# Maxwellovy rovnice 1865

1884 – Heaviside, Gibbs, Hertz

Rovnice
+ kontinuity
+ Ohm
+ Lorentz
+ $E \leftrightarrow D$

$$\oiint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_l \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 I + \frac{1}{c^2}\frac{d\Phi_E}{dt} \qquad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}$$

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$$

$$\oiint_S \vec{B}\, d\vec{S} = 0 \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\oint_l \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

---

$\vec{P}$, $\vec{M}$ – nebylo na střední škole

---

STR – mg. pole jako relativistický důsledek

---

Sedlák, Štoll – Elektřina a magnetismus (+ skripta ČVUT)
E. M. Purcell – Electricity and magnetism (Berkeley Phys. Course)
web.mit.edu/sahughes/www/8.022/index.html
R. Feynman

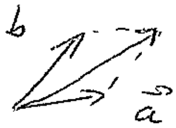
# Vektory

Těleso: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ – obecně $(F, +, \cdot)$ abel grupa, grupa $(F \setminus \{0\})$

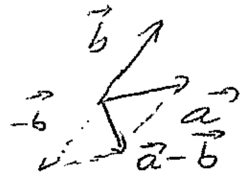
Vektorový prostor $V$ nad tělesem 8 axiomů LiA 1. sem.

$! \exists \vec{0} !$ Weyl: Těleso: Uzavřený vesmír v němž prostory/ stolydi

Báze: „The Gentleman chooses a basis if he really must."
Weyl? Wigner?

Sčítání:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Odečítání $\vec{a} + (-\vec{b})$

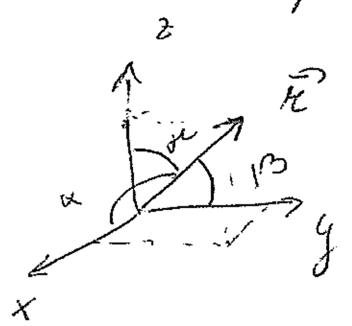


$\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \vec{a}$

Soustava souřadná: vyjádření v bázi,
aby se to dobře počítalo.

Nejčastěji kartézské – kolmé na sebe
a přímky!!!

konvence – pravotočivé $x, y, z$ – $x \to y$ šroubuje do $z$



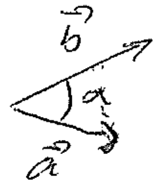
$\vec{r} \equiv (r_x, r_y, r_z)$ $[(x, y, z)]$

$r_x = |\vec{r}| \cos\alpha$, $r_y = |\vec{r}| \cos\beta$,
$r_z = |\vec{r}| \cos\gamma$.

$|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$ $1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$

# Součiny vektorů

1) Skalární $\quad \vec a\cdot\vec b = |\vec a|\cdot|\vec b|\cos\alpha$




(zobrazení $V\times V \to \mathbb{R}$, $(\vec a,\vec b)\mapsto \vec a\cdot\vec b$)

V souřadnicích $\quad \vec a=(a_x, a_y, a_z) \quad \vec b=(b_x, b_y, b_z)$

$$\vec a\cdot\vec b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

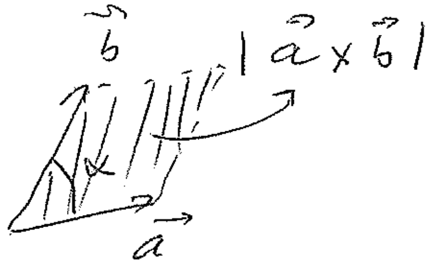
Vlastnosti: Výsledek nezávisí na soustavě souřadnic

2) $\vec u\cdot\vec v=\vec v\cdot\vec u$; 1) $\vec u\cdot\vec v=0 \Leftrightarrow \vec u\perp\vec v$; 3) $d(\vec u\cdot\vec v)=d\vec u\cdot\vec v$; 4) $\vec u\cdot(\vec v+\vec w)\equiv\vec u\cdot\vec v+\ldots$

Dk. SS. $\vec u = u_x\vec e_x + u_y\vec e_y + u_z\vec e_z$; $\vec e_i\cdot\vec e_j=\delta_{ij}$;

2) Vektorový součin – velikost plochy rovnoběžníku mezi danými vektory.

