

Kapitola 5

Izospin

Přehled teorie

Koncept izospinu (izobarického spinu) byl zaveden ve 30-tých letech 20. století pro popis interakce protonů a neutronů (tj. silné jaderné interakce). Proton a neutron mají téměř stejnou hmotnost. Protože silná interakce nezávisí na náboji částice, můžeme je z tohoto pohledu považovat za různé stavy jedné částice - nukleonu, které se od sebe liší hodnotou třetí složky izospinu μ . Proton odpovídá $\mu = \frac{1}{2}$, neutron $\mu = -\frac{1}{2}$.

Matematická formulace izospinu je stejná jako pro moment hybnosti, resp. spin. Izospinový vektorový operátor $\hat{\vec{T}}$ je trojice operátorů $\hat{T}_i$, které splňují komutační relace

$$[\hat{T}_i, \hat{T}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{T}_k.$$

Narozdíl od spinu nebo momentu hybnosti izospin představuje vnitřní stupeň volnosti, který nijak nesouvisí s rotacemi v $\mathbb{R}^3$. Částice s blízkými hmotnostmi tvoří multiplety odpovídající určité velikosti izospinu (tj. jisté reprezentaci algebry $su(2)$). Nukleony (proton a neutron) mají velikost izospinu $t = \frac{1}{2}$ - tvoří tzv. dublet (resp. fundamentální reprezentaci $su(2)$), podobně tvoří dublety kaony ($K^-, \bar{K}^0$) a (K^+, K^0). π -mesony (π^+, π^0 a π^-) mají velikost izospinu $t = 1$ - tvoří tzv. triplet (resp. adjungovanou reprezentaci $su(2)$), stejným způsobem tvoří triplet sigma baryony (Σ^+, Σ^0 a Σ^-). Lambda baryon Λ^0 představuje singlet, tj. má velikost izospinu $t = 0$. Pro danou reprezentaci $su(2)$ (tj. v daném dubletu, tripletu atd.) se částice liší hodnotou třetí složky izospinu.

Označme společné vlastní vektory $\hat{T}^2$ a $\hat{T}_3$ jako $|t, \mu\rangle$, tj. platí

$$\hat{T}^2|t, \mu\rangle = t(t+1)|t, \mu\rangle, \quad \hat{T}_3|t, \mu\rangle = \mu|t, \mu\rangle.$$

Nukleony odpovídají $t = \frac{1}{2}$

$$|p\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \quad |n\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle.$$

Podobně π -mesony mají $t = 1$

$$|\pi^+\rangle = |1, 1\rangle, \quad |\pi^0\rangle = |1, 0\rangle, \quad |\pi^-\rangle = |1, -1\rangle.$$

Dále zavedeme operátory elektrického náboje (v jednotkách elementárního náboje e). Pro baryony se definuje předpisem

$$\hat{Q} = \frac{1}{2} + \hat{T}_3,$$

takže např. platí $\langle p | \hat{Q} | p \rangle = 1$, $\langle n | \hat{Q} | n \rangle = 0$. Pro mesony se operátor náboje zavede ve tvaru

$$\hat{Q} = \hat{T}_3,$$

takže např. dostaneme $\langle \pi^+ | \hat{Q} | \pi^+ \rangle = 1$, $\langle \pi^0 | \hat{Q} | \pi^0 \rangle = 0$ a $\langle \pi^- | \hat{Q} | \pi^- \rangle = -1$.

Dva (a více) izospinů můžeme skládat podobným způsobem jako nezávislé momenty hybnosti. Uvažujme například atom s hmotovým číslem A (počet nukleonů) a atomovým číslem Z (počet protonů). Označme operátory izospinu, resp. náboje, n -tého nukleonu jako $\hat{T}_i^{(n)}$, resp. $\hat{Q}^{(n)}$. Operátor celkového izospinu, resp. celkového náboje, je potom

$$\hat{T}_i = \sum_{n=1}^A \hat{T}_i^{(n)}, \quad \hat{Q} = \sum_{n=1}^A \hat{Q}^{(n)} = \frac{A}{2} + \hat{T}_3.$$

