

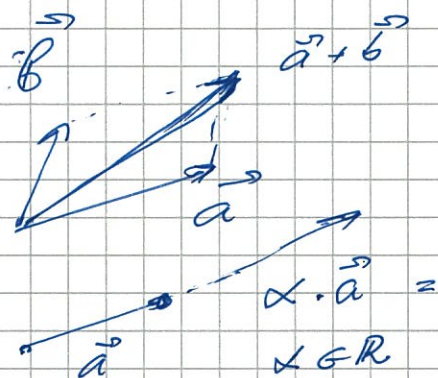
# Vektorná analýza

7

skalár  $a$ , vektor  $\vec{a}$ , (tenzor)  $T_{xy}$ ;  
1. rovin. 3. rovin.

Vektorový prostor nad tělesem  $(\mathbb{R})$

Vektor:

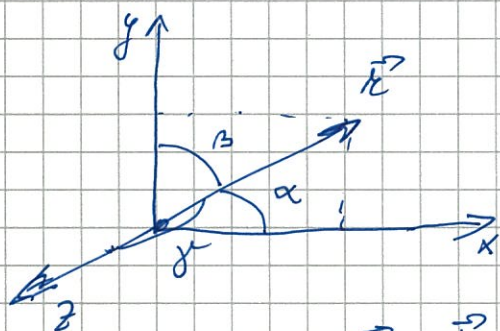


asociativní zákon  
 $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$$

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$$

souřadnice: S. S. aby se Fr dobře frčkovalo



$$\vec{r} = (r_x, r_y, r_z) = (x, y, z)$$

parametrizace

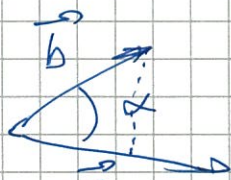
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

$$a_x = |\vec{a}| \cos \alpha, a_y = |\vec{a}| \cos \beta, a_z = |\vec{a}| \cos \gamma$$

$$\alpha \vec{a} = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z); |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

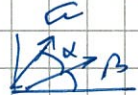
## Součetný vektor

1) Skalární:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$



(zobrazení  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ )

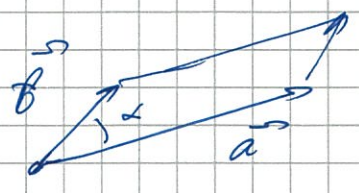
DE: obecně



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$



Vektory' součet - velikost plochy pravoúhelníka  
máti druhá vektor.



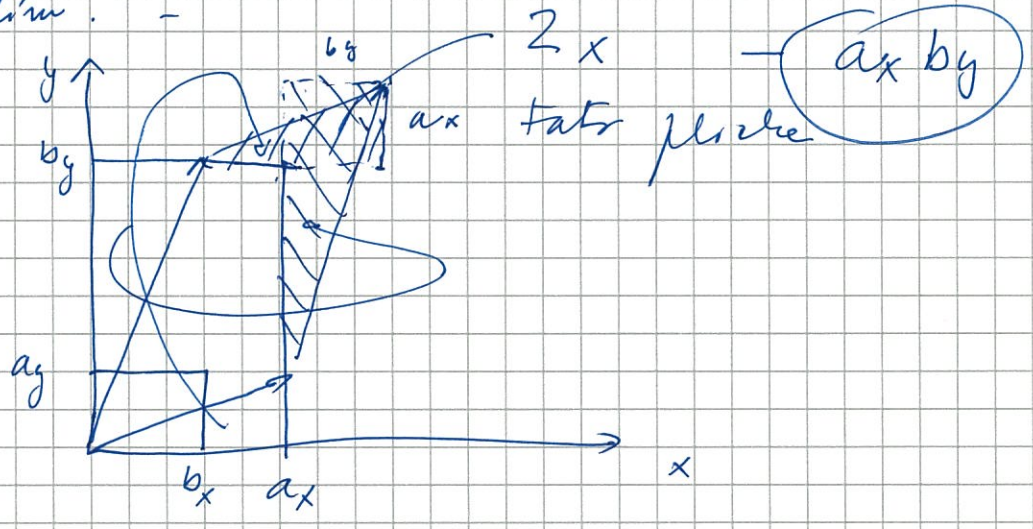
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha$$

ve 3-d  $\mathbb{R}^3$  jsou vektor.  
a definiuji směr jako pravoúhelníky.

V souřadnicích:

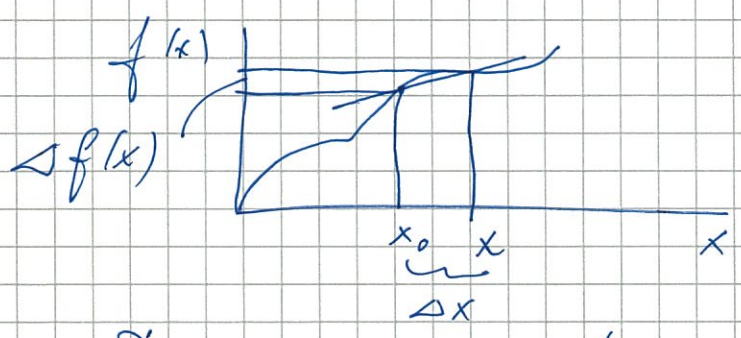
$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

ve 2. dim. -



V nerázitelné na souřadnicích

Derivace fce   Limita fce   Integrace fce



spojta' fce

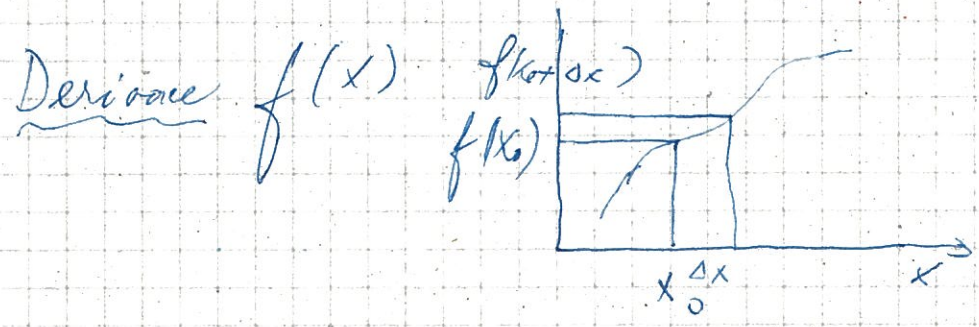
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad (f(x_0))$$

Derivace

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

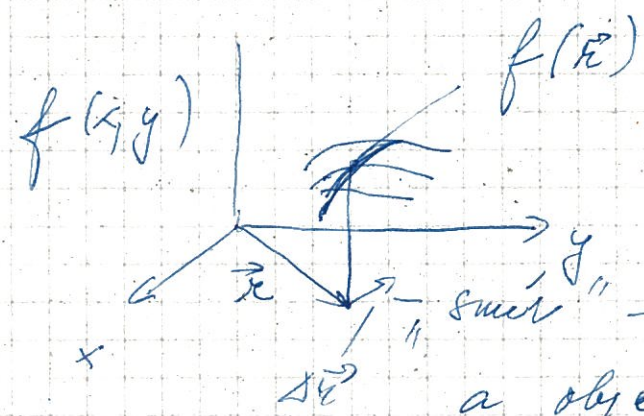


# Derivace a parciální derivace



$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x) \Big|_{x_0} = \frac{df}{dx} \Big|_{x_0}$$

Parciální derivace - je derivace ve směru  
u funkce více proměnných



"směr" - řez "funkce" ve směru  
a obyčejná derivace funkce  
na řezu - funkce jedné  
proměnné ve "směru".

$$\begin{aligned} \text{tj. } \lim_{|\Delta \vec{r}| \rightarrow 0} \frac{f(\vec{r} + \Delta \vec{r}) - f(\vec{r})}{|\Delta \vec{r}|} &= \lim_{|\Delta \vec{r}| \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left[ \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} + \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right] \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left[ \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} \frac{\Delta x}{|\Delta \vec{r}|} + \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{|\Delta \vec{r}|} \right] \end{aligned}$$



$$= \frac{\partial f}{\partial x} (\vec{e}_{\Delta \vec{r}})_x + \frac{\partial f}{\partial y} (\vec{e}_{\Delta \vec{r}})_y \leftarrow y\text{-složka } \vec{e}_{\Delta \vec{r}}$$

