VOAF cvičení

Jan Vysoký, Josef Schmidt

15. února 2023

1 Střední hodnoty

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je reálná funkce jedné proměnné, $f = f(x)$. Její střední hodnota v intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ je definována jako integrál

$$\langle f \rangle_{\langle x_1, x_2 \rangle} := \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx. \tag{1}$$

Střední hodnota přes celé $\mathbb{R}$ se definuje limitním přechodem

$$\langle f \rangle \equiv \langle f \rangle_{\langle -\infty, \infty \rangle} = \lim_{x' \to \infty} \langle f \rangle_{\langle -x', x' \rangle} \equiv \lim_{x' \to \infty} \frac{1}{2x'} \int_{-x'}^{x'} f(x) dx. \tag{2}$$

Je-li f periodická s periodou L, můžeme její střední hodnotu $\langle f \rangle$ počítat jako integrál přes libovolný integrál délky L, tedy pro libovolné $x' \in \mathbb{R}$ máme

$$\langle f \rangle = \langle f \rangle_{\langle x', x'+L \rangle} = \frac{1}{L} \int_{x'}^{x'+L} f(x) dx. \tag{3}$$

x' typicky volíme tak, aby byl výpočet co nejjednodušší.

Cvičení 1.1. Vypočítejte $\langle \cos(\omega t) \rangle$, $\langle \sin(\omega t) \rangle$, $\langle \cos^2(\omega t) \rangle$ a $\langle \sin^2(\omega t) \rangle$.

Řešení: Uvažujme nejprve funkci $f(t) = \cos(\omega t)$. To je periodická funkce s periodou $L = \frac{2\pi}{\omega}$. Její střední hodnotu tedy spočteme jako

$$\langle \cos(\omega t) \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(\omega t) dt = \frac{1}{2\pi} [\sin(\omega t)]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = 0. \tag{4}$$

Případ $\langle \sin(\omega t) \rangle$ je velmi podobný:

$$\langle \sin(\omega t) \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(\omega t) dt = \frac{1}{2\pi} [-\cos(\omega t)]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = 0. \tag{5}$$

Pro další případ, s využitím triku pro výpočet kvadrátu kosínu, dostáváme

$$\begin{aligned} \langle \cos^2(\omega t) \rangle &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t) dt = \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (1 + \cos(2\omega t)) dt \\ &= \frac{\omega}{4\pi} [t - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t)]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{6}$$

To není zas takové překvapení, protože vlastně počítáme střední hodnotu konstantní funkce $\frac{1}{2}$ plus střední hodnotu funkce $\cos(2\omega t)$ přes dvě periody, která je nula z předchozí části.

Jinými slovy, obecně platí $\langle f + g\rangle = \langle f\rangle + \langle g\rangle$ (pokud jsou všechny střední hodnoty konečné). Stačí tedy vzít rovnost $\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$, odkud okamžitě plyne

$$\langle\cos^2(\omega t)\rangle + \langle\sin^2(\omega t)\rangle = \langle 1\rangle = 1. \tag{7}$$

Z předchozího výsledku tedy bez práce dostáváme $\langle\sin^2(\omega t)\rangle = \frac{1}{2}$.

2 Komplexní čísla

Komplexním číslem $z \in \mathbb{C}$ rozumíme objekt ve tvaru $z = a + ib$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Symbol i se nazývá **komplexní jednotka**. Definujeme $i^2 = -1$. Je-li $z' = c + id$, definujeme sčítání a násobení intuitivně a ve shodě s obvyklými pravidly:

$$z + z' = (a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d), \quad zz' = (a + ib)(c + id) := (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Je-li $z = a + ib$, píšeme $a = \operatorname{Re} z$ (**reálná část**) a $b = \operatorname{Im} z$ (**imaginární část**). Je-li $\operatorname{Re} z = 0$, říkáme, že je z **ryze imaginární**. Píšeme $0 \equiv 0 + i0$.

Komplexní sdružení $\bar{z}$ k číslu z definujeme jako $\bar{z} = a - ib$. Platí $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$. **Velikost** $|z|$ **komplexního čísla** definujeme jako $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Platí $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$. Jak definujeme dělení komplexních čísel? Nechť $z, z' \in \mathbb{C}$ a $z' \neq 0$. Definujeme ho pomocí formálního "rozšíření zlomku".

$$\frac{z}{z'} = \frac{z}{z'}\frac{\bar{z}'}{\bar{z}'} := \frac{z\bar{z}'}{|z'|^2}. \tag{8}$$

Operace na pravé straně mají smysl, protože pro $z' \neq 0$ je $|z'| > 0$ a prostě jen násobíme komplexní číslo $z\bar{z}'$ reálným číslem $|z'|^{-2}$. Platí rovnice

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \tag{9}$$

Nyní bychom chtěli definovat **komplexní exponenciálu**, tedy komplexní číslo e^z pro každé $z \in \mathbb{C}$. Je-li $z = a + ib$, definujeme

$$e^z = e^{a+ib} := e^a(\cos b + i \sin b) \tag{10}$$

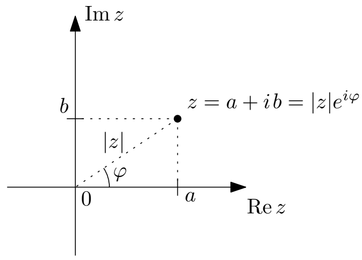
Komplexní exponenciálu lze (viz matematická analýza) lze definovat mocninnou řadou. Pro $a = 0$ se vztah nazývá **Eulerův vzorec**. Platí $|e^z| = e^a$.

Každé $z \in \mathbb{C}$ lze psát v **goniometrickém tvaru** $z = |z|e^{i\varphi}$, kde $\varphi \in \mathbb{R}$ je řešením rovnic

$$\cos(\varphi) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \quad \sin(\varphi) = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}. \tag{11}$$

φ se nazývá **argument komplexního čísla** a je určený jednoznačně až na celočíselného přičtení násobku 2π. Geometrický význam tohoto zápisu lze snadno získat pomocí reprezentace komplexních čísel v **Gaussově rovině**, kde reálnou a imaginární část vynášíme na kartézské osy: Sčítání komplexních čísel geometricky odpovídá sčítání vektorů v rovině. Snadno lze interpretovat i násobení. Je-li $z = |z|e^{i\varphi}$ a $z' = |z'|e^{i\varphi'}$, dostáváme $zz' = |z||z'|e^{i(\varphi+\varphi')}$, tedy číslo jehož velikost je součin velikostí a argument součet úhlů.

Násobení $e^{i\varphi}$ tak například odpovídá rotaci komplexního čísla v Gaussově rovině o úhel φ.



Obrázek 1: Gaussova rovina

Často je užitečné psát goniometrické funkce pomocí komplexních exponenciál. Z Eulerova vzorce získáme vztahy

$$\cos(\varphi) = \mathrm{Re}(e^{i\varphi}) = \frac{\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)}{2}, \quad \sin(\varphi) = \mathrm{Im}(e^{i\varphi}) = \frac{\cos(\varphi) - i\sin(\varphi)}{2i} \tag{12}$$

Pomocí těchto vztahů můžeme definovat $\cos(z)$ a $\sin(z)$ pro libovolné $z \in \mathbb{C}$.

Cvičení 2.1. Nalezněte reálnou a imaginární část čísla

$$w = \frac{a + ib}{c + id} \tag{13}$$

Řešení: Dělení komplexním číslem se provádí formálním rozšířením zlomku a následnou úpravou:

$$w = \frac{a + ib}{c + id}\frac{c - id}{c - id} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}. \tag{14}$$

Odtud již snadno vidíme, že

$$\mathrm{Re}(w) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad \mathrm{Im}(w) = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}. \tag{15}$$

Cvičení 2.2. Ukažte, že platí $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$, speciálně pak $\overline{e^{ib}} = e^{-ib}$.

Řešení: Pro komplexní číslo $z = a + ib$ máme $e^z = e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$ a tedy

$$\overline{e^z} = e^a(\cos b - i\sin b) = e^a e^{-ib} = e^{a-ib} = e^{\bar{z}}. \tag{16}$$

Volbou $a = 0$ získáváme zadaný speciální případ.

Cvičení 2.3. Vypočítejte $\mathrm{Re}[(C - iD)e^{i\Omega t}]$, kde $C, D, \Omega t \in \mathbb{R}$.

Řešení: S použitím Eulerova vzorce

$$\begin{aligned} (C - iD)e^{i\Omega t} &= (C - iD)(\cos(\Omega t) + i\sin(\Omega t)) \\ &= (C\cos(\Omega t) + D\sin(\Omega t)) + i(C\sin(\Omega t) - D\cos(\Omega t)). \end{aligned} \tag{17}$$

Odtud tedy $\mathrm{Re}[(C - iD)e^{i\Omega t}] = C\cos(\Omega t) + D\sin(\Omega t)$.

***Cvičení 2.4.** Dokažte platnost vztahů $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}(z)$ a $\mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}(z)$ pro každé $z \in \mathbb{C}$.

Pomocí nich dokažte platnost identity $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ pro všechny $x \in \mathbb{R}$.

Řešení: Uvažujeme-li $z = a + ib$, pak $\operatorname{Re} z = a$ a $\operatorname{Im} z = b$. Pro $iz = -b + ia$ tedy platí $\operatorname{Re}(iz) = -b$ a $\operatorname{Im}(iz) = a$. Zjevně tedy platí

$$\operatorname{Re} z = a = \operatorname{Im}(iz), \qquad \operatorname{Im} z = b = -\operatorname{Re}(iz). \tag{18}$$

Goniometrickou identitu pak dostaneme jako

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \operatorname{Im}(ie^{ix}) = \operatorname{Im}(e^{i\frac{\pi}{2}}e^{ix}) = \operatorname{Im}(e^{i(x+\frac{\pi}{2})}) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \tag{19}$$

kde jsme si zapsali $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Cvičení 2.5. Odvoďte vzorce pro síny a kosíny součtu a rozdílu úhlů pomocí triviální identity

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}. \tag{20}$$

Řešení: Levou stranu přepíšeme pomocí Eulerova vzorce a roznásobíme:

$$\begin{aligned} e^{i\alpha}e^{i\beta} &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta). \end{aligned} \tag{21}$$

Porovnáním reálné a imaginární části s pravou stranou $\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$ dostáváme kýžené vzorce. Vzorec pro rozdíl získáme snadno dosazením $-\beta$ místo β.

***Cvičení 2.6.** Odvoďte vzorce pro součiny sínů a kosínů úpravou výrazu

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\beta}{2}}(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}). \tag{22}$$

Řešení: Tentokrát začneme úpravou pravé strany. Snadno si všimneme, že ji můžeme psát jako

$$2e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + i2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{23}$$

Porovnáním s levou stranou $(\cos\alpha + \cos\beta) + i(\sin\alpha + \sin\beta)$ dostáváme výsledek.

***Cvičení 2.7.** Dokažte platnost vztahů

$$\sin(ix) = i\sinh(x), \;\; \cos(ix) = \cosh(x), \;\; \sinh(ix) = i\sin(x), \;\; \cosh(ix) = \cos(x). \tag{24}$$

Řešení: Všechny vztahy se dokazují stejně, dokážeme si jen dva z nich. Máme (z definice komplexních sínů a kosínů)

$$\sin(ix) = \frac{e^{i(ix)} - e^{-i(ix)}}{2i} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2i}\frac{i}{i} = i\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = i\sinh x. \tag{25}$$

$$\cosh(ix) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x. \tag{26}$$

Zde jsme využili definice komplexního hyperbolického kosínu $\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$. Všimněte si, že platí obecně $\cosh(iz) = \cos(z)$ a $\sinh(iz) = i\sin(z)$.

Cvičení 2.8. Uvažujte výraz $c_1e^{i\omega t} + c_2e^{-i\omega t}$, kde $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ a $\omega t \in \mathbb{R}$. Jaké jsou podmínky na konstanty c_1 a c_2, aby byl výraz reálný pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Řešení: Musí platit $\mathrm{Im}(c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}) = 0$. To nastane, je-li výraz rovný svému komplexnímu sdružení. Dostávám tedy

$$c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} = \bar{c}_1 e^{-i\omega t} + \bar{c}_2 e^{i\omega t}. \tag{27}$$

To upravím na rovnici

$$(c_1 - \bar{c}_2) e^{i\omega t} = (c_2 - \bar{c}_1) e^{-i\omega t}. \tag{28}$$

Volbou $t = 0$ dostanu $c_1 - \bar{c}_2 = c_2 - \bar{c}_1$ a volbou $t = \frac{\pi}{2\omega}$ rovnici $c_1 - \bar{c}_2 = -(c_2 - \bar{c}_1)$. To mi ihned implikuje, že obě strany rovnice musí být nula a tedy nutně $c_2 = \bar{c}_1$. Snadno vidím, že je to i podmínka postačující, protože potom

$$c_1 e^{i\omega t} + \bar{c}_1 e^{-i\omega t} = 2\,\mathrm{Re}(c_1 e^{i\omega t}) \in \mathbb{R}. \tag{29}$$

Cvičení 2.9. Řešení rovnice harmonického oscilátoru lze psát v ekvivalentních tvarech jako

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A\sin(\omega t + \phi) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = c e^{i\omega t} + \bar{c} e^{-i\omega t}. \tag{30}$$

Najděte vztah mezi konstantami A, ω, φ, ϕ, a, b a c.

Řešení: Vztah mezi φ a ϕ získáme snadno z již dokázané identity $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$. Odtud $\phi = \varphi + \frac{\pi}{2}$. S použitím součtových vzorců dostáváme

$$A\cos(\omega t + \varphi) = A(\cos(\omega t)\cos(\varphi) - \sin(\omega t)\sin(\varphi)) = A\cos(\varphi)\cos(\omega t) - A\sin(\varphi)\sin(\omega t). \tag{31}$$

Máme tedy $a = A\cos(\varphi)$ a $b = -A\sin(\varphi)$. Všimněte si, že pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ můžeme najít A a φ splňující tento vztah. Na závěr, s použitím zápisu sínů a kosínů pomocí komplexních exponenciál:

$$\begin{aligned} a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) &= a\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} + b\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \\ &= \frac{1}{2}(a - ib)e^{i\omega t} + \frac{1}{2}(a + ib)e^{-i\omega t}. \end{aligned} \tag{32}$$

Vidíme, že $c = \frac{1}{2}(a - ib)$. Ke každému komplexnímu číslu $c \in \mathbb{C}$ najdu $a, b \in \mathbb{R}$ splňující tento vztah. A máme hotovo.

***Cvičení 2.10.** „Dokažte“ Eulerův vzorec pomocí diferenciální identity

$$\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x} \tag{33}$$

Řešení: Uvažujme komplexní funkci reálné proměnné $f(x) = \cos(x) + i\sin(x)$. Její derivací po složkách $f'(x) = -\sin(x) + i\cos(x) = if(x)$. Platí $f(0) = 1$. Ale stejnou obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu se stejnými počátečními podmínkami řeší i funkce e^{ix}. Z jednoznačnosti

$$e^{ix} = f(x) = \cos(x) + i\sin(x) \tag{34}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a máme dokázáno.

