18) z přednášky známe

$$F_3 = F \otimes F \otimes F$$

$$F P F^{-1} = Q$$

$$F \mathbb{1} F^{-1} = \mathbb{1}$$

$$F \varphi(P) F^{-1} = \varphi(Q)$$ z $A' = U A U^{-1} \Rightarrow E_{A'} = U E_A U^{-1} \Rightarrow \varphi(A') = U \varphi(A) U^{-1}$

$$F_3 \left(\overline{P \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}}\right) F_3^{-1} = \overline{Q \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}}$$

každou Borelovskou funkci lze aproximovat lineární kombinací funkcí ve tvaru $f_1(x_1) \otimes f_2(x_2) \otimes f_3(x_3)$

využitím poznatků z přednášky

$$F_3 \left(\overline{f_1(P_1) \otimes f_2(P_2) \otimes f_3(P_3)}\right) F_3^{-1} = \overline{F f_1(P_1) F^{-1} \otimes F f_2(P_2) F^{-1} \otimes F f_3(P_3) F^{-1}} = \overline{f_1(Q_1) \otimes f_2(Q_2) \otimes f_3(Q_3)}$$

od lineárních kombinací přejdeme k limitní funkci použitím uzavřenosti operátorů

19) 1) $\varphi \in \mathcal{D}(T_1)$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

počítáme:

$$\langle \varphi, -\Delta\psi\rangle = [-\overline{\varphi}\psi']_{-\infty}^{0} + [-\overline{\varphi}\psi']_0^{\infty} + \langle \nabla\varphi, \nabla\psi\rangle = \langle -\Delta\varphi, \psi\rangle + \underbrace{[-\overline{\varphi}\psi']_{-\infty}^{0} + [-\overline{\varphi}\psi']_0^{\infty} + [\overline{\varphi}'\psi]_{-\infty}^{0} + [\overline{\varphi}'\psi]_0^{\infty}}_{=0}$$

položme $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ a $\varphi \in \mathcal{D}(T_1)$

vše lze rozšířit na $\psi \in H^2(\mathbb{R}\setminus\{0\})$

$\Rightarrow T_1 \subset T_1^*$ lze nalézt rozšíření

indexy defektu:

$-\Delta\varphi + i\varphi = 0 \rightarrow \varphi = \exp(\pm\sqrt{i}\,x)$ $\quad \sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$-\Delta\varphi - i\varphi = 0 \rightarrow \varphi = \exp(\pm\sqrt{-i}\,x)$ $\quad \sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$

$n_+(-\Delta)$: $\psi_{1,+} = \begin{cases} \exp(-\sqrt{i}x) & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ a $\psi_{2,+} = \begin{cases} \exp(\sqrt{i}x) & x<0 \\ 0 & x>0 \end{cases}$

$\Rightarrow n_+(-\Delta) = 2$

$n_-(-\Delta)$: $\psi_{1,-} = \begin{cases} \exp(-\sqrt{-i}\,x) & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ a $\psi_{2,-} = \begin{cases} \exp(\sqrt{-i}\,x) & x<0 \\ 0 & x>0 \end{cases}$

$\Rightarrow n_-(-\Delta) = 2$

s.a. rozšíření: $-\Delta_U\varphi = -\Delta\varphi - i(I+U)\varphi_+$

$U: [\psi_{1,+}, \psi_{2,+}]_\lambda \rightarrow [\psi_{1,-}, \psi_{2,-}]_\lambda$ unitární

$\mathcal{D}(-\Delta_U) = \{\varphi + (I-U)\varphi_+ \mid \varphi \in \mathcal{D}(T_1), \varphi_+ \in [\psi_{1,+}, \psi_{2,+}]_\lambda\}$

2) analogicky jako dříve

$\varphi \in \mathcal{D}(T_2)$, $\psi \in C_0^\infty((0,1))$

$\langle \varphi, -\Delta\psi\rangle = \langle -\Delta\varphi, \psi\rangle$

rozšíření je možné pro $\psi \in H^2((0,1))$

indexy defektu $n_+(-\Delta) = n_-(-\Delta) = 2$

s.a. rozšíření: $-\Delta_U\varphi = -\Delta\varphi - i(I+U)\varphi_+$

$U: [\psi_{1,+}, \psi_{2,+}]_\lambda \rightarrow [\psi_{1,-}, \psi_{2,-}]_\lambda$ unitární

$\mathcal{D}(-\Delta_U) = \{\varphi + (I-U)\varphi_+ \mid \varphi \in \mathcal{D}(T_2), \varphi_+ \in [\psi_{1,+}, \psi_{2,+}]_\lambda\}$

3) analogicky jako dříve

$\varphi \in \mathcal{D}(T_3)$, $\psi \in C_0^\infty((0,1))$

$\langle \varphi, -\Delta\psi\rangle = -(\overline{\varphi}'\psi)(1_-) - \langle \Delta\varphi, \psi\rangle$

pro $\psi \in \mathcal{D}(T_3)$ máme $\langle \varphi, -\Delta\psi\rangle = \langle -\Delta\varphi, \psi\rangle$

$\Rightarrow T_3 \subseteq T_3^*$

aby bylo dobře definováno $(\overline{\varphi}'\psi)(1_-) \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow T_3^* = -\Delta$, $\mathcal{D}(T_3^*) = \{\psi \in H^2((0,1)) \mid \psi'(1_-) = 0\}$

$n_+(-\Delta): \; -\Delta\psi + i\psi = 0 \qquad \psi'(1_-) = 0$

$$\psi = a\exp(-\sqrt{i}x) + b(\exp(\sqrt{i}x))$$

$$\psi' = -\sqrt{i}a\exp(-\sqrt{i}x) + \sqrt{i}b\exp(\sqrt{i}x)$$

$$\Rightarrow \quad a = b\exp(2\sqrt{i})$$

$$n_+(-\Delta) = 1 \qquad \psi_+ = \exp(2\sqrt{i} - \sqrt{i}x) + \exp(\sqrt{i}x)$$

$n_-(-\Delta): \; -\Delta\psi - i\psi = 0 \qquad \psi'(1_-) = 0$

$$\psi = a\exp(-\sqrt{-i}x) + b\exp(\sqrt{-i}x)$$

$$\psi' = -\sqrt{-i}\,a\exp(-\sqrt{-i}x) + \sqrt{-i}\,b\exp(\sqrt{-i}x)$$

$$\Rightarrow \quad a = b\exp(2\sqrt{-i})$$

$$n_-(-\Delta) = 1 \qquad \psi_- = \exp(2\sqrt{-i} - \sqrt{-i}x) + \exp(\sqrt{-i}x)$$

s.a. rozšíření: $-\Delta_\phi\varphi = -\Delta\varphi - i(1+e^{i\phi})\psi_+ \qquad \phi \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{D}(-\Delta_\phi) = \left\{ \varphi + (1+e^{i\phi})\psi_+ \;\middle|\; \varphi \in \mathcal{D}(T_3),\ \psi_+ \in \left[\exp(2\sqrt{i} - \sqrt{i}x) + \exp\sqrt{i}x\right]_\lambda \right\}$$

alternativně lze využít $\quad T_2 \subset T_3 \subset T_3^* \subset T_2^*$