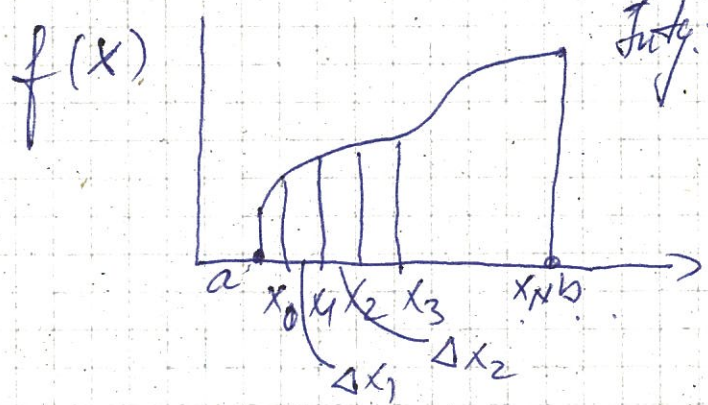
$\nearrow$  parc. derivace ve směru  $x$   
 $\nwarrow$   $x$ -složka jednotkového vektoru ve směru  $\Delta \vec{r}$   
 $\nwarrow$  parc. derivace ve směru  $y$

$$= \left( \frac{\partial f}{\partial x} \mid \frac{\partial f}{\partial y} \right) \left( \frac{\Delta x}{|\Delta \vec{r}|} \mid \frac{\Delta y}{|\Delta \vec{r}|} \right)$$

$$\text{grad } f \cdot \vec{e}_{\Delta \vec{r}}$$

mají-li stejný  
 směr = maximální  
 jsou-li na sebe  
 kolmé = 0

## Integrál



Integ. = plocha pod křivkou  

$$S \approx \sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x_i$$
  
 zjednodušíme  $\Delta x_i \Rightarrow$   
 zpřesníme výsledek

$$S = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \sum_{i=1}^N \Delta x_i = b-a \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

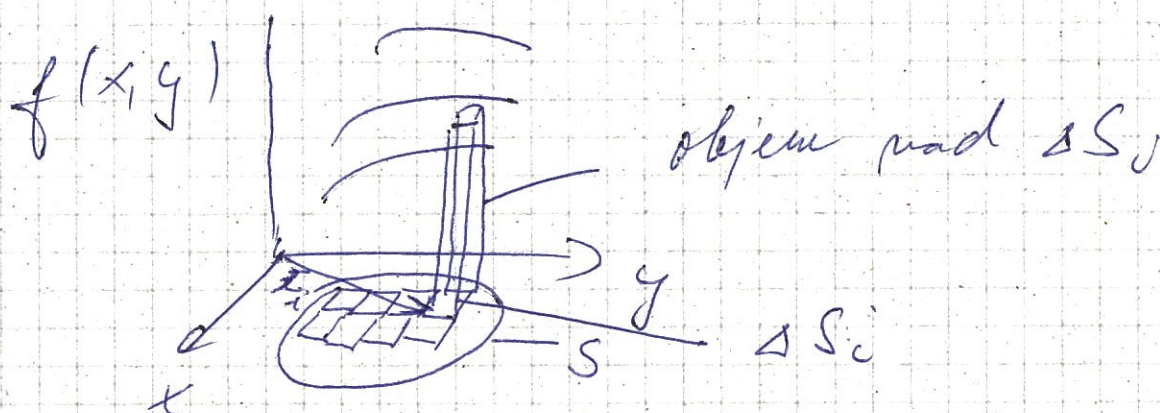
Symbol pro limitu

Integrál na přímce;  $f(x, y) \rightarrow f(x)$  kde  $x$  je vzdálenost  
 z Integrálu na přímce? bodu přímky od "počátku"  
 na každém bodě křivky známe  $f(\cdot)$ ; křivku nataheme do měřítka.



je-li v prstom zkroucená křivka - (5)  
 - natahne do přímky, v každém bodě  
 známe funkční hodnotu a spočteme  
 opět plochu pod křivkou.

Integrál "nad" rovinnou



objem nad plochou  $S$  - součet  
 obj. malých "kanálků"

$$S \approx \sum_{i=1}^N f(\vec{r}_i) \Delta S_i$$

$$S = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \sum_{i=1}^N \Delta S_i = S \\ \max \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N f(\vec{r}_i) \Delta S_i := \int_S f(\vec{r}_i) dS$$

Je-li dána funkce na zkroucené  
 a zprolýchvané ploše, spočteme stejnou  
 "vednost"



# Vektorové pole, tok vektoru plochou

(4)

a)  $\vec{v} = \text{konst}$   $S$ -plocha  $\Phi = v \cdot S$

musíme vždy počítat plochu  $\vec{v}$

b)  $\vec{v} = \text{konst}$   
 $S$  natočeno o úhel  $\alpha$

$$\Phi = v \cdot S \cdot \cos \alpha =$$

$$= \vec{v} \cdot \vec{S} \quad \vec{S} = S \cdot \vec{e}$$

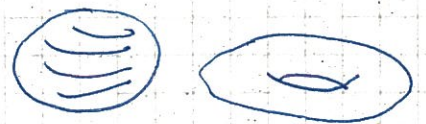
c)  $\vec{v} \neq \text{konst}$

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \cdot \Delta \vec{S}_i$$

$$\Phi = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \sum \Delta S_i = S \\ \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \cdot \Delta \vec{S}_i = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

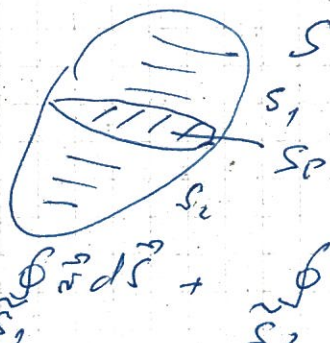
orientace libovolná

d) uzavřená plocha  
 směr ven (+)  
 směr dovnitř (-)



$$\Phi = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

rozdělení plochy na dva



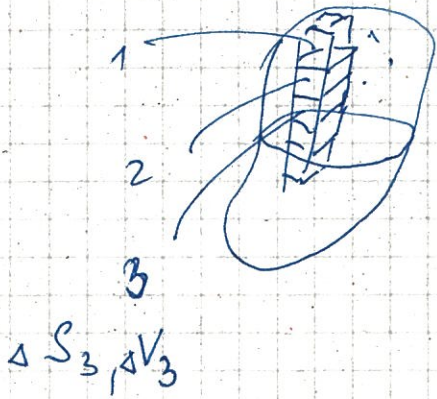
$$S = S_1 + S_2$$

$$\vec{S}_1 = S_1 + S_2$$

$$\Phi = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_1} \vec{v} \cdot d\vec{S} + \oint_{S_2} \vec{v} \cdot d\vec{S}$$



(5)

další dělení

$$\Phi = \sum_{k=1}^N \oint_{\Delta S_k} \vec{v} \cdot d\vec{S} =$$

vydělíme  $\Delta V_k$ 

$$= \sum_{k=1}^N \frac{\oint_{\Delta S_k} \vec{v} \cdot d\vec{S}}{\Delta V_k} \Delta V_k$$

lokální chování:

$$\Phi = \lim_{\substack{\Delta S_k \rightarrow 0 \\ \Delta V_k \rightarrow 0 \\ \sum \Delta V_k = V}} \sum_{k=1}^N \frac{\oint_{\Delta S_k} \vec{v} \cdot d\vec{S}}{\Delta V_k} \Delta V_k =$$

$$= \int_V \lim_{\substack{\Delta V_k \rightarrow 0 \\ \Delta S_k \rightarrow 0}} \left( \frac{\oint_{\Delta S_k} \vec{v} \cdot d\vec{S}}{\Delta V_k} \right) dV =$$