***Cvičení 2.11.** Zapište funkce $\cos^2(x)$, $\cos^3(x)$ a obecně $\cos^n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, pouze s využitím funkcí $\cos(kx)$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Řešení: S využitím Eulerova vzorce dostáváme

$$\cos^2(x) = \Big(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\Big)^2 = \frac{1}{4}(e^{2ix}+2e^{ix}e^{-ix}+e^{-2ix}) = \frac{1}{4}(2+2\cos(2x)) = \frac{1+\cos(2x)}{2}. \quad (35)$$

Pro třetí mocninu je to velmi podobné, dostáváme

$$\begin{aligned}\cos^3(x) &= \Big(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\Big)^3 = \frac{1}{8}(e^{3ix}+3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}+e^{-3ix})\\ &= \frac{1}{8}(2\cos(3x)+6\cos(x)) = \frac{3\cos(x)+\cos(3x)}{4}\end{aligned} \quad (36)$$

Pro obecné $n \in \mathbb{N}$ dostáváme s použitím binomické věty

$$\cos^n(x) = \Big(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\Big)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{ix})^k(e^{-ix})^{n-k} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(2k-n)x} \quad (37)$$

Nyní je výhodné rozlišit n na liché a sudé. Pro liché n má suma sudý počet sčítanců a můžeme si ji rozdělit na dvě sumy:

$$\frac{1}{2^n}\Big(\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{k}e^{i(2k-n)x} + \sum_{k=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}^{n}\binom{n}{k}e^{i(2k-n)x}\Big) \quad (38)$$

V druhé sumě provedeme záměnu sčítacího indexu na $q = n-k$ a využijeme symetrii binomických koeficientů $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Druhou ze sum tedy můžeme přepsat jako

$$\sum_{q=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{q}e^{-i(2q-n)x} \quad (39)$$

Vidíme, že se od první sumy liší jen znaménkem v exponentu. S použitím Eulerových vzorců tedy dostávám formulku

$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{q}\cos((n-2k)x) \quad (40)$$

Pro sudé n je situace podobná až na to, že se suma rozloží na tři členy:

$$\frac{1}{2^n}\Big(\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{k}e^{i(2k-n)x} + \binom{n}{n/2} + \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n}\binom{n}{k}e^{i(2k-n)x}\Big) \quad (41)$$

Záměnou sčítacího indexu v třetím členu a Eulerovým vzorcem dostáváme tedy nakonec vzorec

$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\Big(\frac{1}{2}\binom{n}{n/2} + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{k}\cos((n-2k)x)\Big). \quad (42)$$

Všimněte si, že poslední člen je poloviční oproti dosazení $k = n/2$ do sumy vpravo.

***Cvičení 2.12.** Sečtěte řadu

$$\sum_{m=0}^{N}\cos mx \quad (43)$$

Řešení: S použitím linearity funkce Re můžeme psát

$$\sum_{m=0}^{N} \cos mx = \mathrm{Re}\left[\sum_{m=0}^{n} e^{imx}\right] = \mathrm{Re}\left[\sum_{m=0}^{N} (e^{ix})^m\right] \tag{44}$$

Nyní stačí použít známou formulku pro součet geometrické řady $\sum_{m=0}^{N} a^m = \frac{a^{N+1}-1}{a-1}$ pro $a = e^{ix}$. Tento výraz ještě můžeme upravit jako

$$\frac{a^{N+1}-1}{a-1} = a^{\frac{N}{2}} \frac{a^{\frac{N+1}{2}} - a^{-\frac{N+1}{2}}}{a^{1/2} - a^{-1/2}} = e^{i\frac{N}{2}x} \frac{e^{i\frac{N+1}{2}x} - e^{-i\frac{N+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = e^{i\frac{N}{2}x} \frac{\sin(\frac{N+1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}}. \tag{45}$$

Po dosazení do formulky výše tedy dostáváme

$$\sum_{m=0}^{N} \cos mx = \frac{\sin(\frac{N+1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}} \mathrm{Re}\left[e^{i\frac{N}{2}x}\right] = \frac{\sin(\frac{N+1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}} \cos\frac{N}{2}x. \tag{46}$$

Cvičení 2.13. Vypočítejte určité integrály

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx\, dx, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx\, dx. \tag{47}$$

*Vypočítejte i příslušné neurčité integrály (primitivní funkce).

Řešení: Druhý integrál vynásobíme komplexní jednotkou a přičteme k prvnímu. Z linearity integrálu potom dostaneme jeden integrál z komplexní exponenciály:

$$\int e^{-ax} \cos bx\, dx + i \int e^{-ax} \sin bx\, dx = \int e^{-ax}(\cos bx + i \sin bx) dx = \int e^{-(a-ib)x} dx. \tag{48}$$

Ten můžeme snadno spočítat pomocí běžné formulky.

$$\int e^{-(a-ib)x} dx = -\frac{1}{a-ib} e^{-(a-ib)x} + C, \tag{49}$$

kde $C \in \mathbb{C}$ je nějaká komplexní konstanta. Pro určitý integrál dostáváme

$$\int_0^{+\infty} e^{-(a-ib)x} dx = \left[-\frac{1}{a-ib} e^{-(a-ib)x}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{a-ib} = -\frac{a+ib}{a^2+b^2}. \tag{50}$$

Porovnávním reálné a imaginární části dostaneme hledané integrály:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx\, dx = -\frac{a}{a^2+b^2}, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx\, dx = -\frac{b}{a^2+b^2}. \tag{51}$$

Pro neurčité integrály pokračujeme v úpravách

$$\int e^{-(a-ib)x} dx = -\frac{1}{a-ib} e^{-(a-ib)x} + C = -\frac{a+ib}{a^2+b^2} e^{-ax}(\cos(bx) + i \sin(bx)) + C. \tag{52}$$

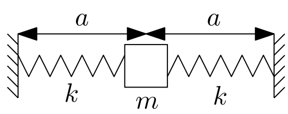
Píšeme-li $C = C_1 + iC_2$, porovnáním reálné a imaginární části dostaneme hledané integrály:

$$\int e^{-ax} \cos bx\, dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(a \cos(bx) - b \sin(bx)) + C_1, \tag{53}$$

$$\int e^{-ax} \sin bx\, dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(a \sin(bx) + b \cos(bx)) + C_2. \tag{54}$$

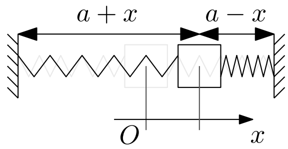
3 Malé kmity a metoda módů

Cvičení 3.1. Sestavte potenciál pro podélné a příčné kmity závaží na pružinách jako na obrázku. Délka nenatažených pružin je a_0.



Nalezněte tvary těchto potenciálů v aproximaci malých kmitů.

Řešení: Uvažujme nejprve podélné kmity závaží. Zavedu si souřadnici x popisující výchylku závaží z rovnovážné polohy ve směru doprava:



Potenciální energie pružinky má vždy tvar $\frac{1}{2}$tuhost(délka − klidová délka)^2. Potenciál podélných kmitů je součtem potenciálových energií (jako funkcí výchylky x) obou pružinek: $U(x) = U_1(x) = U_2(x)$. Zde $U_1(x) = \frac{1}{2}k(a + x - a_0)^2$ a $U_2 = \frac{1}{2}k(a - x - a_0)^2$ a tedy

$$U(x) = \frac{1}{2}k(a + x - a_0)^2 + \frac{1}{2}k(a - x - a_0)^2. \tag{55}$$

Připomeňme, co se myslí „aproximací malých kmitů". Obecně pro systém s n stupni volnosti, zavedeme souřadnice $(x_1, \ldots, x_n)$ popisující výchylku z *rovnovážné polohy*. Píšeme-li $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, nalezeneme potenciálovou funkci $U = U(\vec{x})$. Potenciál v aproximaci malých kmitů je

$$U_{m.k.}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{U}_{ij}x_i x_j, \quad \mathbb{U}_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_{\vec{x}=0}. \tag{56}$$

Zde máme $n = 1$ a $x_1 \equiv x$. Matice $\mathbb{U}$ má velikost 1×1 a její jediný prvek je dán druhou derivací funkce $U = U(x)$ v bodě $x = 0$. Máme

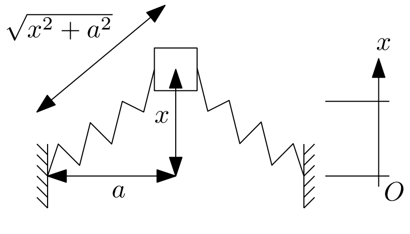
$$U'(x) = k(a + x - a_0) - k(a - x + a_0), \quad U''(x) = 2k, \quad U''(0) = 2k. \tag{57}$$

Je vždy výhodné ověřit, že první parciální derivace U v $\vec{x} = 0$ jsou nulové a tedy, že bod $\vec{x} = 0$ je skutečně rovnovážnou polohou! Zde $U'(0) = k(a - a_0) - k(a - a_0) = 0$. Matice $\mathbb{U}$ má tedy tvar

$$\mathbb{U} = \big(U''(0)\big) = \big(2k\big)\,. \tag{58}$$

Dosazením do vztahu pro potenciál malých kmitů dostáváme $U_{m.k.}(\vec{x}) = kx^2$.

Nyní uvažujme příčné kmity:

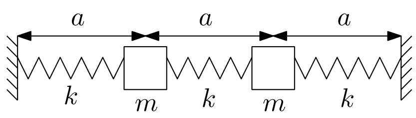


Délky obou pružinek pro danou výchylku jsou identické, a tedy $U_1(x) = U_2(x) = \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2+a^2} - a_0)^2$. Máme tedy $U(x) = k(\sqrt{x^2+a^2} - a_0)^2 = k(x^2 + a^2 + a_0^2 - 2a_0\sqrt{x^2+a^2})$. Tedy

$$U'(x) = k\left(2x - 2a_0\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right), \quad U''(x) = 2k\left[1 - a_0\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)'\right)\right] \tag{59}$$

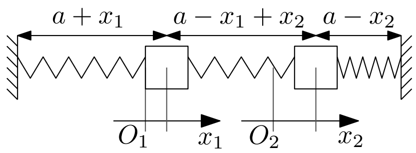
Po dosazení tedy $U''(0) = 2k(1 - \frac{a_0}{a})$ a $U_{m.k.}(x) = k(1 - \frac{a_0}{a})x^2$. Všimněte si, že pro $a = a_0$ je $U''(0) = 0$, a tedy $U_{m.k.}(x) \equiv 0$. Navzdory tomu má $U = U(x)$ v $x = 0$ ostré lokální minimum! Aproximace malých kmitů má své limity.

Cvičení 3.2. Sestavte pohybové rovnice pro podélné kmity soustavy na obrázku. Délka nenatažených pružin je a_0.



Nalezněte jejich řešení metodou módů.

Řešení: Zavedeme souřadnice výchylek (x_1, x_2) jako na obrázku:



Potenciál je tedy dán vztahem

$$U(\vec{x}) = \frac{1}{2}k(a + x_1 - a_0)^2 + \frac{1}{2}k(a - x_1 + x_2 - a_0)^2 + \frac{1}{2}k(a - x_2 - a_0)^2. \tag{60}$$

Parciální derivace dávají:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = k(a + x_1 - a_0) - k(a - x_1 + x_2 - a_0) = 2kx_1 - kx_2, \tag{61}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = k(a - x_1 + x_2 - a_0) - k(a - x_2 - a_0) = -kx_1 + 2kx_2. \tag{62}$$

Odtud již snadno sestavíme matici druhých derivací v bodě $\vec{x} = 0$:

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}. \tag{63}$$

Obě závaží mají hmotnost m a tedy snadno vidím, že matice kinetické energie $\mathbb{T}$ je tvaru

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}. \tag{64}$$

Pohybové rovnice (úlohy malých kmitů) pro vektor výchylek $\vec{x} = \vec{x}(t)$ jsou dané maticovou rovnicí $\mathbb{T}\ddot{\vec{x}} + \mathbb{U}\vec{x} = 0$. Dosazením dostáváme

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 \end{pmatrix}. \tag{65}$$

Metoda módů funguje následovně. Tvrdí, že obecné řešení pohybových rovnic je superpozicí harmonických pohybů (módů) ve tvaru $\vec{x}(t) = A\vec{a}\cos(\omega t + \varphi)$, kde ω (vlastní frekvence módu) je jedno z řešení *sekulární rovnice*

$$\det(\mathbb{U} - \omega^2\mathbb{T}) = 0 \tag{66}$$

A vektor $\vec{a}$ odpovídající vlastní frekvenci ω dostaneme vyřešením soustavy lineárních rovnic $(\mathbb{U} - \omega^2\mathbb{T})\vec{a} = 0$. V našem případě dostáváme sekulární rovnici ve tvaru

$$0 = \det\begin{pmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{pmatrix} = (2k - m\omega^2)^2 - k^2 = m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 3k^2. \tag{67}$$

To je kvadratická rovnice pro ω^2, která má dvě řešení:

$$\omega^2 = \frac{k(2 \pm 1)}{m} \tag{68}$$

Vlastní frekvence módů jsou tedy

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}},\ \ \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}. \tag{69}$$

Vektory poměrů amplitud $\vec{a} = (a_1, a_2)^T$ dostaneme řešením lineárních rovnic $(\mathbb{U} - \omega^2\mathbb{T})\vec{a} = 0$. Pro první mód:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (\mathbb{U} - \omega_1^2\mathbb{T})\vec{a} = \begin{pmatrix} 2k - m\frac{k}{m} & -k \\ -k & 2k - m\frac{k}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \tag{70}$$

Hledáme tedy vektor jádra a ekvivalentními úpravami dostaneme

$$\begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{71}$$

Řešením této soustavy je libovolný nenulový vektor splňující $a_1 = a_2$, je výhodné si vybrat co nejjednodušší, třeba $\vec{a} = (1, 1)^T$. První mód tedy odpovídá závažíčkům kmitajícím souhlasně!

Pro druhý mód dostaneme podobně soustavu

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (\mathbb{U} - \omega_2^2\mathbb{T})\vec{a} = \begin{pmatrix} 2k - m\frac{3k}{m} & -k \\ -k & 2k - m\frac{3k}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \tag{72}$$

Opět ekvivalentními úpravami

$$\begin{pmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{73}$$

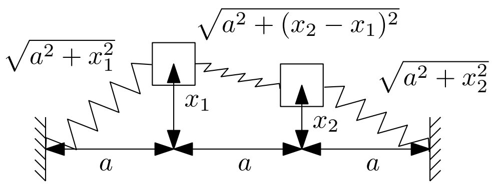
Jejím řešením je libovolný vektor splňující $a_1 = -a_2$, volíme tedy $\vec{a} = (1, -1)^T$. Druhý mód je tedy protiběžné kmitání dvou závažíček. Na závěr, nejobecnější řešení úlohy je dané superpozicí módů, tedy součtem

$$\vec{x}(t) = A_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_1\right) + A_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \varphi_2\right), \tag{74}$$

kde konstanty $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$ musíme získat z počátečních podmínek.

Cvičení 3.3. Uvažujte stejný případ jako výše, jen pro příčné kmity.