! ve 3 dim ∃! vektor ⊥ na plochu.




$$\vec a\times\vec b = |\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\sin\alpha\cdot\vec e_\perp$$

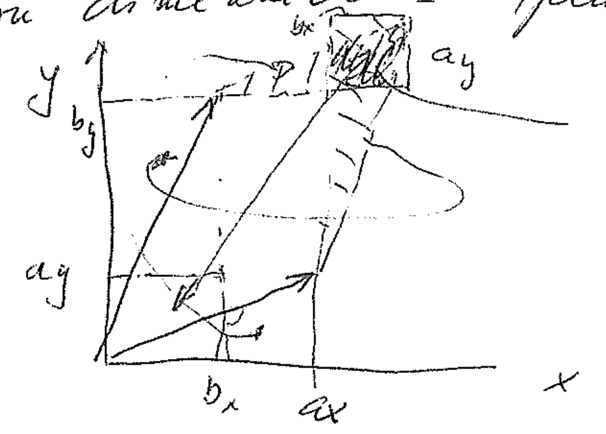
směr pravotočivý

$$\vec a\times\vec b = -\vec b\times\vec a$$

V souřadnicích

$$\vec a\times\vec b = (a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x)$$

ve dvou dimenzích – průmět na plochu




$2\times$

čtvereček

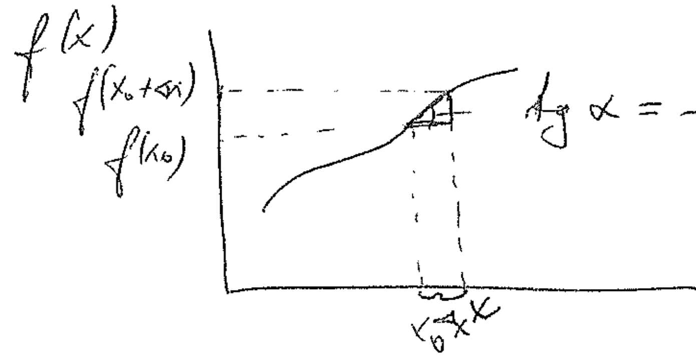
$a_x b_y - a_y b_x$

# Derivace fce

nevyšetřujeme existenci
pdp, že $\exists$

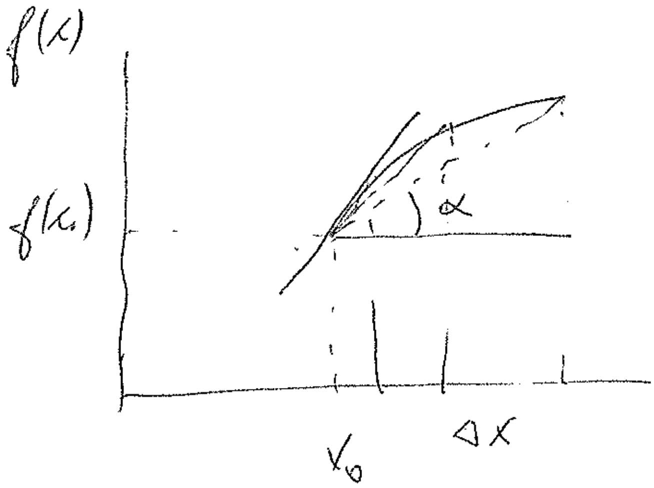
$f(x)$ - spojitá

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$




$$tg\, \alpha = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Derivace $$f'(x)\Big|_{x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} := f'(x_0)$$



