1) 1. evidentně $\mathcal{D}(Q) \supset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{D}(Q)$ hustá v $L^2(\mathbb{R})$

Q s.a. $\Leftrightarrow$ Q hustě definovaný, $Q = Q^*$

uvažujme $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, pak

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(x)}\, x\, \psi(x)\, dx = (\varphi, x\psi) = \int_{\mathbb{R}} \overline{x\varphi(x)}\, \psi(x)\, dx = (x\varphi, \psi)$$

výše uvedené taky platí pro $\varphi \in \mathcal{D}(Q) \Rightarrow Q \subseteq Q^*$ t.j. Q symetrický

zbývá ukázat, že $\mathcal{D}(Q^*) = \mathcal{D}(Q)$

$\varphi \in \mathcal{D}(Q^*) \Leftrightarrow \exists\, \varphi^* \in L^2$ takové že $\forall \psi \in \mathcal{D}(Q)$ $(\varphi, Q\psi) = (\varphi^*, \psi)$

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{(x\varphi - \varphi^*)}\, \psi\, dx = 0 \qquad (1)$$

víme, že $\forall \eta \in L^2(\mathbb{R})$ $\eta \chi_n \in \mathcal{D}(Q)$ kde $\chi_n = \begin{cases} 1 & x \in (-n, n) \\ 0 & x \notin [-n, n] \end{cases}$

tzn. v (1) dosadím za ψ : $\psi \chi_n$ a dostaneme

$$\int \overline{[\chi_n(x)(x\varphi(x) - \varphi^*(x)]}\, \psi\, dx = 0$$

$\Rightarrow x\varphi(x) = \varphi^*(x)$ s.v. $\forall x \in (-n, n)\ \forall n$; protože $\overline{\mathcal{D}(Q)} = L^2(\mathbb{R})$

$\Rightarrow x\varphi(x) = \varphi^*(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \mathcal{D}(Q^*) = \mathcal{D}(Q)$

to znamená, že Q je samosdružený

2. $\mathcal{D}(P) \supset C_0^\infty(\mathbb{R}^+) \Rightarrow \mathcal{D}(P)$ hustá v $L^2(\mathbb{R}^+)$

pro $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^2(\mathbb{R}^+)$, $\|\varphi'\|_\infty$, $\psi \in \mathcal{D}(P)$

$$\int_{\mathbb{R}^+} \overline{\varphi}\, \psi'\, dx = \left[\overline{\varphi}\psi\right]_0^\infty - \int_{\mathbb{R}^+} \overline{\varphi'}\, \psi\, dx$$

$$\Rightarrow (\varphi, P\psi) = (P\varphi, \psi) + \underbrace{\left[\overline{\varphi}\psi\right]_0^\infty}_{=0}$$

$= 0$ protože $\psi(0) = 0$ a $\lim_{x \to \infty} \psi(x) = 0$

$\mathcal{D}(P) \subset C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^2(\mathbb{R}^+) \Rightarrow P$ symetrický ale ne samosdružený protože $\mathcal{D}(P^*) \not\subset \mathcal{D}(P)$

1) 3. $\varphi \in \mathcal{S}((a,b))$, $\psi \in \mathcal{D}(P)$

$$(\varphi, P\psi) = i\int_a^b \overline{\varphi}\,\psi'\,dx = \left[i\overline{\varphi}\psi\right]_a^b - i\int_a^b \overline{\varphi}'\,\psi\,dx = \left[i\overline{\varphi}\psi\right]_a^b + (P\varphi, \psi)$$

potřebujeme aby $\left[i\overline{\varphi}\psi\right]_a^b$ bylo 0

$$\overline{\varphi}(b)\psi(b) \overset{!}{=} \overline{\varphi}(a)\psi(a)$$

$\psi \in \mathcal{D}(P)$, $\alpha\psi(a) = \psi(b)$

$$\alpha\overline{\varphi}(b)\psi(a) \overset{!}{=} \overline{\varphi}(a)\psi(a)$$

$\psi(a) \neq 0$

$$\overline{\alpha\varphi(b)} \overset{!}{=} \overline{\varphi(a)}$$

$$\overline{\alpha}\varphi(b) = \varphi(a)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} \overset{!}{=} \overline{\alpha}$$

P samosdružený pokud $|\alpha| = 1$

$\varphi(a) = 0 \Rightarrow \varphi(b) = 0 \Rightarrow$ žádná podmínka na φ

2) pro danou Borelovskou množinu $M \subset \mathbb{R}$ zavedeme $E(M)$ $\forall \psi \in L^2((a,b))$ a s.v. $x \in (a,b)$

$$(E(M)\psi)(x) := \chi_M(x)\,\psi(x)$$

ukážeme, že $E(M)$ projektorová míra na $\mathbb{R}$

$E(M)$ projektor

$$(E(M)(E(M)\psi))(x) = \chi_M(x)\chi_M(x)\,\psi(x) = \chi_M^2(x)\,\psi(x) = \chi_M(x)\,\psi(x) = (E(M)\psi)(x)$$

