 - \frac{a}{b} \right) \right) \end{aligned}$$

Pravděpodobnost průniku α částice z jádra je pak

$$T = \exp \left[-\frac{2\kappa}{\hbar} \left(\arccos \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{a}{b}} \left(1 - \frac{a}{b} \right) \right) \right] \quad (13.3)$$

Poločas rozpadu a střední dobu života určíme z rozpadového zákona

$$N(t) = N_0 e^{-\gamma t},$$

kterým se radioaktivní rozpad z makroskopického pohledu řídí (N_0 je počet atomů v čase $t = 0$, který exponenciálně klesá). Rozpadová konstanta γ určuje střední dobu života

$$\tau = \frac{1}{\gamma},$$

a poločas rozpadu

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\gamma} = \tau \ln 2. \quad (13.4)$$

α zářič	E (MeV)	a (fm)	b (fm)	V_1 (MeV)	T	$T_{1/2}$	$T_{1/2}^{exp}$
${}^{238}_{92}\text{U}$	4.2	9.86	62	26.2	$6.4 \cdot 10^{-39}$	$2 \cdot 10^{17} \text{ s} \simeq 4.7 \cdot 10^9 \text{ let}$	$4.468 \cdot 10^9 \text{ let}$
${}^{224}_{88}\text{Ra}$	5.7	9.65	43	25.6	$6 \cdot 10^{-27}$	$133906 \text{ s} \simeq 1.55 \text{ dne}$	3.632 dne
${}^{210}_{84}\text{Po}$	5.4	8.27	44	28.5	$6 \cdot 10^{-29}$	$1.166 \cdot 10^7 \text{ s} \simeq 134.9 \text{ dne}$	138.4 dne
${}^{212}_{84}\text{Po}$	8.8	8.29	26.8	28.4	$1.9 \cdot 10^{-16}$	$3 \cdot 10^{-6} \text{ s}$	$3 \cdot 10^{-7} \text{ s}$

Tabulka 13.1: Výsledky pro několik vybraných izotopů.

γ udává pravděpodobnost rozpadu za jednotku času. Odhadneme ji pomocí vztahu

$$\gamma = fT,$$

kde f je počet nárazů α částice do bariéry za sekundu a T je dříve určená pravděpodobnost průniku potenciálovou bariérou při jednom nárazu (13.3). Jádru aproximujeme sféricky symetrickou potenciálovou bariérou šířky $2a$, takže f je rovno

$$f = \frac{v}{2a},$$

kde v je rychlost α -částice. Ty jsou řádově 10-20% rychlosti světla, takže můžeme použít nerelativistický vztah pro energii a vyjádřit f způsobem

$$f = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{2E}{M}}.$$

Celkem pro poločas rozpadu dostáváme vztah

$$T_{1/2} = \frac{2a \ln 2}{T} \sqrt{\frac{M}{2E}}. \quad (13.5)$$

Numerické výsledky pro izotopy ${}^{238}_{92}\text{U}$, ${}^{224}_{88}\text{Ra}$, ${}^{210}_{84}\text{Po}$, ${}^{212}_{84}\text{Po}$ jsou shrnuty v tabulce 13.1. Je zde uvedena kinetická energie vyletující α částice E v MeV, vzdálenosti a a b v fm, výška potenciálové bariéry V_1 v MeV, pravděpodobnost průniku potenciálovou bariérou při jednom nárazu T , poločas rozpadu $T_{1/2}$ spočítaný podle vztahu (13.5) a jeho experimentálně určená hodnota $T_{1/2}^{exp}$. V případě izotopů polonia jsme pro lepší shodu s experimentálními daty uvažovali $a \simeq 1.4A^{\frac{1}{3}}$ fm. Ve vzorcích se protonové číslo Z a nukleonové číslo A vztahují k dceřinému jádru po α rozpadu, např. pro ${}^{238}_{92}\text{U}$ musíme dosadit $Z = 90$ a $A = 234$.

Na závěr provedeme odhad pro $\ln \tau$. Protože $b \gg a$ (viz. tabulka 13.1), můžeme aproximovat

$$\arccos \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{a}{b} \left(1 - \frac{a}{b}\right)} \approx \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Dosazením do (13.5) a (13.4) postupně dostaneme výsledek

$$\begin{aligned}
 \ln \tau &= \ln T_{1/2} - \ln \ln 2 = -\ln T + \ln \left(2a \sqrt{\frac{M}{2E}} \right) \\
 &\approx \frac{2\kappa}{\hbar} \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{a}{b}} \right) + \ln \left(2a \sqrt{\frac{M}{2E}} \right) \\
 &\approx \frac{2q\pi\sqrt{2M}}{\hbar} \frac{Z}{\sqrt{E}} - \frac{8}{\hbar} \sqrt{\frac{aZq}{2}} + \ln \left(2a \sqrt{\frac{M}{2E}} \right),
 \end{aligned}$$

který přibližně odpovídá Geiger-Nuttallovu vztahu (13.1).