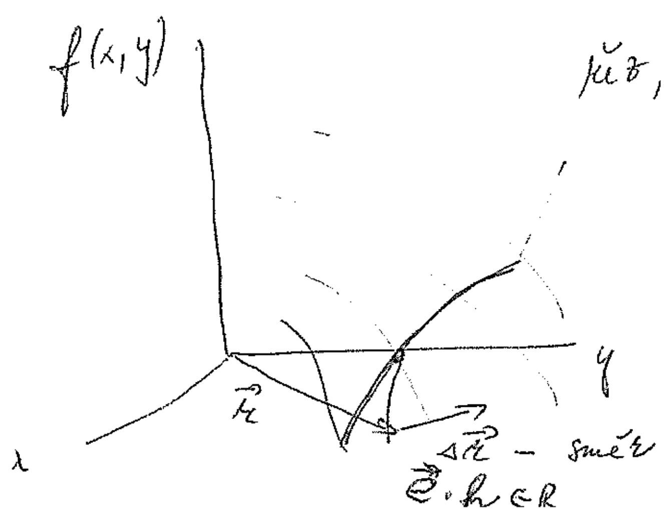

v limitě - směrnice tečny ke křivce

tečna = přímka $y = kx + q$

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\, \alpha$$

## Parciální derivace: derivace ve směru

(u funkcí více proměnných) obecně



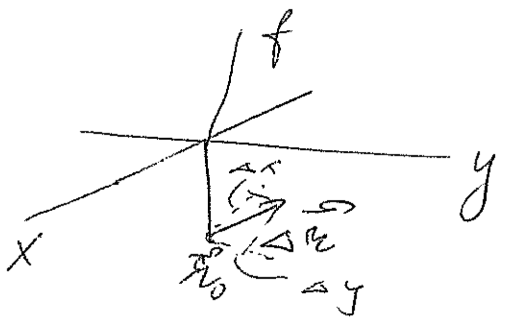

řez „plochou" ve směru $\Delta \vec{r}$
a derivace „této křivky"

$$\lim_{\Delta \vec{r} \to 0} \frac{f(\vec{r}+\Delta \vec{r}) - f(\vec{r})}{|\Delta \vec{r}|}$$

ve směru $\frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|} = \vec{e}_{P.D.}$ jednotkový vektor

# P.D. ve směru


mapa, teplota $T(x,y)$




$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ; $\Delta\vec{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$

$$\vec{e}_{\Delta\vec{r}} = \frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|} = \left(\frac{\Delta x}{\sqrt{\ }}, \frac{\Delta y}{\sqrt{\ }}\right)$$

$$|\vec{e}_{\Delta\vec{r}}| = 1$$

$$\lim_{|\Delta\vec{r}|\to 0} \frac{f(\vec{r}_0+\Delta\vec{r}) - f(\vec{r}_0)}{|\Delta\vec{r}|} = \lim_{|\Delta\vec{r}|\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \left[\frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} + \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x, \Delta y\to 0} \left[\frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)}{\Delta x} \underbrace{\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}}_{\cos\alpha} + \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y} \underbrace{\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}}_{\sin\alpha = \cos\beta}\right] =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\vec{e}_{\Delta\vec{r}}\right)_x + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\vec{e}_{\Delta\vec{r}}\right)_y \left[+ \frac{\partial f}{\partial z}\left(\vec{e}_{\Delta\vec{r}}\right)_z\right]$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \text{,,}\frac{\partial f}{\partial z}\text{''}\right)}_{\text{grad } f} \cdot \vec{e}_{\Delta\vec{r}} = \begin{cases} 0 & \perp \\ \max & \parallel \end{cases}$$

Směr a velikost růstu teploty

velikost grad f je právě ve směru, v němž je maximální

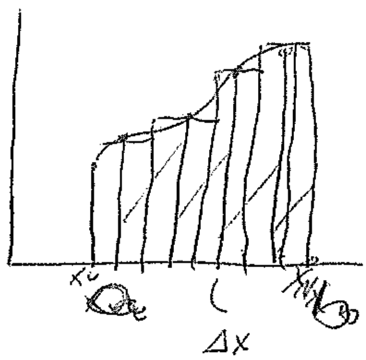
# Integrál - křivkový, plošný, objemový

(vektoriální!)

(6)

v Riemannova smyslu

na přímce



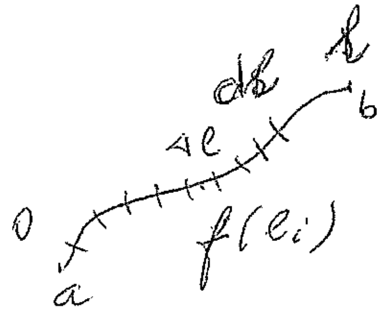

$$S \approx \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\,\Delta x$$

zjemním $N := 2N \Rightarrow$ zpřesním

$$\int = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \sum_{i=1}^{N}\Delta x_i = b-a}} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\,\Delta x_i := \int_a^b f(x)\,dx$$

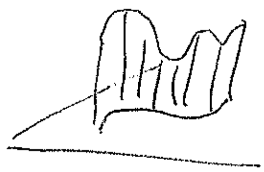
označení

na křivce:




Je-li křivka rovinná, lze namalovat jako plochu s kolmou stěnou

Obecně ne!!!

