8) polarizační identita: $s(f,g) = \frac{1}{4} \sum_{\xi^4=1} \xi\, q(\xi f + g)$ $\qquad q(f) = s(f,f)$

s seskvilineární forma: $s(\alpha f + g, h) = \bar{\alpha}\, s(f,h) + s(g,h)$
$s(h, \alpha f + g) = \alpha s(h,f) + s(h,g)$ $\quad \forall f,g,h \in \mathcal{H}, \forall \alpha \in \mathbb{C}$

s symetrická (tzn. $s(f,g) = \overline{s(g,f)}$ $\forall f,g \in \mathcal{D}(s)$) $\Longleftrightarrow$ q reálná ($q(f) \in \mathbb{R}$ $\forall f \in \mathcal{D}(s)$)

dk.: $\Rightarrow$: $q(f) = s(f,f) = \overline{s(f,f)} = \overline{q(f)}$ $\quad \forall f \in \mathcal{D}(s) \Rightarrow q(f) \in \mathbb{R}$

$\Leftarrow$: $s(f,g) = \frac{1}{4} \sum_{\xi^4=1} \xi\, q(\xi f + g) \underset{\{\xi^4=1\} = \{\bar\xi^4=1\}}{=} \frac{1}{4} \sum_{\xi^4=1} \bar{\xi}\, q(\bar{\xi} f + g) \underset{q \in \mathbb{R}}{=} \frac{1}{4} \sum_{\xi^4=1} \overline{\xi\, q(\bar{\xi} f + g)}$

$\underset{(1)}{=} \frac{1}{4} \sum_{\xi^4=1} \overline{\xi\, q(f + \xi g)} = \overline{s(g,f)}$

(1): $q(\bar{\xi} f + g) = s(\bar{\xi} f + g, \bar{\xi} f + g) = |\xi|^2 s(\bar{\xi} f + g, \bar{\xi} f + g) = \xi \bar{\xi}\, s(\bar{\xi} f + g, \bar{\xi} f + g) =$

$= s(|\xi|^2 f + \xi g, |\xi|^2 f + \xi g) = q(f + \xi g)$

definujeme: $s_A(\varphi, \psi) := \langle \varphi, A\psi \rangle$ $\quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(A)$

zřejmě s_A seskvilineární forma

$\langle \psi, A\psi \rangle = \overline{\langle A\psi, \psi \rangle} = \langle A\psi, \psi \rangle$ $\Rightarrow$ $q_A(f) := s_A(f,f)$ je reálná $\forall f \in \mathcal{D}(A)$

$q_A(f) \in \mathbb{R} \Rightarrow s_A(\varphi, \psi) = \overline{s_A(\psi, \varphi)}$

tzn.: $\langle \varphi, A\psi \rangle = s_A(\varphi, \psi) = \overline{s_A(\psi, \varphi)} = \overline{\langle \psi, A\varphi \rangle} = \langle A\varphi, \psi \rangle$

9) uvažujme $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$\operatorname{supp} \varphi(x) = [-1,1]^n$, $\|\varphi\|_2 = 1$

$\varphi_m(x) := m^{\frac{n}{2}} \varphi\left(\frac{x}{m}\right)$ platí $\operatorname{supp} \varphi_m(x) = \left[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right]^n$ a $\|\varphi_m\|_2 = 1$

nechť $\lambda \in \operatorname{Ran} V \Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R}^n : V(x_0) = \lambda$

BÚNO $x_0 = 0$

odhadneme $\|(\lambda - M_V)\varphi_m\|_2$

$$\|(\lambda-M_V)\varphi_m\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda - V(x))^2 |\varphi_m(x)|^2 dx \leq \sup_{\|x\|_\infty < \frac{1}{m}} |\lambda - V(x)|^2 \|\varphi_m\|_2^2 = \sup_{\|x\|_\infty < \frac{1}{m}} |\lambda - V(x)|^2$$

tzn.: máme sekvenci φ_m, $\|\varphi_m\|_2 = 1$ a $\|(\lambda - M_V)\varphi_m\| \to 0$

$\Rightarrow \lambda - M_V$ nemůže mít omezenou inverzi $\Rightarrow \lambda \in \sigma(M_V)$

proč: $x = \sigma^{-1}\sigma x$ $\quad \|x\| = 1$
$\|x\| \leq \|\sigma^{-1}\| \|\sigma x\|$ $\quad \|\sigma x\| \to 0$ $\Big\} \Rightarrow \|\sigma^{-1}\| \to \infty$

odsud jsem $\operatorname{Ran} V \subseteq \sigma(M_V)$

vím, že spektrum je vždy uzavřené $\overline{\operatorname{Ran}(V)} \subseteq \overline{\sigma(M_V)} = \sigma(M_V)$

