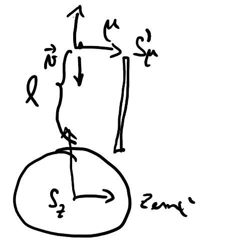
41) V horní vrstvě atmosféry vznikl mion pohybující se rychlostí $v=0{,}99c$. Do svého rozpadu stihl urazit vzdálenost $l=5\,km$ v soustavě spojené se Zemí (SZ).

a) Jakou dobu života mionu pozorujeme v soustavě SZ?

b) Jakou dobu žvota měl mion ve své klidové soustavě?

c) Jak silná vrstva atmosféry prošla kolem mionu v jeho klidové soustavě?



a, $t = \frac{l}{v} = \frac{5\cdot 10^3}{0{,}99\cdot 3\cdot 10^8}\,s = 1{,}68\cdot 10^{-5}\,s$

b, Dilatace času

vlastní čas $\tau = t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

(je nejkratší) $\tau = 0{,}23\cdot 10^{-5}\,s$

$$v' = \frac{l'}{t'} = \frac{l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l_0}{t} = v$$

$v<c$ $\quad \frac{v}{c}<1$

$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}<1 \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{}} > 1$

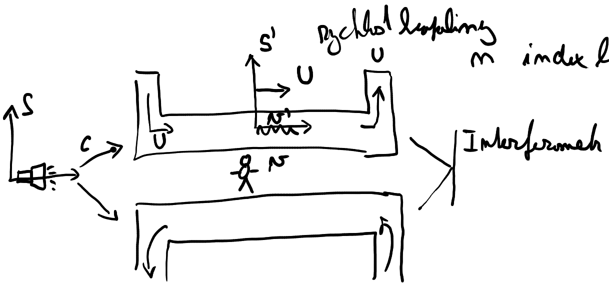
c, Kontrakce délek

$l' = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 0{,}7\,km$

klidová délka (je nejdelší)

$l_0 = l$

42) Fizeaův pokus — rychlost světla v proudící kapalině — vysvětlete proč naměřil $v = \frac{c}{n} + U\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$



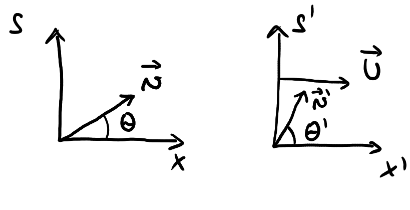
n index lomu $\quad v' = \frac{c}{n}$

Taylorův rozvoj $U \ll c$ v $\frac{U}{c}$ do 1. řádu

$$v = \frac{v'+U}{1+\frac{v'U}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n}+U}{1+\frac{1}{n}\frac{U}{c}} \doteq \left(\frac{c}{n}+U\right)\left(1-\frac{1}{n}\frac{U}{c}\right) = \frac{c}{n}+U-\frac{1}{n^2}U-\underbrace{\frac{1}{n}\frac{U^2}{c}}_{\text{malé vůči ostatním}} =$$

$$= \frac{c}{n}+U\left(1-\frac{1}{n^2}\right) - \underbrace{\cancel{\frac{c}{n}\left(\frac{U}{c}\right)^2}}_{\text{moc malé}}$$

43) Odvoďte vztah mezi úhly, které svírají rychlosti $\vec v$ a $\vec v'$ s osami x a x' v soustavách spojených speciální Lorentzovou transformací.



$x' = \gamma(x-Ut)$

$t' = \gamma\left(t-\frac{U}{c^2}x\right)$

$y' = y$

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\frac{1}{\frac{dt'}{dt}} = \gamma(v_x-U)\frac{1}{\gamma\left(1-\frac{Uv_x}{c^2}\right)}$$

$$v_x' = \frac{v_x-U}{1-\frac{Uv_x}{c^2}}$$

$$v_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt}\frac{1}{\frac{dt'}{dt}} = v_y\frac{1}{\gamma\left(1-\frac{Uv_x}{c^2}\right)}$$

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{v_y'}{v_x'} = \frac{v_y\frac{1}{\gamma\cancel{\left(1-\frac{Uv_x}{c^2}\right)}}}{\frac{v_x-U}{\cancel{1-\frac{Uv_x}{c^2}}}} = \frac{v_y}{\gamma(v_x-U)} = \frac{v\sin\theta}{(v\cos\theta-U)}\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}$$

$$\sin\theta' = \frac{v_y'}{v'} = \frac{v_y'}{(v_x'^2+v_y'^2)^{\frac12}} = \frac{v_y}{\gamma\cancel{\left(1-\frac{Uv_x}{c^2}\right)}}\cdot\frac{\cancel{1-\frac{Uv_x}{c^2}}}{\sqrt{(v_x-U)^2+v_y^2\left(1-\frac{U^2}{c^2}\right)}} = \frac{v\sin\theta\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}}{\sqrt{(v\cos\theta-U)^2+v^2\sin^2\theta\left(1-\frac{U^2}{c^2}\right)}} =$$

$$= \frac{v\sin\theta}{\sqrt{v^2\sin^2\theta+\gamma^2(v\cos\theta-U)^2}} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+\gamma^2\left(\cos\theta-\frac{U}{v}\right)^2}}$$

