34) W čistý stav $\Rightarrow W^2 = W$

W_1, W_2 realizovatelný stav $\Rightarrow \mathrm{Tr}\, W_1 = 1,\ \mathrm{tr}\, W_2 = 1,\ W_1 \geq 0,\ W_2 \geq 0$

$$W^2 = W_1^2 \otimes W_2^2 = W_1 \otimes W_2$$

$$\Rightarrow W_1^2 = \alpha_1 W_1 \qquad \alpha_1 \alpha_2 = 1$$

$$W_2^2 = \alpha_2 W_2$$

$$\left.\begin{array}{l} W_j \geq 0 \\ W_j \leq 1 \\ W_j^2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow W_j^2 \leq W_j \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_1} W_1 = 1 \qquad W_1(W) = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_2} W = W_1$$

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_2} W_2 = 1 \qquad W_2(W) = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_1} W = W_2$$

35) je nutno ukázat, že $\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_j} W = \sum_k w_k \, \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_j} E^{(k)}$, kde $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

přepíšeme na

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_j} \sum_k w_k E^{(k)} \overset{?}{=} \sum_k w_k \, \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_j} E^{(k)}$$

je otázka, zda lze zaměnit tr a $\sum$ tzn. prohození dvou nekonečných sum

postačující podmínka je absolutní konvergence $\sum A_j$ AK $\Leftrightarrow \sum \|A_j\|$

$$\sum_k \|w_k \, \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_j} E^{(k)}\| = \sum_k w_k \, \|\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_j} E^{(k)}\| \leq \sum w_k < \infty$$

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{H}} E^{(k)} = 1 = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_1} \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_2} E^{(k)} = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_2} \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_1} E^{(k)}$$

$$\|\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_j} E^{(k)}\| \leq \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_i} \left(\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_j} E^{(k)} \right) = 1 \quad i \neq j$$

$\Rightarrow$ řada konverguje absolutně, lze zaměnit sumace

36) $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ hustá v $H^1(\mathbb{R}^3)$

rovněž $\frac{1}{|x|} = \frac{1}{2} \operatorname{div}\left(\frac{x}{|x|}\right)$

$$2\left\langle \psi, \frac{1}{|x|}\psi \right\rangle = 2\int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi}\,\psi\,\frac{1}{|x|}\,dx^3 = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi}\,\psi\,\nabla\left(\frac{x}{|x|}\right) dx^3 = -\int_{\mathbb{R}^3} \nabla(\overline{\psi}\,\psi)\,\frac{x}{|x|}\,dx^3$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^3} \left((\nabla\overline{\psi})\psi\frac{x}{|x|} + \overline{\psi}\,\nabla\psi\frac{x}{|x|} \right) dx^3 = -2\left\langle \nabla\psi, \frac{x}{|x|}\psi \right\rangle$$

$$\left\langle \psi, \frac{1}{|x|}\psi \right\rangle = -\operatorname{Re}\left\langle \nabla\psi, \frac{x}{|x|}\psi \right\rangle \underset{\text{C.Š. v } \mathbb{R}^3}{\leq} \sum_{j=1}^{3} \|\nabla_j\psi\|_2 \left\|\frac{x_j}{|x|}\psi\right\|_2 \underset{\text{C.Š. pro sumy}}{\leq} \|\nabla\psi\|_2 \|\psi\|_2$$

explicitně
$$\left\langle \nabla\psi, \frac{x}{|x|}\psi \right\rangle = \sum_{i=1}^{3} \left\langle \nabla_i\psi, \frac{x_i}{|x|}\psi \right\rangle \overset{(A)}{\leq} \sum_{i=1}^{3} \|\nabla_i\psi\|_2 \left\|\frac{x_i}{|x|}\psi\right\|_2 \overset{(B)}{\leq} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{3}\|\nabla_i\psi\|^2\right)^{\frac12}}_{\|\nabla\psi\|} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{3}\left\|\frac{x_i}{|x|}\psi\right\|^2\right)^{\frac12}}_{\|\psi\|}$$

náš postup ↑ platí pro funkce v $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ $\Rightarrow$ využitím hustoty platí i pro $H^1(\mathbb{R}^3)$
(odhadneme $\psi \in H^1$ např. posloupností $\psi_n \in C_0^\infty$ a použijeme dominantní konvergenci)

„rovnost": pokud „=" platí, platí všechny C.Š. nerovnosti ((A) a (B)) musí být rovnosti

(A) $\partial_{x_i}\psi \overset{!}{=} c_i \frac{x_i}{|x|}\psi$

využitím (A) dostaneme $-\operatorname{Re}\left\langle c_i\frac{x_i}{|x_i|}\psi, \frac{x_i}{|x_i|}\psi\right\rangle = -\operatorname{Re}\, c_i \left\|\frac{x_i}{|x|}\psi\right\|^2 \overset{!}{=} |c_i| \left\|\frac{x_i}{|x|}\psi\right\|^2$

$\Rightarrow c_i = -|c_i|$

(B) $\|\partial_i\psi\| \overset{!}{=} c\left\|\frac{x_i}{|x|}\psi\right\|, \quad c \geq 0$

využitím (B) dostaneme $c_i = -c \quad \forall i = 1,2,3$

$\nabla\psi = -c\frac{x}{|x|}\psi$

$\Rightarrow \psi = a\,e^{-c|x|} \quad c > 0$ protože $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$