

Kapitola 4

Skládání momentů hybnosti

Přehled teorie

Skládání dvou nezávislých momentů hybnosti

Uvažujme systém složený ze dvou rozlišitelných podsystémů s momenty hybnosti velikosti j_1 a j_2 , kterým přísluší Hilbertovy prostory

$$\mathcal{H}^{(j_i)} = [\{|j_i, m_i\rangle, m_i = j_i, j_i - 1, \dots, -j_i\}]_\lambda, \quad \dim \mathcal{H}^{(j_i)} = 2j_i + 1.$$

Hilbertův prostor složeného systému $\mathcal{H}^{(j_1, j_2)} = \mathcal{H}^{(j_1)} \otimes \mathcal{H}^{(j_2)}$ má dimenzi $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$. Jedna z bazí $\mathcal{H}^{(j_1, j_2)}$ je daná tenzorovým součinem ketů $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$. Tyto vektory splňují vztahy

$$\begin{aligned} \hat{J}^{(1)2} |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle &= j_1(j_1 + 1)\hbar^2 |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \\ \hat{J}^{(2)2} |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle &= j_2(j_2 + 1)\hbar^2 |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \\ \hat{J}_3^{(1)} |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle &= m_1\hbar |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \\ \hat{J}_3^{(2)} |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle &= m_2\hbar |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle. \end{aligned}$$

Složkám celkového momentu hybnosti odpovídají operátory

$$\hat{J}_k = \hat{J}_k^{(1)} + \hat{J}_k^{(2)}.$$

Operátory $\hat{J}^{(1)2}$, $\hat{J}^{(2)2}$, $\hat{J}^2$, $\hat{J}_3$ jsou kompatibilní a mají společné vlastní vektory $|j_1, j_2, j, m\rangle$, které splňují rovnice

$$\begin{aligned} \hat{J}^{(1)2} |j_1, j_2, j, m\rangle &= j_1(j_1 + 1)\hbar^2 |j_1, j_2, j, m\rangle \\ \hat{J}^{(2)2} |j_1, j_2, j, m\rangle &= j_2(j_2 + 1)\hbar^2 |j_1, j_2, j, m\rangle \\ \hat{J}^2 |j_1, j_2, j, m\rangle &= j(j + 1)\hbar^2 |j_1, j_2, j, m\rangle \\ \hat{J}_3 |j_1, j_2, j, m\rangle &= m\hbar |j_1, j_2, j, m\rangle. \end{aligned}$$

Kvantové číslo j nabývá hodnot $j = |j_1 - j_2|, \dots, j_1 + j_2$. Pro dané j má kvantové číslo m hodnoty $m = -j, \dots, j$. Vlastní vektory celkového momentu hybnosti jsou i vlastní vektory operátoru $\hat{J}^{(1)} \cdot \hat{J}^{(2)}$. Platí totiž vztah

$$\hat{J}^{(1)} \cdot \hat{J}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\hat{J}^2 - \hat{J}^{(1)2} - \hat{J}^{(2)2} \right), \quad (4.1)$$

odkud už snadno nalezneme

$$\hat{J}^{(1)} \cdot \hat{J}^{(2)} |j_1, j_2, j, m\rangle = \frac{\hbar^2}{2} \left(j(j+1) - j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1) \right) |j_1, j_2, j, m\rangle. \quad (4.2)$$

Clebsch-Gordanovy koeficienty

Množina stavů celkového momentu hybnosti $\{|j_1, j_2, j, m\rangle\}$ tvoří další ortonormální bazi v prostoru $\mathcal{H}^{(j_1, j_2)}$. Elementy unitární matice přechodu mezi touto bází a bází $\{|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle\}$ se nazývají Clebschovy–Gordanovy koeficienty (CG) a značí se

$$(j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m) \equiv \left(\langle j_1, m_1 | \otimes \langle j_2, m_2 | \right) |j_1, j_2, j, m\rangle.$$

Pro Condon-Shortleyovu konvenci, kdy

$$\alpha_{jm}^{\pm} = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} = \hbar \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \geq 0,$$

jsou CG reálné. Platí tedy

$$|j_1, j_2, j, m\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} (j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m) |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle, \quad (4.3)$$

a současně

$$|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{m=-j}^j (j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m) |j_1, j_2, j, m\rangle. \quad (4.4)$$

Pro CG platí výběrová pravidla

$$(j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m) \neq 0 \Rightarrow m_1 + m_2 = m, \quad |j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2, \quad (4.5)$$

a symetrie vůči záměně $j_1 \leftrightarrow j_2, m_1 \leftrightarrow m_2$, resp. znamének m_i a m

$$(j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m) = (-1)^{j_1+j_2-j} (j_2, j_1, m_2, m_1 | j, m) \quad (4.6)$$

$$= (-1)^{j_1+j_2-j} (j_1, j_2, -m_1, -m_2 | j, -m) \quad (4.7)$$

$$= (j_2, j_1, -m_2, -m_1 | j, -m).$$

Z unitarity matice přechodu mezi ortonormálními bazemi plynou vztahy

$$\begin{aligned} \sum_{m_1, m_2} (j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m) (j_1, j_2, m_1, m_2 | j', m') &= \delta_{j, j'} \delta_{m, m'}, \\ \sum_j \sum_{m=-j}^j (j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m) (j_1, j_2, m'_1, m'_2 | j, m) &= \delta_{m_1, m'_1} \delta_{m_2, m'_2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Speciálně tedy platí

$$\begin{aligned} \sum_{m_1, m_2} (j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m)^2 &= 1, \\ \sum_j \sum_{m=-j}^j (j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m)^2 &= 1. \end{aligned} \quad (4.9)$$

