

KF - Neomezené operátory - shrnutí

pro dále: $\mathcal{H}$ - komplexní Hilbertův prostor

$A: \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ lineární, $\mathcal{D}(A)$ hustý v $\mathcal{H}$ ($\Leftrightarrow A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$)

přím.: 1) $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$

existují $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), A \notin \mathcal{B}(\mathcal{H})$

př.: $Q\psi := x\psi(x), \mathcal{D}(Q) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\varphi_n = (2(2n)!)^{-\frac{1}{2}} x^n e^{-|x|^2/2}$$

$$\|Q\varphi_n\|^2 = (2n+1)(2n+2)$$

2) neomezený operátor - nelze rozšířit na celý $\mathcal{H}$ (př.: $x_n \text{ only} \nRightarrow Ax_n \text{ only}$)
- není spojitý

$$\text{dk.: } n \|x_n\| = 1 \quad Ax_n \rightarrow \infty \Rightarrow y_n \rightarrow 0 \quad Ay_n \nrightarrow 0$$

3) viz FA: uzavřený op na celém $\mathcal{H}$ spojitý $\Rightarrow$ omezený

Def: sdružený operátor: $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Pak A^* (sdružený op A) je definován takto:
pokud pro $\phi \in \mathcal{H} \exists \phi^*$ takové $\langle \phi, A\psi \rangle = \langle \phi^*, \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow \phi \in \mathcal{D}(A^*), A^*\phi = \phi^*$

Pozn.: lze ukázat, že ϕ^* má být nejvýše jeden

$$\text{dk.: } \text{jestliže } \langle \phi^*, \psi \rangle = \langle \tilde{\phi}^*, \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(A)$$

$$\Rightarrow \langle \phi^* - \tilde{\phi}^*, \psi \rangle = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow \langle \phi^* - \tilde{\phi}^*, \psi \rangle = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{H} = \overline{\mathcal{D}(A)}$$

2) k důkazu je vidět, že A^* je dobře definován pouze pokud A hustě def.
př.: A^{**} dobře definováno pouze pokud A^* hustě def. (není vždy)

V: $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, potom:

a) T^* je lineární a $\forall x \in \mathcal{D}(T)$ a $y \in \mathcal{D}(T^*) : (y, Tx) = (Ty^*, x)$

b) $\ker T^* = (\text{Ran } T)^\perp \Rightarrow \ker T^*$ uzavřený podprostor

c) $S \supset T \Rightarrow S^* \subset T^*$

(*)

Přímá vlastnost omezených operátorů pro neomezené nepřít. Lineární $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$
simplifikuje $A+B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ a $A \cdot B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

$T \in \mathcal{L}(X)$ podle Plat:

a) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$

b) $T^* \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow T^{**} \supset T$

c) if T invertibil' a $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ potom je T^* invertibil' a $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$

d) if $S \in \mathcal{L}(X)$ a $T+S \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow (S+T)^* \supset S^*+T^*$, rovnost pouze pokud S a T ortogonální

e) if $S \in \mathcal{L}(X)$ a $ST \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow (TS)^* \supset S^*T^*$ a rovnost pouze $T \in \mathcal{B}(X)$

ur: 1) $T^{**} = T \Leftrightarrow T$ uzavřený a $T \in \mathcal{L}(X)$

2) v e) $T \in \mathcal{B}(X) \Rightarrow TS \in \mathcal{L}(X)$ ale $S \in \mathcal{B}(X) \nRightarrow (TS)^* = S^*T^*$

$A \in \mathcal{L}(X)$ symetrický $\Leftrightarrow A \subset A^*$ ur: $(y, Ax) = (Ay, x) \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(A)$

$A \in \mathcal{L}(X)$ samosdružený $\Leftrightarrow A = A^*$ ur: A symetrický a $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$

maximální soubor symetrických resp. samosdružených matic $\mathcal{L}_s(X), \mathcal{L}_{sa}(X)$

ur: 1) $\mathcal{L}_s(X) \supset \mathcal{L}_{sa}(X)$

2) pro uzavření operátorů platí symetrický, samosdružený a hermitovský splývají

$A \in \mathcal{L}_s(X)$ každý $A' \in \mathcal{L}_s(X)$ takový, že $A \subset A'$ je symetrický rozšíření