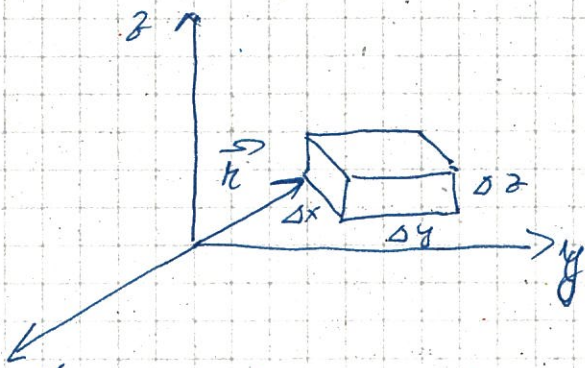
$$= \int_V \operatorname{div} \vec{v} \, dV$$

$$\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{v} \, dV$$

objem rovnice  
plochyGaussova  
veta



(6)



$$\vec{r} = (x, y, z)$$

$$\Delta \Phi = \Delta \Phi_x + \Delta \Phi_y + \Delta \Phi_z =$$

$$\Delta \Phi_z \approx \begin{array}{c} \uparrow v_z(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \Delta z) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \\ \text{[Diagram of a rectangular volume element]} \\ \downarrow -v_z(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z) \end{array}$$

$$\frac{d\Phi_z}{dV} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left[ \frac{v_z(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \Delta z) - v_z(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z)}{\Delta z} \right] \Delta x \Delta y$$

$$= \frac{\partial v_z}{\partial z} dV$$

$$\Phi = \lim \sum_i \Delta \Phi_i = \iiint_V d\Phi = \iiint_V \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV$$

$$= \iiint_V \text{div } \vec{v} dV$$

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

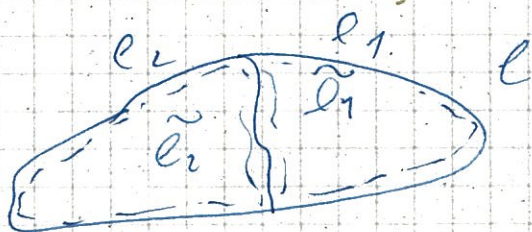
$$\text{def: } \vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\text{div } \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$$

$$\text{grad } f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \vec{\nabla} f$$

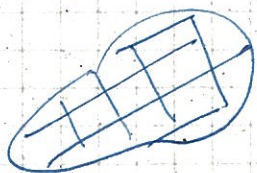


(7)



$$\Gamma = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_{l_1} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_{l_2} \vec{v} \cdot d\vec{l} =$$

$$= \oint_{l_1} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \oint_{l_2} \vec{v} \cdot d\vec{l} =$$



$$= \sum_i \oint_{l_i} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N \frac{\oint_{l_i} \vec{v} \cdot d\vec{l}}{\Delta S_i} \cdot \Delta S_i =$$

dělíme dále a dále

$$= \lim_{\substack{\Delta S_i \rightarrow 0 \\ \sum \Delta S_i = S}} \sum_{i=1}^N \frac{\oint_{l_i} \vec{v} \cdot d\vec{l}}{\Delta S_i} \Delta S_i =$$

až jsou všechny plochy "rovinné", tj. všechny  $d\vec{l} = \vec{e}_T \cdot dl$  leží v jedné rovině, přičemž plocha  $\Delta S_i$ ;  $\Delta S_i \perp d\vec{l}$

def:  $\text{rot } \vec{v} = \vec{e}_T \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{l_i} \vec{v} \cdot d\vec{l}}{\Delta S_i}$  ve směru

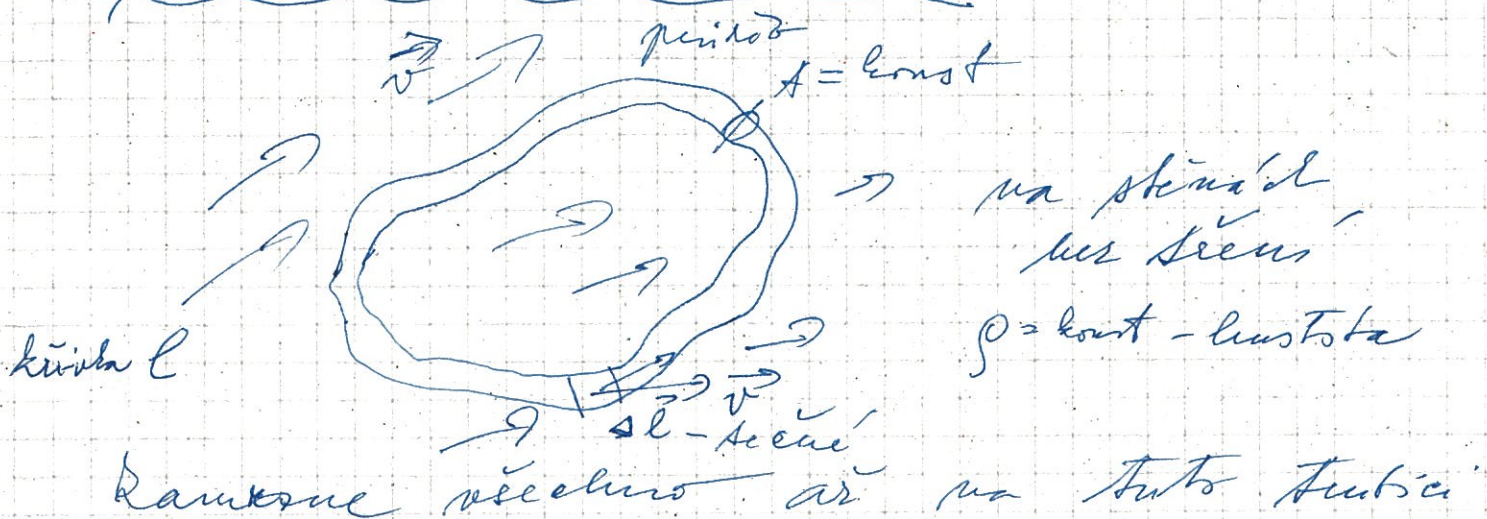
$= \int_S \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{S}$  v němž je maximální

Stokesova věta  $\Gamma = \oint_l \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{S}$



# Cirkulace a rotace

(8)



lybust  $m \cdot \vec{v}$  ; v křivce?

$$\Delta p(\vec{r}_{dl}) = A \rho \cdot v \cdot dl \cdot \cos \alpha =$$

ne křivce  
křivce

$$= A \rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

a v křivce?

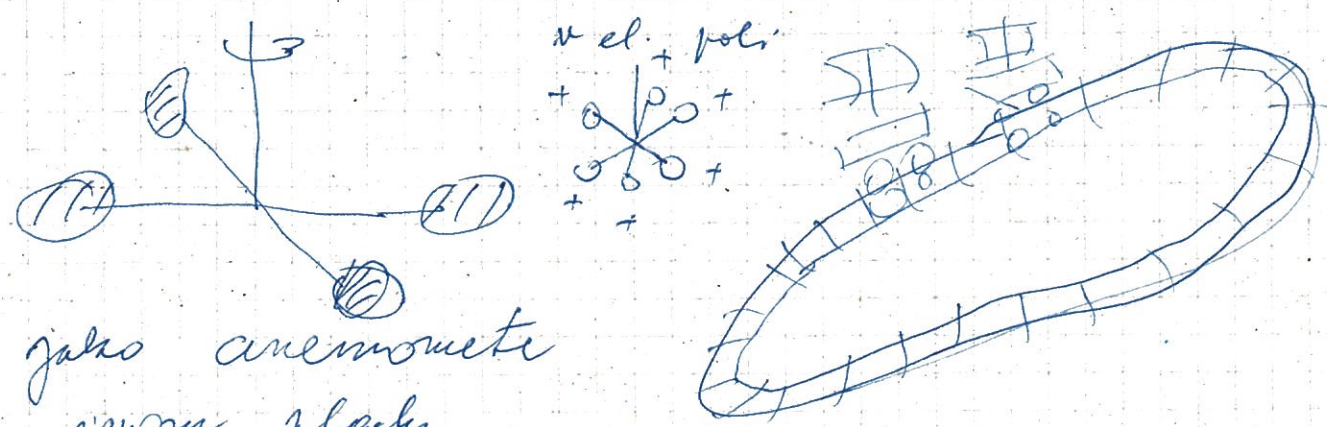
$$p = \sum \Delta p = A \rho \sum \vec{v}_i \cdot d\vec{l}_i =$$