CG pro maximální hodnoty $m_i = j_i$ a minimální hodnoty $m_i = -j_i$ jsou rovny jedné

$$(j_1, j_2, j_1, j_2 | j_1 + j_2, j_1 + j_2) = 1, \quad (j_1, j_2, -j_1, -j_2 | j_1 + j_2, -j_1 - j_2) = 1. \quad (4.10)$$

Dále pro CG platí rekurentní relace

$$\begin{aligned} \alpha_{jm}^{\pm}(j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m \pm 1) &= \alpha_{j_1 m_1}^{\mp}(j_1, j_2, m_1 \mp 1, m_2 | j, m) + \\ &+ \alpha_{j_2 m_2}^{\mp}(j_1, j_2, m_1, m_2 \mp 1 | j, m), \end{aligned}$$

kterou můžeme záměnou $m \rightarrow m \mp 1$ a s explicitním tvarem $\alpha_{jm}^{\pm}$ vyjádřit způsobem

$$\begin{aligned} \sqrt{(j \mp m + 1)(j \pm m)} \quad (j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m) &= \\ &= \sqrt{(j_1 \pm m_1)(j_1 \mp m_1 + 1)} (j_1, j_2, m_1 \mp 1, m_2 | j, m \mp 1) + \\ &+ \sqrt{(j_2 \pm m_2)(j_2 \mp m_2 + 1)} (j_1, j_2, m_1, m_2 \mp 1 | j, m \mp 1), \end{aligned} \quad (4.11)$$

Tento vztah spolu s fázovou konvencí

$$(j_1, j_2, j_1, j - j_1 | j, j) > 0, \quad (4.12)$$

umožňuje jednoznačné určení CG.

Wignerovy $3j$ -symboly

Místo CG koeficientů se občas využívají Wignerovy $3j$ -symboly zavedené vztahem

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1 - j_2 - m_3}}{\sqrt{2j_3 + 1}} (j_1, j_2, m_1, m_2 | j_3, -m_3). \quad (4.13)$$

Jejich výhodou je větší symetrie při permutacích sloupců a změně znamének m_i . Při sudé permutaci sloupců se nemění, při liché permutaci se vynásobí fázovým faktorem $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$, tj.

$$\begin{pmatrix} j_{\pi_1} & j_{\pi_2} & j_{\pi_3} \\ m_{\pi_1} & m_{\pi_2} & m_{\pi_3} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}, & \text{sgn } \pi = 1, \\ (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}, & \text{sgn } \pi = -1 \end{cases}. \quad (4.14)$$

Stejný fázový faktor se objeví při změně znamének všech m_i

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Ze symetrií Wignerových $3j$ -symbolů můžeme snadno odvodit např. vztah pro CG koeficient $(j, j, m, -m | 0, 0)$. Vyjdeme z toho, že pro $j_2 = m_2 = 0$ platí

$$(j, 0, m, 0 | j, m) = 1 \quad \forall m \in \{j, j-1, \dots, -j\}.$$

Z definice (4.13) plyne

$$\begin{pmatrix} j & 0 & j \\ m & 0 & -m \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j+m}}{\sqrt{2j+1}}.$$

Prohozením 2. a 3. sloupce pak dostaneme

$$(j, j, m, -m | 0, 0) = \begin{pmatrix} j & j & 0 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{2j} \begin{pmatrix} j & 0 & j \\ m & 0 & -m \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j+m}}{\sqrt{2j+1}}. \quad (4.16)$$

Poznamenejme, že CG koeficienty $(j_1, j_2, m_1, m_2 | 0, 0)$ jsou nulové pro $j_1 \neq j_2$ nebo $m_1 \neq -m_2$, protože nejsou splněna výběrová pravidla (4.5).

Maticové reprezentace složeného momentu hybnosti, rotační matice

Pro matice složeného momentu hybnosti $\mathbf{J}_k^{(j)}$ (3.1) dostaneme s použitím vztahu (4.3) rekurentní relace

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{J}_k^{(j)} \right)_{m', m} &= \sum_{m'_1, m_1, m_2} (j_1, j_2, m'_1, m_2 | j, m') (j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m) \left(\mathbf{J}_k^{(j_1)} \right)_{m'_1, m_1} + \\ &+ \sum_{m_1, m'_2, m_2} (j_1, j_2, m_1, m'_2 | j, m') (j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m) \left(\mathbf{J}_k^{(j_2)} \right)_{m'_2, m_2}. \end{aligned}$$

Uvažujme rotace $\hat{R}$ složeného systému, které jsou generovány celkovým momentem hybnosti $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{J}}^{(1)} + \hat{\mathbf{J}}^{(2)}$, tj.