Řešení: Zavedeme si souřadnice $\vec{x} = (x_1, x_2)$ jako na obrázku:



Potenciál najdeme ze známých délek pružinek:

$$U(\vec{x}) = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{a^2 + x_1^2} - a_0\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{a^2 + (x_2 - x_1)^2} - a_0\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{a^2 + x_2^2} - a_0\right)^2. \quad (75)$$

Před výpočtem parciálních derivací je výhodné si trošku přeskupit členy:

$$U(\vec{x}) = \frac{1}{2}k\big(x_1^2+(x_2-x_1)^2+x_2^2-2a_0\{\sqrt{a^2 + x_1^2}+\sqrt{a^2 + (x_2 - x_1)^2}+\sqrt{a^2 + x_2^2}\}+\text{konstanty}\big). \quad (76)$$

Odtud již dostáváme relativně snadno

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = k\left[x_1 - (x_2 - x_1) - a_0\left(\frac{x_1}{\sqrt{a^2 + x_1^2}} + \frac{-(x_2 - x_1)}{\sqrt{a^2 + (x_2 - x_1)^2}}\right)\right], \quad (77)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = k\left[(x_2 - x_1) + 2x_2 - a_0\left(\frac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{a^2 + (x_2 - x_1)^2}} + \frac{2x_2}{\sqrt{a^2 + x_2^2}}\right)\right]. \quad (78)$$

Nyní je potřeba derivovat chytře a rovnou dosazovat $\vec{x} = 0$, což zajistí, že už znovu nemusíme derivovat odmocniny. Dostaneme

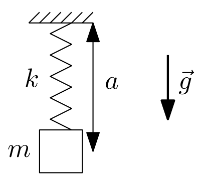
$$\mathbb{U}_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}\Big|_{\vec{x}=0} = 2k\left(1 - \frac{a_0}{a}\right), \quad \mathbb{U}_{12} = -k\left(1 - \frac{a_0}{a}\right). \quad (79)$$

Ze symetrie parciálních derivací $\mathbb{U}_{21} = \mathbb{U}_{12}$ a ze symetrie úlohy $\mathbb{U}_{22} = \mathbb{U}_{11}$, a tedy

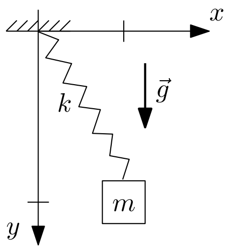
$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} 2k' & -k' \\ -k' & 2k' \end{pmatrix}, \quad k' = k\left(1 - \frac{a_0}{a}\right). \quad (80)$$

Matice $\mathbb{U}$ je tedy úplně stejná jako v předchozím příkladě, jen nahradíme k za k'. Jelikož matice kinetické energie $\mathbb{T}$ je úplně stejná, můžeme bez obav použít výsledek předchozího cvičení.

Cvičení 3.4. Nalezněte potenciál pružinového kyvadla (viz obrázek) v aproximaci malých kmitů. Kyvadlo může vykonávat dvourozměrný pohyb ve svislé rovině.



Řešení: Nejprve si ukažme, že a, tedy délku pružiny v rovnovážné poloze, můžeme nalézt a vyjádřit pomocí konstant g, k a m. Nechť je klidová délka pružiny a_0 a zaveďme si souřadnice x, y vzhledem k závesu kyvadla:



Potenciálová energie má tvar $U(x,y) = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+y^2} - a_0\right)^2 - mgy$. Hledáme minimum (x_0, y_0):

$$0 = \frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0)} = k\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2} - a_0\right)\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \tag{81}$$

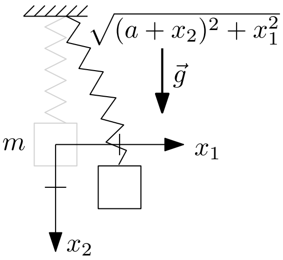
$$0 = \frac{\partial U}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0)} = k\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2} - a_0\right)\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} - mg \tag{82}$$

$$\tag{83}$$

První rovnost může nastat pro $\sqrt{x_0^2+y_0^2} = a_0$, ale to vylučuje platnost druhé z rovnic. Musí tedy nastat $x_0 = 0$ a druhá rovnice nám dává

$$k(y_0 - a_0) - mg = 0. \tag{84}$$

To je pochopitelně podmínka rovnosti pružné a gravitační síly, odkud $a \equiv y_0 = \frac{m}{k}g + a_0$. Nyní zpět k úloze malých kmitů. Zavedeme souřadnice (x_1, x_2) jako na obrázku:



Potenciál je dán součtem pružné a gravitační potenciálové energie:

$$\begin{aligned} U(\vec{x}) &= \frac{1}{2}k\left(\sqrt{(a+x_2)^2+x_1^2} - a_0\right)^2 - mg(a+x_2) \\ &= \frac{1}{2}\left(k(x_2^2+x_1^2 - 2a_0\sqrt{(a+x_2)^2+x_1^2}\right) + (ka-mg)x_2 + \text{konstanty} \end{aligned} \tag{85}$$

Parciální derivace jsou tedy

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = k\left(x_1 - a_0\frac{x_1}{\sqrt{(a+x_2)^2+x_1^2}}\right), \tag{86}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = k\left(x_2 - a_0\frac{a+x_2}{\sqrt{(a+x_2)^2+x_1^2}}\right) + ka - mg. \tag{87}$$

Druhé derivace jsou trošku komplikovanější, protože se nevyhneme dalšímu derivování odmocniny podle x_2. Dostaneme

$$\mathbb{U}_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}\Big|_{\vec{x}=0} = k\left(1 - \frac{a_0}{a}\right), \tag{88}$$

$$\mathbb{U}_{12} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}\Big|_{\vec{x}=0} = 0, \tag{89}$$

$$\mathbb{U}_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}\Big|_{\vec{x}=0} = k. \tag{90}$$

Vidíme, že člen od gravitační síly úplně zmizel. Matice potenciální energie je diagonální. Výsledný potenciál malých kmitů má tvar

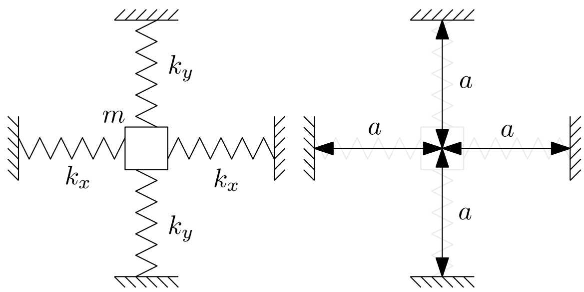
$$U_{m.k.}(\vec{x}) = \frac{1}{2}k\left(1 - \frac{a_0}{a}\right)x_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2. \tag{91}$$

Díky diagonálnosti matice $\mathbb{U}$ vyjdou pohybové rovnice nezávislé:

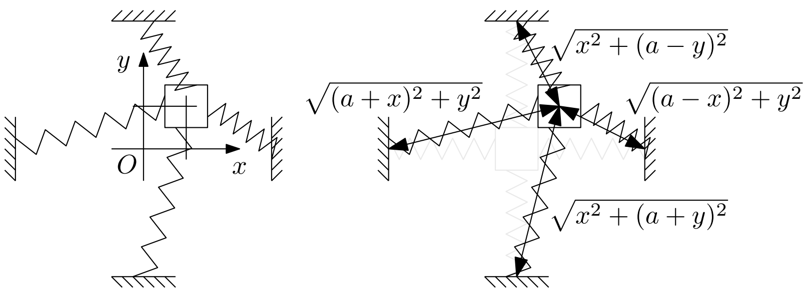
$$m\ddot{x}_1 + k\left(1 - \frac{a_0}{a}\right)x_1 = 0, \qquad m\ddot{x}_2 + kx_2 = 0. \tag{92}$$

Tento systém má tedy dva módy – jeden odpovídá kmitům ve vodorovném směru x_1 s frekvencí $\sqrt{\frac{k}{m}(1 - \frac{a_0}{a})}$ a druhý kmitům ve svislém směru x_2 s frekvencí $\sqrt{\frac{k}{m}}$. Vodorovné kmitání odpovídá příčným kmitům vůči pružině a svislé odpovídá podélným kmitům. To vysvětluje tvar přítomnost (efektivní) tuhosti $k' = k(1 - \frac{a_0}{a})$ a k v úhlových frekvencích.

***Cvičení 3.5.** Nalezněte potenciál pružinového kyvadla (viz obrázek) v aproximaci malých kmitů. Kyvadlo může konat dvourozměrný pohyb ve svislé rovině.



Řešení: Zavedeme si souřadnice (x, y) jako na obrázku:



Potenciálovou energii dostaneme z trošky těch Pythagorových vět:

$$\begin{aligned} U(\vec{x}) &= \frac{1}{2}k_x\left(\left(\sqrt{(a+x)^2+y^2}-a_{0x}\right)^2+\left(\sqrt{(a-x)^2+y^2}-a_{0x}\right)^2\right) \\ &+\frac{1}{2}k_y\left(\left(\sqrt{x^2+(a-y)^2}-a_{0y}\right)^2+\left(\sqrt{x+(a+y)^2}-a_{0y}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}k_x\left(2x^2+2y^2-2a_{0x}\left(\sqrt{(a+x)^2+y^2}+\sqrt{(a-x)^2+y^2}\right)\right) \\ &+\frac{1}{2}k_y\left(2y^2+2x^2-2a_{0y}\left(\sqrt{(a+y)^2+x^2}+\sqrt{(a-y)^2+x^2}\right)\right)+\text{konstanty.} \end{aligned} \tag{93}$$

Derivací U podle x dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= k_x\left[2x-a_{0x}\left(\frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2+y^2}}+\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}\right)\right] \\ &+k_y\left[2x-a_{0y}\left(\frac{x}{\sqrt{(a+y)^2+x^2}}+\frac{x}{\sqrt{((a-y)^2+x^2}}\right)\right]. \end{aligned} \tag{94}$$

Nyní je třeba postupovat chytře. Při další parciální derivaci podle x si všimneme, že ošklivé členy v prvním řádku jsou složené funkce, které se liší jen záměnou x za $-x$. Při derivaci a dosazení $\vec{x}=0$ se tedy nutně odečtou. V druhém řádku zase nemusíme derivovat odmocniny, protože stejně dosazujeme $x=0$. Výpočet tedy není tak strašný:

$$\mathbb{U}_{11}=\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{\vec{x}=0}=2k_x+2k_y\left(1-\frac{a_{0x}}{a}\right). \tag{95}$$

Ze symetrie úlohy je jasné, že $\mathbb{U}_{22}$ dostaneme záměnou x a y:

$$\mathbb{U}_{22}=\left.\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right|_{\vec{x}=0}=2k_y+2k_x\left(1-\frac{a_{0y}}{a}\right). \tag{96}$$

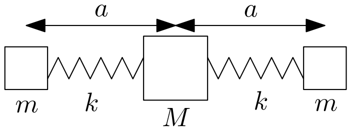
Zbývá spočítat smíšený člen. Parciální derivace ošklivých členů v prvním řádku dají nulu, protože výsledek bude úměrný y, a v druhém řádku se odečtou, protože jsou to opět složené funkce, lišící se jen záměnou y a $-y$. Dostaneme tedy $\mathbb{U}_{12}=0$.

Výsledná matice $\mathbb{U}$ je tedy opět diagonální a pohybové rovnice jsou tedy nezávislé rovnice harmonického oscilátoru ve vodorovném a svislém směru:

$$m\ddot{x}+\left[2k_x+2k_y\left(1-\frac{a_{0x}}{a}\right)\right]x=0, \qquad m\ddot{y}+\left[2k_y+2k_x\left(1-\frac{a_{0y}}{a}\right)\right]y=0. \tag{97}$$

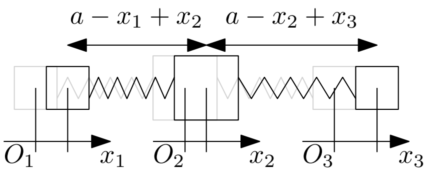
Z tvarů úhlových frekvencí jednotlivých módů také vidíme, že pro vodorovné kmity (rovnice pro x) jsou vodorovné pružiny podélně kmitající a svislé příčně kmitající, pro svislé kmity (rovnice pro y) je tomu naopak.

Cvičení 3.6. Nalezněte řešení pohybových rovnic následující soustavy metodou módů. Povolený je pouze podélný pohyb. Předpokládejte, že a je klidová délka pružiny.



Je nalezené řešení úplné? „Kde se stala chyba“?

Řešení: Zavedeme souřadnice jako na obrázku:



Nyní máme $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ a potenciál má tvar

$$\begin{aligned} U(\vec{x}) &= \frac{1}{2}k(a - x_1 + x_2 - a)^2 + \frac{1}{2}k(a - x_2 + x_3 - a)^2 \\ &= \frac{1}{2}k(x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3) + \text{konstanty}. \end{aligned} \tag{98}$$

Potenciál v aproximaci malých kmitů dostaneme pomocí druhých parciálních derivací a lze si snadno rozmyslet, že dostaneme přesně kvadratickou formu výše, tedy

$$U_{m.k.}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{U}_{ij}x_ix_j = \frac{1}{2}k(x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3). \tag{99}$$

Můžeme také maticově psát $U_{m.k.}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\vec{x}^T\mathbb{U}\vec{x}$. Odtud snadno vykoukáme, že matice $\mathbb{U}$ má tvar:

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}. \tag{100}$$

Hmotnost jednotlivých závaží jsou m, M a m a tedy matice $\mathbb{T}$ jest

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}. \tag{101}$$

Nyní je třeba vyřešit sekulární rovnici $\det(\mathbb{U} - \omega^2\mathbb{T}) = 0$, která dává

$$\begin{aligned} 0 = \det &\begin{pmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - M\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{pmatrix} = (k - m\omega^2)^2(2k - M\omega^2) - 2k^2(k - m\omega^2) \\ &= (k - m\omega^2)\big[(k - m\omega^2)(2k - M\omega^2) - 2k^2\big] = \omega^2(k - m\omega^2)(mM\omega^2 - k(M + 2m)). \end{aligned} \tag{102}$$

Tato rovnice má tři řešení pro ω^2, která jsou snadno k nalezení, označme je:

$$\omega_0 = 0, \;\; \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \;\; \omega_2 = \sqrt{\frac{k(M + 2m)}{mM}}. \tag{103}$$

Nyní musíme vyřešit rovnice $(\mathbb{U} - \omega^2\mathbb{T})\vec{a} = 0$, abychom dostali vektory poměrů amplitud.

(i) $\omega = 0$. Hledáme vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ řešící soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(a_1 - a_2) \\ k(2a_1 - a_1 - a_3) \\ k(a_3 - a_2) \end{pmatrix}, \tag{104}$$

ekvivalentními úpravami

$$\begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{105}$$

Dostaneme podmínku $a_1 = a_2 = a_3$ a vhodným kandidátem je tedy $\vec{a} = (1, 1, 1)^T$. V tomto módu závažíčka vůbec nekmitají.

(ii) $\omega = \sqrt{k/m}$. Řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ -k & k(2 - \frac{M}{m}) & -k \\ 0 & -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ka_2 \\ -ka_1 + k(2 - \frac{M}{m})a_2 - ka_3 \\ -ka_2 \end{pmatrix}, \tag{106}$$

opět ekvivalentními úpravami

$$\begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ -k & k(2 - \frac{M}{m}) & -k \\ 0 & -k & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 - \frac{M}{m} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{107}$$

Řešením je $a_2 = 0$ a $a_1 = -a_3$. Volíme např. $\vec{a} = (1, 0, -1)$. Prostřední závaží nekmitá a krajní kmitají protiběžně s úhlovou frekvencí $\sqrt{\frac{k}{m}}$.