$$A \rho \cdot \Gamma = A \rho \langle \vec{v} \rangle l$$

střední  
hustota

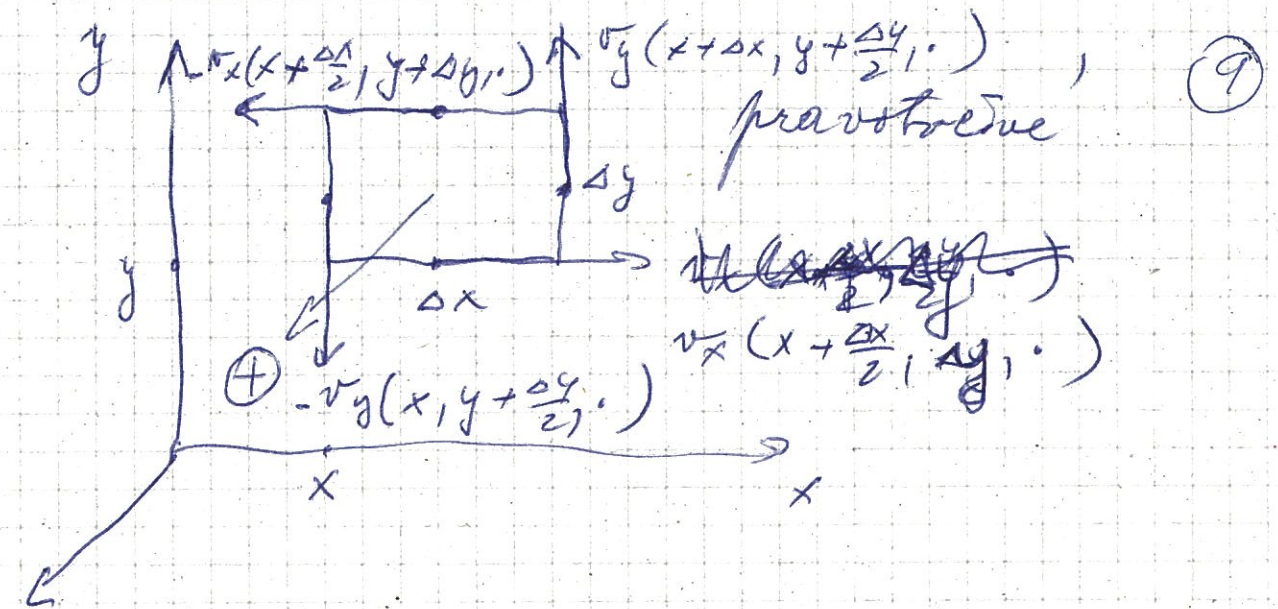
$\Gamma$  - cirkulace

$$\Gamma = \lim_{\substack{\Delta l_i \rightarrow 0 \\ \sum \Delta l_i = l}} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \cdot d\vec{l}_i = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l}$$



jako anemometre  
jednom plochy  
rovinné





$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \left[ v_y(x + \Delta x, y + \frac{\Delta y}{2}, \cdot) - v_y(x, y + \frac{\Delta y}{2}, \cdot) \right] \Delta x \\
 &\quad + \left[ v_x(x + \frac{\Delta x}{2}, y, \cdot) - v_x(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \Delta y, \cdot) \right] \Delta y
 \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{(\Gamma)_z}{\Delta S_z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{(\Gamma)_z}{\Delta x \Delta y} = \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

$$= \left( \text{rot } \vec{v} \right)_z$$



## Taylorův rozvoj funkce

Vyjadřujeme funkci jako  $\infty$  (nekonečné) řady.  
funkce má  $\forall$  derivace.

Ověřit: Musí mít  $\forall$  derivace stejné

$$f(x) -$$

Taylorův rozvoj (v 0)

~~$$f(x) = f(0) + f'(0)x +$$~~

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 +$$

$$a_0 = f(0) ; a_1 = f'(0) ;$$

$$a_2 = \frac{1}{2} f''(0) ; a_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot f^{(3)}(0)$$

$$a_5 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot f^{(4)}(0) ; a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

Očekáváme odhad chyby pro  $n$ -členskou aproximaci.

ale v okolí 0,  $\forall$  pro malá  $x$   
platí,  $\sqrt[n]{n!} x \gg x^2 \gg x^3 \gg x^4 \dots$  a pokud  
funkce není divoká,  $\forall f^{(n)}(0) < K$   
pro  $x$  v okolí 0 dobře  
pouze několika členy.



Se udelet prví i v jiném řádku -  
- posunutí počátku do bodu.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \dots$$

a pro  $(x-x_0) \ll 1$

stačí nejlépe členy.



Specialu' teorij relativitety -

- yednaceu' elekticheskij a mag. d'ejij.

Itari' Bečko - jantur, listy slon,   
 (~600 p'ud k'itkem) magnetice

(1785) Coulomb - Coulombin zakon

Galvani 1786, Volta 1800 Cu | NaCl | Pb celove

1839 Gauss - elstat zakon

1843 Maxwell (1900 Hericid)   
 James Clerk Oliver

1888 Heitz - elimp. relay

Maxwell. k. ve valuv:

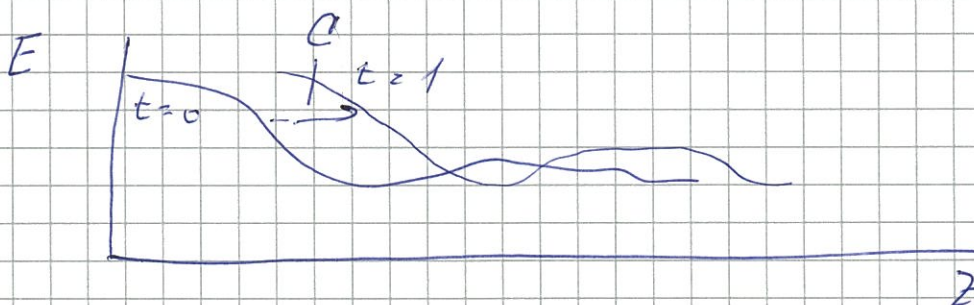
$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$\Rightarrow$  v 1. dimensional' poli' E

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

resen' -   
  $E(z \pm ct)$



Povinen' Galileiho principu ( $\vec{F} = m\vec{a}$ )   
  $\Delta(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}) = \frac{\partial^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\partial t^2} = 0$



Lorentz 1892 - 1904 Dilatace času, - Protrazení  
Entalace dle - Protrazení

1905 Einstein - dva postuláty:

1) ~~Relativita~~ <sup>Relativita</sup> fyzikálních dějů probíhají ve všech inerciálních souřadných soustavách podle stejných zákonů  $\Leftrightarrow$  Experimentálně prokázáno fyzikálních dějů nelze od sebe oddělit inerciální s. s.

2) Princip shledání rychlosti světla

Šetr se při něm vždy konstantní rychlostí  $c$ , která ~~ne~~ <sup>je</sup> nezávislá na pohybu zdroje.

