

Kapitola 3

Rotace v kvantové mechanice

Přehled teorie

Rotace v klasické mechanice

V klasické mechanice se vektory z $\mathbb{R}^3$ při rotacích transformují pomocí matic R tvořících grupu $SO(3)$ (tj. 3×3 ortogonálních matic s jednotkovým determinantem)

$$\vec{x} \xrightarrow{R} \vec{x}_R \equiv \vec{x}', \quad \vec{x}'^T = R \vec{x}^T, \quad R^T = R^{-1}, \quad \det R = 1.$$

Rotacím okolo hlavních os x, y, z ($\equiv 1, 2, 3$) odpovídají matice

$$\begin{aligned} R_x(\alpha) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \\ R_y(\alpha) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}, \\ R_z(\alpha) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Infinitezimální rotace (tj. do 1. řádu Taylorova rozvoje) můžeme zapsat ve tvaru

$$R_i(\alpha) \simeq \mathbb{I} - i\alpha M_i,$$

kde matice M_i jsou rovny

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prvky matic M_i lze zapsat způsobem

$$(M_i)_{jk} = -i\varepsilon_{ijk},$$

ze kterého plynou komutační relace

$$[M_i, M_j] = i\varepsilon_{ijk}M_k.$$

Rotace kolem hlavních os vyjádříme jako exponenciálu matic M_i

$$R_i(\alpha) = e^{-i\alpha M_i}.$$

Rotace kolem obecné osy dané jednotkovým vektorem $\vec{n}$ je potom

$$R_{\vec{n}}(\alpha) = e^{-i\alpha\vec{n}\cdot\vec{M}}, \quad \vec{M} = (M_1, M_2, M_3).$$

Při infinitezimální rotaci okolo osy $\vec{n}$ se vektor $\vec{x}$ transformuje způsobem

$$\vec{x}' \simeq \vec{x} + \alpha \vec{n} \times \vec{x}.$$

Rotace v kvantové mechanice

V kvantové mechanice rotacím odpovídají unitární operátory $\hat{R}$, které představují reprezentaci grupy $SO(3)$ na příslušném Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Stav se při rotacích transformuje způsobem

$$|\psi\rangle \xrightarrow{R} |\psi'\rangle = \hat{R}|\psi\rangle.$$

Operátory rotací $\hat{R}$ jsou generovány operátorem celkového momentu hybnosti $\hat{\vec{J}}$. Rotace okolo osy $\vec{n}$ o úhel α je reprezentována operátorem

$$\hat{R}_{\vec{n}}(\alpha) = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\vec{n}\cdot\hat{\vec{J}}}.$$

Při parametrizaci rotací pomocí Eulerových úhlů α, β, γ (odpovídají rotacím okolo pevných os z, y a z) používáme značení

$$\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) = \hat{R}_z(\alpha)\hat{R}_y(\beta)\hat{R}_z(\gamma) = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{J}_3} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta\hat{J}_2} e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma\hat{J}_3}.$$

U rotací záleží na pořadí, operátory rotací kolem různých os nekomutují, protože nekomutují generátory.

Operátory momentu hybnosti, maticové reprezentace

Připomeňme, že složky momentu hybnosti splňují komutační relace

$$[\hat{J}_k, \hat{J}_l] = i\hbar\varepsilon_{klm}\hat{J}_m.$$

Z těchto relací plyne jednak to, že $\hat{J}^2$ je kompatibilní se všemi složkami J_i , a také existence posunovacích operátorů $\hat{J}_\pm = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2$

$$[\hat{J}_3, \hat{J}_\pm] = \pm\hbar\hat{J}_\pm, \quad [\hat{J}^2, \hat{J}_\pm] = 0.$$

Společné vlastní vektory $|j, m\rangle$ operátorů $\hat{J}_3, \hat{J}^2$ splňují

$$\hat{J}_3|j, m\rangle = m\hbar|j, m\rangle, \quad \hat{J}^2|j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j, m\rangle.$$

Rozsah kvantových čísel j a m je

$$\begin{aligned} j &= 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \\ m &= j, j-1, \dots, -j. \end{aligned}$$

Posunovací operátory působí na kety $|j, m\rangle$ následujícím způsobem

$$\hat{J}_\pm|j, m\rangle = \alpha_{j,m}^\pm|j, m \pm 1\rangle, \quad \alpha_{j,m}^\pm = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}.$$

