20) provedeme po porlo pro každý člen rozkladu

$$(\phi, -\Delta_0 \psi) = (-\Delta_0 \phi, \psi) \qquad D((-\Delta_0)^*) = \mathcal{H}$$

$$-\Delta_0 \phi = (-\Delta \phi_1, \ldots, -\Delta \phi_{m+n})^T$$

indexy defektu spočítáme na jednotlivých polopřímkách a úsečkách

$$-\Delta\psi = \pm i\psi \to \psi'' = \mp i\psi \to \psi = \exp(\pm\sqrt{\mp i}\, x)$$

polopřímky: $n_+(-\Delta_0): -\Delta\psi + i\psi = 0$

$$\psi_i(x) = \delta_{ij} \exp(-\sqrt{i}\, x) \qquad j \in \{1, \ldots m\}$$

úsečky: $n_+(-\Delta_0)$: $\psi_i(x) = \delta_{ij} \exp(-\sqrt{i}\, x) \qquad j \in \{m+1, \ldots, m+n\}$

$$\psi_i(x) = \delta_{ij} \exp(\sqrt{i}\, x) \qquad j \in \{m+1, \ldots, m+n\}$$

$$\Rightarrow n_+(-\Delta_0) = 2n + m$$

polopřímky: $n_-(-\Delta_0) : -\Delta\psi - i\psi = 0$

$$\psi_i(x) = \delta_{ij} \exp(-\sqrt{i}\, x) \qquad j \in \{1, \ldots m\}$$

úsečky: $n_-(-\Delta_0)$: $\psi_i(x) = \delta_{ij} \exp(-\sqrt{i}\, x) \qquad j \in \{m+1, \ldots, m+n\}$

$$\psi_i(x) = \delta_{ij} \exp(\sqrt{i}\, x) \qquad j \in \{m+1, \ldots, m+n\}$$

$$\Rightarrow n_-(-\Delta_0) = 2n + m$$

21) definujeme $\Omega(\phi,\psi)=\langle\Delta\phi,\psi\rangle-\langle\phi,\Delta\psi\rangle=-\overline{\Omega(\psi,\phi)}$ $\quad\forall\psi,\phi\in\mathcal{D}$

Ω je 0 na $\mathcal{D}(-\Delta_0)$

všechna s.a. rozšíření jsou dána maximálními izotropními podprostory $\mathcal{D}$ (s.a. značí pomocí symplektických for

tzn.: maximální podprostor, kde je Ω identicky 0

algebraicky nalezli všechny max. izotropní podprostory pomocí per-partes

$$\Omega(\phi,\psi)=\sum_{j=1}^{m+n}\left(\overline{\phi_j(0)}\,\psi_j'(0)-\overline{\phi_j'(0)}\,\psi_j(0)\right)+\sum_{j=m+1}^{m+2n}\left(-\overline{\phi_j(l_{j-m})}\,\psi_j'(l_{j-m})+\overline{\phi_j'(l_{j-m})}\,\psi(l_{j-m})\right)$$

$[\psi]:=\begin{pmatrix}\psi\\ \psi'\end{pmatrix}$ $\quad [\;]:\mathcal{D}\to\mathbb{C}^{2(m+2n)}$ $\quad [\;]$: surjektivní mapa z $\mathcal{D}$ na $\mathbb{C}^{2(m+2n)}$

$\Omega(\phi,\psi)=\omega([\phi,\psi]):=\langle[\phi],J[\psi]\rangle$ $\quad J=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$

algebraicky najít všechny maximální izotropní podprostory $\mathcal{D}$ vůči Ω stačí vyřešit všechny izotropní podprostory $\mathbb{C}^{2(m+2n)}$ vůči ω a najít vzor $[\;]$

J nedegenerovaná $\Rightarrow$ podprostory mají dimenzi $m+2n$

Lemma: Lin podprostor $M\subset\mathbb{C}^{2(m+2n)}$ je max. izotropní $\Leftrightarrow M^\perp=JM\Leftrightarrow M^\perp$ max. izotropní $\quad$ dk.: $J^2=-1,\ -J=J^+$

definujme M pomocí A,B $\quad M(A,B):=\{\forall[\psi]\in\mathbb{C}^{2(m+2n)}\mid A\underline{\psi}+B\underline{\psi}'=0\}$ $\quad A,B$ matice $(m+2n)\times(m+2n)$

Lemma: A,B matice takové, že (A,B) má hodnost max, pak $M(A,B)$ je max izotropní $\Leftrightarrow AB^+$ je s.a.