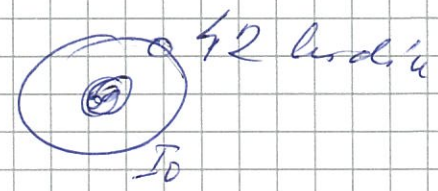
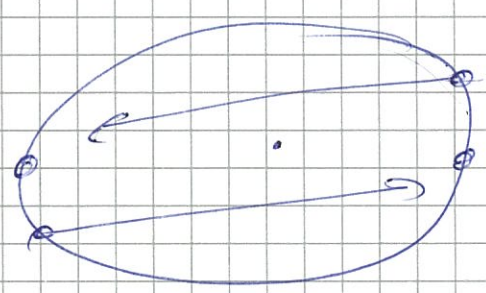
Měřená rychlost světla  $c = 299\,492,458 \text{ km/s}$   
od r. 1983 přesně

Dokaz: Galilei ~ 1610

dvě luny na Jupiteru - mic

Galilei - Io, Ganymed, Callisto  
Europa (Jupiter)

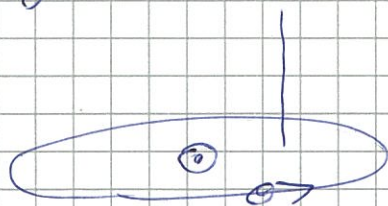
1646 Römer Olav



prodloužení  
a přesně periody  
 $c = 214\,300 \text{ km/s}$



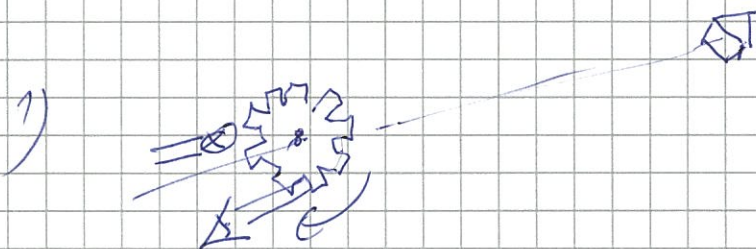
# 1828 Bradley - aberrace slavic



$$\tan \Delta \theta = \frac{v}{c}; \quad v = 30 \text{ km/s}$$

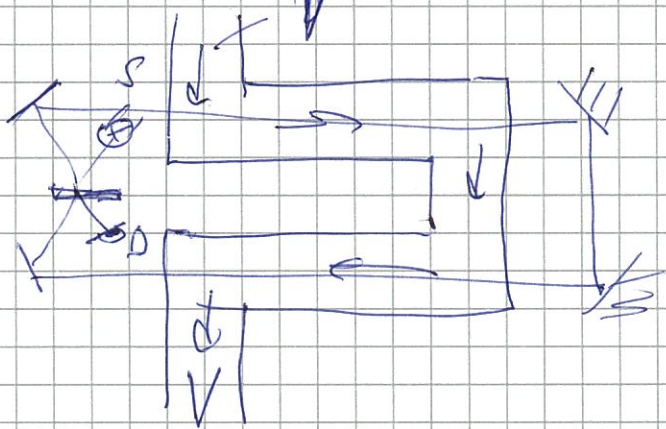
$$c = 299\,857 \text{ km/s}$$

## 1849 Fizeau Armand



100 zubu, mēni' šķīty ar spīklo žmītelo.  
313 275 km/s

## 2) slēdžu mēģe vārdon



indeks lūmen  $n = \frac{c}{v_0}$   
pēc šīs mēģes  
ne vārdē

izmēģē

$$v_1 = v_0 + (1 - \frac{1}{n^2})V$$

$$v_2 = v_0 - (1 - \frac{1}{n^2})V$$

3 relat. slē'daunē' pētēstē'

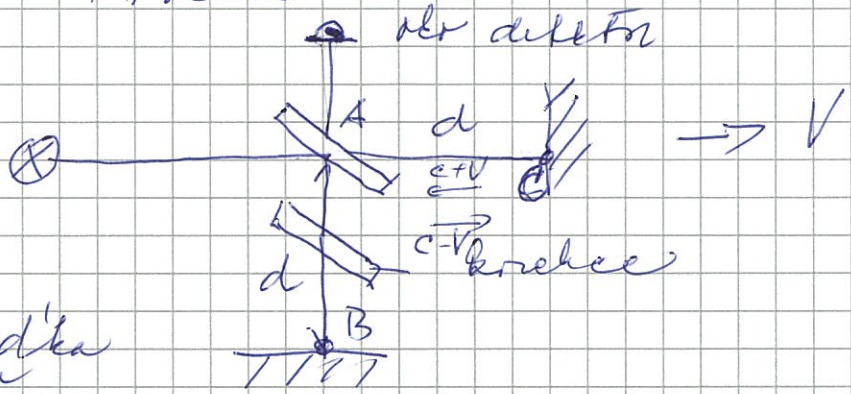
mēģē je slēdžu mēģē



# Michelson - Morley experiment 1887

(ne vidí je sníť skla'vamo, es ne valen  
 Jemí kalem slunce ~ 30 km/s (V)

mis'tr Fizeau



jako lod'ka  
 v proudu

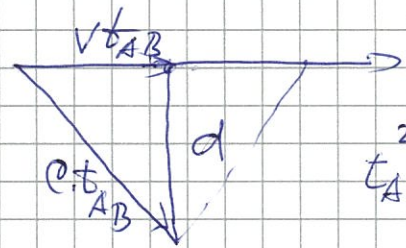
$$t_{ACA} = \frac{d}{c+V} + \frac{d}{c-V} = \frac{2dc}{c^2 - V^2} = \frac{2d}{c} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1}$$

Taylor

$$\approx \frac{2d}{c} \left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right) + O\left(\frac{V^4}{c^4}\right) \ll$$

$$t_{ABA} = 2t_{AB} =$$

$$= \frac{2d}{c} \left(1 - V^2\right)^{-\frac{1}{2}} \approx$$



$$t_{AB}^2 (c^2 - V^2) = d^2$$

Taylor

$$\approx \frac{2d}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2}\right)$$

Fate

$$\Delta\varphi = w(t_{ACA} - t_{ABA}) = w \frac{dV^2}{c^3}$$

při otáčení o 90° změna  $\Delta\varphi$  a  
 v experimentu  $d = 15m$  výsledek = 0

tj. kde by měly být největší  
 ale  $\Delta\varphi = 0!!$  dostanu Amory  
 \$ ether.

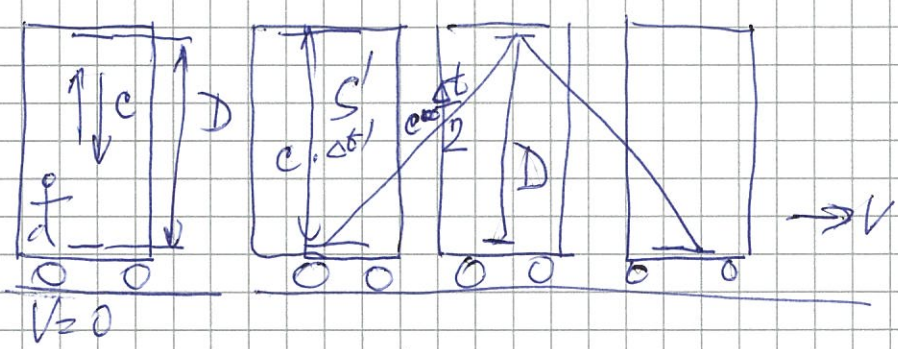


# Lorentz transformace

odhodíme oběma, ~~z~~ vyjde z brzdění rychlosti světla.

## 1) relativní dilatace času

( $V < c$   
ve vakuum,  
OTR - měřeno  
gravitací)



( $S$  na rychlosti  $V$  vůči  $S'$ )  $c \cdot \frac{\Delta t}{2}$   $D = c \cdot \frac{\Delta t'}{2}$

$V \cdot \frac{\Delta t}{2}$

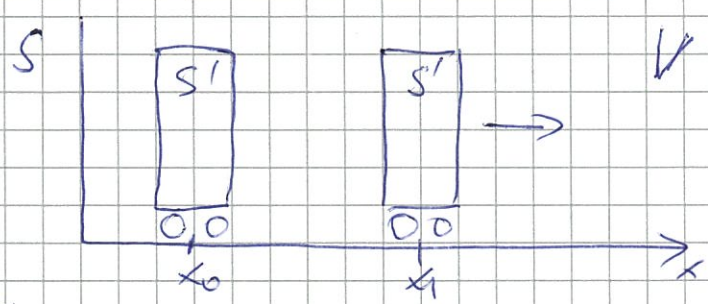
$$\left(c \cdot \frac{\Delta t}{2}\right)^2 = \left(V \cdot \frac{\Delta t}{2}\right)^2 + \left(c \cdot \frac{\Delta t'}{2}\right)^2$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t'$$

jeho 1 s v měř. S. S. uběhne za 1,2 s

Jako důkaz - měření muonu na povrchu země  
 $\tau \approx 2 \cdot 10^{-6} s$ ;  $c \cdot \tau \approx 600m$ , ale při  $\gamma = 0,998$   
 $\gamma \cdot \tau = 15$   
 $15 \cdot 600 = 9km$

## 2) Kontrakce délek



v S  $L = x_1 - x_0 = L_0$   
 v S'  $L' = V \cdot \Delta t' =$   
 $= V \cdot \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{L_0}{\gamma}$   
 $= L_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$

Za  $V(S' \rightarrow S) = -V(S \rightarrow S')$  ?