Matice operátorů $\hat{J}_3$ a $\hat{J}^2$ jsou v této bázi diagonální

$$\begin{aligned} (\mathbb{J}_3)_{(j',m'),(j,m)} &= \langle j', m' | \hat{J}_3 | j, m \rangle = m\hbar\delta_{jj'}\delta_{mm'}, \\ \mathbb{J}_3 &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \frac{1}{2} & 0 & & \\ & 0 & -\frac{1}{2} & & \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & -1 \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \\ (\mathbb{J}^2)_{(j',m'),(j,m)} &= \langle j', m' | \hat{J}^2 | j, m \rangle = \hbar^2 j(j+1)\delta_{jj'}\delta_{mm'}, \\ \mathbb{J}^2 &= \hbar^2 \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \frac{3}{4} & 0 & & \\ & 0 & \frac{3}{4} & & \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 2 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 2 \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bloky odpovídají hodnotám $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$, kvantové číslo m bereme od $m = j$ sestupně. Matice operátorů $\hat{J}_{1,2}$ jsou blokově diagonální

$$\begin{aligned}
(\mathbb{J}_1)_{(j',m'),(j,m)} &= \langle j', m' | \hat{J}_1 | j, m \rangle = \delta_{jj'} \frac{1}{2} (\alpha_{j,m}^+ \delta_{m',m+1} + \alpha_{j,m}^- \delta_{m',m-1}), \\
\mathbb{J}_1 &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & \frac{1}{2} & & \\ & \frac{1}{2} & 0 & & \\ & & & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ & & & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & & & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \\
(\mathbb{J}_2)_{(j',m'),(j,m)} &= \langle j', m' | \hat{J}_2 | j, m \rangle = \delta_{jj'} \frac{1}{2i} (\alpha_{j,m}^+ \delta_{m',m+1} - \alpha_{j,m}^- \delta_{m',m-1}), \\
\mathbb{J}_2 &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & -\frac{i}{2} & & \\ & \frac{i}{2} & 0 & & \\ & & & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ & & & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ & & & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Bloky tvoří matice $\mathbb{J}_k^{(j)}$ s prvky

$$(\mathbb{J}_k^{(j)})_{m',m} = \langle j, m' | \hat{J}_k | j, m \rangle. \quad (3.1)$$

Tyto matice tvoří iderucibilní reprezentace $\hat{J}_k$ na prostoru $\mathbb{C}^{2j+1}$, tj. splňují komutační relace

$$[\mathbb{J}_k^{(j)}, \mathbb{J}_l^{(j)}] = i\hbar \varepsilon_{klm} \mathbb{J}_m^{(j)}.$$

$\mathbb{J}_k^{(j)}$ jsou matice operátorů složek spinu velikosti j . Působení operátorů $\hat{J}_k$ na kety $|j, m\rangle$ můžeme pomocí matic $\mathbb{J}_k^{(j)}$ zapsat ve tvaru

$$\hat{J}_k |j, m\rangle = \sum_{m'=-j}^j (\mathbb{J}_k^{(j)})_{m',m} |j, m'\rangle.$$

Matice reprezentace rotací, Wignerovy D -funkce

Matice operátorů rotací jsou v bázi $|j, m\rangle$ rovněž blokově diagonální, tj. platí

$$\hat{R} |j, m\rangle = \sum_{m'=-j}^j \langle j, m' | \hat{R} | j, m \rangle |j, m'\rangle.$$

Označíme matice rotace okolo osy $\vec{n}$ pro velikost momentu hybnosti j jako $R_{\vec{n}}^{(j)}(\alpha)$, její maticové elementy jsou

$$R_{\vec{n}}^{(j)}(\alpha) = \langle j, m' | \hat{R}_{\vec{n}}(\alpha) | j, m \rangle.$$

Pro spin $\frac{1}{2}$ je snadno určíme explicitně z vlastností Pauliho matic

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \quad \sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbb{I} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \quad (3.2)$$

a rozvojem exponenciely do Taylorovy řady. Výsledek je

$$R_{\vec{n}}^{(\frac{1}{2})}(\alpha) = \cos \frac{\alpha}{2} \mathbb{I} - i \sin \frac{\alpha}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}. \quad (3.3)$$

Při parametrizaci rotace pomocí Eulerových úhlů se maticové elementy $\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma)$ označují jako Wignerovy D -funkce

$$D_{m',m}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) = \langle j, m' | \hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) | j, m \rangle.$$