$\Rightarrow (E(M))^2 = E(M)$ tzn. $E(M)$ projektor

$M, N \subset \mathbb{R},\ M \cap N = \emptyset :\ \chi_{M\cup N} = \chi_M + \chi_N \quad \Rightarrow E(M \cup N) = E(M) + E(N)$

pokud $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ disjunktní systém $\Rightarrow \chi_M(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \chi_{N_n}(x) \qquad N_n := \bigcup_{n=1}^{n} M_n$

použitím dominantní konvergence (Lebesgueova věta):

$$\lim_{n\to\infty} \|(E(M) - E(N_n))\psi\| = 0 \qquad \forall \psi \in \mathcal{H}$$

$$E(M) = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} E(N_n) = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} E(M_n)$$

zřejmě $E(\mathbb{R}) = I$

$\Rightarrow E(M)$ projektorová míra tzn.:
1) $E(M)$ projektor $M \subset \mathbb{R}$
2) $E(\mathbb{R}) = I$
3) pro disjunktní systém M_n $\quad E(\bigcup_n M_n) = \sum_n E(M_n)$

pro náš případ $E(M) = E(M \cap (a,b))$

$\mu_\psi(\cdot) := (\psi, E(\cdot)\psi)$

$\forall \psi \in L^2((a,b))$ a $M \in \mathcal{R}$

$$\mu_\psi(M) = \int_a^b \chi_M(x)\,|\psi(x)|^2\,dx = \int_M \chi_{(a,b)}(x)\,|\psi(x)|^2\,dx$$

$$(\psi, \tau\psi) = \int_a^b x\,d\mu_\psi(x) = \int_a^b x\,|\psi(x)|^2\,dx = (\psi, Q\psi) \qquad \tau(f) = \int f\,dE^{(\mathcal{B})} \quad (\mathcal{B})\text{ míra}$$

protože rovnost výše platí $\forall \psi \Rightarrow \tau(I) = Q$

z faktu, že obor hodnot Q je ~~přesně~~ $[m_Q, M_Q]$ ($m_Q = a$, $M_Q = b$) dostaneme $E((-\infty, m_Q)) = E(M_Q, \infty) = 0$

a zjistíme, že $E(M)$ je hledaná spektrální míra

3) C kompaktní $\Leftrightarrow$ $\overline{CB_1(0)}$ kompaktní (obraz každé omezené množiny je prekompaktní)

$\Rightarrow$: sporem, $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$; $x_n \xrightarrow{w} x \wedge \|Cx_n - Cx\| \not\to 0$

$Cx_n =: y_n$

máme $\|Cx - y_k\| \geq \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ (1)

y_n omezená množina v prekompaktní množině $\Rightarrow \exists$ hromadný bod bez. $y_{n_k} \to y$

(M kompaktní $\Leftrightarrow \forall$ nekonečná podmnožina M má hromadný bod)

$y_{n_k} \to \tilde{y} \overset{y_n \xrightarrow{w} y}{\Longrightarrow} y_{n_k} \to y$ (2) (protože $y_{n_k} \to \tilde{y} \Rightarrow y_{n_k} \xrightarrow{w} \tilde{y}$ pokud $y_n \xrightarrow{w} y \Rightarrow \tilde{y} = y$)

$x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow x_{n_k} \xrightarrow{w} x \Rightarrow Bx_{n_k} \xrightarrow{w} Bx \quad \forall B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

spor (2) a (1) $\quad Cx_{n_k} \to \tilde{y}$ C a kompaktní $\quad Cx_{n_k} \xrightarrow{w} Cx \quad \tilde{y} = Cx$ spor s $\|Cx_n - Cx\| \geq \varepsilon$

$\Leftarrow$: mám $x_k \xrightarrow{w} x \Rightarrow Cx_n \to Cx$

chceme M omezená $\Rightarrow \overline{CM}$ kompaktní

$x_k \subset M \Rightarrow \mathcal{H}$ reflexní $\Rightarrow \exists x_{n_k} \xrightarrow{w} x \Rightarrow Cx_{n_k} \to Cx$ tedy Cx_k má hromadný bod

$\Rightarrow \overline{CM}$ kompaktní

4) nechť $T \in K(X,Y)$

pak $S_n T \in F(X,Y)$ a stačí ukázat $\|S_n T - T\| \to 0$

zvolme libovolné $\varepsilon > 0$ a $K := \sup \|S_n\| < \infty$

T kompaktní $\Rightarrow$ ∃ konečně mnoho y_j, $j \in \{1,\dots,n\}$ takových, že $\overline{T(B_X)} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{ y \in Y : \|y - y_i\| < \varepsilon \}$

ať $\|S_n y - y\| \to 0$ najdeme N takové, že $\forall n > N$ $\|S_n y_i - y_i\| < \varepsilon$ $\forall i \in \{1,\dots,n\}$

$\forall x \in B_X, n \geq N$: zvolím $j \in \{1,\dots,n\}$ $\|Tx - y_j\| < \varepsilon$

pak
$$\begin{aligned}\|S_n T x - Tx\| &\leq \|S_n(Tx - y_j)\| + \|S_n y_j - y_j\| + \|y_j - Tx\| \\ &\leq K\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \\ &\leq (2+K)\varepsilon\end{aligned}$$

$\Rightarrow \|S_n T - T\| \to 0$