~~Uvažujeme~~ vezmeme bod ve druhé, dva body v měř. S.



Čas není absolutní, tj. máme  $x, t$  a  $x', t'$

Galileiho transformace:  $x_1 = x'_1 + vt$ ,  $x_2 = x'_2$ ,  $x_3 = x'_3$ ,  $t = t'$

Hledáme Lorentzovy:

$$x_4 = x$$

$$x = k(x' + vt')$$
 a  $x' = k(x - vt)$

a princip stálé rychlosti  $c$



stacionární, protože  $c$  je stálá

problém v počátku,  $t = t_0 = 0$

$$\left. \begin{aligned} ct &= k(ct' + vt') = k(c + v)t' \\ ct' &= k(ct - vt) = k(c - v)t \end{aligned} \right\}$$

$$ct = k(c + v) \frac{1}{c} k(c - v)t \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma$$

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ x' &= \gamma(x - vt) \end{aligned}$$

$$x = \gamma(\gamma(x - vt) + vt) = \gamma^2 x - \gamma^2 vt + \gamma vt$$

$$vt = \frac{\gamma^2 x - \gamma^2 vt + \gamma vt}{\gamma} = (1 - \gamma^2) x + \gamma vt = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} x + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} vt = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} (x + vt)$$

$$x = \frac{vt}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{x - vt}{\gamma}$$

$$x \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{x - vt}{\gamma} + vt'$$

$$vt' = \frac{x(1 - \frac{v^2}{c^2}) - x + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right)$$



$$x' = \gamma(x - Vt) \quad , \quad t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right)$$

18

vektori obecně

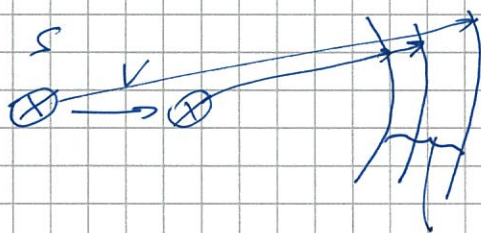
$$\vec{k}' = \vec{k} + \vec{V} \left[ \frac{\vec{k} \cdot \vec{V}}{V^2} (\gamma - 1) - \gamma t \right]$$

$$t' = \gamma \left[ t - \frac{\vec{k} \cdot \vec{V}}{c^2} \right]$$

def: událost  $(x_1, x_2, x_3, t)$

D4: Doppler je

v s.s. R

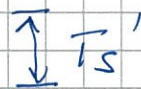
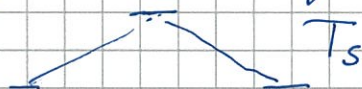


$$u_R = cT_R - VT_R =$$

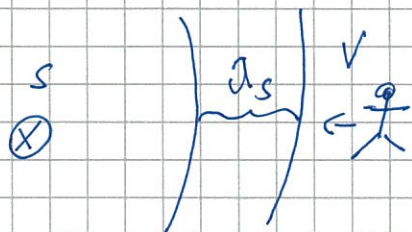
$$\Rightarrow f_R = \frac{c}{u_R} = \frac{c}{c-V} \frac{1}{T_R}$$

↓ to se děje

Jemu  $\oplus^S$  hodiny pomaleji  $T_R = \gamma T_S'$



$$f_R = \frac{c}{c-V} \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{T_S'} = \sqrt{\frac{c^2-V^2}{(c-V)^2}} f_S' = \sqrt{\frac{c+V}{c-V}} f_S'$$



v s.s. S zdroj

$$d_S = (c+V)T_R \quad \& \quad d_S = cT_S$$

$$T_R = \frac{c}{c+V} T_S$$

$$\frac{1}{T_R} = \frac{c+V}{c} \frac{1}{T_S}$$

$$\gamma T_R' = T_R \quad ; \quad \frac{1}{\gamma T_R'} = \frac{c+V}{c} T_S \quad ; \quad f_R' = \frac{c+V}{\sqrt{c^2-V^2}} f_S \sqrt{\frac{c+V}{c-V}} f_S$$



Transformace rychlosti

$$\Delta x' = x_2' - x_1' = \gamma(\Delta x - V\Delta t)$$

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \gamma(\Delta t - \frac{V\Delta x}{c^2})$$

$$V \rightarrow \text{ve směru } x$$

$$(x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2)$$

$$(x_1', y_1', z_1', t_1'), (x_2', y_2', z_2', t_2')$$

rychlost

$$u_x' = \lim \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \lim \frac{\Delta x - V\Delta t}{\Delta t - \frac{V\Delta x}{c^2}} = \frac{u_x - V}{1 - \frac{Vu_x}{c^2}}$$

$$u_y' = \lim \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \lim \frac{\Delta y}{\gamma(\Delta t - \frac{V\Delta x}{c^2})} = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{Vu_x}{c^2}}$$

$$u_z' = \text{dále}$$

$$\text{relativní} \quad \vec{u}' = \frac{\vec{u} + \vec{V} \left[ \frac{\vec{u} \cdot \vec{V}}{V^2} (\gamma - 1) - \gamma \right]}{\gamma \left[ 1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{V}}{c^2} \right]}$$

Fizeau

$$u_1' = \frac{v+V}{1 - \frac{Vv}{c^2}} = (v+V) \left( 1 + \frac{Vv}{c^2} \right)^{-1} = (v+V) \left( 1 - \frac{Vv}{c^2} + \dots \right) = v+V - V \frac{v^2}{c^2} - V \frac{v^2}{c^2}$$

Transformace

úhlu

$$V \ll c \Rightarrow \approx v + V \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

$$u_x = u \cos \theta$$

$$u_y = u \sin \theta$$

v směru x, y

$$u_x' = u' \cos \theta$$

$$u_y' = u' \sin \theta$$

$$\tan \theta' = \frac{u_y'}{u_x'} = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{u_x - V} = \frac{1}{\gamma} \frac{u \sin \theta}{u \cos \theta - V}$$

$$u_x = \frac{u_x' + V}{1 + \frac{u_x' V}{c^2}}$$

$$u_x' = 0,99c$$

$$V = 0,99c$$

$$u_x = 0,9999494c$$



# Interval, světelný kužel, událost

(10)

Galilei:  $|\vec{s}|^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$  - invariant

je u Lorentovy d.  $\vec{s}$  měníme  $V \rightarrow K$

$\Delta y^2 = \Delta y'^2$ ,  $\Delta z^2 = \Delta z'^2$  a časme

$$\boxed{(c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2} = c^2 \gamma^2 \left( \Delta t - \frac{V\Delta x}{c^2} \right)^2 - \gamma^2 (\Delta x - V\Delta t)^2 =$$

$$= \frac{c^2 \Delta t^2 - 2V\Delta x \Delta t + \frac{V^2 \Delta x^2}{c^2} - \Delta x^2 + 2V\Delta x \Delta t - V^2 \Delta t^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} =$$

$$= \frac{c^2 \Delta t^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) - \Delta x^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \boxed{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2}$$

Takže  $c^2 \Delta t^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = c^2 \Delta t'^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 = \Delta s^2$

prostorový interval.