$$\hat{R} = e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha \vec{n} \cdot \hat{\mathbf{J}}} = e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha \vec{n} \cdot \hat{\mathbf{J}}^{(1)}} \otimes e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha \vec{n} \cdot \hat{\mathbf{J}}^{(2)}} = \hat{R}^{(1)} \otimes \hat{R}^{(2)}.$$

Pro maticové reprezentace rotací pak s využitím (4.3) odvodíme následující CG rozklad

$$D_{m',m}^{(j)}(R) = \sum_{m_1, m'_1} \sum_{m_2, m'_2} (j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m) (j_1, j_2, m'_1, m'_2 | j, m') D_{m'_1, m_1}^{(j_1)}(R) D_{m'_2, m_2}^{(j_2)}(R). \quad (4.17)$$

Analogický vztah platí i pro malé d -funkce

$$d_{m',m}^{(j)}(\beta) = \sum_{m_1, m'_1} \sum_{m_2, m'_2} (j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m) (j_1, j_2, m'_1, m'_2 | j, m') d_{m'_1, m_1}^{(j_1)}(\beta) d_{m'_2, m_2}^{(j_2)}(\beta). \quad (4.18)$$

Tyto vztahy umožňují konstruovat Wignerovy D -matice rekurentně.

S použitím rozvoje (4.4) snadno odvodíme vztahy pro součin dvou d -funkcí

$$d_{m'_1, m_1}^{(j_1)}(\beta) d_{m'_2, m_2}^{(j_2)}(\beta) = \sum_j \sum_{m, m'} (j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m) (j_1, j_2, m'_1, m'_2 | j, m') d_{m', m}^{(j)}(\beta), \quad (4.19)$$

respektive D -funkcí

$$D_{m'_1, m_1}^{(j_1)}(R) D_{m'_2, m_2}^{(j_2)}(R) = \sum_j \sum_{m, m'} (j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m) (j_1, j_2, m'_1, m'_2 | j, m') D_{m', m}^{(j)}(R). \quad (4.20)$$

Příklady

Cvičení 11. *Uvažujte dvě částice se spinem $\frac{1}{2}$. Najděte bazické stavy odpovídající celkovému momentu hybnosti a určete nenulové CG.*

Návod: Bazickým stavům jednotlivých spinů odpovídají kety $|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$. Stavy celkového momentu hybnosti $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, j, m\rangle$, kde j může nabývat hodnot $j = 1$ (a pak $m = 1, 0, -1$) nebo $j = 0$ (a pak $m = 0$), najdeme přímým výpočtem použitím posunovacích operátorů. Kety odpovídající hodnotě $j = 1$ a $m = 1, -1$ jsou rovny

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \quad |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, -1\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle.$$

Stav s $j = 1$ a $m = 0$ dostaneme aplikací posunovacího operátoru $\hat{J}_- = \hat{J}_-^{(1)} + \hat{J}_-^{(2)}$ na stav $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1\rangle$, tj.

$$\begin{aligned} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\rangle &= \frac{1}{\alpha_{1,1}^-} \hat{J}_- |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1\rangle = \frac{1}{\alpha_{1,1}^-} \left(\hat{J}_-^{(1)} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \otimes \hat{J}_-^{(2)} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \right). \end{aligned}$$

Zbývající vektor s $j = m = 0$ leží ve stejném dvourozměrném podprostoru (který odpovídá $m = 0$) jako $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\rangle$ a je na něj ortogonální, takže (díky fázové konvenci (4.12))

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \right). \quad (4.21)$$

Trojice stavů $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, m\rangle$, $m = 1, 0, -1$, tvoří tzv. *tripletní podprostor*, k němu ortogonální stav $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\rangle$ se označuje jako *singlet*. Nenulové CG tedy jsou

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| 1, 1 \right) &= 1, & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| 1, -1 \right) &= 1, \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| 1, 0 \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| 1, 0 \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| 0, 0 \right) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| 0, 0 \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Cvičení 12. Určete tzv. hyperjemnou strukturu základního stavu atomu vodíku, která je důsledkem interakce spinu elektronu a protonu. Hamiltonián popisující interakci spinů má tvar

$$\hat{H} = E_1 \hat{\mathbb{I}} + \tilde{A} \hat{S}^{(e)} \cdot \hat{S}^{(p)},$$

kde $E_1 = -13,6$ eV je energie základní hladiny, $\tilde{A}$ je zatím neurčená konstanta a $\hat{S}^{(e,p)}$ jsou operátory spinu elektronu a protonu.

Návod: Spektrum hamiltoniánu lze snadno určit přímým výpočtem. Označíme-li $A = \frac{\hbar^2}{4} \tilde{A}$, pak matice hamiltoniánu je

$$\hat{H} = E_1 \hat{\mathbb{I}} + A \pi_i \otimes \pi_i = \begin{pmatrix} E_1 + A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_1 - A & 2A & 0 \\ 0 & 2A & E_1 - A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_1 + A \end{pmatrix}.$$