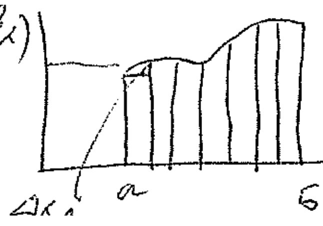


Křivku mohu narovnat a dostanu přímku.

Pro výpočet stačí vzít hodnotu funkce v bodech.

$$\int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} f(l)\,dl = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(l_i)\,\Delta l_i$$

Pozn:




$$\Delta f(x_k) = f(x_k) - f(x_k - \Delta x)$$

$$f(b) = f(a) + \Delta f(x_1) + \Delta f(x_2) + \Delta f(x_3) \dots$$

$$= f(a) + \sum_{k=1}^{N} \frac{\Delta f(x_k)}{\Delta x}\,\Delta x \quad \text{- lim} \Rightarrow \int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

k porovnání - integrace per partés (po částech) ⑦

$$\boxed{\left(f(x)\,g(x)\right)'} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x) - f(x)\,g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[ \frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x) - f(x)\,g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \frac{f(x)\,g(x+\Delta x) - f(x)\,g(x)}{\Delta x} \right] =$$

$$\boxed{\lim (A + B) = \lim A + \lim B}$$

$$= \boxed{f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)}$$

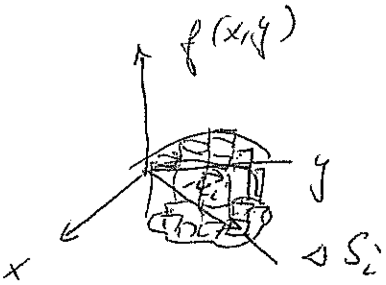
---

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = \int_a^b \left(f(x)\,g(x)\right)' dx - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

přesun derivace pod integrálem - bude v MA

---

Integrál „nad" <u>rovinou</u> (nebo její části)




bude objem nad plochou S omezený fcí f(x,y) a započítáme - kvádříčka

součet objemů malých „kvádříků"

rozdělím plochu S na N $\Delta S_i$ a $\Delta S_i$ přísluší vektor $\vec r_i$, který leží uvnitř $\Delta S_i$.

Objem přibližně

$$V \simeq \sum_{i=1}^{N} f(\vec r_i)\,\Delta S_i$$ - součet objemů kvádříků

Zjemnění: $\Delta S$ na menší a menší, bude objem přesnější a přesnější a v limitě

$$V = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \sum_{i=1}^{N} \Delta S_i = S \\ \Delta S_i \to 0}} \sum_{i=1}^{N} f(\vec{r}_i)\,\Delta S_i =: \underbrace{\int_S f(\vec{r}_i)\,dS}_{\text{označení}}$$

Pro $S$ na rovině je to objem.

! Ale zprohýbaná plocha nenarovnaná do roviny.

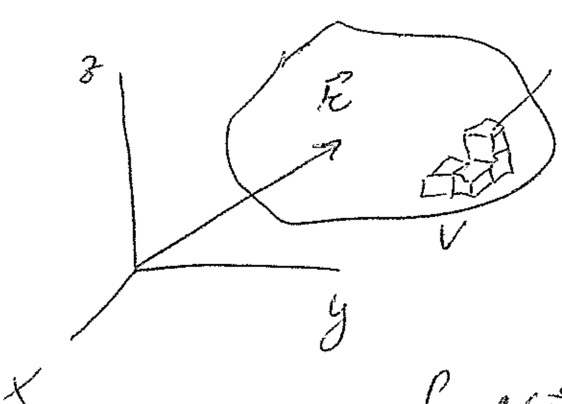
! Přesto Definuji a představím integrál stejně – – už to není objem. – Plošný integrál

$\vec{r}_i = (x_i, y_i)$ pro rovinu, pro obecně zkroucenou plochu v 3D prostoru $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$

V rovině $\Delta S_i$ můžu psát $\Delta x_i \Delta y_i$, obecně ne.