(iii) $\omega = \sqrt{\frac{k(M+2m)}{mM}}$. Řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2m}{M}k & -k & 0 \\ -k & -\frac{M}{m}k & -k \\ 0 & -k & -\frac{2m}{M}k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k(\frac{2m}{M}a_1 + a_2) \\ -k(a_1 + \frac{M}{m}a_2 + a_3) \\ -k(\frac{2m}{M}a_3 + a_2), \end{pmatrix}, \tag{108}$$

opět ekvivalentními úpravami

$$\begin{pmatrix} -\frac{2m}{M}k & -k & 0 \\ -k & -\frac{M}{m}k & -k \\ 0 & -k & -\frac{2m}{M}k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{2m}{M} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{M}{m} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2m}{M} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{M}{2m} & 0 \\ 0 & \frac{M}{2m} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{109}$$

Musí tedy platit $a_1 = -\frac{M}{2m}a_2$ a $a_3 = -\frac{M}{2m}a_2$. Můžeme volit $a_2 = 1$ a tedy $\vec{a} = (-\frac{M}{2m}, 1, -\frac{M}{2m})^T$. Prostřední závažíčko kmitá a krajní závažíčka kmitají souběžně opačným směrem.

Je řešení úplné? Kořen $\omega = 0$ je ve skutečnosti dvojný a tedy připouští ještě jedno další lineárně nezávislé řešení (viz obecná teorie diferenciálních rovnic) ve tvaru $\vec{x}(t) := A\vec{a}t\cos(\omega t + \varphi)$. Zde máme $\omega = 0$ a dostáváme tedy $\vec{x}(t) = A\cos(\varphi)\vec{a}t$, kde jsme již zjistili $\vec{a} = (1, 1, 1)^T$. To ale odpovídá současnému rovnoměrnému přímočarému pohybu všech tří závažíček!

Chyba se tedy stala v tom, že matice $\mathbb{U}$ není pozitivně definitní – v bodě $(0, 0, 0)$ není stabilní rovnovážná poloha. Metodu malých kmitů tak striktně vzato nelze použít.

Cvičení 3.7. Uvažujte obecné řešení pohybu systému ve tvaru

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \tag{110}$$

Nalezněte konkrétní řešení pro počáteční podmínky

$$x_1(0) = A \neq 0, \;\; x_2(0) = 0, \;\; \dot{x}_1(0) = 0, \;\; \dot{x}_2(0) = 0. \tag{111}$$

Řešení: Zderivováním $\vec{x}$ dostaneme

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = A_1\omega_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\omega_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \tag{112}$$

Dosazením počátečních podmínek potom dostaneme rovnice

$$\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2 \\ A_1 \cos\varphi_1 - A_2 \cos\varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_1\omega_1 \sin\varphi_1 - A_2\omega_2 \sin\varphi_2 \\ -A_1\omega_1 \sin\varphi_1 + A_2\omega_2 \sin\varphi_2 \end{pmatrix}. \tag{113}$$

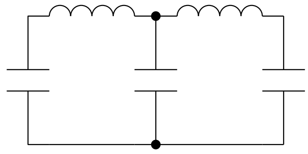
To je soustava čtyř rovnic pro čtyři neznámé. Sečtením a odečtením rovnic dostaneme

$$A_1 \sin\varphi_1 = A_2 \sin\varphi_2 = 0, \qquad A_1 \cos\varphi_1 = A_2 \cos\varphi_2 = \frac{A}{2}. \tag{114}$$

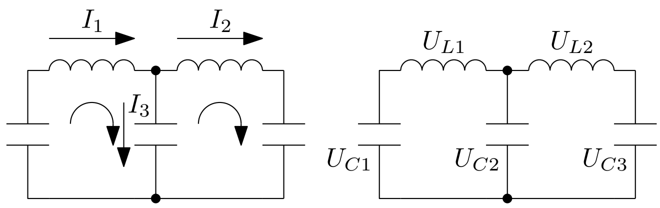
Jelikož $A \neq 0$, druhá sada rovnic nám okamžitě zajistí, že $A_1, A_2 \neq 0$ a tedy musí být z první sady rovnic $\varphi_1, \varphi_2 \in \{0, \pi\}$. Z druhé sady rovnic zjevně pro $\varphi_i = 0$ máme $A_i = \frac{A}{2}$, pro $\varphi_i = \pi$ pak $A_i = -\frac{A}{2}$. Jelikož $\cos(x) = -\cos(x + \pi)$, tyto řešení jsou ekvivalentní a můžeme zvolit $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ a $A_1 = A_2 = A/2$. Hledané unikátní řešení splňující počáteční podmínky je tedy

$$\vec{x}(t) = A/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t) + A/2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t). \tag{115}$$

***Cvičení 3.8.** Nalezněte průběh proudů v obvodu na obrázku:



Řešení: Označme si proudy a jejich kladné směry v jednotlivých větvích, směry obíhání v levé a pravé smyčce a napětí na jednotlivých elementech jako na obrázcích:



Napětí na kondenzátoru a cívce je dané vztahy

$$U_C = \frac{Q}{C}, \qquad U_L = L\dot{I}. \tag{116}$$

Derivací vztahu pro napětí na kondenzátoru podle času dostaneme $\dot{U}_C = \frac{I}{C}$. Díváme-li se na kondenzátory a cívky jako na zdroje napětí v obvodu, pak znaménková konvence je následující: pokud směr obíhání dané smyčky souhlasí se směrem proudu v příslušné větvi, pak do vzorců pro napětí přidáme minus (pokud nesouhlasí, necháváme plus). Tzn. pro levou, resp. pravou, smyčku dostaneme z druhého Kirchhoffova zákona:

$$-U_{C1} - U_{C2} - U_{L1} = 0, \qquad U_{C2} - U_{C3} - U_{L2}. \tag{117}$$

Po zderivování těchto rovnic podle času a dosazení za jednotlivá napětí (a vynásobení minus jedničkou):

$$\frac{1}{C}I_1 - \frac{1}{C}I_3 - L\ddot{I}_1 = 0, \qquad -\frac{1}{C}I_3 + \frac{1}{C}I_2 + L\ddot{I}_2 = 0. \tag{118}$$

Po dosazení za I_3 z prvního Kirchhoffova zákona pro proudy, $I_1 = I_2 + I_3$, dostaneme výslednou sadu diferenciálních rovnic pro proudy tekoucí jednotlivými cívkami:

$$0 = L\ddot{I}_1 + \frac{2}{C}I_1 - \frac{1}{C}I_2 \tag{119}$$

$$0 = L\ddot{I}_2 - \frac{1}{C}I_1 + \frac{2}{C}I_2. \tag{120}$$

Tuhle soustavu si můžeme přepsat maticově jako $\mathbb{T}\ddot{\vec{I}} + \mathbb{U}\vec{I} = 0$, kde $\vec{I} = (I_1, I_2)$ a

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}, \quad \mathbb{U} = \frac{1}{C}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{121}$$

Ale to je soustava rovnic stejná jako v Cvičení 3.2, jen zde $m = L$ a $k = \frac{1}{C}$. Již tedy víme, že obecné řešení má tvar

$$\vec{I}(t) = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}}t + \varphi_1\right) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{3}{LC}}t + \varphi_2\right). \tag{122}$$

Indukčnost cívek zde tedy hraje roli setrvačné hmotnosti – odporu cívek vůči změnám proudu; převrácená hodnota kapacity hraje roli tuhosti pružin – čím menší je hodnota kapacity kondenzátoru, tím rychleji se na něm mění napětí při daném proudu a tedy rychleji působí v obvodu změny proudu.

4 Kmity struny a Fourierovy řady

Cvičení 4.1. Zkrátíme-li strunu o $\Delta l = 10cm$, zvýší se její kmitočet na $\alpha = 1,5$ násobek. Vypočítejte délku struny L. Předpokládejte, že napětí struny zůstane stejné.

Řešení: Struna s pevnými konci délky L v bodech $z = 0$ a $z = L$ má řešení v podobě superpozice módů:

$$\psi(z,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(k_m z)\sin(\omega_m t + \varphi_m). \tag{123}$$

Vztah mezi k a ω je dán **disperzním vztahem** $\omega = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}k$ a m-té vlnové číslo splňuje $k_m = \frac{\pi m}{L}$. ρ_0 je délková hustota struny a T_0 její napětí. Kmitočet f souvisí s úhlovou frekvencí jako $\omega = 2\pi f$.

Označme f' nový kmitočet a L' novou délku struny. Máme tedy $f' = \alpha f$ a $L' = L - \Delta l$. Podle disperzního vztahu (nezměníme-li napětí ani materiál struny) musí zůstat konstantní poměr ω a k (v libovolném ale stejném módu): $\frac{\omega}{k} = \frac{\omega'}{k'}$. Po dosazení dostaneme rovnici

$$fL = f'L' = \alpha f \cdot (L - \Delta l). \tag{124}$$

Odtud snadno vyjádříme L jako $L = \frac{\alpha}{\alpha-1}\Delta l = 3\Delta l = 30cm$.

Cvičení 4.2. Klavírní struna dlouhá $L = 1m$ má průměr $d = 0,5mm$ a vydává základní tón C o frekvenci $f = 256Hz$. Objemová hustota této struny je $\rho = 9g/cm^3$. Jakou silou T_0 je struna napjata?

Řešení: Vlnové číslo základního tónu je $k_1 = \frac{\pi}{L}$. Délkovou hustotu dostaneme vynásobením objemové hustoty průřezem struny, t.j. $\rho_0 = \frac{1}{4}\pi d^2 \rho$. Z disperzního vztahu $\omega = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} k$ tedy

$$T_0 = \frac{\omega^2}{k^2}\rho_0 = 4\rho_0 f^2 L^2 = \pi d^2 \rho f^2 L^2 = 3,14 \cdot (5 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 9000 \cdot 256^2 \approx 459,2N. \tag{125}$$

To je tedy síla, kterou působí závaží o hmotnosti cca 46kg! V piánu je cca 230 strun.

Cvičení 4.3. Nalezněte tvary módů pro strunu délky L (nataženou na $z \in [0, L]$) pro volné konce. Předpokládejte řešení ve tvaru módu (stojaté vlny) $\psi(z,t) = X(z)\cos(\omega t + \varphi)$. Zapište obecné řešení jako superpozici těchto módů. Nechybí v řešení něco?

Řešení: Funkce ψ musí splňovat *vlnovou rovnici*:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \tag{126}$$

Podmínka volných konců je definována jako

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}(0,t) = \frac{\partial \psi}{\partial z}(L,t) = 0. \tag{127}$$

Po dosazení ansatzu do vlnové rovnice okamžitě dostáváme

$$\left(X''(z) + \frac{\rho_0}{T_0}\omega^2 X(z)\right)\cos(\omega t + \varphi_0) = 0. \tag{128}$$

Označme si vlnové číslo $k > 0$ jako $k^2 = \frac{\rho_0}{T_0}\omega^2$ (dostáváme tedy disperzní vztah); požadujeme-li splnění předchozí rovnice pro všechny časy, dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici

$$X''(z) + k^2 X(z) = 0. \tag{129}$$

To je rovnice harmonického oscilátoru (v proměnné z). Napišme její řešení např. ve tvaru

$$X(z) = a\cos kz + b\sin kz. \tag{130}$$

Výslednou funkci $\psi(z,t) = X(z)\cos(\omega t + \varphi)$ musíme dosadit do okrajové podmínky. Snadno $\frac{\partial \psi}{\partial z} = X'(z)\cos(\omega t + \varphi)$. Počáteční podmínky tedy dávají rovnice $X'(0) = 0$ a $X'(L) = 0$. Máme $X'(z) = -ak\sin kz + bk\cos kz$.

Podmínka $X'(0) = 0$ dá $bk = 0$ a tedy $b = 0$. Podmínka $X'(L) = 0$ pak dává $a\sin kL = 0$ a pro netriviální řešení tedy $kL \in \{m\pi\}_{m\in\mathbb{N}}$ (bereme pouze přirozenočíselné násobky, jelikož konstanta $kL > 0$). Vlnové číslo tedy musí splňovat $k = k_m = \frac{m\pi}{L}$, $m \in \mathbb{N}$. Výsledný tvar m-tého módu je tedy $X_m(z) = A_m \cos k_m z$.

Výsledná funkce $\psi(z,t)$ má tvar daný superpozicí těchto módů (nezapomínat, že ω je pro každou hodnotu vlnového čísla jiná a daná disperzním vztahem):

$$\psi(z,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos\left(\frac{m\pi}{L}z\right)\cos\left(\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}\frac{m\pi}{L}t + \varphi_m\right). \tag{131}$$

Na které řešení jsme zapomněli? Jelikož má struna oba konce volné, může kromě kmitů vykonávat rovnoměrný přímočarý pohyb jako jeden celek: $\psi(z,t) = x_0 + v_0 t$. Toto řešení není ve tvaru předpokládaného tvaru řešení, nemohlo nám tedy vyjít. Pokud bychom vzali obecněji metodu separace proměnných, kde předpokládáme řešení tvaru $\psi(z,t) = X(z)T(t)$ (tedy zobecníme tvar časové funkce), vyšlo by nám řešení včetně rovnoměrného pohybu. Úplné řešení (a nyní již opravdu úplně úplné) vlnové rovnice s danými okrajovými podmínkami je tedy

$$\psi(z,t) = x_0 + v_0 t + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos\left(\frac{m\pi}{L} z\right) \cos\left(\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \frac{m\pi}{L} t + \varphi_m\right). \tag{132}$$

***Cvičení 4.4.** Stejné zadání jako předchozí příklad s tím rozdílem, že nyní uvažujete jeden konec pevný a druhý volný.

Řešení: Postup je zcela analogický předchozímu příkladu. Liší se pouze okrajové podmínky a tedy i požadavky na tvar funkce $X(z) = a\cos kz + b\sin kz$. BÚNO uvažujme levý konec (na $z = 0$) pevný a pravý konec (na $z = L$) volný, tzn.

$$\psi(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial \psi(L,t)}{\partial z} = 0, \tag{133}$$

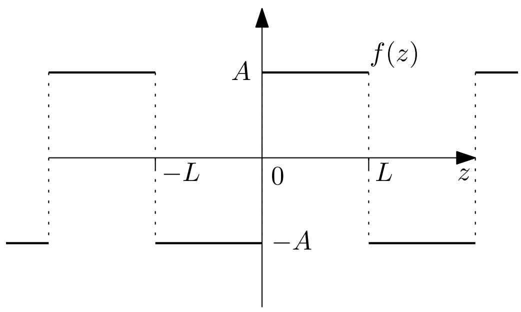
neboli pro funkci $X(z)$: $X(0) = 0$ a $\frac{\partial X(L)}{\partial z} = 0$. Podmínka $X(0) = 0$ dává $a = 0$ a potom z $\frac{\partial X(L)}{\partial z} = 0$ máme $b\cos kL = 0$. Požadujeme-li netriviální řešení, musí být $b \neq 0$ a $\cos kL = 0$, tedy $kL = \frac{\pi}{2} + m\pi$, $m \in \mathbb{N}_0$ ($kL > 0$ a tedy $m \geq 0$). Přípustná vlnová čísla jsou tedy tvaru $k_m = (\frac{\pi}{2} + m\pi)\frac{1}{L}$. Výsledné řešení je pak opět dané superpozicí jednotlivých módů:

$$\psi(z,t) = \sum_{m=0}^{+\infty} A_m \sin k_m z \cos(\omega_m t + \varphi_m), \tag{134}$$

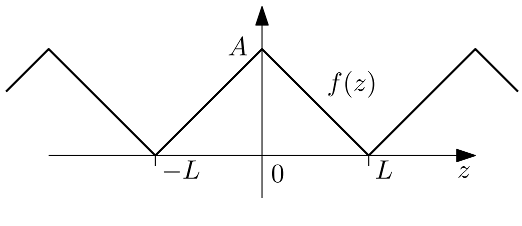
kde $k_m = (\frac{\pi}{2} + m\pi)\frac{1}{L}$ a $\omega_m = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} k_m$.