10) napřed dokážeme následující lemma o $\mathcal{D}(A^*)$

Lemma: Nechť A je lineární, hustě definovaný operátor. Pro $\phi \in \mathcal{H}$ nechť $T_\phi : \mathcal{D}(A) \to \mathbb{C}$, $T_\phi(\psi) = \langle \phi, A\psi \rangle$.
Pak $\mathcal{D}(A^*) = \{ \phi \in \mathcal{H} : T_\phi \text{ je spojitý v } \mathcal{D}(A) \}$ (topologie v $\mathcal{D}(A)$ je indukovaná skalárním produktem v $\mathcal{H}$)

Dk.: pokud $\phi \in \mathcal{D}(A^*)$ pak $\exists!\, \phi^* \in \mathcal{H}$ $T_\phi(\psi) = \langle \phi^*, \psi \rangle$ $\forall \psi \in \mathcal{D}(A)$

$\Rightarrow \|T_\phi \psi\| \leq C \|\psi\|$, kde $C = \|\phi^*\| = \langle \phi^*, \phi^* \rangle^{\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow T_\phi$ je spojitý

T_ϕ spojitý na $\mathcal{D}(A)$, $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H} \xRightarrow[\text{Rieszův reprezentační teorém}]{} \exists!\, \phi^* \in \mathcal{H}$ takový, že $T_\phi(\psi) = \langle \phi^*, \psi \rangle$ $\forall \psi \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow \phi \in \mathcal{D}(A^*)$

Nyní ukážeme, že $T_\phi(\psi) = \langle \phi, A\psi \rangle$ není spojitý pokud $\langle \varphi, g \rangle \neq 0$

vezmeme $f_n(x) = f(nx)$ $\quad f_n \in C_c(\mathbb{R})$

$f(0) = 1$

pak $f_n(x) \xrightarrow[L^2(\mathbb{R}^n)]{} 0$

a $T_\varphi(f_n) = \langle \varphi, A f_n \rangle = \langle \varphi, g \rangle f_n(0)$

z předpokladu $\langle \varphi, g \rangle \neq 0 \Rightarrow$ mám $f_n \to 0$ $\quad T_\varphi(f) \to \langle \varphi, g \rangle \neq 0$

$\Rightarrow T_\varphi$ není spojitý $\Rightarrow \varphi \notin \mathcal{D}(A^*)$

11) 1. potřebujeme ukázat, že každá Cauchyovská sekvence v $\operatorname{Ran}(B)$ konverguje v $\operatorname{Ran} B$

$B\psi_n \in \operatorname{Ran} B$

$B\psi_n$ Cauchy $\Rightarrow \psi_n$ Cauchy, protože $\|B\psi_n\| \geq c\|\psi_n\|$

B s.a. $\Rightarrow B$ uzavřený

máme $\psi_n \to \psi$ a $B\psi_n \to f$

B uzavřený $\Rightarrow \psi \in \mathcal{D}(B)$ a $B\psi = f \in \operatorname{Ran} B \Rightarrow \operatorname{Ran} B$ je uzavřený

2. z kritéria samoadjungovanosti máme $\forall \varepsilon > 0 \ \operatorname{Ran}(B + i\varepsilon) = \mathcal{H}$

$\Rightarrow \forall g \in \mathcal{H} \ \exists \psi_\varepsilon$ takové, že $(B + i\varepsilon)\psi_\varepsilon = g$

$\|g - B\psi_\varepsilon\| = \varepsilon \|\psi_\varepsilon\|$

$\|g\| = \|(B+i\varepsilon)\psi_\varepsilon\| \geq \|B\psi_\varepsilon\| \geq c\|\psi_\varepsilon\| \quad \Rightarrow \|\psi_\varepsilon\| \leq \frac{\|g\|}{c}$

$\|(A + i\lambda)\psi\|^2 = \|A\psi\|^2 + \lambda^2\|\psi\|^2$ (platí $\forall A$ symetrické, $\lambda \in \mathbb{R}$)

dohromady $\|g - B\psi_\varepsilon\| \leq \varepsilon \frac{\|g\|}{c} \quad \Rightarrow B\psi_\varepsilon \to g$ pokud $\varepsilon \to 0$

3. B zdola omezený $\Rightarrow B$ bijektivní, tzn. $\forall \psi \in \mathcal{D}(B) \ \exists \varphi \in \operatorname{Ran}(B) : \psi = B^{-1}\varphi$

$\|\varphi\| = \|B\psi\| \geq c\|\psi\| = c\|B^{-1}\varphi\|$

$\Rightarrow \|B^{-1}\varphi\| \leq \frac{\|\varphi\|}{c}$