---

analogicky zavedeme objemový integrál pro fci v prostoru – ∄ geometrická představa




a mám fci $f(\vec{r})$ – každému bodu v prostoru přiřadí číslo

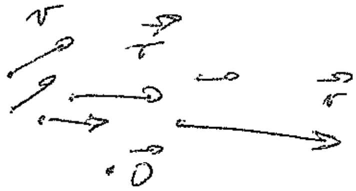
$$\int_V f(\vec{r})\,dV = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \sum_{i=1}^{N} \Delta V_i = V}} \sum_{i=1}^{N} f(\vec{r}_i)\,\Delta V_i$$

# Vektorová pole, tok plochou, divergence, rotace

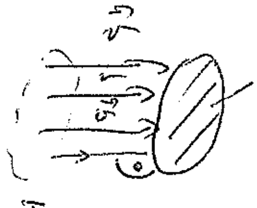
**Vektorové pole:** Př.: tekoucí voda – proudění vody – každá molekula má rychlost $\vec{v}$, stejně tak každý malý objem $\delta V$.

(„tři funkce $v_x, v_y, v_z$")

V každém bodě vektor




**Tok plochou** $\Phi$: (a) $\vec{v} = \text{konst}$, $S \perp \vec{v}$

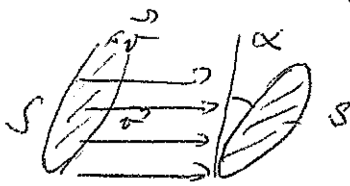



plocha $S$ rovinná

za 1 s proteče plochou $S$ objem $|\vec{v}| \cdot S$

$$\Phi = v \cdot S$$

(b) $\vec{v} = \text{konst}$, $\sphericalangle S, \vec{v} = \alpha \neq 90°$, $S$ – rovinná




$$\Phi = |\vec{v}| \cdot S \cdot \cos\alpha$$

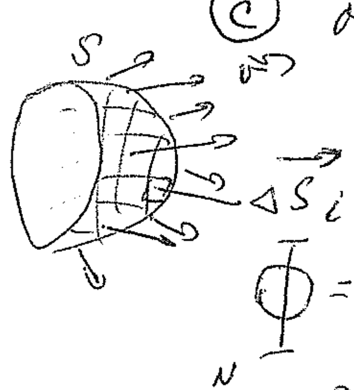
Zavedeme


$|\vec{S}| = S \qquad \vec{S} = S \cdot \vec{e}_\perp$

$$\Phi = \vec{v} \cdot \vec{S}$$

(c) obecně $\vec{v} \neq \text{konst}$, $S$ nerovinná

klidně stlačitelná tekutina




$$S = \sum \Delta S_i$$

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i \approx \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i \cdot \Delta \vec{S}_i$$

$$\Phi = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \sum \Delta S_i = S}} \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i \cdot \Delta \vec{S}_i = \lim \sum_{i=1}^{N} \vec{v}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{S}_i = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

! orientace – dvě možnosti, při překladu $\Delta \vec{S}_i$ k vedlejší se <u>musí zachovat.</u>

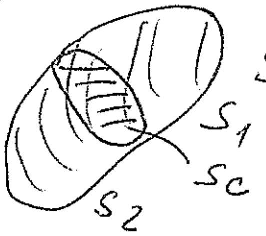
<u>Def</u> Uzavřená plocha – nemá hranici (sféra, anuloid (torus), ... )

orientace (+) – ven – polopřímka z bodu protne plochu 0, 2, 4, ...

— " — (−) – dovnitř – — " — 1, 3, 5, ...

$\oint_S$ ; $\oint_\ell$

<u>Divergence vekt. pole</u> (div) a <u>Gaussova věta</u>

rozdělení plochy na dvě 

$S = S_1 + S_2$

$\tilde{S}_1 = S_1 + S_c$

$\tilde{S}_2 = S_2 + S_c$

další dělení

$$\Phi = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \oint_{\tilde{S}_1} \vec{v}\, d\vec{S} + \oint_{S_2} \vec{v}\, d\vec{S} = \oint_{\tilde{S}_{11}} \vec{v}\, d\vec{S} + \oint_{\tilde{S}_{12}} \vec{v}\, d\vec{S} + \oint_{\tilde{S}_{21}} \vec{v}\, d\vec{S} + \oint_{\tilde{S}_{22}} \vec{v}\, d\vec{S} = \sum_{k=1}^{N} \oint_{S_k} \vec{v}\, d\vec{S} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{\oint_{S_k} \vec{v}\, d\vec{S}}{\Delta V_k} \Delta V_k = \lim_{\substack{S_k \to 0 \\ \Delta V_k \to 0 \\ \sum \Delta V_k = V \\ N \to \infty}} \sum_{k=1}^{N} \frac{\oint_{S_k} \vec{v}\, d\vec{S}}{\Delta V_k} \Delta V_k$$