Dohromady tvoří Wignerovy D -matice, které představují ireducibilní unitární reprezentaci grupy rotací $SO(3)$ na dimenzi $2j+1$. Lze je zapsat způsobem

$$\begin{aligned} D_{m',m}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) &= \langle j, m' | e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{J}_3} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta\hat{J}_2} e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma\hat{J}_3} | j, m \rangle \\ &= e^{-i\alpha m'} e^{-i\gamma m} \underbrace{\langle j, m' | e^{-\frac{i}{\hbar}\beta\hat{J}_2} | j, m \rangle}_{d_{m',m}^{(j)}(\beta)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$d_{m',m}^{(j)}(\beta)$ jsou tzv. malé d -funkce, které jsou ryze reálné. Matice $d^{(j)}(\beta)$ je ortogonální. Wignerovy D -funkce mají řadu vlastností, např. z unitarity D -matic pro ně platí relace

$$\begin{aligned} \sum_m \overline{D_{k,m}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma)} D_{l,m}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) &= \delta_{kl}, \\ \sum_m \overline{D_{m,k}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma)} D_{m,l}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) &= \delta_{kl}. \end{aligned}$$

Dále splňují vztahy

$$\overline{D_{k,m}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma)} = D_{m,k}^{(j)}(-\alpha, -\beta, -\gamma) = (-1)^{k-m} D_{-k,-m}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma).$$

Analogicky pro d -funkce platí vztahy

$$d_{k,m}^{(j)}(\beta) = d_{m,k}^{(j)}(-\beta) = (-1)^{k-m} d_{m,k}^{(j)}(\beta) = (-1)^{k-m} d_{-k,-m}^{(j)}(\beta). \quad (3.5)$$

Pro celočíselné $j = l$ Wignerovy D -funkce úzce souvisí s kulovými funkcemi

$$\begin{aligned} D_{m,0}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma) &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \bar{Y}_{l,m}(\beta, \alpha), \\ D_{0,m}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma) &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{l,m}(\beta, \gamma). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Wignerovy D -funkce tvoří ortogonální množinu funkcí Eulerových úhlů

$$\int_0^\pi \sin \beta d\beta \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} d\gamma \overline{D}_{m,k}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) D_{m',k'}^{(j')}(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{8\pi^2}{2j+1} \delta_{j,j'} \delta_{m,m'} \delta_{k,k'}. \quad (3.7)$$

Označme jako $D^{(j)}(R)$ Wignerovu D -matici rotace $\hat{R}$ pro moment hybnosti j . Kety $|j, m\rangle$ se pak transformují způsobem

$$\hat{R}|j, m\rangle = \sum_{m'=-j}^j D_{m',m}^{(j)}(R)|j, m'\rangle. \quad (3.8)$$

Transformace pozorovatelných, kartézské tenzory

Pozorovatelné se při rotacích transformují způsobem

$$\hat{A} \xrightarrow{R} \hat{A}' = \hat{R} \hat{A} \hat{R}^\dagger.$$

Pro infinitezimální rotace okolo osy $\vec{n}$ o malý úhel α platí

$$\hat{A}' \simeq \hat{A} - \frac{i}{\hbar} \alpha n_k [\hat{J}_k, \hat{A}].$$

Skalární pozorovatelné se při rotacích nemění (takže se nemění jejich střední hodnoty), komutují se všemi složkami celkového momentu hybnosti

$$\hat{A}' = \hat{A}, \quad [\hat{J}_k, \hat{A}] = 0.$$

Vektorový operátor $\hat{\vec{V}}$ je trojice operátorů $\hat{V}_j$, kterých se při rotacích transformují podle předpisu

$$\hat{V}'_j = R_{j,k}^{-1} \hat{V}_k. \quad (3.9)$$

Složky vektorového operátoru splňují komutační relace

$$[\hat{J}_k, \hat{V}_l] = i\hbar \varepsilon_{klm} \hat{V}_m. \quad (3.10)$$

Jejich střední hodnoty se transformují jako složky vektoru

$$\langle \psi' | \hat{V}_j | \psi' \rangle = R_{j,k} \langle \psi | \hat{V}_k | \psi \rangle.$$

Analogicky můžeme zavést kartézský tenzorový operátor řádu n jako sadu 3^n operátorů $\hat{T}_{i_1, \dots, i_n}$, které splňují vztahy

$$\hat{T}'_{i_1, \dots, i_n} = R_{i_1, j_1}^{-1} \cdots R_{i_n, j_n}^{-1} \hat{T}_{j_1, \dots, j_n}.$$

Pro kartézský tenzor 2. řádu lze přechodem k infinitezimální rotaci odvodit komutační relace s momentem hybnosti

$$[\hat{J}_k, \hat{T}_{ij}] = i\hbar \left(\varepsilon_{kil} \hat{T}_{lj} + \varepsilon_{kjl} \hat{T}_{il} \right). \quad (3.11)$$

Podobný vztah platí i pro tenzory vyššího řádu.