dk.: (A,B) max. hodnost $\Leftrightarrow$ řádky matice lin. nezávislé $\Leftrightarrow(A,B)^+$ má lin nezávislé sloupce ϕ^k

$A\underline{\psi}+B\underline{\psi}'=0\Leftrightarrow\langle\phi^k,[\psi]\rangle=0\ \ \forall k\in\{1,\dots,m+2n\}$

z předchozího lemmatu $M(A,B)$ max izotropický, pokud jsou $[\phi^k]_{k=1\dots m+2n}$ max izotropický

tedy $(A,B)J(A,B)^+=0\to AB^+-B^+A=0\Rightarrow AB^+$ s.a.

opačná implikace obdobně

22) ukážeme ekvivalenci 21 a 22 a tím i dokážeme 23

22 ⇒ 21:

$(U-\mathbb{1} \mid i(U+\mathbb{1})) = (A \mid B)$

a) $AB^+ = (U-\mathbb{1})(-i)(U^+ + \mathbb{1}) = iUU^+ + iU^+ - iU + i\mathbb{1} = i(U^+ - U)$

$BA^+ = i(U+\mathbb{1})(U^+ - \mathbb{1}) = iUU^+ + iU^+ - iU - i\mathbb{1} = i(U^+ - U)$

$\Rightarrow U-\mathbb{1}(i(U+\mathbb{1}))^+$ je s.a.

b) $(U-\mathbb{1} \mid i(U+\mathbb{1}))$ max. hodnost $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{C}^k \; \exists x \in \mathbb{C}^{2k} \quad (U-\mathbb{1})x_1 + i(U+\mathbb{1})x_2 = y$

$x_1 = ix_2 = \frac{U^+ y}{1+1}$

$\Rightarrow (U-\mathbb{1})x_1 + i(U+\mathbb{1})x_2 = U(x_1 + ix_2) - x_1 + ix_2 = 2Ux_1 = 2UU^+\frac{y}{2} = y$

$\Rightarrow (U-\mathbb{1} \mid i(U+\mathbb{1}))$ max hodnost

21 ⇒ 22:

A, B splňují podmínky $\Rightarrow CA, CB$ splňují podmínky, kde C je regulární matice

$(A|B)$ max hodnost $\Rightarrow (CA|CB)$ max hodnost

$CA(CB)^+ = CAB^+C^+$

$CB(CA)^+ = CBA^+C^+ = CAB^+C^+$ $\quad \Rightarrow CA(CB)^+$ s.a.

musíme najít C takové, že $CA = U - \mathbb{1}$, $CB = i(U+\mathbb{1})$

$iCA = iU - i\mathbb{1}$ $\qquad CA = U - \mathbb{1}$

$CB = iU + i\mathbb{1}$ $\qquad -iCB = U + \mathbb{1}$

$C(B - iA) = 2i\mathbb{1}$ $\qquad C(A - iB) = 2U$

$C^{-1} = \frac{B - iA}{2i}$ $\qquad U = C\frac{A - iB}{2}$

$C = \frac{-2}{A + iB}$ $\qquad U = (A+iB)^{-1}(A - iB)$

ověřme, že $U^+U = 1$

$U^+ = (A^+ + iB^+)(A^+ - iB^+)^{-1}$

$UU^+ = (A+iB)^{-1}(A - iB)(A^+ + iB^+)(A^+ - iB^+)^{-1} = (A+iB)^{-1}(AA^+ - \overbrace{iBA^+}^{=(AB^+)^+ = AB^+} - \overbrace{AiB^+}^{= iBA^+} - iB(iB^+))(A^+ - iB^+)^{-1}$

$= (A+iB)^{-1}(A(A^+ - iB^+) + iB(iA^+ - iB^+))(A^+ - iB^+)^{-1} = \mathbb{1}$

$\Rightarrow U$ unitární; pozn. $(A+iB)^+$ regulární z $(A\ B)$ max. hodnost a AB^+ s.a. $\quad A+iB$ regulární obdobně

$(A^+ - iB^+)y = 0 \Rightarrow A^+y = iB^+y \Rightarrow (y, BA^+y) = i(y, BB^+y) \Rightarrow y = 0$ či $B^+y = 0$

$B^+y = 0 \Rightarrow A^+y = 0 \Rightarrow y \in (\mathrm{Ran}\,B)^\perp$ a $y \in (\mathrm{Ran}\,A)^\perp \Rightarrow AB$ nemůže mít max hodnost $\Rightarrow$ spor