$A \in \mathcal{L}_s(X)$ maximální $\Leftrightarrow$ není možné najít sym. rozšíření ($A \subset A' \Rightarrow A = A'$)

ur: $A \subset A' \subset A'^* \subset A^*$

uzavřený operátor

$T \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow T^*$ uzavřený

ur: $\{y_n\} \subset \mathcal{D}(T^*)$ takový, že $T^* y_n \rightarrow u$

$\forall x \in \mathcal{D}(T) : (y_n, Tx) = (T^* y_n, x) \Rightarrow (y, Tx) = (u, x) \Rightarrow y \in \mathcal{D}(T^*), u = T^* y$

1) každý sym. operátor má uzávěr. Každý s.a. op. je uzavřený ($A \in \mathcal{L}_s(X) \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{L}_s(X)$)

$\exists A \subset A^* = \bar{A}^* \Rightarrow \exists \bar{A} \quad A \subset \bar{A} \subset A^*$

$y \in \mathcal{D}(\bar{A}) \Rightarrow \exists x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \quad Ax_n \rightarrow \bar{A}x, Ay_n \rightarrow \bar{A}y \quad (y_n, Ax_n) = (Ay_n, x_n) \text{ lim přechodem } (y, \bar{A}x) = (\bar{A}y, x)$
 $= A^* = \bar{A}^* \Rightarrow A$ uzavřený

obecně komplikovanější $A \in \mathcal{L}(X) \nRightarrow$ existenci $\bar{A}$
 uvažujme pro normovaný operátor je analoga spříklivost rozšířením
 obecně $\mathcal{D}(\bar{T}) \neq X$ pro $T \in \mathcal{L}(X)$

$\forall: T \in \mathcal{L}(X)$ polí $\bar{T}$ existuje právě tehdy, když T^* je hustě definovaný
 Pokud je hustě splněno:

$$a) T^{**} = \bar{T}$$

$$b) (\bar{T})^* = T^*$$

$\forall: T = \bar{T} \in \mathcal{L}(X)$ potom:

$$a) \lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(T^*)$$

$$b) R_T(\mu)^* = R_{T^*}(\bar{\mu}) \text{ pro každý regulární bod } T \text{ a } \forall \mu \in \rho(T)$$

$\forall: T \in \mathcal{L}_c(X)$, potom T^*T je hustě definovaný s.d. operátor a pro $D := T|_{\mathcal{D}(T^*T)}$ platí $\bar{D}_0 = T$

Pozn.: $T \in \mathcal{L}_c(X) \Rightarrow T^* \in \mathcal{L}_c(X)$ a $T^{**} = T \Rightarrow$ lineární T a T^* se vzájemně
 2) aktivují, t.j. pro $T \in \mathcal{L}_c(X)$ je $\mathcal{D}(T^*T)$ a $\mathcal{D}(TT^*)$ husté v X

(* $\forall$): pro $A^* = \text{Ran}(A)^\perp$ $A \in \mathcal{L}(X)$

$$\text{důk.: } A^* \varphi = 0 \Leftrightarrow (A^* \varphi, \psi) = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(A) \Leftrightarrow \langle \varphi, A\psi \rangle = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(A) \Leftrightarrow \varphi \in \text{Ran}(A)^\perp$$

Normální operátory a s.d.

Def.: T lin. op. je normální $\Leftrightarrow T \in \mathcal{L}(X)$, $T = \bar{T}$ a $TT^* = T^*T$
 analogicky s.d. normální operátory nazýváme $\mathcal{L}_n(X)$

$$\text{Pozn.: } 1) \mathcal{L}_a(X) \subset \mathcal{L}_n(X) \subset \mathcal{L}_c(X)$$

2) v def. implicitní podmínka $\mathcal{D}(TT^*) = \mathcal{D}(T^*T)$ - komplikované k ověření

$\forall: T \in \mathcal{L}(X)$ T je normální $\Leftrightarrow \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$ a $\forall x \in \mathcal{D}(T): \|Tx\| = \|T^*x\|$

Pozn.: 3, $\forall T \in \mathcal{L}_n(X)$ hustý S t.j. $T \subset S$, $S \in \mathcal{L}_n(X) \Rightarrow T = S$

$$\text{důk.: } \mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(S^*) \subset \mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T)$$