Cvičení 4.5. Vypočtěte Fourierovy řady následujících funkcí f s periodou $2L$:

a) Obdélníkové kmity



b) *Pilovité kmity



Řešení: Je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodická funkce s periodou $2L$, její Fourierova řada je funkce f_F daná vztahem

$$f_F(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right), \tag{135}$$

kde koeficienty a_m a b_m jsou dané vztahy

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(z)\cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) dz, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(z)\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) dz, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{136}$$

Je-li funkce f sudá, jsou $b_m = 0$ a je-li lichá, jsou $a_m = 0$.

a) Obdélníkový kmit: funkce f je zřejmě lichá, stačí tedy spočítat koeficienty b_m. Máme

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(z)\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) dz = \frac{2}{L}\int_0^L A\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) dz = \frac{2A}{L}\left[-\frac{L}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\right]_0^L \\ &= \frac{2A}{m\pi}\left[-\cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\right]_0^L = \frac{2A}{m\pi}(1-\cos m\pi). \end{aligned} \tag{137}$$

Na závěr můžeme rozlišit sudá a lichá m. Pro sudá m je $1 - \cos m\pi = 0$ a tedy $b_m = 0$. Stačí tedy uvažovat lichá m, tedy $m = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$, pak $1 - \cos m\pi = 2$. Dostáváme

$$b_{2k-1} = \frac{4A}{(2k-1)\pi}. \tag{138}$$

Výsledná Fourierova řada funkce f má tedy tvar

$$f_F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4A}{(2k-1)\pi}\sin\left(\frac{(2k-1)\pi z}{L}\right). \tag{139}$$

b) Pilovitý kmit: funkce f je sudá. Stačí tedy spočítat koeficienty a_m. Pro $m > 0$ dostáváme

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(z)\cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) dz = \frac{2}{L}\int_0^L f(z)\cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) dz = \frac{2}{L}\int_0^L A\left(1-\frac{z}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) dz \\ &= \frac{2}{L}\left[A\left(1-\frac{z}{L}\right)\frac{L}{m\pi}\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\right]_0^L + \frac{2}{L}\int_0^L \frac{A}{L}\frac{L}{m\pi}\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) dz \\ &= \frac{2A}{m\pi L}\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) dz = \frac{2A}{(m\pi)^2}\left[-\cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\right]_0^L. \end{aligned} \tag{140}$$

Jsme ve stejné situaci jako v předchozím příkladě – přispějí jen lichá $m = 2k-1$ a tedy

$$a_{2k-1} = \frac{4A}{(2k-1)^2\pi^2}. \tag{141}$$

Nesmíme zapomenout na a_0, které dostaneme integrálem

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L A\left(1-\frac{z}{L}\right) dz = \frac{2}{L}\left[A\left(z-\frac{z^2}{2L}\right)\right]_0^L = \frac{2A}{L}\left(L-\frac{L^2}{2L}\right) = A. \tag{142}$$

Fourierova řada pilovitého kmitu je tedy

$$f_F(z) = \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4A}{(2k-1)^2\pi^2}\cos\left(\frac{(2k-1)\pi z}{L}\right). \tag{143}$$

Cvičení 4.6. Uvažujte strunu s pevnými konci. Nalezněte konkrétní řešení jejího pohybu, jestliže ji necháte kmitat tak, že v čase $t = 0$ je v klidu a má tvar[1] $\psi(z, 0) = A$, kde A je konstanta.

Řešení: Řešení stojaté vlny s pevnými konci má tvar

$$\psi(z,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(k_m z)\sin(\omega_m t + \varphi_m). \tag{144}$$

Nechť $f(z) = \psi(z, 0)$ je funkce $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ zadávající počáteční tvar struny, a $g(z) = \frac{\partial\psi}{\partial t}(z, 0)$ počáteční rychlost struny. Dosazením řešení dostáváme rovnice:

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\varphi_m \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right), \tag{145}$$

$$g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m\omega_m \cos\varphi_m \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right). \tag{146}$$

Abychom vyřešili tyto podmínky, je třeba nalézt konstanty A_m a φ_m. Vidíme, že pravé strany připomínají Fourierovu řadu liché periodické funkce. Stačí tedy najít jednoznačné **liché rozšíření funkce** f, funkci $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující:

(i) $\bar{f}$ je periodická s periodou $2L$;

(ii) $\bar{f}$ je lichá;

(iii) $\bar{f}$ zúžená na interval $[0, L]$ dává funkci f.

Najdeme-li koeficienty f_m Fourierova rozvoje funkce $\bar{f}(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} f_m \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)$, porovnáním koeficientů dostaneme

$$f_m = A_m \sin\varphi_m, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{147}$$

Podobně najdeme liché rozšíření $\bar{g}$ funkce g a označíme-li g_m koeficienty jejího Fourierova rozvoje, získáme vztahy

$$g_m = A_m\omega_m \cos\varphi_m, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{148}$$

Pojďme si tuto soustavu vyřešit v tomto případě. Podle zadání máme $f(z) = A$ pro všechna $z \in [0, L]$ a $g(z) = 0$ pro všechna $z \in L$. Vidíme, že jako liché rozšíření $\bar{f}$ dostávám obdélníkový kmit z předchozího příkladu a $g \equiv 0$ (a tedy i $g_m = 0$). Dostávám tedy soustavu rovnic:

$$0 = A_{2k} \sin\varphi_{2k}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{149}$$

$$\frac{4A}{(2k-1)\pi} = A_{2k-1} \sin\varphi_{2k-1}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{150}$$

$$0 = A_m\omega_m \cos\varphi_m, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{151}$$

Můžu tedy volit $A_{2k} = 0$, $k \in \mathbb{N}$ a φ_{2k} libovolné. Jelikož nutně $A_{2k-1} \neq 0$, dostávám z poslední sady rovnic $\cos\varphi_{2k-1} = 0$. Odsud tedy $\varphi_{2k-1} \in \{\frac{\pi}{2} + n\pi\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Můžeme volit $\varphi_{2k-1} = \frac{\pi}{2}$, protože v každém případě $\sin\varphi_{2k-1} \in \{-1, 1\}$ a znaménko bychom jen museli schovat do amplitudy. Ze zbývající rovnice tedy

$$A_{2k-1} = \frac{4A}{(2k-1)\pi}. \tag{152}$$

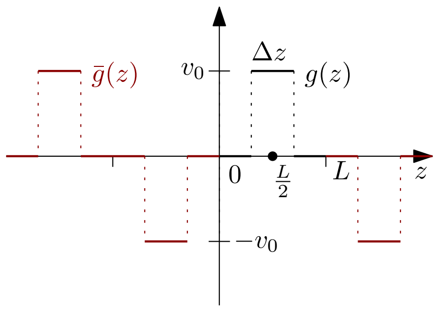
[1] Striktně vzato nesplňuje ψ v čase $t = 0$ okrajové podmínky. Lze si představovat, že u obou konců funkce popisující strunu velmi prudce klesne do 0.

Výsledné řešení vlnové rovnice s touto počáteční podmínkou má tedy tvar

$$\psi(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4A}{(2k-1)\pi} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi z}{L}\right) \sin(\omega_{2k-1} t). \tag{153}$$

Cvičení 4.7. Uvažujte strunu s pevnými konci. Nalezněte konkrétní řešení jejího pohybu, jestliže je v čase $t = 0$ v rovnovážné poloze a zároveň do ní udeříte kladívkem tak, že úseku struny délky Δz se středem v bodě $L/2$ udělíte rychlost v_0.

Řešení: S použitím značení z předchozího příkladu máme $f(z) \equiv 0$ a $g(z)$ (a její liché prodloužení $\bar{g}(z)$) má tvar



Musíme tedy najít Fourierovu řadu lichého rozšíření $\bar{g}$ funkce g. Koeficienty rozvoje g_m mají tvar

$$g_m = \frac{2}{L} \int_0^L g(z) \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right). \tag{154}$$

Do integrálu zjevně přispěje jen úsek $[\frac{L-\Delta z}{2}, \frac{L+\Delta z}{2}]$. Dostaneme integrál

$$\begin{aligned} g_m &= \frac{2v_0}{L} \int_{\frac{L-\Delta z}{2}}^{\frac{L+\Delta z}{2}} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) dz = \frac{2v_0}{L} \left[-\frac{L}{m\pi} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \right]_{\frac{L-\Delta z}{2}}^{\frac{L+\Delta z}{2}} \\ &= \frac{2v_0}{m\pi} \left(\cos\left(\frac{m\pi}{2} - \frac{m\pi \Delta z}{2L}\right) - \cos\left(\frac{m\pi}{2} + \frac{m\pi\Delta z}{2L}\right) \right). \end{aligned} \tag{155}$$

Nyní je ještě výhodné použít součtový vzorec ve tvaru:

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2\sin(\alpha)\sin(\beta), \quad \alpha = \frac{m\pi}{2}, \quad \beta = \frac{m\pi\Delta z}{2L}. \tag{156}$$

Odtud tedy dostáváme zjednodušený výraz pro g_m:

$$g_m = \frac{4v_0}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi\Delta z}{2L}\right). \tag{157}$$

Vidíme, že pro sudá m opět dostáváme $g_{2k} = 0$. Pro lichá $m = 2k-1$ musíme vyřešit, co dává $\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}$. Pro lichá $k \in \{1,3,5,\dots\}$ dostaneme $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ a pro sudá k dostaneme $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$. Můžeme tedy zkráceně psát $\sin\frac{(2k-1)\pi}{2} = (-1)^{k-1}$. Odtud

$$g_{2k-1} = \frac{4v_0}{(2k-1)\pi} (-1)^{k-1} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi\Delta z}{2L}\right). \tag{158}$$

Porovnáním koeficientů tedy dostaneme soustavu rovnic

$$0 = A_m \sin\varphi_m, \tag{159}$$

$$0 = A_{2k}\omega_{2k}\cos\varphi_{2k}, \tag{160}$$

$$g_{2k-1} = A_{2k-1}\omega_{2k-1}\cos\varphi_{2k-1}. \tag{161}$$

Můžu tedy volit $A_{2k} = 0$ a φ_{2k} libovolné. Můžeme zvolit $\varphi_{2k-1} = 0$, což zajistí $\cos\varphi_{2k-1} = 1$ a zbývající sada rovnic potom určí $A_{2k-1} = \frac{g_{2k-1}}{\omega_{2k-1}}$. Dostávám tedy výslednou funkci

$$\psi(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4v_0(-1)^{k-1}}{(2k-1)\pi\omega_{2k-1}} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi\Delta z}{2L}\right) \sin\left(\frac{(2k-1)\pi z}{L}\right) \sin\omega_{2k-1}t. \tag{162}$$

***Cvičení 4.8.** *Počáteční úloha pro strunu s volnými konci.* Modifikujte postup pro hledání konkrétního řešení ze zadaných počátečních podmínek pro strunu délky L s volnými konci. Obecné řešení z metody separace proměnných vyjde například tvaru

$$\psi(z,t) = z_0 + v_0 t + \sum_{m=1}^{+\infty} A_m \cos k_m z \, \sin(\omega_m t + \varphi_m), \quad \text{kde} \quad k_m = \frac{m\pi}{L} \quad \text{a} \quad \omega_m = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} k_m.$$

Řešení: Dosaďme výše uvedené řešení do počátečních podmínek $\psi(z,0) = f(z)$ a $\frac{\partial\psi(z,0)}{\partial t} = g(z)$:

$$\psi(z,0) = z_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} (A_m \sin\varphi_m)\cos k_m z = f(z),$$

$$\frac{\partial\psi(z,0)}{\partial t} = v_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} (A_m\omega_m \cos\varphi_m)\cos k_m z = g(z). \tag{163}$$

Toto jsou rovnice pro neznámé A_m, φ_m, z_0 a v_0. Vidíme, že bychom potřebovali rozložit funkce f a g do superpozice cosinů a konstantního členu. Ale přesně takhle vypadá Fourierova řada sudé funkce! Stačí tedy uvažovat sudá prodloužení funkcí f, g, označme je znovu $\bar{f}$, $\bar{g}$, s vlastnostmi:

(i) $\bar{f}$, $\bar{g}$ jsou periodické s periodou $2L$;

(ii) $\bar{f}$, $\bar{g}$ jsou sudé;

(iii) $\bar{f}$, $\bar{g}$ zúžené na interval $[0, L]$ dávají funkci f, g.

Jejich Fourierovy řady jsou tedy tvaru

$$f(z) = \frac{f_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} f_m \cos\frac{m\pi z}{L}, \qquad g(z) = \frac{g_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} g_m \cos\frac{m\pi z}{L}, \tag{164}$$

kde

$$f_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(z)\cos\frac{m\pi z}{L}dz, \qquad g_m = \frac{2}{L}\int_0^L g(z)\cos\frac{m\pi z}{L}dz, \qquad m \in \mathbb{N}_0. \tag{165}$$

Po dosazení těchto rozvojů do počátečních podmínek a porovnáním řad člen po členu dostaneme rovnice

$$z_0 = \frac{f_0}{2}, \qquad A_m \sin\varphi_m = f_m \quad (m \in \mathbb{N}), \qquad v_0 = \frac{g_0}{2}, \qquad A_m\omega_m \cos\varphi_m = g_m \quad (m \in \mathbb{N}). \tag{166}$$

Vyřešením rovnic pro A_m a φ_m dostaneme

$$A_m = \sqrt{f_m^2 + \frac{g_m^2}{\omega_m^2}}, \qquad \sin\varphi_m = \frac{f_m}{A_m}, \quad \cos\varphi_m = \frac{g_m}{A_m\omega_m}. \tag{167}$$

Úhel $\varphi_m \in [0, 2\pi)$ je jednoznačně dán hodnotou svého sinu a cosinu. Výsledné konkrétní řešení pohybu je pak tvaru

$$\psi(z,t) = \frac{f_0}{2} + \frac{g_0}{2}t + \sum_{m=1}^{+\infty} \sqrt{f_m^2 + \frac{g_m^2}{\omega_m^2}} \cos k_m z \, \sin(\omega_m t + \varphi_m). \tag{168}$$

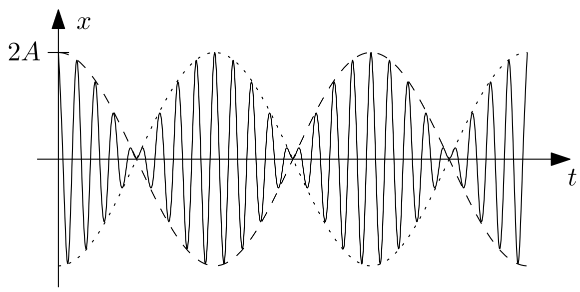
5 Postupné a stojaté vlny

Cvičení 5.1. Dvě znějící ladičky vydávají 20 rázů za 10 sekund. Jedna ladička má kmitočet $f = 256Hz$. Jaká je frekvence druhé ladičky.