Její vlastní čísla jsou rovna

$$E_{1,1} = E_1 + A, \quad E_{1,0} = E_1 - 3A, \quad (4.22)$$

přičemž hodnota $E_{1,1}$ je trojnásobně degenerovaná. Tento výsledek můžeme obdržet s využitím teorie skládání momentů hybnosti, konkrétně vztahu (4.2). V našem případě je $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$, takže platí

$$\begin{aligned} \hat{S}^{(e)} \cdot \hat{S}^{(p)} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, m\rangle &= \frac{\hbar^2}{4} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, m\rangle, \quad m = 1, 0, -1, \\ \hat{S}^{(e)} \cdot \hat{S}^{(p)} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\rangle &= -\frac{3}{4} \hbar^2 |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\rangle. \end{aligned}$$

Vlastní čísla hamiltoniánu jsou tedy skutečně (4.22), přičemž kety $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, m\rangle$, $m = 1, 0, -1$, odpovídají hodnotě $E_{1,1}$ a kety $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\rangle$ přísluší hodnotě $E_{1,0}$. Vidíme, že při započtení interakce spinů elektronu a protonu se základní energie rozdělí na dvě hladiny podle velikosti celkového spinu atomu vodíků, resp. kvantového čísla j . Z měření spektra vodíku je možné určit hodnotu konstanty A . Přeskoku mezi dvěma hladinami hyperjemné struktury odpovídá mikrovlnné záření o frekvenci $\nu \approx 1420\text{MHz}$ ($\lambda \approx 21\text{ cm}$), tj. $\Delta E = E_{1,1} - E_{1,0} = 4A = h\nu \approx 5,9\mu\text{eV}$.

Cvičení 13. Celkový moment hybnosti elektronu je dán součtem jeho orbitálního momentu hybnosti a spinu

$$\hat{J}_k = \hat{L}_k + \hat{S}_k.$$

Najděte bazické stavy odpovídající celkovému momentu hybnosti $|l, \frac{1}{2}, l \pm \frac{1}{2}, m\rangle$ a určete nenulové CG. Čemu je rovno $(\hat{S} \cdot \hat{L})|l, \frac{1}{2}, l \pm \frac{1}{2}, m\rangle$? Napište explicitní tvar všech stavů pro $l = 1$.

Návod: V tomto případě jde o skládání momentů hybnosti s $j_1 = l \in \mathbb{Z}_+$ a $j_2 = \frac{1}{2}$. Případ $l = 0$ je triviální, protože $\mathcal{H}^{(0)}$ má dimenzi jedna. Vlastní vektory celkového momentu hybnosti jsou v tomto případě

$$|0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = |0, 0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \quad |0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = |0, 0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle. \quad (4.23)$$

Pro $l \geq 1$ má Hilbertův prostor

$$\mathcal{H}^{(l, \frac{1}{2})} = \mathcal{H}^{(l)} \otimes \mathcal{H}^{(\frac{1}{2})},$$

dimenzi $2(2l + 1)$ a můžeme ho rozdělit na direktní součet dvou podprostorů lišících se velikostí celkového momentu hybnosti, resp. kvantového čísla $j = l \pm \frac{1}{2}$

$$\mathcal{H}^{(l, \frac{1}{2})} = \mathcal{H}^{(j=l+\frac{1}{2})} \oplus \mathcal{H}^{(j=l-\frac{1}{2})}.$$

Ortonormální báze v těchto podprostorech tvoří vlastní vektory celkového momentu hybnosti $|l, \frac{1}{2}, l \pm \frac{1}{2}, m\rangle$, které rozepíšeme do bází orbitálního momentu hybnosti a spinu způsobem (4.3). Začneme s případem $j = l + \frac{1}{2}$, kdy díky výběrovým pravidlům (4.5) platí

$$\begin{aligned} |l, \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}, m\rangle &= \left(l, \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| l + \frac{1}{2}, m\right) |l, m + \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \\ &+ \left(l, \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| l + \frac{1}{2}, m\right) |l, m - \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle. \end{aligned}$$

CG určíme pomocí rekurentního vztahu (4.11). Dosazením $j = l + \frac{1}{2}$, $j_1 = l$, $j_2 = \frac{1}{2}$, $m_1 = m + \frac{1}{2}$ a $m_2 = -\frac{1}{2}$ do (4.11) s horním znaménkem dostaneme

$$\left(l, \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| l + \frac{1}{2}, m\right) = \sqrt{\frac{l - m + \frac{1}{2}}{l - m + \frac{3}{2}}} \left(l, \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| l + \frac{1}{2}, m - 1\right).$$

Analogicky můžeme vyjádřit CG na pravé straně

$$\left(l, \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| l + \frac{1}{2}, m\right) = \sqrt{\frac{l-m+\frac{1}{2}}{l-m+\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{l-m+\frac{3}{2}}{l-m+\frac{5}{2}}} \left(l, \frac{1}{2}, m - \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \middle| l + \frac{1}{2}, m - 2\right),$$

a postupně snižovat hodnotu m až k nejnižší možné hodnotě $-l - \frac{1}{2}$, kde dostaneme

$$\left(l, \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| l + \frac{1}{2}, m\right) = \sqrt{\frac{l-m+\frac{1}{2}}{2l+1}} \left(l, \frac{1}{2}, -l, -\frac{1}{2} \middle| l + \frac{1}{2}, -l - \frac{1}{2}\right).$$

Kvůli (4.10) je CG na pravé straně je roven 1, takže platí

$$\left(l, \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| l + \frac{1}{2}, m\right) = \sqrt{\frac{l-m+\frac{1}{2}}{2l+1}}. \quad (4.24)$$