$T \in \mathcal{L}_n(X)$ jeor následující podmínky ekvivalentní:

- 1) $x \in G(T)$
- 2) $\inf \{ \| (T - \lambda)x \| : x \in D(T), \|x\|=1 \} = 0$
- 3) $\exists x_n \in D(T), \|x_n\|=1 : (T - \lambda)x_n = 0$
- 4) $\text{Ker}(T - \lambda) \neq \{0\}$

Ukážeme samosdruženost

$B : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \quad B\psi := -\Delta\psi$

B symetrická protože $\forall \varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$(\varphi, B\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(-\Delta\psi) dx \stackrel{\text{2x po částech}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} -\Delta\varphi \psi dx = (B\varphi, \psi)$$

protože $A : L^2(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \quad A\psi := -\Delta\psi$

symetrická kvůli tomu, že a faktor $\overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}^{L^2} = H^2(\mathbb{R}^n)$

je vidět, že obojí symetrické, samosdruženost komplexování

$A \in \mathcal{L}_s(X)$ máme a protože samosdruženým je také $\bar{A} \in \mathcal{L}_s(X)$

$A \in \mathcal{L}_s(X)$. Pak protože samosdruženosti je podprostor $D \subset D(A)$ platíže $A|_D$ je
a protože samosdruženým

1) A a protože samosdruženým, A' s.a. rovnice A platí $\bar{A}CA'$ tak. $A' = \bar{A}$ tedy
 $\bar{A}$ je jediný s.a. rovnice A

2) platí a opět a protože samosdruženým opět má být 1 rovnice

$A \in \mathcal{L}_s(X)$. Pak platí:

1) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \phi \in D(A) \quad \| (A - \lambda - i\mu)\phi \|^2 = \| (A - \lambda)\phi \|^2 + \| \mu\phi \|^2$

2) i) pokud $\text{Ker}(A - \mu_+) = \{0\}$ pro $\mu_+ \in \mathbb{C}_+$ platí $\mathbb{C}_+ \subset \rho(A)$

ii) pokud $\text{Ker}(A - \mu_-) = \{0\}$ pro $\mu_- \in \mathbb{C}_-$ platí $\mathbb{C}_- \subset \rho(A)$

3) $\| (A - \lambda - i\mu)\phi \|^2 = \langle (A - \lambda - i\mu)\phi, (A - \lambda - i\mu)\phi \rangle = \langle (A - \lambda)\phi, (A - \lambda)\phi \rangle +$

$$+2\operatorname{Re} \langle (A-\lambda)\varphi, -i\mu\varphi \rangle + \mu^2 \langle \varphi, \varphi \rangle = \| (A-\mu)\varphi \|^2 + \mu^2 \|\varphi\|^2$$

$$c = \langle (A-\lambda)\varphi, -i\mu\varphi \rangle = -i\mu \underbrace{\langle (A-\lambda)\varphi, \varphi \rangle}_{\in \mathbb{R}} \quad \langle (A-\lambda)\varphi, \varphi \rangle = \overline{\langle \varphi, (A-\lambda)\varphi \rangle} = \overline{\langle (A-\lambda)\varphi, \varphi \rangle}$$

kon.: c je imaginár a $\operatorname{Re} c = 0$

2) dokážem i). ii) analogicky

přidělujeme $\mu \in \mathbb{C}_+$: $\operatorname{Ker}(A-\mu_+) = \mathcal{H}$ (1)

$$\mu_1) \text{ můžeme } \|(A-\mu_+)\varphi\|^2 = \|(A-\operatorname{Re} \mu_+)\varphi\|^2 + |\operatorname{Im} \mu_+|^2 \|\varphi\|^2 \geq (\operatorname{Im} \mu_+)^2 \|\varphi\|^2$$

$$\text{tedy } \forall \varphi \in \mathcal{D}(A) \quad \|(A-\mu_+)\varphi\| \geq \operatorname{Im} \mu_+ \|\varphi\| \quad (2)$$

$$(A-\mu_+)\varphi = 0 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \varphi = 0 \quad \text{kon.: } A-\mu_+ \text{ je prosté}$$

$$\mu_1) \quad A-\mu_+ \text{ je na } \Rightarrow A-\mu_+ : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H} \text{ je bijekce}$$