Řešení: Naše ucho slyší superpozici dvou harmonických vln. Pro jednoduchost předpokládejme, že mají stejnou amplitudu. Tedy $x_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ a $x_2(t) = A\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$. Potom

$$\begin{aligned} x(t) = x_1(t) + x_2(t) &= A\left(\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \cos(\omega_2 t + \varphi)\right) \\ &= 2A\cos\left(\frac{(\omega_1+\omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{(\omega_1-\omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2}{2}\right). \end{aligned} \tag{169}$$

Výsledek je tedy součinem dvou funkcí – kmitání s průměrem frekvenci $f_p = \frac{f_1+f_2}{2}$ a kmitání s frekvencí $f_m = \frac{f_1-f_2}{2}$. Toto „pomalé kmitání“ moduluje amplitudu „rychlých kmitů“ dvakrát za svoji periodu, viz obrázek.



Frekvence rázů f_r je tedy dvojnásobná oproti f_m! $f_r = f_1 - f_2$.

Jelikož nevíme, která ladička je naladěna na vyšší frekvenci, dostáváme dvě možnosti:

$$f' = f \pm f_r. \tag{170}$$

Máme $f_r = 2\,Hz$ a druhá z ladiček má tedy 254 nebo 258 Hertzů.

Cvičení 5.2. Jaká je amplituda, perioda, fázová rychlost a vlnová délka vlny, vyjádřené v soustavě SI rovnicí

$$\psi(z,t) = 4 \cdot 10^{-2} \sin(2\pi(8t + 5z)). \tag{171}$$

Řešení: Amplituda je číselný faktor před harmonickou funkcí, a tedy $A = 4 \cdot 10^{-2}\, m = 4\, cm$. Perioda je čas, za který proběhne daným místem ($z = const$) celá vlna. Získám ji tedy přímo ze vztahu $2\pi 8T = 2\pi$. Odtud $T = 1/8\, s$. Pochopitelně mám také $2\pi f = \omega = 2\pi 8\, s^{-1}$ a $T = 1/f$.

Pro určení fázové rychlosti si zafixujme hodnotu fáze $\varphi(z,t) = 2\pi(8t + 5z) = \varphi_0 =$ konst. Vidím, že z si můžu vyjádřit jako funkci času: $z(t) = \frac{1}{2\pi 5}(\varphi_0 - 2\pi 8t)$. Místo s konstantní fází se tedy pohybuje rovnoměrně přímočaře (v tomto případě v protisměru osy z) fázovou rychlostí $v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi 8}{2\pi 5}\, m \cdot s^{-1} = \frac{8}{5}\, m \cdot s^{-1}$.

Vlnová délka je vzdálenost, kterou urazí libovolné místo s konstantní fází za periodu, tedy $\lambda = v \cdot T = \frac{\omega}{k} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{k}$. Zde je vlnové číslo $k = 2\pi 5\, m^{-1}$, odkud $\lambda = \frac{1}{5}\, m = 20\, cm$.

Cvičení 5.3. *Superpozice ve stejném směru postupných vln je postupná vlna.* Ukažte, že součet

$$A_1 \cos(\omega t - kz + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t - kz + \varphi_2) \tag{172}$$

se dá napsat jako $A\cos(\omega t - kz + \varphi)$. Určete hodnoty A a φ.

Řešení: S použitím linearity funkce Re můžeme součet přepsat jako

$$A_1 \cos(\omega t - kz + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t - kz + \varphi_2) = \mathrm{Re}\left[(A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}) e^{i(\omega t - kz)}\right]. \tag{173}$$

Komplexní číslo $A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}$ tedy stačí napsat v goniometrickém tvaru $Ae^{i\varphi}$. Pak dostaneme

$$\mathrm{Re}\left[Ae^{i(\omega t - kz + \varphi)}\right] = A\cos(\omega t - kz + \varphi). \tag{174}$$

Určeme konstanty A a φ. Máme

$$\begin{aligned} A^2 &= |A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}|^2 = (A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2})(A_1 e^{-i\varphi_1} + A_2 e^{-i\varphi_2}) \\ &= A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 (e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)}) \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned} \tag{175}$$

Argument φ je pak určen řešením rovnic

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{Re}[Ae^{i\varphi}]}{|Ae^{i\varphi}|} = \frac{\mathrm{Re}\left[A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}\right]}{A} = \frac{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}{A}, \tag{176}$$

$$\sin\varphi = \frac{\mathrm{Im}[Ae^{i\varphi}]}{|Ae^{i\varphi}|} = \frac{\mathrm{Im}\left[A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}\right]}{A} = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A}. \tag{177}$$

Cvičení 5.4. *Superpozice proti sobě postupných vln je stojatá vlna.* Ukažte, že součet

$$A\cos(\omega t - kz + \varphi_1) + A\cos(\omega t + kz + \varphi_2) \tag{178}$$

je tvaru $X(z)\cos(\omega t + \varphi)$. Určete tvar funkce $X(z)$ a hodnotu konstanty φ.

Řešení: Příklad je jednoduchou aplikací součtového vzorce

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right). \tag{179}$$

Zde máme $\alpha = \omega t + kz + \varphi_2$, $\beta = \omega t - kz + \varphi_1$, a tedy dostaneme

$$2A\cos\left(kz + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right). \tag{180}$$

Odtud tedy dostáváme $\varphi = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$ a funkce $X(z)$ má tvar

$$X(z) = 2A\cos\left(kz + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right). \tag{181}$$

Cvičení 5.5. Dva zdroje na ose z v místě $z = -d$ a $z = d$ kmitají dle předpisu $x_1(t) = x_2(t) = A\cos(\omega t)$ a vysílají vlny do obou směrů. Určete postupné vlny od jednotlivých zdrojů a diskutujte charakter jejich superpozice.

Řešení: Máme-li zdroj kmitání daný časovou závislostí $x = x(t)$ a umístěný v $z = z_0$, šíří vlna ve tvaru $\psi(z,t) = x(t - t_0(z))$, kde $t_0(z)$ je **čas, za který čelo vlny dorazí od zdroje na místo** z. Je-li rychlost šíření daná, snadno dostaneme

$$t_0(z) = \frac{|z - z_0|}{v}, \tag{182}$$

kde v je daná fázová rychlost. Budeme tedy počítat superpozici dvou vln:

$$\begin{aligned} \psi_1(z,t) &= x_1\left(t - \frac{|z+d|}{v}\right) = A\cos(\omega t - k|z+d|), \\ \psi_2(z,t) &= x_2\left(t - \frac{|z-d|}{v}\right) = A\cos(\omega t - k|z-d|). \end{aligned} \tag{183}$$

kde jsme zavedli $k = \omega/v$. Kvůli absolutní hodnotě budeme zkoumat superpozici ve třech různých úsecích:

(i) $z > d$. Dostáváme skládání dvou postupných vln ve stejném směru, jen s odlišnou fází:

$$\begin{aligned} \psi(z,t) &= (\psi_1 + \psi_2)(z,t) = A\big(\cos(\omega t - kz - kd) + \cos(\omega t - kz + kd)\big) \\ &= 2A\cos(kd)\cos(\omega t - kz). \end{aligned} \tag{184}$$

Výsledkem je tedy postupná vlna v kladném směru osy z, jejíž amplituda $2A\cos kd$ závisí na vzdálenosti zdrojů d.

(ii) $z < -d$. Zde je situace úplně stejná, jen

$$\begin{aligned} \psi(z,t) &= (\psi_1 + \psi_2)(z,t) = A\big(\cos(\omega t + kz + kd) + \cos(\omega t + kz - kd)\big) \\ &= 2A\cos(kd)\cos(\omega t + kz). \end{aligned} \tag{185}$$

Toto jsme taky mohli uhádnou ze symetrie úlohy $z \leftrightarrow -z$. Výsledkem je tedy postupná vlna v záporném směru osy z.

(iii) $z \in [-d, d]$. Tady dostaneme superpozici protiběžných postupných vln:

$$\psi(z,t) = (\psi_1 + \psi_2)(z,t) = A\big(\cos(\omega t - kz - kd) + \cos(\omega t + kz - kd)\big) \tag{186}$$

Podle předchozího příkladu je superpozicí stojatá vlna ($\varphi_1 = \varphi_2 = -kd$):

$$\psi(z,t) = 2A\cos(kz)\cos(\omega t - kd). \tag{187}$$

Cvičení 5.6. Mějme homogenní strunu nataženou od $z = 0$ do $z = +\infty$. Struna má délkovou hustotu $\rho = 0,1\,g\,cm^{-1}$ a je napjata silou $T = 400\,N$. Počátek struny $z = 0$ vykonává harmonický pohyb o frekvenci $f = 100\,Hz$ s amplitudou $A = 1\,cm$. Jaká je časová střední hodnota toku energie?

Řešení: Počátek struny lze tedy považovat za zdroj, který kmitá s časovou závislostí $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$. Na struně tedy vznikne postupná vlna $\psi(z,t) = x(t - \frac{z}{v})$. Zde tedy

$$\psi(z,t) = A\cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + \varphi\right) = A\cos(\omega t - kz + \varphi), \tag{188}$$

kde $k = \frac{\omega}{v}$. Tok energie S je dán vztahem

$$S = -T\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial z} = T\omega kA^2\sin^2(\omega t - kz + \varphi). \tag{189}$$

Dosazením za vlnové číslo z disperzního vztahu dostaneme $S = \sqrt{T\rho}\cdot\omega^2A^2\sin^2(\omega t - kz + \varphi)$. Veličině $Z = \sqrt{T\rho}$ se říká **impedance**. Odtud

$$\langle S\rangle = Z\omega^2A^2\langle\sin^2(\omega t - kz + \varphi)\rangle. \tag{190}$$

Už jsme spočítali, že $\langle\sin^2(\omega t)\rangle = \frac{1}{2}$. Časová střední hodnota periodické funkce přes periodu nemůže záviset (z definice) na fázovém posunu. Je-li $g(t) = f(t + \varphi)$, máme

$$\langle g\rangle = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t+\varphi)dt = \frac{1}{T}\int_{a+\varphi}^{a+\varphi+T} f(t)dt = \langle f\rangle. \tag{191}$$

Odtud tedy

$$\langle S\rangle = \frac{1}{2}Z\omega^2A^2 = 2\pi^2f^2A^2Z = 2\cdot 9,85\cdot 10^4\cdot 10^{-4}\cdot\sqrt{400\cdot 10^{-2}} \approx 39,5W. \tag{192}$$

Cvičení 5.7. Ukažte, že vektor toku energie na struně, po které se šíří dvě proti sobě postupující vlny, je roven součtu toků příslušných jednotlivým vlnám. Návod: Uvažujte d'Alembertovo řešení a ukažte, že interferenční člen v tomto případě vymizí.

Řešení: Máme spočítat tok energie pro vlnu tvaru $\psi(z,t) = \psi_1(z,t) + \psi_2(z,t)$, kde $\psi_1(z,t) = F(z - vt)$, $\psi_2(z,t) = G(z + vt)$ a $v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ je fázová rychlost daná materiálem a napětím struny. Výpočet dosazením do definice toku potom dává

$$\begin{aligned} S(z,t) &= -T\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial z} = -T\frac{\partial(\psi_1+\psi_2)}{\partial t}\frac{\partial(\psi_1+\psi_2)}{\partial z} = \\ &= -T\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\frac{\partial\psi_1}{\partial z} - T\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\frac{\partial\psi_2}{\partial z} - T\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\frac{\partial\psi_2}{\partial z} + \frac{\partial\psi_2}{\partial t}\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right) \\ &= S_1(z,t) + S_2(z,t) - T\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\frac{\partial\psi_2}{\partial z} + \frac{\partial\psi_2}{\partial t}\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right). \end{aligned} \tag{193}$$

Přímým dosazením ověříme, že interferenční člen vymizí:

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\frac{\partial\psi_2}{\partial z} + \frac{\partial\psi_2}{\partial t}\frac{\partial\psi_1}{\partial z} = -vF'(z-vt)G'(z+vt) + vG'(z+vt)F'(z-vt) = 0. \tag{194}$$

Odtud $S(z,t) = S_1(z,t) + S_2(z,t)$.

Cvičení 5.8. Dvě harmonické postupné vlny se šíří stejným směrem na struně v superpozici. Mají stejnou vlnovou délku a úhlovou frekvenci. Jestliže intenzita (časová střední hodnota toku energie) každé z vln je I, jaký musí být fázový posun těchto vln, aby výsledná intenzita byla 0, I, $2I$, $4I$.

Řešení: Výše jsme spočetli, že intenzita $I = \langle S \rangle$ pro harmonickou postupnou vlnu $\psi(z,t) = A\cos(\omega t - kz + \varphi)$ vyjde jako $I = \frac{1}{2}Z\omega^2 A^2$.

Máme tedy dvě postupné vlny $\psi_1(z,t) = A_1\cos(\omega t - kz + \varphi_1)$ a $\psi_2(z,t) = A_2\cos(\omega t - kz + \varphi_2)$. Předpokladem je $I_1 = I_2 = I$, odkud ihned vyplývá $A_1 = A_2$. Superpozicí je opět postupná vlna. S použitím součtových vzorců vyjde

$$\psi(z,t) = 2A\cos\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\cos\left(\omega t - kz + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right). \tag{195}$$

Výsledná intenzita má být $\alpha \cdot I$, dostaneme tedy rovnici

$$\alpha \cdot \frac{1}{2}Z\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}Z\omega^2\left(2A\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)^2. \tag{196}$$

Spousta členů se okamžitě pokrátí a my dostaneme vztah

$$\alpha = 4\cos^2\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}. \tag{197}$$

Označme $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Nyní zbývá nalézt jednotlivá řešení. Fázový posun $\Delta\varphi$ stačí hledat v intervalu $[0, 2\pi)$ (a tedy $\frac{\Delta\varphi}{2} \in [0,\pi)$). Dostáváme postupně:

(i) $\alpha = 0$. *Destruktivní interference.* Řešíme tedy $0 = \cos^2(\Delta\varphi/2)$. Odtud $\Delta\varphi = \pi$.

(ii) $\alpha = 1$. Řešíme tedy $1/4 = \cos^2(\Delta\varphi/2)$. Musíme tedy splnit $\cos(\Delta\varphi/2) = \pm 1/2$. To nastane pro $\Delta\varphi/2 \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}$, a tedy pro $\Delta\varphi \in \{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$.

(iii) $\alpha = 2$. Řešíme $1/2 = \cos^2(\Delta\varphi/2)$ a tedy rovnici $\cos(\Delta\varphi/2) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Do nastane pro $\Delta\varphi/2 \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\}$. Tedy $\Delta\varphi \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$.

(iv) $\alpha = 4$. *Konstruktivní interference.* Řešíme $1 = \cos^2(\Delta\varphi/2)$, neboli $\cos(\Delta\varphi/2) = \pm 1$, což dává $\Delta\varphi = 0$.

6 Vlnové balíky, relace neurčitosti, grupová rychlost

Cvičení 6.1. Nalezněte tvar vlnového balíku $f(t)$ pro spektrum tvaru $B(\omega) = 0$ a

$$A(\omega) = \begin{cases} A_0 & \text{pro } \omega \in [\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}], \\ 0 & \text{jinak .} \end{cases} \tag{198}$$

Ukažte, jak souvisí šířka spektra $\Delta\omega$ s délkou trvání balíku Δt zde definovanou jako vzdálenost prvních nulových bodů amplitudové obálky vlnového balíku.