Pro $A = 2$, resp. dva izospiny, můžeme analogicky jako skládání momentů hybnosti zavést společné vlastní vektory $\hat{T}^{(1)2}$, $\hat{T}^{(2)2}$, $\hat{T}^2$ a $\hat{T}_3$, označíme je ve zkratce jako $|T, M\rangle$. Převod mezi bázemi $\{|t_1, \mu_1\rangle \otimes |t_2, \mu_2\rangle\}$ a $\{|T, M\rangle\}$ je opět popsán pomocí CG koeficientů

$$|T, M\rangle = \sum_{\mu_1=-t_1}^{t_1} \sum_{\mu_2=-t_2}^{t_2} (t_1, t_2, \mu_1, \mu_2 | T, M) |t_1, \mu_1\rangle \otimes |t_2, \mu_2\rangle.$$

Pro větší počet izospinů je postup komplikovanější, musí se skládat postupně po dvojicích.

Celkový izospin a náboj (resp. hodnota $\hat{T}_3$) se při silných interakcích zachovávají. Z tohoto důvodu jsou některé procesy silně potlačené (jejich účinné průřezy jsou extrémně malé), např. proces

$$d + d \rightarrow \alpha + \pi^0,$$

protože jak uvidíme v příkladu 17 deutron a α -částice mají izospin 0, zatímco π^0 meson má $T = 1$. Operátor přechodu (S -matice) je izoskalár, tj. komutuje se složkami celkového izospinu

$$[\hat{T}_i, \hat{S}] = 0.$$

Jeho maticové elementy jsou diagonální a nezávisí na M

$$\langle T', M' | \hat{S} | T, M \rangle = \delta_{T,T'} \delta_{M,M'} S(T). \quad (5.1)$$

To lze využít pro odhad podílů účinných průřezů silných reakcí.

Příklady

Cvičení 17. Určete bazické stavy soustavy dvou a tří nukleonů s daným celkovým izospinem a třetí složkou celkového izospinu. Jaký je náboj stavů?

Návod:

A=2: Pro dva nukleony je postup stejný jako pro skládání dvou spinů $\frac{1}{2}$, viz. cvičení 11. Možné hodnoty celkového izospinu jsou $T = 0$ (izosinglet) a $T = 1$ (izotriplet). Izosinglet je

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|pn\rangle - |np\rangle), \quad (5.2)$$

má náboj 1. Tento ket odpovídá deuteronu (jádro deuteria, vazebná energie $E_B \approx 2$ MeV) v základním stavu.

Izotripletní stavy jsou

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle &= \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \equiv |pp\rangle, \\ |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|pn\rangle + |np\rangle), \\ |1, -1\rangle &= \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \equiv |nn\rangle. \end{aligned} \quad (5.3)$$

První je vázaný stav dvou protonů, má náboj 2, třetí je vázaný stav dvou neutronů s nulovým nábojem. Druhý popisuje excitovaný stav deuteronu. Tripletní stavy nejsou stabilní.

A=3: Postup je stejný jako v příkladě 14. Složíme nejprve izospiny prvních dvou nukleonů (tj. $A = 2$), tím dostaneme stavy s $t_{12} = 1$ (izotriplet (5.3)) nebo $t_{12} = 0$ (izosinglet (5.2)). Následně přidáme třetí izospin a dostaneme stavy s $T = \frac{3}{2}$ nebo $T = \frac{1}{2}$. Společné vlastní vektory označíme jako $|t_{12}, T, M\rangle$. Kety $|1, \frac{3}{2}, M\rangle$ mají tvar (4.34)

$$\begin{aligned} |1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle &= |ppp\rangle, \\ |1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|ppn\rangle + |pnp\rangle + |npp\rangle), \\ |1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|pnn\rangle + |npn\rangle + |nnp\rangle), \\ |1, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle &= |nnn\rangle. \end{aligned}$$

Náboje stavů klesají po jedné od 3 pro $|ppp\rangle$ až po nulu pro $|nnn\rangle$. Tyto stavy jsou opět nestabilní.