$$\text{kon.: } \varphi \in \mathcal{D}(A) \Leftrightarrow \exists \psi \in \mathcal{H} : \varphi = (A-\mu_+)^{-1} \psi$$

$$\mu_2) \text{ dostáváme na } \varphi = (A-\mu_+)^{-1} \psi \text{ a dostaneme } \|(A-\mu_+)^{-1} \psi\| \leq \frac{1}{\operatorname{Im} \mu_+} \|\psi\|$$

$$\Rightarrow \mu_+ \in \rho(A) \text{ a } \|(A-\mu_+)^{-1}\| \leq \frac{1}{\operatorname{Im} \mu_+}$$

$$\text{resolventa odvíjí se od FA } \Rightarrow B_{\mu_+}(\operatorname{Im}(\mu_+)^{-1}) \subset \rho(A) \Rightarrow B_{\mu_+}(\operatorname{Im}(\mu_+)) \subset \rho(A)$$

$$\text{celá koule je podmnožinou } \rho(A) \text{ kon } y \in B_{\mu_+}(\operatorname{Im}(\mu_+)) \Rightarrow \operatorname{Ker}(A+y) = \{0\}$$

$$\text{a můžeme postup opakovat a dostaneme } B_y(\operatorname{Im} y) \subset \rho(A)$$

$$\text{kon dostaneme } \mathbb{C}_+ \subset \rho(A)$$

□

5 (kritérium samosherovnosti): $A \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$. Pak jsou následující ekvivalentní

$$1) A = A^*$$

$$2) \sigma(A) \subset \mathbb{R}$$

$$3) \operatorname{Ker}(A-\mu_{\pm}) = \{0\} \text{ pro } \mu_+ \in \mathbb{C}_+ \text{ a } \mu_- \in \mathbb{C}_- \text{ (jedno a jedno)}$$

$$4) A \text{ je normální a } \operatorname{Ker}(A^*-\mu_{\pm}) = \{0\} \text{ pro nějaké } \mu_+ \in \mathbb{C}_+ \text{ a } \mu_- \in \mathbb{C}_-$$

$$\text{Dk.: } 1) \Rightarrow 4) \Rightarrow 3) \Rightarrow 2) \Rightarrow 1)$$

$$1) \Rightarrow 4): A = A^* \Rightarrow A = \bar{A}$$

$$\operatorname{Ker}(A^*-\mu_{\pm}) = \operatorname{Ker}(A-\mu_{\pm}) = \{0\}$$

přímě a přídělní vztahy můžeme $A-\mu_{\pm}$ je prosté

1) $\ker(A^* - \bar{\alpha}_\pm) = \text{Ran}(A - \bar{\alpha}_\pm)^\perp \Rightarrow \overline{\text{Ran}(A - \bar{\alpha}_\pm)} = \mathcal{H}$
 shbi ldy ubírat, že $\text{Ran}(A - \bar{\alpha}_\pm)$ uzavřený
 necht' $y \in \text{Ran}(A - \bar{\alpha}_\pm)$ pak existuje $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(A)$ takm' $(A - \bar{\alpha}_\pm)\varphi_n \rightarrow y$ (3)
 $(A - \bar{\alpha}_\pm)\varphi_n$ konverguje $\Rightarrow \varphi_n$ konverguje (předchozí) $\Rightarrow \exists \varphi \varphi_n \rightarrow \varphi$ (4)
 A uzavřený (3), (4) $\Rightarrow \varphi \in \mathcal{D}(A)$ $A\varphi = y \Rightarrow y \in \text{Ran}(A - \bar{\alpha}_\pm)$
 $\Rightarrow \text{Ran}(A - \bar{\alpha}_\pm)$ uzavřený, shbi pro $(A - \bar{\alpha}_\pm)$

2) o předchozí vlt $\text{Ran}(A - \bar{\alpha}_\pm) = \mathcal{H} \Rightarrow \begin{cases} C_+ \subset \mathcal{S}(A) \\ C_- \subset \mathcal{S}(A) \end{cases} \Rightarrow \mathcal{S}(A) \subset \mathbb{R}$

