5) definujeme : $W_0 : \operatorname{Ran}|B| \to \operatorname{Ran} B$

$$W_0|B|x := Bx$$

nutno ověřit zda je W_0 dobře definované, jelikož $|B|$ nemusí být invertibilní

1) W_0 dobře definované:

$|B|^2 = BB^*$

$\|Bx\|^2 = (Bx, Bx) = (x, B^*Bx) = (x, |B||B|x) = \||B|x\|^2$

tedy pro $|B|\varphi = |B|\psi \Rightarrow B\varphi = B\psi \Rightarrow W_0$ dobře definované

dále W_0 zachovává normu

2) rozšíření:

W_B spojité rozšíření W_0, zobrazuje $\overline{\operatorname{Ran}|B|} = (\ker|B|)^\perp = (\ker B)^\perp \to \overline{\operatorname{Ran} B}$

W_B dodefinuje na $(\operatorname{Ran}|B|)^\perp$ jako 0

W_B částečná izometrie (izometrie na $(\ker W_B)^\perp$)

$W_B|B|x = Bx \quad \forall x \in \mathcal{H}$

3) $\operatorname{Ran} B$, $\ker B$:

$$\left.\begin{aligned} &|B| \text{ s.a.} \Rightarrow (\operatorname{Ran}|B|)^\perp = \ker|B| = \ker W_B \\ &|B|x = 0 \Leftrightarrow Bx = 0 \quad (\text{z } \|Bx\| = \||B|x\|) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ker B = \ker|B| \Rightarrow \ker B = \ker W_B$$

4) jednoznačnost W_B:

předpokládejme, že existuje W s danými vlastnostmi

$\Rightarrow (W_B - W)|B| = 0$

použijeme ortogonální rozklad $x = y + w$, $y \in \ker B$ a $w \in (\ker B)^\perp = \overline{(\operatorname{Ran}|B|)}$

$(W_B - W)x = (W_B - W)w = \lim_{n\to\infty} (W_B - W)|B|v_n = 0 \qquad$ kde $|B|v_n \to w$

použitím předpokladů máme $(W_B - W)|B|v_n = 0 \Rightarrow (W_B - W)x = 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}$

6) 1) $B \in \mathcal{J}_1$ platí:

$$\operatorname{Tr}|B|^2 = \sum_n (e_n, |B|^2 e_n) \leq \sum_n \|B\| (e_n, |B| e_n) \leq \|B\| \operatorname{Tr}|B|$$

$$\Rightarrow A \in \mathcal{J}_1 \Rightarrow |A|^2 \in \mathcal{J}_1 \Rightarrow A \in \mathcal{J}_2$$

$B \in \mathcal{J}_2$: $\quad B_n := E_n B \qquad E_n \xrightarrow{s} I$

$$\Rightarrow \|(B - B_n)x\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} |(e_j, Bx)|^2 \leq \|x\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \|B^* e_j\|^2$$

$\Rightarrow B_n \to B$ v op. normě $\quad B_n$ konečně rozměrný $\Rightarrow B$ kompaktní

$$\operatorname{Tr}|B| = \operatorname{Tr}(\sqrt{|B|}^2) = \|\sqrt{|B|}\|_2^2$$

$$B = \sum_{j=1}^{\infty} |e_j\rangle \mu_B(j) \langle f_j|$$

$$|B|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |f_j\rangle \mu_B(j) \langle e_j | e_k\rangle \mu_B(k) \langle f_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k\rangle |\mu_B(k)|^2 \langle f_k|$$

$$\Rightarrow \|B\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\mu_B(j)|^2$$

$|B|$ s.a. můžeme ukázat že sing. hodnoty jsou $|\mu_B(j)|$

$$\operatorname{Tr}|B| = \|\sqrt{|B|}\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\mu_B(j)|$$

$$\|B\|_{HS}^2 = \operatorname{Tr} BB^* = \operatorname{Tr}|B|^2 \leq \|B\| \operatorname{Tr}|B| \leq (\operatorname{Tr}|B|)^2$$

$$\sum (e_j, |B|^2 e_j) \leq \sum \|B\| (e_j, |B| \ldots$$

$$\|Bx\| \leq \Big(\sum_k \|B f_k\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \|B\|_2 \Rightarrow \|B\|_2 \geq \|B\|$$

$\{f_j\}$ ONB $\quad f_1 = x$

2) využijeme cvičení 5

$$\sqrt{|B|} \in \mathcal{J}_2 \quad \forall B \in \mathcal{J}_1 \quad \Rightarrow B = \underbrace{W\sqrt{|B|}}_{\in \mathcal{J}_2} \cdot \underbrace{\sqrt{|B|}}_{\in \mathcal{J}_2}$$

opačná implikace $C, D \in \mathcal{J}_2 \Rightarrow CD = W|CD|$

$$\operatorname{Tr}|CD| = \sum_j |(e_j, W^* CD e_j)| \underset{\text{Cauchy Schwarz}}{\leq} \sum_j \|C^* W e_j\| \|D e_j\| \underset{\text{Hölder}}{\leq} \Big(\sum_j \|C^* W e_j\|^2 \sum_k \|D e_k\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \|D\|_2 \|C^* W\|_2 < \infty$$

$$\sum |a_k b_k| \leq \|a\| \|b\|$$

7) 1) W_1, W_2 statistické operátory

$W = \alpha W_1 + (1-\alpha) W_2 \qquad \alpha \in \langle 0,1 \rangle$

$W_1 \geq 0 \quad W_2 \geq 0 \quad \Rightarrow W \geq 0$

$W_1 = |W_1|, \; W_2 = |W_2|$

$Tr(W) = \alpha \, Tr \, W_1 + (1-\alpha) \, Tr \, W_2 = \alpha + 1 - \alpha = 1$

2) pokud $W^2 \neq W \Rightarrow W$ má vlastní hodnotu $\lambda \in (0,1)$ a k ní odpovídající jednorozměrný projektor

$W = \lambda E + (1-\lambda) W' \qquad W' := \frac{1}{1-\lambda}(W - \lambda E)$

W' statistický operátor pokud E, W stat. operátor

$\Rightarrow W$ není extremální bod

naopak předpokládejme $W^2 = W$ a $W = \alpha W_1 - (1-\alpha) W_2$ kde $\alpha \in (0,1)$

$\Rightarrow Tr \, W^2 = \alpha^2 \, Tr \, W_1^2 + 2\alpha(1-\alpha) \, Tr \, W_1 W_2 + (1-\alpha)^2 \, Tr \, W_2^2 = 1$

$Tr \, W_1 W_2 \leq 1 \qquad Tr \, W_j^2 \leq 1$

$\underbrace{\alpha^2}_{>0}(1 - Tr \, W_1^2) + \underbrace{2\alpha(1-\alpha)}_{>0}(1 - Tr \, W_1 W_2) + \underbrace{(1-\alpha)^2}_{>0}(1 - Tr \, W_2^2) = 0$

$\Rightarrow$ všechny $Tr \, W_i W_j \overset{!}{=} 1 \qquad i,j \in \{1,2\}$

$\Rightarrow W_j$ musí být jednorozměrné projektory na $[e_j]_\lambda$ (neb $Tr \, W_1^2 = 1 = Tr \, W_2^2$)

ze $Tr(W_1 W_2) = 1 \Rightarrow |(e_1, e_2)| = 1 \Rightarrow W_1 = W_2$