$$= \int_V \underbrace{\left( \lim_{\substack{\Delta V_k \to 0 \\ S_k \to 0}} \frac{\oint_{S_k} \vec{v}\, d\vec{S}}{\Delta V_k} \right)} dV =$$

def.: $\operatorname{div} \vec{v} = \dfrac{\text{tok}}{\text{objem}} = \lim\limits_{\substack{S \to 0 \\ V \to 0 \\ \text{do bodu}}} \dfrac{\oint_S \vec{v}\, d\vec{S}}{V} = \lim\limits_{\substack{S \to 0 \\ V \to 0 \\ \text{do bodu}}} \dfrac{\Phi}{V}$

**Shrnutí:** vektorové pole $\vec{F}(\vec{r})$

**Def:** $\operatorname{div}\vec{F} = \lim\limits_{\substack{\Delta S\to 0\\ \Delta V\to 0}} \dfrac{\oint_S \vec{F}(\vec{r})}{\Delta V}$ ; Vektorové pole $\Rightarrow$ skalární fce

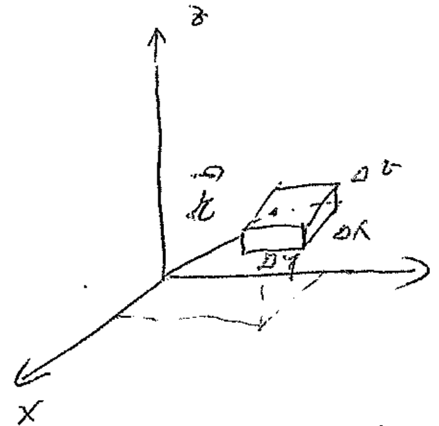
Gaussova věta o divergenci

$\forall$ platí pro $\forall$ pole!
($\exists$ derivace)

$$\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\vec{F}\cdot dV$$

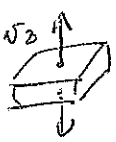
---

V kartézských souřadnicích



$\vec{r} \equiv (x, y, z)$

$\Phi = \Phi_x + \Phi_y + \Phi_z$

$\Phi_z \approx$  $\approx v_z\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y+\frac{\Delta y}{2}, z+\Delta z\right)\Delta x\Delta y$

$- v_z\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y+\frac{\Delta y}{2}, z\right)\Delta x\Delta y \Rightarrow$

$\Phi_x = v_x\left(x+\Delta x, y+\frac{\Delta y}{2}, z+\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta y\Delta z - v_x\left(x, y+\frac{\Delta y}{2}, z+\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta y\Delta z$

$\Phi_y = v_y\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y+\Delta y, z+\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x\Delta z - v_y\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y, z+\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x\Delta z$

$$\lim \frac{\Phi}{V} = \frac{\Phi_x+\Phi_y+\Phi_z}{\Delta x\Delta y\Delta z} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

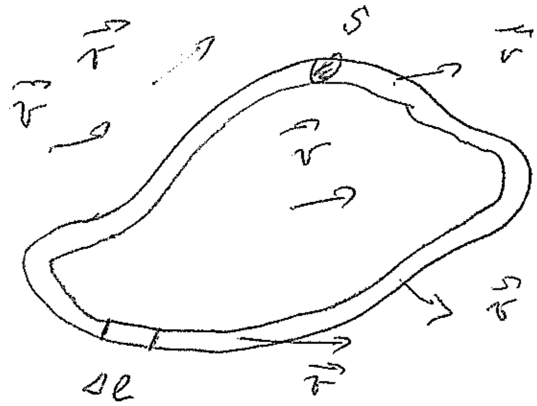
Symbolicky: $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\circ(v_x, v_y, v_z)$

Př: voda $V = V_0(1+\beta\Delta T)$ $4\pi R^2 v = 4\pi R^2 \frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_0\beta\Delta T}{\Delta t}$

$\Delta V = V_0\beta\Delta T$ $\operatorname{div}\vec{v} = \beta\frac{\Delta T}{\Delta t}$

# Cirkulace vektorového pole a rotace

Cirkulace




Práce podél křivky $A = \oint_l \vec F \cdot d\vec l$

Feynman —
– co se bude dít, když najednou zamrazíme vše kromě této trubice?