Příklady

Cvičení 7. Částice se spinem $\frac{1}{2}$ je ve vlastním stavu $\hat{S}_z$. Jakým spinorem ψ' je popsán stav po rotaci okolo osy y o úhel α ? Určete vektor polarizace $\vec{p}' = (\langle\sigma_1\rangle, \langle\sigma_2\rangle, \langle\sigma_3\rangle)$ pro výsledný spinor.

Návod: Výchozí stav částice je popsán vektorem $\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Rotací okolo osy y dostaneme stav

$$\psi' = R_y^{(\frac{1}{2})}(\alpha)\psi = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & -\sin \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}.$$

Vektor polarizace pro stav ψ' je roven

$$\vec{p}' = (\sin \alpha, 0, \cos \alpha),$$

což odpovídá rotaci původního vektoru polarizace $\vec{p} = (0, 0, 1)$ okolo osy y o úhel α

$$\vec{p}'^T = R_y(\alpha) \cdot \vec{p}^T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Cvičení 8. Určete Wignerovy d -matice pro $j = \frac{1}{2}$ a $j = 1$. Čemu je rovno $d^{(j)}(2\pi)$?

Návod:

$j = \frac{1}{2}$: V tomto případě díky vztahu (3.3) okamžitě nalezneme

$$R_y^{(\frac{1}{2})}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & -\sin \frac{\beta}{2} \\ \sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \equiv d^{(\frac{1}{2})}(\beta). \quad (3.12)$$

Pro $\beta = 2\pi$ dostaneme

$$d^{(\frac{1}{2})}(2\pi) = -\mathbb{1}.$$

$j = 1$: Musíme nalézt matici

$$d^{(1)}(\beta) = e^{-\frac{i}{\hbar}\beta\mathbb{J}_2^{(1)}} = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \mathbb{J}_2^{(1)n}, \quad (3.13)$$

kde

$$\mathbb{J}_2^{(1)} = i \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Přímým výpočtem určíme druhou a třetí mocninu matice

$$\mathbb{J}_2^{(1)2} = \frac{\hbar^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_2^{(1)3} = i \frac{\hbar^3}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \hbar^2 \mathbb{J}_2^{(1)}.$$

Obecně tedy platí

$$\mathbb{J}_2^{(1)2n} = \hbar^{2(n-1)} \mathbb{J}_2^{(1)2} \quad (n > 0), \quad \mathbb{J}_2^{(1)2n+1} = \hbar^{2n} \mathbb{J}_2^{(1)}.$$

Rozdělením řady (3.13) na nultý, sudé a liché členy postupně dostaneme

$$\begin{aligned} d^{(1)}(\beta) &= \mathbb{1} + \underbrace{\frac{1}{\hbar^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \beta^{2n} \right)}_{\cos \beta - 1} \mathbb{J}_2^{(1)2} - \underbrace{\frac{i}{\hbar} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \beta^{2n+1} \right)}_{\sin \beta} \mathbb{J}_2^{(1)} \\ &= \mathbb{1} + \frac{1}{\hbar^2} (\cos \beta - 1) \mathbb{J}_2^{(1)2} - \frac{i}{\hbar} \sin \beta \mathbb{J}_2^{(1)} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos \beta) & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta & \frac{1}{2}(1 - \cos \beta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta & \cos \beta & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta \\ \frac{1}{2}(1 - \cos \beta) & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta & \frac{1}{2}(1 + \cos \beta) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Pro $\beta = 2\pi$ nalezneme

$$d^{(1)}(2\pi) = \mathbb{1}.$$

Přímý výpočet d -matic pro vyšší hodnoty j už není použitelný.