Řešení: Zdroj vlnového balíku je zadán pomocí svých spektrálních funkcí $A(\omega)$ a $B(\omega)$ spojitou Fourierovou transformací:

$$f(t) = \int_0^\infty A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t\, d\omega. \tag{199}$$

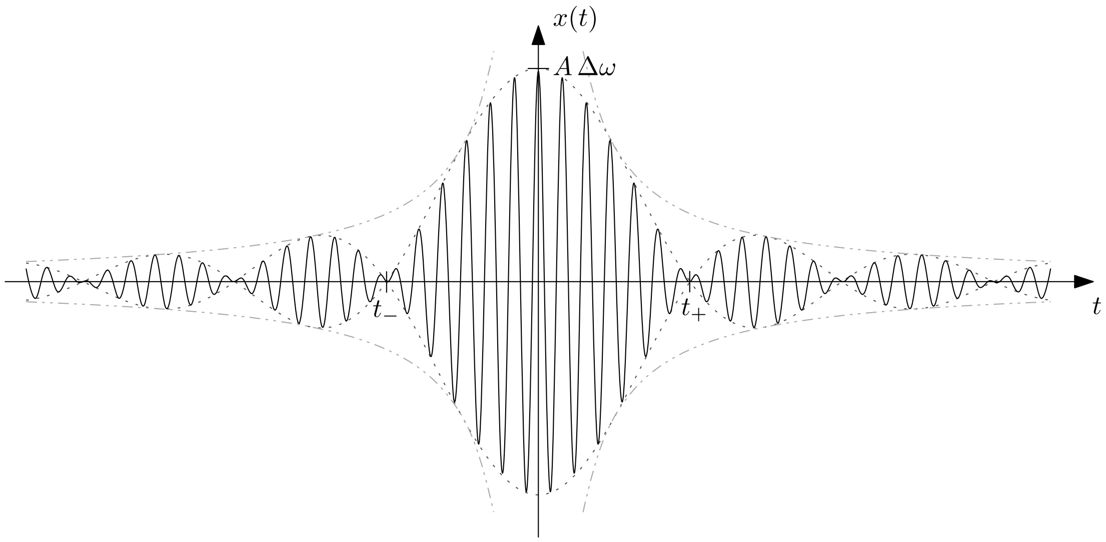
Funkce $A(\omega)$ a $B(\omega)$ lze získat zpět z funkce f vztahy

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\, dt, \qquad B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\, dt. \tag{200}$$

Zde tedy počítáme integrál

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \int_0^\infty A(\omega)\cos\omega t\, d\omega = \int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} A_0 \cos\omega t\, d\omega \\
&= A_0 \frac{1}{t}[\sin\omega t]_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} = \frac{A_0}{t}\left[\sin\left(\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \sin\left(\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right] \\
&= \frac{2A_0}{t}\cos\omega_0 t \sin\frac{\Delta\omega\cdot t}{2} \\
&= A_0\Delta\omega \frac{\sin\frac{\Delta\omega\cdot t}{2}}{\frac{\Delta\omega\cdot t}{2}}\cos\omega_0 t.
\end{aligned}
\tag{201}
$$

Výsledný časový průběh signálu viz obrázek.



Výsledná postupná vlna v nedisperzním prostředí by pak byla $\psi(z,t) = f(t-\frac{z}{v})$. Šířku vlnového balíku Δt získám jako vzdálenost prvních nul amplitudové obálky $A_0\Delta\omega\frac{\sin\frac{\Delta\omega\cdot t}{2}}{\frac{\Delta\omega\cdot t}{2}}$, tedy $\Delta t = t_+ - t_-$, kde $t_\pm$ jsou řešením rovnice $\sin\frac{\Delta\omega\cdot t_\pm}{2} = 0$, resp. $\frac{\Delta\omega\cdot t_\pm}{2} = \pm\pi$. Mám tedy $t_\pm = \pm\frac{2\pi}{\Delta\omega}$ a odtud

$$\Delta\omega\cdot\Delta t = 4\pi. \tag{202}$$

Cvičení 6.2. Mějte obdélníkový puls $f(t)$ tvaru

$$f(t) = \begin{cases} A_0 & \text{pro } \omega\in[-\frac{\Delta t}{2}, \frac{\Delta t}{2}], \\ 0 & \text{jinak .}\end{cases} \tag{203}$$

Nelezněte jeho spektrum. Ukažte, jak souvisí délka trvání pulsu Δt s šířkou jeho frekvenčního spektra $\Delta\omega$, zde definovanou jako první nula frekvenčního spektra.

Řešení: Podobně jako pro Fourierovy řady je snadné uvidět, že pro sudé funkce je $B(\omega) = 0$ a pro liché $A(\omega) = 0$. Zadaná funkce f je sudá, stačí tedy spočítat $A(\omega)$:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\Delta t}{2}} A_0 cos\omega t\,dt \\ &= \frac{2A_0}{\pi\omega}[\sin\omega t]_0^{\frac{\Delta t}{2}} = \frac{A_0}{\pi}\frac{\sin\frac{\Delta t\,\omega}{2}}{\frac{\Delta t\,\omega}{2}}. \end{aligned} \tag{204}$$

První nula spektrální funkce tedy nastane v bodě ω_0, kde $\sin\frac{\Delta t\,\omega_0}{2} = 0$, tedy pro $\frac{\Delta t\,\omega_0}{2} = \pi$. Jelikož zde $\Delta\omega = \omega_0$, dostáváme vztah

$$\Delta t \cdot \Delta\omega = 2\pi. \tag{205}$$

***Cvičení 6.3.** Uvažujte tlumené kmitání $f(t)$ ve tvaru

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0, \\ e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t) & \text{jinak }. \end{cases} \tag{206}$$

Nalezněte jeho spektrum.

Řešení: Výsledek získáme přímým výpočtem, tedy

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t\cos\omega t\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}\big(\cos(\omega+\omega_0)t + \cos(\omega-\omega_0)t\big)\,dt \end{aligned} \tag{207}$$

Nyní využijeme výsledků cvičení 2.13, kde jsme zjistili

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}. \tag{208}$$

Dosazením do tohoto vzorce tedy dostáváme

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega+\omega_0)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega-\omega_0)^2}\right). \tag{209}$$

Pro druhou spektrální funkci dostaneme podobným výpočtem

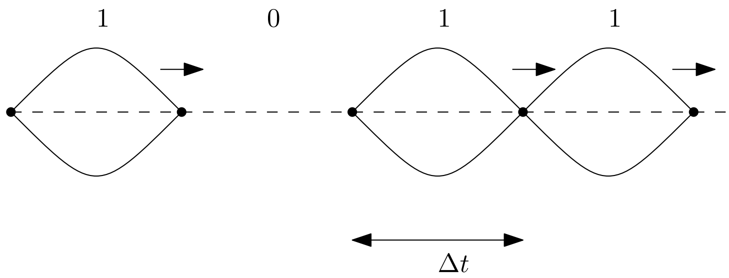
$$\begin{aligned} B(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}\sin\omega t\cos\omega_0 t\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}\big(\sin(\omega+\omega_0)t - \sin(\omega-\omega_0)t\big)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\omega+\omega_0}{\alpha^2+(\omega+\omega_0)^2} + \frac{\omega-\omega_0}{\alpha^2+(\omega-\omega_0)^2}\right). \end{aligned} \tag{210}$$

Cvičení 6.4. Wi-Fi svým vysíláním zabírá rozsah frekvencí 20 MHz (šířka kanálu). Odhadněte, jakou bude mít přenosovou rychlost. Využijte relace neurčitosti.

Řešení: Wifi signál si představujeme jako posílání vlnových balíků, které můžeme generovat daným frekvenčním rozsahem. Známe tedy šířku spektra $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$. Délka trvání vlnového balíku Δt splňuje **relace neurčitosti** $\Delta\omega \cdot \Delta t \geq \pi$. To nám dá dolní odhad pro Δt, tedy

$$\Delta t \geq \frac{\pi}{\Delta\omega}. \tag{211}$$

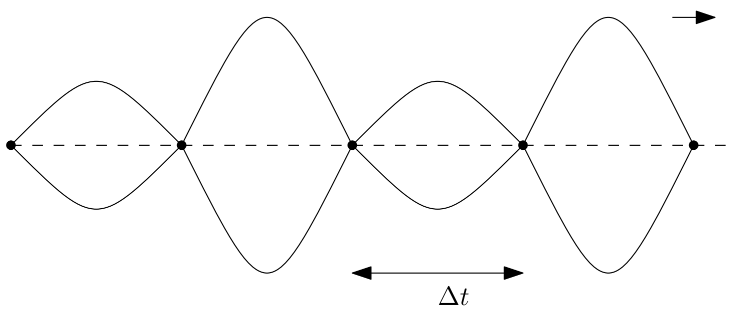
Přenos pomocí Wi-Fi signálu si představujeme jako posílání balíků v pravidelném časovém intervalu, kde poslání = 1 a neposlání = 0. Aby byly jasně rozlišené, nejkratší interval, s kterým je můžeme vysílat, je Δt. Viz obrázek:



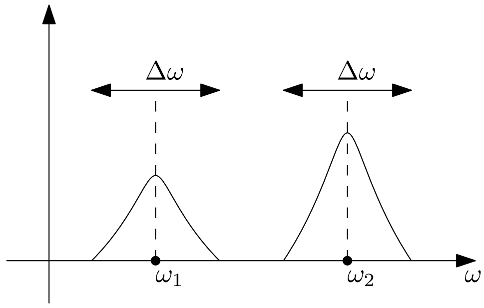
Za jednu sekundu tedy můžu vyslat nejvýše $N = \frac{1}{\Delta t}$ bitů. Dostávám tedy horní odhad přenosové rychlosti $N = \frac{1}{\Delta t} \leq \frac{\Delta\omega}{\pi} = 2\Delta f = 40 \cdot 10^6\,\mathrm{b/s} = 40\,\mathrm{Mbit/s}$.

***Cvičení 6.5.** Odhadněte maximální frekvenci trylku f_{tr} dvou tónů vzdálených o půltón v závislosti na frekvenci jednoho z tónů v trylku f. Využijte relace neurčitosti. Proč se na tubu netrylkuje?

Řešení: Trylkování, tzn. rychlé střídavé hraní dvou blízkých tónů, o frekvenci f_{tr} si můžeme představovat jako střídavé posílání dvou vlnových balíků. Předpokládejme, že oba tóny znějí stejně dlouho. Časová šířka obou balíků tak bude $\Delta t = \frac{1}{2f_{tr}}$. Viz obrázek:



Spektrum každého z balíků bude mít maximum okolo příslušné úhlové frekvence tónů ω_1 a ω_2. Obě spektra budou mít minimální šířku danou relacemi neurčitosti $\Delta\omega \geq \frac{\pi}{\Delta t}$. Výsledná spektrální funkce je jejich superpozicí:



Podmínkou rozlišitelnosti obou tónů bude, že se spektrální „kopečky" nepřekrývají, což nám dá podmínku $\omega_2 - \omega_1 \geq \Delta\omega$. Celkově tedy dostáváme odhad $\omega_2 - \omega_1 \geq 2\pi f_{tr}$. V řeči frekvencí potom $f_2 - f_1 \geq f_{tr}$. Vyšší frekvence je o půltón výše. Uvažujeme-li dobře temperované ladění, máme tedy $f_2 = \sqrt[12]{2} \cdot f_1$. Výsledný odhad tedy činí

$$f_{tr} \leq (\sqrt[12]{2} - 1) f_1. \tag{212}$$

Pro informaci, máme $\sqrt[12]{2} \approx 1,06$ a tedy přibližně $f_{tr} \leq 0,06 \cdot f_1$. Základní tón tuby je obvykle cca 32Hz. Maximální frekvence trylku na tubě je teda cca 1,9 Hz!

Cvičení 6.6. Lineární disperzní vztah je tvaru $\omega = vk$, kde $v = konst$. Takovému prostředí se říká nedisperzní prostředí. Určete fázovou a grupovou rychlost.

Řešení: Fázová rychlost v_φ se z disperzního vztahu $\omega = \omega(k)$ získá předpisem $v_\varphi(k) = \frac{\omega(k)}{k}$. Grupová rychlost v_g potom derivací podle vlnového čísla $v_g(k) = \frac{d\omega}{dk}(k)$. Zde tedy $v_\varphi = v_g = v$.

Cvičení 6.7. Určete fázovou a grupovou rychlost pro elektromagnetické vlny v plazmatu. Toto prostředí je popsané disperzním vztahem $\omega^2 = \omega_{min}^2 + c^2k^2$. Je fázová nebo grupová rychlost větší než rychlost světla? Co to znamená?

Řešení: Máme

$$v_\varphi(k) = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{k}\sqrt{\omega_{min}^2 + c^2k^2} = \sqrt{c^2 + \left(\frac{\omega_{min}}{k}\right)^2} = c \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{min}}{ck}\right)^2} > c. \tag{213}$$

Grupová rychlost potom

$$v_g(k) = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2k}{\sqrt{\omega_{\min}^2 + c^2k^2}} = c \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega_{min}}{ck})^2}} < c. \tag{214}$$

Velikost fázové rychlosti může být bez problémů větší než c – to by odpovídalo rychlosti šíření monochromatické vlny s konstantní amplitudou – což nenese žádnou informaci. Naopak grupová rychlost – rychlost šíření vlnových balíků – je menší než rychlost světla.

Cvičení 6.8. Uvažujte světlo v látce o indexu lomu n, tento je definován jako $n = \frac{c}{v_\varphi}$. Index lomu v látce je pro jednoduchý model elektronů popsán jako

$$n(\omega) = 1 + \frac{\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

kde $\alpha > 0$ a uvažujeme pouze $\omega < \omega_0$. Určete grupovou rychlost a ukažte, že je menší než rychlost světla.

Řešení: Z definice indexu lomu dostaneme fázovou rychlost ve tvaru

$$v_\varphi(\omega) = \frac{c}{n(\omega)}. \tag{215}$$

Zároveň víme, že fázová rychlost je dána vztahem $v_\varphi = \omega/k$. Můžeme si tedy snadno vyjádřit disperzní vztah $k = k(\omega)$ ve tvaru

$$k(\omega) = \frac{\omega}{v_\varphi} = \frac{n(\omega)}{c}\omega. \tag{216}$$

Tuto inverzní podobu (oproti vztahu $\omega = \omega(k)$) preferujeme, jelikož máme zadanou funkci indexu lomu $n(\omega)$ jako funkci úhlové rychlosti ω. Potom musím počítat převrácenou hodnotu grupové rychlosti (abychom mohli derivovat inverzní funkci):

$$\frac{1}{v_g(\omega)} = \frac{1}{\frac{d\omega}{dk}} = \frac{dk(\omega)}{d\omega}. \tag{217}$$

Odtud dostáváme

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c}\left(n(\omega) + \omega\frac{dn(\omega)}{d\omega}\right). \tag{218}$$

V našem konkrétním případě je $\frac{dn}{d\omega} = \frac{2\alpha\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}$ a tedy

$$\frac{dk}{d\omega}(\omega) = \frac{1}{c}\left(1 + \frac{\alpha(\omega_0^2+\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}\right) > \frac{1}{c}. \tag{219}$$

Po dosazení tedy dostáváme finální výraz pro grupovou rychlost v_g jako funkci ω:

$$v_g(\omega) = \frac{c}{1 + \frac{\alpha(\omega_0^2+\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}} < c. \tag{220}$$

Cvičení 6.9. Ukažte, že pro světlo v prostředí s indexem lomu $n(\lambda_0)$, kde λ_0 je vlnová délka světla *ve vakuu*, platí

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{v_\varphi} - \frac{\lambda_0}{c}\frac{dn}{d\lambda_0}. \tag{221}$$

Řešení: Vlnová délka světla ve vakuu je $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}$, kde k_0 je vlnové číslo ve vakuu dané disperzním vztahem $\omega = ck_0$. Můžeme si tedy vlnovou délku vyjádřit pomocí úhlové frekvence ω jako $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$. Touto substitucí dostaneme funkci indexu lomu od proměnné ω: $n(\lambda_0(\omega)) = n(\frac{2\pi c}{\omega})$.