$m(\Delta l) = S\cdot\rho\cdot\Delta l$ $\rho$ – hustota vody

Hybnost před zamrznutím $m(\Delta l)\cdot\vec v$. Po zamrznutí tečné

$$\Delta p = m(\Delta l)\cdot\vec v\cdot\vec e_T = S\cdot\rho\cdot\vec v\cdot\underbrace{\Delta l\cdot\vec e_T}_{\Delta\vec l} = S\rho\,\vec v\cdot\Delta\vec l$$

V trubici $p \approx \sum_{i=1}^{N}\Delta p_i = S\cdot\rho\sum_{i=1}^{N}\vec v_i\,\Delta\vec l_i \Rightarrow \lim_{\substack{\Delta l\to 0\\ \sum\Delta l = l}}$

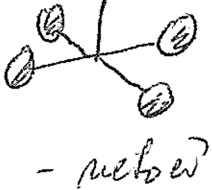
$'' \; S\rho l\cdot\bar v$

$$p = S\rho\oint_l \vec v\cdot d\vec l = S\rho\,\Gamma$$

Cirkulace

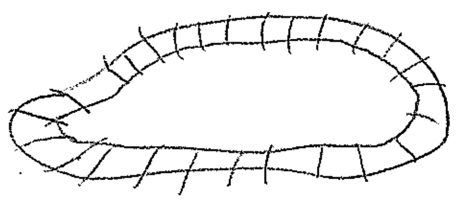
$$\Gamma = \lim_{\substack{\Delta l_i\to 0\\ \sum\Delta l_i = l}}\sum_{i=1}^{N}\vec v(\vec r_i)\cdot\Delta\vec l_i = \oint_l \vec v(\vec r)\,d\vec l = \oint_l \vec v(\vec r)\cdot\vec e_T(\vec r)\,dl$$

malý plochý anemometr



záleží v jakém směru vložíme.

$\Gamma = 0$ – netočí se



vagóny s plachtou

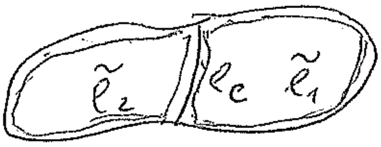
kolem dokola

Rotace, Stokesova věta

rozdělím

Cirkulace $\Gamma := \oint_l \vec{v}\cdot d\vec{l} = \int_{l_1} \vec{v}\cdot d\vec{l} + \int_{l_2} \vec{v}\cdot d\vec{l}$

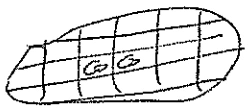
uzavřu obě pomocí $l_c$

$l_2$  $l_1$

$$= \oint_{\tilde{l}_1} \vec{v}(\vec{r})\cdot d\vec{l} + \oint_{\tilde{l}_2} \vec{v}(\vec{r})\cdot d\vec{l}$$

$$\left.\begin{aligned}\tilde{l}_1 &= l_1 \oplus l_c\\ \tilde{l}_2 &= l_2 \ominus l_c\end{aligned}\right\}\ \text{zachovat orientaci}$$

$\boxed{\Delta S_i}$ $l_i$

a dělíme dále 

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{N} \oint_{l_i} \vec{v}(\vec{r})\cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\oint_{l_i} \vec{v}(\vec{r})\cdot d\vec{l}}{\Delta S_i}\Delta S_i$$

a další a další dělení =

$$= \lim_{\substack{\Delta S_i \to 0\\ \sum_{i=1}^{N}\Delta S_i = S\\ N\to\infty\\ l_i\to 0}} \sum_{i=1}^{N} \frac{\oint_{l_i} \vec{v}(\vec{r})\cdot d\vec{l}}{\Delta S_i}\Delta S_i =$$

$$= \int_S (\mathrm{rot}\,\vec{v})\,\vec{n}\,dS = \int_S \mathrm{rot}\,\vec{v}\,d\vec{S}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = \lim_{\substack{\Delta S\to 0\\ \Delta l\to 0}} \left(\frac{\oint_l \vec{v}\cdot d\vec{l}}{\Delta S}\right)_{max} \vec{e}_{\perp max}$$