A tolik platí pro

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

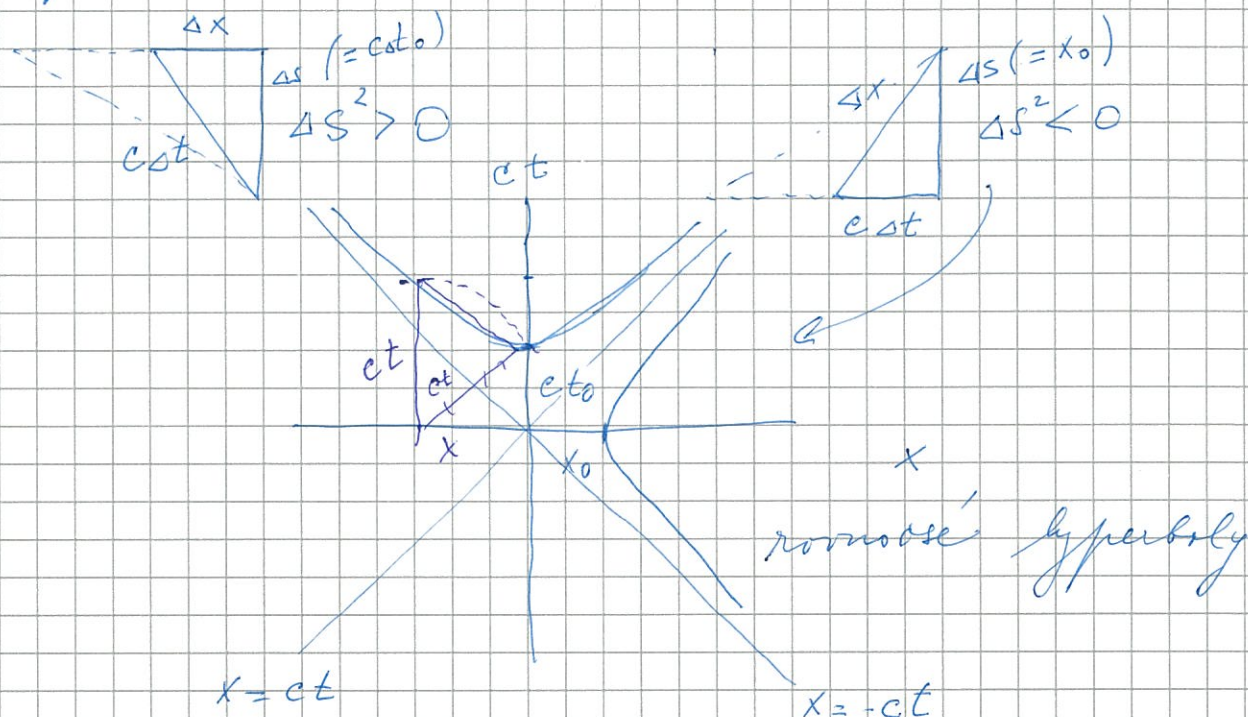
Minkowski - čtyřvektor  $(ct, ix, iy, iz)$ ;  $i = \sqrt{-1}$   
s Euklid. skalárním součinem.

Vádnou Lorentz. trfm. se může dostat od  $\Delta s^2 < 0$   
k  $\Delta s^2 > 0$

- $(\Delta s)^2 > 0$  - časopodobný interval (kauzální)  $\Delta x = 0$  F. s.s. tak, že
- $(\Delta s)^2 = 0$  - světlopodobný
- $(\Delta s)^2 < 0$  - prostoropodobný ( $\neq$  kauzální)  $\Delta t = 0$



grafické znázornění:



maticový zápis:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma_v (ct - \frac{v}{c}x) \\ x' &= \gamma_v (-\frac{v}{c}ct + x) \end{aligned}$$

$$\frac{v}{c} = \beta_v$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \underbrace{\gamma_v \begin{pmatrix} 1 & -\beta_v \\ -\beta_v & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda(V_1)} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix} = \Lambda(V_2) \Lambda(V_1) \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Def: vlastní čas

$$\tau = t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

pro částici pohybující se  
rychlostí  $v$

$$\Delta x = 0, \Delta y = 0, \Delta z = 0$$

$$\Delta s^2 = c^2 (\Delta \tau)^2$$

z toho, že invariant  $\Delta s^2$  se hodnotí nepořádkem?



# Relativistická dynamika

Transf. rychlosti

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{d}{dt'} \left( \frac{u'_x + V}{1 + \frac{u'_x V}{c^2}} \right) \frac{dt'}{dt} =$$

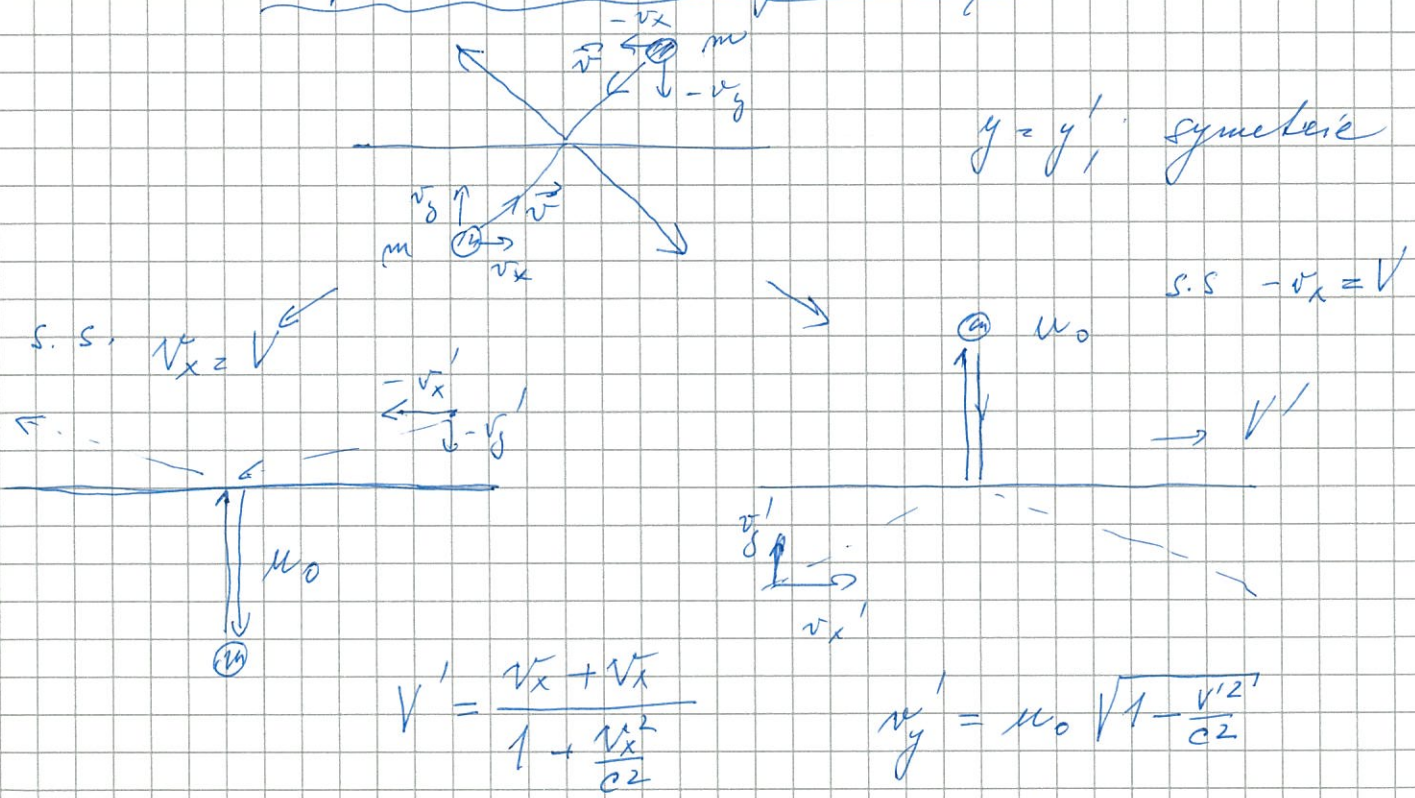
$$= \frac{a'_x (1 + \frac{u'_x V}{c^2}) - (u'_x + V) a'_x \frac{V}{c^2}}{\left( 1 + \frac{u'_x V}{c^2} \right)^2} \cdot \frac{1}{\gamma} =$$

$$= \frac{1}{\gamma} \frac{a'_x (1 - \frac{V^2}{c^2})}{\left( 1 + \frac{u'_x V}{c^2} \right)^2} = \frac{a'_x}{\left( 1 + \frac{V u'_x}{c^2} \right)^2} \cdot \frac{1}{\gamma^3}$$

Závisí na  $V$  a  $u'_x$ .

