Katedra fyziky
Ing. Václav Potoček, Ph.D.
RNDr. Ing. Michal Jex, Ph.D.

LS2019/20
12.03.2020

Kvantová fyzika

4. cvičení

Cvičení 12:

Nechť $\mathscr{H}$ je komplexní Hilbertův prostor takový, že $\dim \mathscr{H} \geq 1$. Nechť P, Q jsou dva samosdružené operátory na $\mathscr{H}$ takové, že

$$(P\phi, Q\phi) - (Q\phi, P\phi) = \frac{1}{i}\|\phi\|^2$$

pro každé $\phi \in \mathcal{D}(P) \cap \mathcal{D}(Q)$. Ukažte, že

1. $\dim \mathscr{H} = \infty$,
2. Za předpokladu, že P a Q jsou omezené, P ani Q nemůže mít žádnou vlastní hodnotu.
3. P ani Q nemůže být omezený operátor.

Cvičení 13:

Nechť $-\Delta$ je operátor definovaný na $\mathcal{D}(-\Delta) = H^2(\mathbb{R}^n)$. Spočtěte $\sigma(\Delta)$.

Cvičení 14:

Nechť $\mathscr{H}$ je Hilbertův prostor a $S \in \mathscr{L}_{sa}(\mathscr{H}) \cap \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Nechť dále $W(S) := \{(x, Sx) | x \in \mathscr{H}, \|x\| = 1\}$. Ukažte, že $W(S) \subseteq \mathbb{R}$ a

$$\sigma(S) \subseteq [m, M] \subseteq [-\|S\|, \|S\|]$$

kde $m := \inf\{(x, Sx) | x \in \mathscr{H}, \|x\| = 1\}$ a $M := \sup\{(x, Sx) | x \in \mathscr{H}, \|x\| = 1\}$. Ukažte také, že $m, M \in \sigma(S)$ a $M = \|S\|$ či $m = -\|S\|$.

Cvičení 15:

Nechť $\psi \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Ukažte, že platí $\lim_{|h|\to\infty} \left\| \frac{\psi(x-h)}{x} \right\| = 0$.

Cvičení 16:

Nechť $\mathscr{H}$ je Hilbertův prostor a $W \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$ je stav. Ukažte následující:

1. $\mathrm{Tr} W^2 \leq 1$,
2. pokud $\dim \mathscr{H} = n$, poté $\mathrm{Tr} W^2 \geq \frac{1}{n}$,
3. předpokládejte, že E je ortogonální projektor takový, že $\mathrm{Tr}(EW) \neq 0$, poté
   a) $W' := \frac{EWE}{\mathrm{Tr}(EW)} \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$,
   b) pokud W je jednorozměrný projektor na $[\varphi]_\lambda$, $\|\varphi\| = 1$ poté W' je jednorozměrný projektor určený vektorem $\frac{E\varphi}{\|E\varphi\|}$.

Cvičení 17:

Předpokládejte, že na systému ve stavu $W \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$ měříme postupně pozorovatelné $A_1, \ldots, A_n$, a $E_j := E_{A_j}(\Delta_j)$. Dokažte, že

1. $w(\Delta_n, A_n; \ldots; \Delta_1, A_1; W) = \mathrm{Tr} W_n$, kde $W_n := E_n \ldots E_1 W E_1 \ldots E_n$,
2. stav systému po měření je $W' := \frac{W_n}{\mathrm{Tr} W_n}$
3. pokud $A_1 = \ldots = A_n = A$, poté $w(\Delta_n, A; \ldots; \Delta_1, A; W) = \mathrm{Tr}\left\{E_A\left(\cap_{j=1}^n \Delta_j\right) W\right\}$.