Koeficient $\left(l, \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| l + \frac{1}{2}, m\right)$ získáme analogicky použitím vztahu (4.11) s dolním znaménkem, kam dosadíme $j = l + \frac{1}{2}$, $j_1 = l$, $j_2 = \frac{1}{2}$, $m_1 = m - \frac{1}{2}$ a $m_2 = \frac{1}{2}$. Dostaneme rekurentní relaci

$$\left(l, \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| l + \frac{1}{2}, m\right) = \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{l+m+\frac{3}{2}}} \left(l, \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| l + \frac{1}{2}, m + 1\right),$$

a postupným zvyšováním m na pravé straně až k maximální možné hodnotě $l + \frac{1}{2}$ dostaneme s využitím (4.10) výsledek

$$\left(l, \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| l + \frac{1}{2}, m\right) = \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}}. \quad (4.25)$$

V případě $j = l - \frac{1}{2}$ díky výběrovým pravidlům (4.5) platí

$$\begin{aligned} |l, \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}, m\rangle &= \left(l, \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| l - \frac{1}{2}, m\right) |l, m + \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \\ &+ \left(l, \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| l - \frac{1}{2}, m\right) |l, m - \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle. \end{aligned}$$

CG na pravé straně spočítáme podobným postupem jako v případě $j = l + \frac{1}{2}$. Volbou $j = l - \frac{1}{2}$, $j_1 = l$, $j_2 = \frac{1}{2}$, $m_1 = m + \frac{1}{2}$ a $m_2 = -\frac{1}{2}$ ve vztahu (4.11) s horním znaménkem dostaneme

$$\begin{aligned} \left(l, \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| l - \frac{1}{2}, m\right) &= \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{l+m-\frac{1}{2}}} \left(l, \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| l - \frac{1}{2}, m - 1\right) \\ &= \sqrt{l+m+\frac{1}{2}} \left(l, \frac{1}{2}, -l+1, -\frac{1}{2} \middle| l - \frac{1}{2}, -l + \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Analogicky, volbou $j = l - \frac{1}{2}$, $j_1 = l$, $j_2 = \frac{1}{2}$, $m_1 = m - \frac{1}{2}$ a $m_2 = \frac{1}{2}$ ve vztahu (4.11) s dolním znaménkem dostaneme

$$\begin{aligned} \left(l, \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| l - \frac{1}{2}, m \right) &= \sqrt{\frac{l - m + \frac{1}{2}}{l - m - \frac{1}{2}}} \left(l, \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| l - \frac{1}{2}, m + 1 \right) \\ &= \sqrt{l - m + \frac{1}{2}} \left(l, \frac{1}{2}, l - 1, \frac{1}{2} \middle| l - \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

CG na pravých stranách (4.26) a (4.27) nejsou rovny jedné. Jejich velikost určíme pomocí vztahu (4.9) a již známých hodnot (4.24) a (4.25)

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_j \sum_{m=-j}^j \left(l, \frac{1}{2}, -l + 1, -\frac{1}{2} \middle| j, m \right)^2 \\ &= \left(l, \frac{1}{2}, -l + 1, -\frac{1}{2} \middle| l - \frac{1}{2}, -l + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(l, \frac{1}{2}, -l + 1, \frac{1}{2} \middle| l + \frac{1}{2}, -l + \frac{1}{2} \right)^2 \\ &= \left(l, \frac{1}{2}, -l + 1, -\frac{1}{2} \middle| l - \frac{1}{2}, -l + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2l}{2l + 1}, \end{aligned}$$

respektive

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_j \sum_{m=-j}^j \left(l, \frac{1}{2}, l - 1, \frac{1}{2} \middle| j, m \right)^2 \\ &= \left(l, \frac{1}{2}, l - 1, \frac{1}{2} \middle| l - \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(l, \frac{1}{2}, l - 1, \frac{1}{2} \middle| l + \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2} \right)^2 \\ &= \left(l, \frac{1}{2}, l - 1, \frac{1}{2} \middle| l - \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2l}{2l + 1}. \end{aligned}$$

Pro velikost hledaných CG tedy dostaneme

$$\left(l, \frac{1}{2}, -l + 1, -\frac{1}{2} \middle| l - \frac{1}{2}, -l + \frac{1}{2} \right)^2 = \left(l, \frac{1}{2}, l - 1, \frac{1}{2} \middle| l - \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2l + 1}.$$

Fáze je určena konvencí (4.12) a symetriemi (4.6), (4.7)

$$\begin{aligned} \left(l, \frac{1}{2}, l - 1, \frac{1}{2} \middle| l - \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2} \right) &= - \left(\frac{1}{2}, l, \frac{1}{2}, l - 1 \middle| l - \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2} \right) < 0, \\ \left(l, \frac{1}{2}, -l + 1, -\frac{1}{2} \middle| l - \frac{1}{2}, -l + \frac{1}{2} \right) &= - \left(l, \frac{1}{2}, l - 1, \frac{1}{2} \middle| l - \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2} \right) > 0. \end{aligned}$$