Bud  $F$  se transformuje stejně, nebo  $F = m \cdot a$  neplatí jak ho známe

## Experiment (myšlenkový)



Chceme, aby  $\Delta p_y = 2 m_{u_0} u_0 = 2 m_{u_y'} u_y'$ ; tj.  $M_{u_0} u_0 = M_{u_y'} u_y'$



$$\Rightarrow \frac{m_0}{\gamma_y'} = \frac{m_0 \gamma'}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V'^2}{c^2}}}$$

v limite  $m_0 \rightarrow 0$ , pak  $v_x' \Rightarrow V = \pm v$ ;  $\gamma_y' \rightarrow 0$   
 $m_0 \gamma_y' \rightarrow m_v$

$$m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Def: hybnost  $\vec{p} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ ;  $\vec{u}$  - rychlost tělesa

tady můžeme říct s. s., jen jednou!

$$\vec{p} = (\gamma_u m_0) \cdot \vec{u} = (\gamma_u m_0) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= (\gamma_u m_0) \frac{d\vec{r}}{d\tau} \left( \frac{d\tau}{dt} \right) = m_0 \frac{d\vec{r}}{d\tau}$$

$$\Delta t = \gamma_u \Delta \tau$$

s. s. Jak se transformují hybnosti (Lorentz)?  
 $V \Rightarrow (V, 0, 0)$

$$p_y' = m_0 \cdot \frac{dy'}{d\tau'} = m_0 \frac{dy}{d\tau} = p_y$$

$$p_x' = m_0 \cdot \frac{dx'}{d\tau'} = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\gamma_V (\Delta x - V \Delta t)}{\Delta \tau} m_0 =$$

$$\gamma_V (p_x - m_0 V \gamma_u) = \gamma_V \left( p_x - \frac{V}{c^2} \underbrace{\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}}_{\gamma_u m_0 c^2 = \Delta E} \right)$$



$$x' = \gamma_V (x - Vt)$$

$$t' = \gamma_V \left( t - \frac{Vx}{c^2} \right)$$

$$y' = y \quad z' = z$$

$$p'_x = \gamma_V (p_x - V(m_0 \gamma_u)) \left[ \frac{(m_0 \gamma_u)^2 - \gamma_V^2 (m_0 \gamma_u - \frac{V p_x}{c^2})^2}{(m_0 \gamma_u)^2 - (m_0 \gamma_u)^2} \right] \quad p'_y = p_y \quad p'_z = p_z$$

prírodná plan'  $\Leftrightarrow (c m_0 \gamma_u, p_x, p_y, p_z)$  c'g'ovet'ov  
 Lorentz. ísf. maj' invariant

$$\frac{c^2 m_0^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} - \frac{m_0^2 u_x^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} - \frac{m_0^2 u_y^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} - \frac{m_0^2 u_z^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$= \underline{\underline{m_0^2 c^2}} \quad ((\Delta A)^2 \text{ - invariant})$$

$\Rightarrow m_0 \gamma_u c$  je čísla' sloha c'g'ovet'ov!!

$$M = m_0 \cdot \gamma_u \quad \text{hmotnosť} \times \text{kl'dra' hmotnosť}$$

$$M = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad \text{Taylor} = m_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{u^4}{c^4} + \dots \right)$$

$$\approx m_0 + \frac{1}{2} m_0 \frac{u^2}{c^2} + \frac{3}{8} m_0 \frac{u^4}{c^4} + \dots$$

pródukt hmotnosti' a'j' pol'ymu

a pro  $u \ll c$

$$\approx m_0 + \frac{1}{2} m_0 \frac{u^2}{c^2} = m_0 + \frac{E_{kin}}{c^2}$$



Def:  $mc^2 = m_0 c^2 + E_{kin} = E_{tot}$

necháme plusochodný interval,  $\forall$  pre každé  $m \neq 0$

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2$$

 ? Zároveň  
? konstant ?

$c m_0 \gamma u = \frac{E}{c}$  ne štyrkybusti

Polýkova' rovnice (definícia p'g)

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) = \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 u \vec{e}_u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) \right)$$

$$= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{d\vec{u}}{dt} + \left( -\frac{1}{2} \right) \frac{m_0 \vec{u} \left( -2 \frac{u}{c^2} \right)}{\left( \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right)^3} \frac{d|u|}{dt}$$

Dva prípady

1)  $\vec{F} \perp \vec{u} \Rightarrow \frac{d|u|}{dt} = 0$  a Rýchlosť 1. člen  
přesná konstanta

2)  $\vec{F} \parallel \vec{u} \Rightarrow \vec{u} \frac{d|u|}{dt} = |u| \frac{d\vec{u}}{dt}$

$F = \frac{m_0}{\left( \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right)^3} \frac{du}{dt} \leftarrow$  podči'ľná konstanta



Transformace síle

$$F_x' = \frac{dp_x'}{dt'} = \frac{dp_x'}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = \gamma_V \left( \frac{dp_x}{dt} - \frac{V}{c^2} \frac{dE}{dt} \right) \cdot \frac{dt}{dt'} =$$

$$\left[ t' = \gamma_V \left( t - \frac{V}{c^2} x \right); \frac{dt'}{dt} = \gamma \left( 1 - \frac{u_x V}{c^2} \right) \Rightarrow \frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\gamma \left( 1 - \frac{u_x V}{c^2} \right)} \right]$$

a to protože perturbace vyjdou z pásu  $u_x$  na  $u_x'$

$$= \frac{F_x - \frac{V}{c^2} \frac{dE}{dt}}{1 - \frac{u_x V}{c^2}}$$

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left( t + \frac{u_x V}{c^2} \right) \\ \frac{dt}{dt'} &= \gamma \left( 1 + \frac{u_x V}{c^2} \right) \end{aligned}$$

Dobrá věc, to  $\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u}$

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{u} &= \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{u} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) \cdot \vec{u} = \\ &= \frac{m_0 \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + \frac{1}{2} \frac{d(u^2)}{dt} \frac{m_0 \vec{u} \cdot \vec{u}}{c^2 \left( \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right)^3} = \end{aligned}$$

mechanika  $u^2$

$$\left[ \frac{du_x}{dt} u_x + \frac{du_y}{dt} u_y + \frac{du_z}{dt} u_z = \frac{1}{2} \left( \frac{du_x^2}{dt} + \frac{du_y^2}{dt} + \dots \right) = \frac{1}{2} \frac{du^2}{dt} \right]$$

$$= \frac{m_0 c^2 \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) + m_0 u^2}{2 c^2 \left( \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right)^3} \frac{du^2}{dt} = \frac{m_0 c^2}{2 c^2 \left( \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right)^3} \frac{du^2}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{du^2}{dt} = \frac{m_0 c^2}{2 c^2 \left( \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right)^3} \frac{du^2}{dt}$$

Nem' 4-vektor

$$F_x' = \frac{F_x - \frac{V}{c^2} \vec{F} \cdot \vec{u}}{1 - \frac{u_x V}{c^2}}, \quad F_y' = \frac{dp_y'}{dt'} = \frac{dp_y}{dt} \frac{dt}{dt'} = F_y \cdot \frac{1}{\gamma \left( 1 - \frac{u_x V}{c^2} \right)}$$



Obecně pro  $15 \text{ min} \sim 3 \text{ hod}$

$$\vec{F} = (1-\gamma) \frac{\vec{F}' \cdot \vec{V}}{V^2} \vec{V} + \gamma \vec{F}' + \frac{\gamma}{c^2} \vec{u} \times (\vec{V} \times \vec{F}')$$

a speciálně pro pole  $\vec{F}' = k \cdot \frac{\vec{E}'}{r^2}$  ( $\sim \frac{1}{r^2}$ )  
 grav., Coulomb.

$$\vec{F} = \frac{k\gamma}{r'^3} \left[ \vec{r} + \frac{1}{c^2} \vec{u} \times (\vec{V} \times \vec{r}) \right]$$

jak? čtyřvektor?

$$\vec{K} = \frac{d\vec{p}}{d\vec{t}}, \quad K_0 = \frac{d}{dt} \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$K_0 = \frac{d}{dt} \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{dt}{d\vec{t}} = \frac{dt}{dt \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\vec{K} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$(K_0, \vec{K})$  - čtyřvektor