„pravo"

---

Stokes:

$$\Gamma = \oint_l \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_S \mathrm{rot}\,\vec{F}\,d\vec{S}$$

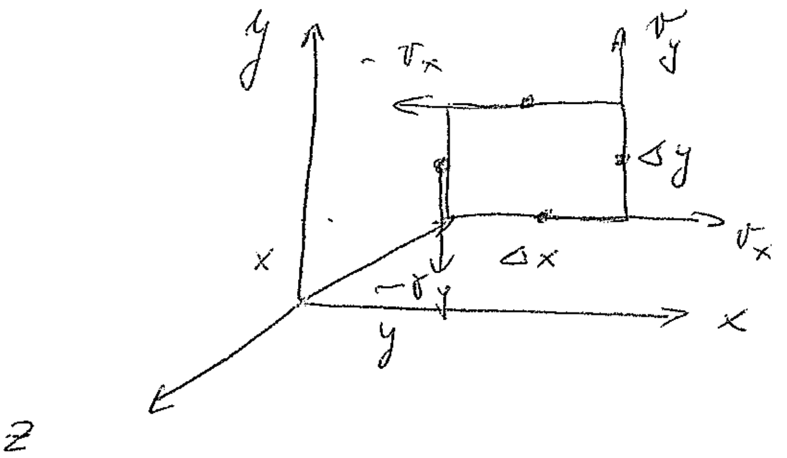
$$l \longleftrightarrow S$$

ROT V kartézských souřadnicích

rot $\vec{v}$ – je dáno

Nastavení smyčky do směru, kde je cirkulace (maximální

Vyšetřeme průmět do roviny (x,y), tj. $(\mathrm{rot}\,\vec{v})_z$




$\vec{r} = (x, y, z)$

$\Delta S = \Delta x \, \Delta y$

(nebo jinak, souřadnou soustavu nastavíme tak, aby křivka (obdélník) ležela v rovině (x,y).

$$\Gamma = v_y\left(x+\Delta x, y+\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta y - v_x\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y+\Delta y\right)\Delta x -$$

$$- v_y\left(x, y+\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta y + v_x\left(x, y+\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x$$

$$\lim_{\substack{\Delta S \to 0 \\ (\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0)}} \frac{\Gamma}{\Delta S} = \frac{\left[v_y\left(x+\Delta x, y+\frac{\Delta y}{2}\right) - v_y\left(x, y+\frac{\Delta y}{2}\right)\right]\cancel{\Delta y}}{\Delta x \, \cancel{\Delta y}} - \frac{\left[v_x\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y+\Delta y\right) - v_x\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y\right)\right]\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\,\Delta y} =$$

$$= \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = (\mathrm{rot}\,\vec{v})_z$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

Symbolický zápis

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}; \quad \operatorname{grad} f = \vec{\nabla} f;$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

---

## Taylorův rozvoj funkce

(do mocninné řady) fce má $\forall$ derivace „vlastní"

funkce $f(x)$

polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$

a) v bodě 0 - musí se rovnat $\forall$ derivace

$$f(0) = p(0); \quad f'(0) = p'(0); \quad f''(0) = p''(0) \ldots$$

$$\Rightarrow a_0 = f(0); \quad a_1 = f'(0); \quad 2a_2 = f''(0); \quad 3 \cdot 2 a_3 = f'''(0),$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0) x^2 + \frac{1}{6} f'''(0) x^3 \ldots$$

pro velice malá $x$ (např. 0,01) a „rozumné" derivace první členy dobře aproximují hodnotu fce.

b) v jiném bodě $(x_0)$ - substituce $x \rightarrow (x - x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0) \ldots$$

Př.: $f(x) = (1 \pm x)^6$ v 0 $\quad f(x) = 1 \pm 6x + \frac{1}{2} 6(6-1) x^2 \pm \frac{1}{6} 6(6-1)(6-2) x^3 \ldots$