1) $A \subset A^* \Rightarrow$ shbi ubírat $\mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{D}(A)$.
 necht' $\varphi \in \mathcal{D}(A^*)$ pak $(A^* + i)\varphi \in \mathcal{H}$
 $\text{Ran}(A + i) = \mathcal{H}$ $(A + i)$ ni inverzní $\Rightarrow \exists \eta \in \mathcal{D}(A)$ $(A^* + i)\varphi = (A + i)\eta = (A^* + i)\eta$
 $\Rightarrow \varphi - \eta \in \ker(A^* + i) = (\text{Ran}(A - i))^\perp \stackrel{A-i \text{ invertibil' }}{=} \{0\}$
 tzn.: $\varphi = \eta \in \mathcal{D}(A)$ □

redukibilita

redukibilita: lin op. T na $\mathcal{H}$ je redukibilní pokud existuje redukční projekce E
 takm', že: 1) $E\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T)$
 2) $E\mathcal{H}, (I-E)\mathcal{H}$ jsou T invariantní podprostory
 a oproti případně je T iredukibilní redukční rozklad $T = T_1 \oplus T_2$

kritérium redukibility: T redukční projekce $E \Leftrightarrow ET \subset TE$ tzn.: $E\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T)$ a
 $ETx = TE x \quad \forall x \in \mathcal{D}(T)$

komutativita komutativita: T lin op. na $\mathcal{H}$ a $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, T a B komutují pokud
 $BT \subset TB$ (tzn. $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T)$, $BTx = TBx \quad \forall x \in \mathcal{D}(T)$)

o 2 komutativní op. možná pro projekce obdobně. $A = \sum \lambda dE_\lambda(A), B = \sum \lambda dE_\lambda(B)$
 A, B komutují pokud $E_\lambda^A E_\mu^B = E_\mu^B E_\lambda^A \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Jenszovský lemma

motivace pro tensorové operátory

T_n lin op def $\mathcal{D}(T_n) \subset \mathcal{H}_n$ $n=1,2$

$$\forall [x, y] \in \mathcal{D}(T_1) \times \mathcal{D}(T_2) : T_2(x \otimes y) = T_1 x \otimes T_2 y$$

motivace: T_2 na $\mathcal{D}(T_1) \otimes \mathcal{D}(T_2)$ motivace $T_1 \otimes T_2$, novou Jenszovský lemma q. T_1, T_2

$$M \otimes N := \{x \otimes y : x \in M, y \in N\}_{\text{lin}}$$

$$(T_1 \otimes T_2) \left(\sum_j x_j \otimes y_j \right) = \sum_j T_1 x_j \otimes T_2 y_j \quad \forall x_j \in \mathcal{D}(T_1), y_j \in \mathcal{D}(T_2)$$

Pro: i když T_1, T_2 motivace $T_1 \otimes T_2$ nemá být motivace

$$\forall : T_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), n=1,2$$

$$1) T_1 \otimes T_2 \text{ musí být def. a platí } (T_1 \otimes T_2)^* \supset T_1^* \otimes T_2^*$$

$$2) T_n \text{ uzavřená} \Rightarrow \exists \overline{T_1 \otimes T_2} \text{ a } \overline{T_1 \otimes T_2} = (T_1 \otimes T_2)^{**} \supset T_1^{**} \otimes T_2^{**} = \overline{T_1} \otimes \overline{T_2}$$

$$\forall : S_n, T_n \text{ lib. lin op na } \mathcal{H}_n, n=1,2 \text{ platí}$$

$$(T_1 + S_1) \otimes T_2 = T_1 \otimes T_2 + S_1 \otimes T_2$$

$$T_1 \otimes (T_2 + S_2) = T_1 \otimes T_2 + T_1 \otimes S_2$$

$$T_1 S_1 \otimes T_2 S_2 \subset (T_1 \otimes T_2)(S_1 \otimes S_2)$$

Pokud S_2 invertibilní a pro $S_2 \subset \mathcal{D}(T_2)$ (nebo S_1^{-1} a pro $S_1 \subset \mathcal{D}(T_1)$ platí v
dobře platí rovnost

Pro: typický způsob pro $T_1 \otimes T_2$ lze ukázat např. pro T_n s.a. $T_1 \otimes T_2$ je projektivní

(*) $\forall$: kritéria projektivní samosdruženosti: $A \in \mathcal{L}_s(\mathcal{H})$. Pak jsou následující ekvivalentní

a) A je v projektivní samosdružení

$$b) \ker(A \pm i)^* = \{0\}$$

$$c) \ker(A \pm i) = \mathcal{H}$$