44) Specializujte vztah z předchozího příkladu pro případ, že $|\vec{v}| = c$, $\Delta\theta = \theta' - \theta$ pro $U \ll c$

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{c\sin\theta}{(c\cos\theta - U)}\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta - \beta}\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}} \qquad \beta = \frac{U}{c}$$

$$\sin\theta' = \frac{v_y'}{v'} = \frac{v_y'}{c} = \frac{1}{c}\frac{v_y}{\gamma\left(1-\frac{Uv_x}{c^2}\right)} = \frac{1}{\cancel{c}}\frac{\cancel{c}\sin\theta}{\gamma\left(1-\frac{Uc\cos\theta}{c^2}\right)} =$$

$$\boxed{v' = c = v}$$

$$\sin\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}$$

$$\cos\theta' = \frac{v_x'}{v'} = \frac{v_x'}{c} = \frac{1}{c}\frac{v_x - U}{1-\frac{Uv_x}{c^2}} = \frac{1}{c}\frac{c\cos\theta - U}{1-\frac{Uc\cos\theta}{c^2}} = \frac{\cos\theta - \beta}{1-\beta\cos\theta}$$

$$\Delta\theta = \theta' - \theta \doteq \sin(\theta'-\theta) = \underbrace{\sin\theta'}\cos\theta - \sin\theta\underbrace{\cos\theta'} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\gamma(1-\beta\cos\theta)} - \frac{\sin\theta(\cos\theta-\beta)}{1-\beta\cos\theta} = \frac{\sin\theta\cos\theta\left(\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}-1\right)+\beta\sin\theta}{\underbrace{1-\beta\cos\theta}} =$$

malé $U \ll c$

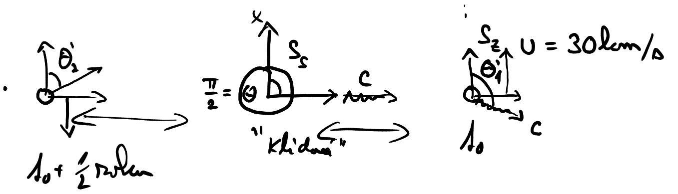
Taylor do 1. řádu v β

$x \sim \sin x$

$$= \left(\sin\theta\cos\theta\left(\underbrace{\cancel{\sqrt{1-\beta^2}}}_{\approx 1}-1\right)+\beta\sin\theta\right)\cdot(1+\beta\cos\theta) = \beta\sin\theta + \underbrace{\beta^2\sin\theta\cos\theta}_{\text{malé vůči } \beta \ll 1}$$

45) Aberace světla stálic: Hvězdy opisují během roku na obloze malé elipsy, kružnice nebo úsečky o úhlovém rozměru asi 41". Vysvětlete tento jev pohybem Země kolem Slunce rychlostí V= 30km/s.

$$\Delta\theta = \theta' - \theta \doteq \beta\sin\theta$$

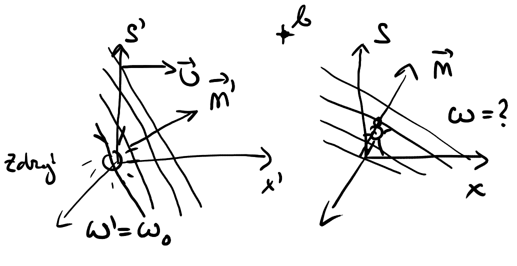


$$\Delta\theta' = \theta_1' - \theta_2' = \theta_1' - \theta + \theta - \theta_2' \doteq \beta_1\sin\theta - \beta_2\sin\theta = 2\beta_1\sin\theta$$

$$\beta_1 = -\beta_2$$

$$\Delta\theta' = 2\cdot\frac{U}{c}\underbrace{\sin\theta}_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 2\cdot\frac{3\cdot 10^4}{3\cdot 10^8} = 2\cdot 10^{-4}\ \text{rad} = 41{,}25''$$

46) Dopplerův jev. Inerciální soustavy S a S' jsou svázány specialní Lorentzovou transformací podél osy x. Soustava S je spojena s pozorovatelem, S' je klidovou soustavou zdroje monochromatické světelné vlny ve vakuu s úhlovou frekvencí $\omega' = \omega_0$. Předpokládejte, že vlna je rovinná a šíří se v soustavě S' ve směru $n' = (\cos\theta', \sin\theta', 0)$ a v soustavě S ve směru $n = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$. Jakou frekvenci ω bude registrovat pozorovatel? Specializujte výsledek pro podélný ($\theta = 0$) a příčný ($\theta = \pi/2$) Dopplerův jev.
Návod: fáze vlny je v obou soustavách stejná.