Dosazením do (4.26) a (4.27) dostaneme

$$\left(l, \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| l - \frac{1}{2}, m \right) = \sqrt{\frac{l + m + \frac{1}{2}}{2l + 1}}, \quad (4.28)$$

$$\left(l, \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| l - \frac{1}{2}, m \right) = -\sqrt{\frac{l - m + \frac{1}{2}}{2l + 1}} \quad (4.29)$$

Vlastní vektory celkového momentu hybnosti pak díky výsledkům (4.24), (4.25), (4.28) a (4.29) můžeme zapsat ve tvaru

$$|l, \frac{1}{2}, l \pm \frac{1}{2}, m\rangle = \sqrt{\frac{l \mp m + \frac{1}{2}}{2l+1}} |l, m + \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \pm \sqrt{\frac{l \pm m + \frac{1}{2}}{2l+1}} |l, m - \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle. \quad (4.30)$$

Kromě toho, že se jedná o vlastní vektory $\hat{L}^2$, $\hat{S}^2$, $\hat{J}^2$ a $\hat{J}_3$, jsou to i vlastní vektory operátoru $\hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{L}}$. Ze vztahu (4.2) plyne

$$\begin{aligned} (\hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{L}}) |l, \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}, m\rangle &= \frac{1}{2} l \hbar^2 |l, \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}, m\rangle, \\ (\hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{L}}) |l, \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}, m\rangle &= -\frac{1}{2} (l+1) \hbar^2 |l, \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}, m\rangle \end{aligned}$$

Operátor $\hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{L}}$ hraje roli u tzv. *spin-orbitální vazby*, která ovlivňuje jemnou strukturu energetických hladin vodíku (viz. kapitola (8)).

Pro $l = 1$ může být $j = \frac{3}{2}$ nebo $j = \frac{1}{2}$. Explicitní tvar stavů s $j = \frac{3}{2}$ je následující

$$\begin{aligned} |1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle &= |1, 1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \\ |1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} |1, 1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \\ |1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |1, -1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \\ |1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle &= |1, -1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Stavy s $j = \frac{1}{2}$ mají tvar

$$\begin{aligned} |1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |1, 0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \\ |1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} |1, 0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |1, -1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Cvičení 14. Uvažujte tři rozlišitelné částice se spinem $\frac{1}{2}$. Označme součet prvních dvou spinů jako

$$\hat{\vec{S}}^{(12)} = \hat{\vec{S}}^{(1)} + \hat{\vec{S}}^{(2)},$$

a celkový spin jako

$$\hat{\vec{S}} = \hat{\vec{S}}^{(1)} + \hat{\vec{S}}^{(2)} + \hat{\vec{S}}^{(3)} = \hat{\vec{S}}^{(12)} + \hat{\vec{S}}^{(3)}.$$

Najděte stavy, které jsou společné vlastní vektory $\hat{S}^{(12)2}$, $\hat{S}^2$ a $\hat{S}_3$. Uvažujte hamiltonián částic ve tvaru

$$\hat{H} = \frac{\varepsilon}{\hbar^2} \left(\hat{\vec{S}}^{(1)} + \hat{\vec{S}}^{(2)} \right) \cdot \hat{\vec{S}}^{(3)}. \quad (4.33)$$

Jaké jsou hodnoty energie a jejich degenerace?

Návod: Pro zjednodušení zápisu označme společné vlastní vektory $\hat{S}^{(12)2}$, $\hat{S}^2$ a $\hat{S}_3$ jako $|j_{12}, j, m\rangle$, stavy jednotlivých spinů označíme jako $|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle \equiv |\pm\rangle$. Nejprve složíme první dva spiny, výsledek odpovídá cvičení 11. Tyto stavy pak složíme se zbývajícím spinem - to odpovídá cvičení 13 pro $j_{12} = l = 0, 1$ - tj. stavům (4.23), (4.31) a (4.32).

V případě $j = \frac{3}{2}$ musí být $j_{12} = 1$. Použijeme tedy vektory (4.31), ve kterých tripletní stavy $|1, m\rangle$ rozepíšeme podle výsledků cvičení 11. Dostaneme celkem 4 stavy

$$\begin{aligned}
|1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle &= |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \equiv |+++\rangle, \\
|1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \\
&\quad + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \right) \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\
&\equiv \frac{1}{\sqrt{3}} (|++-\rangle + |+-+\rangle + |-++\rangle), \\
|1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \right) \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{3}} |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\
&\equiv \frac{1}{\sqrt{3}} (|+--\rangle + |-+-\rangle + |--+\rangle), \\
|1, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle &= |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \equiv |---\rangle.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Celkový spin $j = \frac{1}{2}$ můžeme získat složením $j_{12} = 0$ a spinu $-\frac{1}{2}$, tj. využijeme vztahy (4.23) kam za $|0, 0\rangle$ dosadíme singlet (4.21). Dostaneme dva stavy

$$\begin{aligned}
|0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \right) \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\
&\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-+\rangle - |-++\rangle), \\
|0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \right) \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \\
&\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|+--\rangle - |-+-\rangle).
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Druhou možností jak získat $j = \frac{1}{2}$ je složením $j_{12} = 1$ a spinu $-\frac{1}{2}$. Využijeme výsledek (4.32) kam opět za tripletní stavy $|1, m\rangle$ dosadíme podle výsledků cvičení 11. Postupně nalezneme