Stavy s $T = \frac{1}{2}$ odpovídají buď složení $t_{12} = 0$ a izospinu $-\frac{1}{2}$, nebo složením $t_{12} = 1$ a izospinu $-\frac{1}{2}$. První případ odpovídá (4.35), výsledné stavy nukleonů mají tvar

$$\begin{aligned} |0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|pn p\rangle - |npp\rangle), \\ |0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|pnn\rangle - |npn\rangle), \end{aligned}$$

První stav má náboj 2, odpovídá jádru ${}^3\text{He}$. Druhý stav má náboj 1 a odpovídá jádru těžkého vodíku (tricia) ${}^3\text{H}$. Obě jádra mají vazebnou energii $E_B \approx 8$ MeV. Varianta $t_{12} = 1$ odpovídá (4.36), zbývající dva nukleonové stavy jsou rovny

$$\begin{aligned} |1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |ppn\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}} (|pn p\rangle + |npp\rangle), \\ |1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} (|pnn\rangle + |npn\rangle) - \sqrt{\frac{2}{3}} |nnp\rangle. \end{aligned}$$

Tyto stavy jsou také nestabilní.

Analogicky lze postupovat pro větší hodnoty A . Například pro $A = 4$ můžeme nejprve složit 1. a 2. izospin ($t_{12} = 0, 1$), 3. a 4. izospin ($t_{34} = 0, 1$), a pak složit výsledné izospiny t_{12} a t_{34} . Velikost celkového izospinu může mít hodnoty $T = 0, 1, 2$. Pro $T = 0$ dostaneme izosinglet

$$|0, 0, 0, 0\rangle = |0, 0\rangle \otimes |0, 0\rangle \equiv \frac{1}{2} (|pn pn\rangle - |pnnp\rangle - |nppn\rangle + |npnp\rangle),$$

který má náboj 2 a odpovídá jádru ${}^4\text{He}$, tj. α -částici v základním stavu.

Cvičení 18. Určete podíl účinných průřezů srážek

$$p + d \rightarrow {}^3\text{He} + \pi^0,$$

a

$$p + d \rightarrow {}^3\text{H} + \pi^+.$$

Návod: Označme účinné průřezy procesů jako σ_1 a σ_2 , chceme určit podíl

$$R = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

Pro účinný průřez platí binární srážky platí

$$\sigma \sim \left| \langle t_3, \mu_3 | \langle t_4, \mu_4 | \hat{S} | t_1, \mu_1 \rangle | t_2, \mu_2 \rangle \right|^2,$$

kde $|t_{1,2}, \mu_{1,2}\rangle$ jsou izospinové stavy před srážkou, a $|t_{3,4}, \mu_{3,4}\rangle$ jsou izospinové stavy po srážce. Kety zapíšeme pomocí stavů celkového izospinu a využijeme toho, že S -matice je izoskalár (5.1), takže nalezneme

$$\begin{aligned} \langle t_3, \mu_3 | \langle t_4, \mu_4 | \hat{S} | t_1, \mu_1 \rangle | t_2, \mu_2 \rangle &= \sum_{T,M} \sum_{T',M'} (t_1, t_2, \mu_1, \mu_2 | T, M) (t_3, t_4, \mu_3, \mu_4 | T', M') \times \\ &\quad \times \langle T', M' | \hat{S} | T, M \rangle \\ &= \sum_{T,M} (t_1, t_2, \mu_1, \mu_2 | T, M) (t_3, t_4, \mu_3, \mu_4 | T, M) S(T). \end{aligned}$$

V našem případě máme před srážkou proton s izospinem $\frac{1}{2}$ a deuteron s izospinem 0, takže celkový izospin je $T = \frac{1}{2}$ a jeho projekce $M = \frac{1}{2}$. Po srážce máme buď ${}^3\text{He}$ nebo ${}^3\text{H}$ s izospinen $\frac{1}{2}$ a jeden z π -mesonů, které mají izospin 1. Oba procesy jsou tedy možné, ze zachování celkového izospinu plyne že $T = M = \frac{1}{2}$. Navíc, kinematické faktory pro oba procesy jsou přibližně stejné, protože částice mají téměř stejné hmotnosti. Pro podíl účinných průřezů tak dostaneme

$$\begin{aligned} R &= \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\left| \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0 \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0 \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right|^2}{\left| \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0 \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 1 \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right|^2} \\ &= \frac{\left| \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0 \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right|^2}{\left| \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 1 \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right|^2} = \frac{\left| \frac{1}{\sqrt{3}} \right|^2}{\left| \sqrt{\frac{2}{3}} \right|^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$