Cvičení 9. *Explicitním výpočtem ukažte, jak se transformují složky operátoru spinu pro částici se spinem $\frac{1}{2}$ při rotaci o úhel α okolo osy z .*

Návod: Matice složek spinu se při rotaci transformují způsobem

$$S'_i = R_z^{(\frac{1}{2})}(\alpha) S_i R_z^{(\frac{1}{2})\dagger}(\alpha),$$

kde

$$R_z^{(\frac{1}{2})}(\alpha) = \cos \frac{\alpha}{2} I - i \sin \frac{\alpha}{2} \sigma_3, \quad R_z^{(\frac{1}{2})\dagger}(\alpha) = \cos \frac{\alpha}{2} I + i \sin \frac{\alpha}{2} \sigma_3.$$

S použitím komutačních relací a vztahů pro součin Pauliho matic (3.2) pro první složku operátoru spinu postupně dostaneme

$$\begin{aligned} S'_1 &= \frac{\hbar}{2} \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} \sigma_1 + i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} [\sigma_1, \sigma_3] + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sigma_3 \sigma_1 \sigma_3 \right) \\ &= \frac{\hbar}{2} \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} \sigma_1 + \sin \alpha \sigma_2 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sigma_1 \right) \\ &= \cos \alpha S_1 + \sin \alpha S_2. \end{aligned}$$

Analogickým způsobem nalezneme

$$\begin{aligned} S'_2 &= -\sin \alpha S_1 + \cos \alpha S_2, \\ S'_3 &= S_3. \end{aligned}$$

Výsledek odpovídá tomu, že $\hat{S}_i$ jsou složky vektorového operátoru, takže platí

$$\hat{S}'^T = R_z^{-1}(\alpha) \hat{S}^T = R_z(-\alpha) \hat{V}^T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{S}_1 \\ \hat{S}_2 \\ \hat{S}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \hat{S}_1 + \sin \alpha \hat{S}_2 \\ -\sin \alpha \hat{S}_1 + \cos \alpha \hat{S}_2 \\ \hat{S}_3 \end{pmatrix}$$

Cvičení 10. Uvažujte vektorový operátor $\hat{\vec{V}}$, tj. jeho složky splňují komutační relace (3.10). S použitím BCH formule explicitním výpočtem ověřte, že platí vztahy (3.9). Uvažujte rotaci kolem osy x o úhel α .

Návod: Máme explicitním výpočtem ověřit, že platí

$$\hat{\vec{V}}'^T = R_x^{-1}(\alpha)\hat{\vec{V}}^T = R_x(-\alpha)\hat{\vec{V}}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{V}_2 \\ \hat{V}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{V}_1 \\ \cos \alpha \hat{V}_2 + \sin \alpha \hat{V}_3 \\ -\sin \alpha \hat{V}_2 + \cos \alpha \hat{V}_3 \end{pmatrix},$$

přičemž složky operátoru se při rotaci okolo osy x transformují způsobem

$$\hat{V}'_i = \hat{R}_x(\alpha)\hat{V}_i\hat{R}_x^\dagger(\alpha).$$

K výpočtu využijeme BCH formuli ve tvaru (1.5), kde

$$\hat{A} = -\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{J}_1, \quad \hat{B} = \hat{V}_i.$$

Pro $i = 1$ je $\hat{K}_0 = \hat{V}_1$ a $\hat{K}_2 = [\hat{J}_1, \hat{V}_1] = 0 \equiv \hat{K}_n$, $n \geq 1$, takže

$$\hat{V}'_1 = \hat{V}_1.$$

Pro $i = 2$ postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \hat{K}_0 &= \hat{V}_2, & \hat{K}_1 &= -\frac{i}{\hbar}\alpha [\hat{J}_1, \hat{V}_2] = \alpha\hat{V}_3, \\ \hat{K}_2 &= -\frac{i}{\hbar}\alpha^2 [\hat{J}_1, \hat{V}_3] = -\alpha^2\hat{V}_2, \end{aligned}$$

takže platí

$$\hat{K}_{2k} = (-1)^k \alpha^{2k} \hat{V}_2, \quad \hat{K}_{2k+1} = (-1)^k \alpha^{2k+1} \hat{V}_3.$$

Z BCH formule pak dostaneme

$$\begin{aligned} \hat{V}'_2 &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \alpha^{2k} \right) \hat{V}_2 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \alpha^{2k+1} \right) \hat{V}_3 \\ &= \cos \alpha \hat{V}_2 + \sin \alpha \hat{V}_3. \end{aligned}$$

Analogickým způsobem pro $i = 3$ nalezneme

$$\hat{V}'_3 = -\sin \alpha \hat{V}_2 + \cos \alpha \hat{V}_3.$$