v S' $\vec{m}' = (\cos\theta', \sin\theta', 0)$

v S $\vec{m} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$

Fáze vlny

$$u(\vec{x}, t) = A\cos\Big[\underbrace{\overset{\text{úhlová frekvence}}{\omega}\left(t - \frac{\vec{r}\cdot\vec{m}}{c}\right)}_{\text{fáze}} + \cancel{\varphi_0}\Big]$$

$$\omega\left(t - \frac{\vec{r}\cdot\vec{m}}{c}\right) = \omega'\left(t' - \frac{\vec{r}'\cdot\vec{m}'}{c}\right)$$

$\omega' = \omega_{zdroj} = \omega_0$

$$\omega\left(t - \frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{c}\right) = \omega'\left(t' - \frac{x'\cos\theta' + y'\sin\theta'}{c}\right)$$

$$\boxed{\omega = \omega'\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{(1-\beta\cos\theta)}}$$

$$\omega\left(\gamma\left(t' + \frac{Ux'}{c^2}\right) - \frac{\gamma}{c}(x' + Ut')\cos\theta - \frac{y'}{c}\sin\theta\right) = \underbrace{\omega'}\left(t' - \frac{x'}{c}\cos\theta' - \frac{y'}{c}\sin\theta'\right)$$

koeficient u t': $\quad \omega\left(\gamma - \frac{\gamma}{c}\cos\theta\, U\right)\underbrace{t'} + \ldots = \omega'\underbrace{t'} - \ldots \quad \Rightarrow \boxed{\omega' = \omega\gamma\left(1 - \frac{U}{c}\cos\theta\right)} \Rightarrow$

$\beta = \frac{U}{c}$

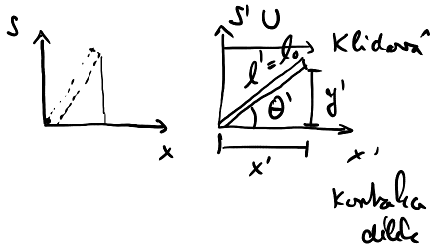
podélný $\Theta = 0$ $\quad \omega = \omega_0 \dfrac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} = \omega_0 \sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}$

$\vec{U}$, $\vec{n}$

příčný $\Theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad \omega = \omega_0 \sqrt{1-\beta^2}$

$\vec{U}$, $\vec{n}$

51) Jak se změní úhel který svítá tyč s osou x pokud je měřen v klidové souastavě a po té v soustavě pohybující se vůči klidové rychlostí U ve směru osy x.



$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}} = \gamma \frac{y'}{x'} = \gamma \operatorname{tg}\Theta'$$

$y = y'$

$x = x' \cdot \sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}$

$\Theta > \Theta'$

52) Přesvědčte se, že z transformačních vztahů pro čtyřrychlost plynou vzroce pro relativistiké skládání rychlostí.

$\mathbb{R}^4$ ... události $\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ $\quad \mu = 0,1,2,3$, $\quad i = 1,2,3$ $\quad x^i$

čtyřvektor polohy

$\tau = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

$\longrightarrow$ čtyřrychlost

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{d\tau}{dt}} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix}$$

$\vec{v}$

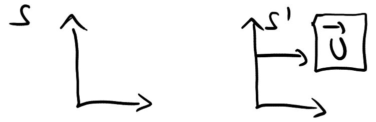
$d\tau = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dt$ i pro zrychlující částice

$u'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu$

$\dfrac{dt}{d\tau} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \qquad \dfrac{d\tau}{dt} = \dfrac{1}{\gamma}$

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \boxed{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Boost



$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}}_{\gamma_2} \begin{pmatrix} c \\ v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}_{\gamma_1} \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$\gamma_2 c = \gamma\gamma_1 c - \beta\gamma\gamma_1 v_x = \gamma\gamma_1(c - \beta v_x) \Rightarrow$

$\gamma_2 v'_x = -\beta\gamma\gamma_1 c + \gamma\gamma_1 v_x$

$$v'_x = \frac{1}{\gamma_2}\gamma\gamma_1(-\beta c + v_x) = \frac{v_x - \beta c}{1 - \frac{\beta v_x}{c}} = \frac{v_x - U}{1 - \frac{U v_x}{c^2}}$$

$\boxed{\beta = \frac{U}{c}}$

Lorentzův faktor - Transformace

$$\boxed{\gamma_2 = \gamma\gamma_1\left(1 - \frac{\beta v_x}{c}\right)}$$

$$\gamma_2 v'_y = \gamma_1 v_y \Rightarrow v'_y = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} v_y = \frac{1}{\gamma}\frac{v_y}{\left(1 - \frac{\beta v_x}{c}\right)} = \frac{v_y\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}}{1 - \frac{U v_x}{c^2}}$$