zbývající 2 bazické stavy

$$\begin{aligned}
|1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \right) \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\
&\equiv \sqrt{\frac{2}{3}} |++-\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}} (|+-+\rangle + |-++\rangle), \\
|1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \right) \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - \\
&\quad - \sqrt{\frac{2}{3}} |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\
&\equiv \frac{1}{\sqrt{6}} (|+--\rangle + |-+-\rangle) - \sqrt{\frac{2}{3}} |--+\rangle.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Snadno ověříme, že kety $|j_{12}, j, m\rangle$ jsou vlastní vektory hamiltoniánu (4.33), protože ho můžeme přepsat způsobem

$$\hat{H} = \frac{\varepsilon}{\hbar^2} \hat{S}^{(12)} \cdot \hat{S}^{(3)} = \frac{\varepsilon}{2\hbar^2} \left(\hat{S}^2 - \hat{S}^{(12)2} - \hat{S}^{(3)2} \right).$$

Odsud vidíme, že platí rovnost

$$\hat{H}|j_{12}, j, m\rangle = \frac{\varepsilon}{2} \left(j(j+1) - j_{12}(j_{12}+1) - \frac{3}{4} \right) |j_{12}, j, m\rangle \equiv E_{j_{12}, j} |j_{12}, j, m\rangle.$$

Hamiltonián má tedy 3 možné hodnoty energie

$$E_{1, \frac{3}{2}} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad E_{0, \frac{1}{2}} = 0, \quad E_{1, \frac{1}{2}} = -\varepsilon.$$

První má degeneraci 4, ostatní 2.

Cvičení 15. Určete Wignerovu d -matici pro $j = \frac{3}{2}$.

Návod: Využijeme CG rozkladu (4.18) pro $j_1 = 1$, $j_2 = \frac{1}{2}$ a $j = \frac{3}{2}$

$$d_{m', m}^{(\frac{3}{2})}(\beta) = \sum_{m_1, m'_1} \sum_{m_2, m'_2} \left(1, \frac{1}{2}, m_1, m_2 \middle| \frac{3}{2}, m \right) \left(1, \frac{1}{2}, m'_1, m'_2 \middle| \frac{3}{2}, m' \right) d_{m'_1, m_1}^{(1)}(\beta) d_{m'_2, m_2}^{(\frac{1}{2})}(\beta).$$

a znalosti d -matic pro $j = \frac{1}{2}$ (3.12) a $j = 1$ (3.14)

$$d^{(\frac{1}{2})}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & -\sin \frac{\beta}{2} \\ \sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}, \quad d^{(1)}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\beta}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta & \sin^2 \frac{\beta}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta & \cos \beta & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta \\ \sin^2 \frac{\beta}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta & \cos^2 \frac{\beta}{2} \end{pmatrix},$$

spočítaných v příkladu (10) (u $d^{(1)}$ jsme rohové koeficienty vyjádřili pomocí vztahů pro sinus a cosinus polovičního úhlu). CG koeficienty jsme určili v příkladě 13 - vztahy (4.24), (4.25), (4.28) a (4.29) pro $l = 1$, resp. koeficienty ketů ve vzorcích (4.31) a (4.32). Přímým výpočtem stačí určit 6 maticových elementů $d_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})}$, $d_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})}$, $d_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})}$, $d_{\frac{3}{2},-\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})}$, $d_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})}$ a $d_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})}$. Ostatní odvodíme pomocí vztahů (3.5). Postupně nalezneme

$$\begin{aligned} d_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} &= \left(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \times \left(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \times d_{1,1}^{(1)} \times d_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} \\ &= 1 \times 1 \times \cos^2 \frac{\beta}{2} \times \cos \frac{\beta}{2} \\ &= \cos^3 \frac{\beta}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} &= \left(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \times \left(1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \times d_{1,0}^{(1)} \times d_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} + \\ &\quad + \left(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \times \left(1, \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \times d_{1,1}^{(1)} \times d_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} \\ &= 1 \times \sqrt{\frac{2}{3}} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta\right) \times \cos \frac{\beta}{2} + 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \cos^2 \frac{\beta}{2} \times \left(-\sin \frac{\beta}{2}\right) \\ &= -\sqrt{3} \sin \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} &= \left(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \times \left(1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \times d_{1,-1}^{(1)} \times d_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} + \\ &\quad + \left(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \times \left(1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \times d_{1,0}^{(1)} \times d_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} \\ &= 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \sin^2 \frac{\beta}{2} \times \cos \frac{\beta}{2} + 1 \times \sqrt{\frac{2}{3}} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta\right) \times \left(-\sin \frac{\beta}{2}\right) \\ &= \sqrt{3} \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{\frac{3}{2},-\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} &= \left(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \times \left(1, \frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) \times d_{1,-1}^{(1)} \times d_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} \\ &= 1 \times 1 \times \sin^2 \frac{\beta}{2} \times \left(-\sin \frac{\beta}{2}\right) \\ &= -\sin^3 \frac{\beta}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} &= \left(1, \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(1, \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \times d_{1,1}^{(1)} \times d_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} + \\
&+ \left(1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(1, \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \times d_{0,1}^{(1)} \times d_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} + \\
&+ \left(1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \times d_{0,0}^{(1)} \times d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} + \\
&+ \left(1, \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \times d_{1,0}^{(1)} \times d_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \cos^2 \frac{\beta}{2} \times \cos \frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{2}{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta \times \left(-\sin \frac{\beta}{2}\right) + \\
&+ \sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{2}{3}} \times \cos \beta \times \cos \frac{\beta}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{\frac{2}{3}} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta\right) \times \sin \frac{\beta}{2} + \\
&= \frac{1}{2} (3 \cos \beta - 1) \cos \frac{\beta}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} &= \left(1, \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \times d_{1,-1}^{(1)} \times d_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} + \\
&+ \left(1, \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \times d_{1,0}^{(1)} \times d_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} + \\
&+ \left(1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \times d_{0,-1}^{(1)} \times d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} + \\
&+ \left(1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \times d_{0,0}^{(1)} \times d_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \sin^2 \frac{\beta}{2} \times \sin \frac{\beta}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{\frac{2}{3}} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta\right) \times \cos \frac{\beta}{2} + \\
&+ \sqrt{\frac{2}{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta \times \cos \frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{2}{3}} \times \cos \beta \times \left(-\sin \frac{\beta}{2}\right) + \\
&= -\frac{1}{2} (3 \cos \beta + 1) \sin \frac{\beta}{2}.
\end{aligned}$$

Zbývající maticové elementy určíme pomocí (3.5). Díky relaci $d_{m',m}^{(j)} = (-1)^{m'-m} d_{-m',-m}^{(j)}$ nalezneme

$$\begin{aligned}
d_{-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} &= d_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})}, & d_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} &= d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})}, & d_{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} &= -d_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})}, \\
d_{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} &= d_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})}, & d_{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} &= -d_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})}, & d_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} &= -d_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})}.
\end{aligned}$$

Analogicky pomocí vztahu $d_{m',m}^{(j)} = (-1)^{m'-m} d_{m,m'}^{(j)}$ odvodíme

$$\begin{aligned} d_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} &= -d_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})}, & d_{-\frac{1}{2},\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} &= d_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})}, \\ d_{\frac{1}{2},-\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} &= d_{-\frac{3}{2},\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})}, & d_{-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} &= -d_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})}. \end{aligned}$$

Celkem můžeme d -matici pro $j = \frac{3}{2}$ zapsat ve tvaru

$$d^{(\frac{3}{2})}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos^3 \frac{\beta}{2} & -\sqrt{3} \sin \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} & \sqrt{3} \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} & -\sin^3 \frac{\beta}{2} \\ \sqrt{3} \sin \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} & \frac{1}{2} (3 \cos \beta - 1) \cos \frac{\beta}{2} & -\frac{1}{2} (3 \cos \beta + 1) \sin \frac{\beta}{2} & \sqrt{3} \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \\ \sqrt{3} \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} & \frac{1}{2} (3 \cos \beta + 1) \sin \frac{\beta}{2} & \frac{1}{2} (3 \cos \beta - 1) \cos \frac{\beta}{2} & -\sqrt{3} \sin \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} \\ \sin^3 \frac{\beta}{2} & \sqrt{3} \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} & \sqrt{3} \sin \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} & \cos^3 \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}.$$

Cvičení 16. Ukažte, že pro integrál součinu tří kulových funkcí platí vztah

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \bar{Y}_{l,m}(\theta, \varphi) Y_{l_1,m_1}(\theta, \varphi) Y_{l_2,m_2}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l+1)}} (l_1, l_2, 0, 0 | l, 0) \\ &\times (l_1, l_2, m_1, m_2 | l, m). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Návod: Využijeme vztahu mezi kulovými funkcemi a D -funkcemi (3.6)

$$D_{m,0}^{(l)}(\varphi, \theta, \gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \bar{Y}_{l,m}(\theta, \varphi),$$

a vztahu (4.20) pro $j_1 = l_1$, $j_2 = l_2$, $j = l_3$, $m = m_3$, $m' = m'_3$ a $m_1 = m_2 = 0$ (suma přes m_3 zmizí díky výběrovému pravidlu $m_1 + m_2 = m_3$)

$$D_{m'_1,0}^{(l_1)}(\varphi, \theta, \gamma) D_{m'_2,0}^{(l_2)}(\varphi, \theta, \gamma) = \sum_{l_3} \sum_{m'_3} (l_1, l_2, 0, 0 | l_3, 0) (l_1, l_2, m'_1, m'_2 | l_3, m'_3) D_{m'_3,m_3}^{(l_3)}(\varphi, \theta, \gamma).$$

Nahrazením D -funkcí kulovými funkcemi, přeznačením $m'_i \rightarrow m_i$ a odstraněním komplexního združení dostaneme

$$\begin{aligned} Y_{l_1,m_1}(\theta, \varphi) Y_{l_2,m_2}(\theta, \varphi) &= \sum_{l_3,m_3} \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l_3+1)}} (l_1, l_2, 0, 0 | l_3, 0) (l_1, l_2, m_1, m_2 | l_3, m_3) \\ &\times Y_{l_3,m_3}(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

Vynásobením obou stran $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ a integrací přes prostorové úhly dostaneme s využitím ortogonality kulových funkcí hledaný vztah.