Z předchozího příkladu víme

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c}\left(n(\omega) + \omega\frac{dn(\omega)}{d\omega}\right). \tag{222}$$

První člen na pravé straně je $\frac{1}{v_\varphi} = \frac{n}{c}$. V druhém členu si vyjádříme ω jako funkci vlnové délky ve vakuu $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$ a funkci indexu lomu musíme nyní derivovat jako složenou funkci:

$$\frac{dn}{d\omega} = \frac{dn}{d\lambda_0}\frac{d\lambda_0}{d\omega} = \frac{dn}{d\lambda_0}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{2\pi c}{\omega}\right) = -\frac{2\pi c}{\omega^2}\frac{dn}{d\lambda_0}. \tag{223}$$

Po dosazení těchto výsledků dostáváme hledaný vztah

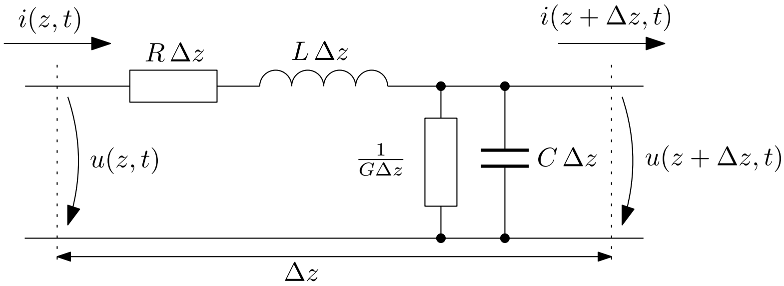
$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{v_\varphi} - \frac{\lambda_0}{c}\frac{dn}{d\lambda_0}. \tag{224}$$

7 Odrazy

***Cvičení 7.1.** Odvoďte telegrafní rovnice pro napěťové a proudové vlny $u(z,t)$ a $i(z,t)$ na homogenním vedení ve tvaru

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t}, \quad -\frac{\partial i}{\partial z} = Gu + C\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{225}$$

kde L je **indukčnost vedení** na jednotku délky, [L] = H.m^{-1}, C **kapacita**, [C] = F.m^{-1}, R je odpor, [R] = Ω.m^{-1}, a G je **svodová vodivost**, [G] = Ω^{-1}.m^{-1}, na jednotku délky. Rovnice odvoďte analýzou náhradního obvodu vedení délky Δz:



Řešení: Při zvoleném směru proudu dojde na odporu a cívce k úbytku napětí. Dostaneme tedy následující rovnici:

$$u(z+\Delta z,t) = u(z,t) - R\Delta z \cdot i(z,t) - L\Delta z \cdot \frac{\partial i}{\partial t}(z,t). \tag{226}$$

Vydělením Δz a úpravou tedy dostaneme

$$\frac{u(z+\Delta z,t) - u(z,t)}{\Delta z} = -R \cdot i(z,t) - L \cdot \frac{\partial i}{\partial t}(z,t). \tag{227}$$

Limita $\Delta z \to 0$ nám tedy dává kýženou rovnici. Rovněž dojde k úbytku proudu, kde část $G\Delta z \cdot u(z+\Delta z,t)$ vytéká přes svodový odpor a $C\Delta z \cdot \frac{\partial u}{\partial t}(z+\Delta z,t)$ nabíjí kondenzátor. Dostanu tedy rovnici

$$i(z+\Delta z,t) = i(z,t) - G\Delta z \cdot u(z+\Delta z,t) - C\Delta z \cdot \frac{\partial u}{\partial t}(z+\Delta z,t). \tag{228}$$

Vydělením Δz dostávám

$$\frac{i(z+\Delta z,t) - i(z,t)}{\Delta z} = -G \cdot u(z+\Delta z,t) - C \cdot \frac{\partial u}{\partial t}(z+\Delta z,t). \tag{229}$$

Limita $\Delta z \to 0$ tedy dává druhou rovnici.

Cvičení 7.2. Uvažujte ideální homogenní vedení, kde $R = G = 0$. Ukažte, že z telegrafních rovnic plynou vlnové rovnice pro funkce $u(z,t)$ a $i(z,t)$. Nalezněte d'Alembertovo řešení splňující původní telegrafní rovnice.

Návod #1: uvažujte ansatz v podobě d'Alembertových řešení

$$u(z,t) = F(z-vt) + G(z+vt), \quad i(z,t) = \alpha_1 F(z-vt) + \alpha_2 G(z+vt). \tag{230}$$

Návod #2: dosaďte d'Alembertovo řešení pro u do telegrafních rovnic a vyřešte pro i.

Poznámka: Koeficient úměrnosti mezi napěťovou a proudovou vlnou se nazývá impedance Z.

Řešení: Telegrafní rovnice ideálního vedení mají nyní tvar

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = L\frac{\partial i}{\partial t}, \quad -\frac{\partial i}{\partial z} = C\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{231}$$

Parciálně zderivujeme první rovnici podle z a dosadíme z druhé rovnice:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -L\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial i}{\partial z}\right) = LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{232}$$

To je ovšem vlnová rovnice pro u ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{233}$$

kde $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Analogickým způsobem získáme vlnovou rovnici pro proud i: zderivujeme druhou rovnici podle z a dosadíme z první:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = -C\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 i}{\partial z^2}. \tag{234}$$

Návod #1: Tyto rovnice mají obecné řešení v d'Alembertově tvaru, pro napětí $u(z,t) = F(z - vt) + G(z+vt)$ pro libovolné dvakrát diferencovatelné funkce $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Výsledné vlnové rovnice vyšly nezávislé pro funkce u a i, ale původní telegrafní rovnice u a i svazují! Nemůžeme tedy vzít jakékoliv d'Alembertovo řešení pro i! Řešení pro i nalezneme vyřešením telegrafních rovnic po dosazení nalezeného tvaru u:

$$\frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{1}{L}\big(F'(z - vt) + G'(z + vt)\big), \tag{235}$$

$$\frac{\partial i}{\partial z} = \sqrt{\frac{C}{L}}\big(F'(z - vt) - G'(z + vt)\big). \tag{236}$$

Druhou rovnici snadno vyřešíme integrací podle z, dostaneme

$$i(z,t) = \sqrt{\frac{C}{L}}\big(F(z - vt) - G(z + vt)\big) + i_0(t). \tag{237}$$

Po dosazení do první rovnice dostaneme $\frac{d}{dt}i_0(t) = 0$, odkud vidíme, že až na konstatní hodnotu proudu $i_0 = \text{konst.}$, která není zajímavá, a volíme proto $i_0 = 0$, musí mít i tvar

$$i(z,t) = \sqrt{\frac{C}{L}}\big(F(z - vt) - G(z + vt)\big). \tag{238}$$

Vidíme, že impedance je daná vztahem $Z = \frac{U}{I} = \sqrt{\frac{L}{C}}$. Všimněte si, doleva postupující proudová vlna má opačné znaménko! Výsledné tvary napěťových a proudových vln na telegrafním vedení tedy jsou

$$u(z,t) = F(z-vt)+G(z+vt), \quad i(z,t) = \frac{1}{Z}F(z-vt)-\frac{1}{Z}G(z+vt), \quad v = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Z = \sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{239}$$

Návod #2: Dosadíme-li předepsané ansatzy do telegrafních rovnic, dostaneme:

$$\begin{aligned} -F'(z - vt) - G'(z + vt) &= L\big(\alpha_1(-v)F'(z - vt) + \alpha_2 vG'(z + vt)\big), \\ -\big(\alpha_1 F'(z - vt) + \alpha_2 G'(z + vt)\big) &= C\big((-v)F'(z - vt) + vG'(z + vt)\big). \end{aligned} \tag{240}$$

Po úpravě

$$0 = \big(1 - \alpha_1 vL\big)F'(z - vt) + \big(1 + \alpha_2 vL\big)G'(z + vt),$$
$$0 = \big(\alpha_1 - vC\big)F'(z - vt) + \big(\alpha_2 + vC\big)G'(z + vt). \tag{241}$$

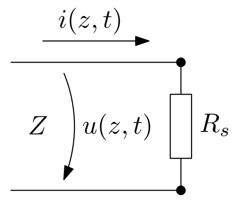
Pro obecné vlny jsou $F'(x)$ a $G'(x)$ lineárně nezávislé funkce, aby se tedy jejich lineární kombinace mohli rovnat nule, musí se rovnat nule příslušné koeficienty u nich stojící, to vede na podmínky pro konstanty α_1 a α_2:

$$\frac{1}{vL} = \alpha_1 = vC, \qquad -\frac{1}{vL} = \alpha_2 = -vC. \tag{242}$$

Po dosazení $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ dostaneme konzistentně $\alpha_1 = \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{C}{L}} = -\alpha_2$. Tedy stejný výsledek jako v prvním návodu.

Cvičení 7.3. Homogenní vedení o impedanci Z je zakončeno svodovým odporem velikosti R_s. Nalezněte koeficient odrazu R pro napěťové vlny přicházející po vedení. Diskutujte speciální případy $R_s = 0$ (zkrat), $R_s = +\infty$ (nezapojený odpor) a $R = 0$ (nic se neodráží). Použijte harmonických postupných vln.

Řešení: Telegrafní vedení je tedy zakončeno následujícím způsobem:



Uvažujeme napěťovou harmonickou dopadající u_d a odraženou u_r vlnu tvarů:

$$u_d(z,t) = e^{i(\omega t - kz)}, \qquad u_r(z,t) = Re^{i(\omega t + kz)}, \tag{243}$$

kde $R \in \mathbb{C}$ je koeficient odrazu kódující změnu amplitudy odražené vlny (a případný fázový posun, pokud vyjde komplexní; $R = |R|e^{i\varphi}$). Příslušné dopadající i_d a odražené i_r proudové vlny dle výsledků předchozího cvičení jsou

$$i_d(z,t) = \frac{u_d(z,t)}{Z} = \frac{1}{Z}e^{i(\omega t - kz)}, \qquad i_r(z,t) = -\frac{u_r(z,t)}{Z} = -\frac{1}{Z}R\,e^{i(\omega t + kz)}. \tag{244}$$

Funkce celkového napětí a proudu na vedení pak je $u(z,t) = u_d(z,t) + u_r(z,t)$ a $i(z,t) = i_d(z,t) + i_r(z,t)$. Uvažujme zakončení vedení v místě $z = 0$. Okrajová podmínka tohoto zakončení je jednoduše dána Ohmovým zákonem – úbytek napětí na zakončovacím rezistoru je dán součinem jeho odporu R_s a proudu jím protékajícím: $u(0,t) = R_s\, i(0,t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Po dosazení tvarů jednotlivých vln:

$$e^{i\omega t} + Re^{i\omega t} = R_s \left(\frac{1}{Z}e^{i\omega t} - \frac{1}{Z}R\,e^{i\omega t}\right). \tag{245}$$

Exponenciály můžeme vykrátit a máme $1 + R = \frac{R_s}{Z}(1 - R)$. Z této rovnice snadno vyjádříme výsledný koeficient odrazu

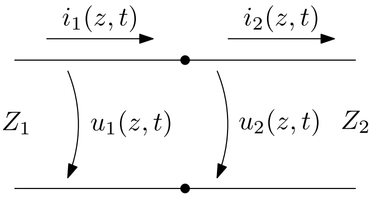
$$R = \frac{R_s - Z}{R_s + Z}. \tag{246}$$

Pro zkrat ($R_s = 0$) ihned dostaneme $R = -1$ a pro nezapojený odpor ($R_s = +\infty$) se hodí koeficient odrazu zapsat ve tvaru $R = \frac{1 - \frac{Z}{R_s}}{1 + \frac{Z}{R_s}}$ a tedy pak $R = 1$. Podmínka pro $R = 0$ je $R_s = Z$ – tedy je třeba vedení zakončit svodovým odporem stejné velikosti jako je impedance daného vedení.

Cvičení 7.4. Homogenní vedení o impedanci $Z_1 = 50\,\Omega$ je napojeno na vedení o impedanci $Z_2 = 100\,\Omega$. Nalezněte koeficienty průchodu a odrazu pro napěťové a proudové vlny pocházející z prvního vedení na druhé. Pokud na rozhraní dopadá pulz o amplitudě $15\,V$, jaká bude amplituda prošlé a odražené vlny?

Návod: Sestavte příslušné podmínky napojení. Použijte harmonické postupné vlny.

Řešení: Postupujeme podobně jako v předchozím příkladě. Nyní ovšem potřebujeme popisovat napětí a proud na dvou různých vedeních, označme je $u_{1,2}$ a $i_{1,2}$.



Potom na levém vedení máme dopadající a odraženou vlnu, tedy $u_1 = u_d + u_r$ a $i_1 = i_d + i_r$, na pravém vedení máme prošlou vlnu, $u_2 = u_p$ a $i_2 = i_p$. Tvary jednotlivých napěťových a proudových vln jsou pak

$$u_d(z,t) = e^{i(\omega t - k_1 z)}, \qquad u_r(z,t) = R\, e^{i(\omega t + k_1 z)}, \qquad u_p(z,t) = P\, e^{i(\omega t - k_2 z)}, \tag{247}$$

$$i_d(z,t) = \frac{1}{Z_1} e^{i(\omega t - k_1 z)}, \qquad i_r(z,t) = -\frac{1}{Z_1} R\, e^{i(\omega t + k_1 z)}, \qquad i_p(z,t) = \frac{1}{Z_2} P\, e^{i(\omega t - k_2 z)}, \tag{248}$$

kde jsme zavedli koeficient odrazu R a koeficient průchodu P a dále vlnová čísla na jednotlivých vedeních k_1 a k_2. Koeficienty P a R určíme z podmínek napojení na rozhraní, umístěme si ho do $z = 0$. Na rozhraní se zde neděje nic speciálního. Proud i napětí v $z = 0$ tedy musí spojitě navazovat:

$$u_1(0,t) = u_2(0,t), \qquad i_1(0,t) = i_2(0,t). \tag{249}$$

Po dosazení tvarů jednotlivých vln obdržíme rovnice

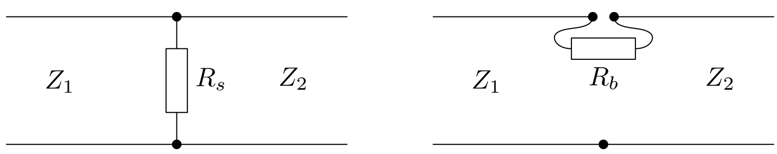
$$(1 + R)e^{i\omega t} = Pe^{i\omega t}, \qquad \frac{1}{Z_1}(1 - R)e^{i\omega t} = \frac{1}{Z_2} Pe^{i\omega t}. \tag{250}$$

Ze spojitosti napětí máme $1 + R = P$, z rovnice pro proudy $1 - R = \frac{Z_1}{Z_2} P$. Vyřešením těchto rovnic dostaneme

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, \qquad P = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}. \tag{251}$$

Pro zadané hodnoty máme tedy $R = (100 - 50)/(100 + 50) = 1/3$ a tedy $P = 4/3$. Amplitudy prošlé a odražené vlny tedy budou $20V$ a $5V$.

Cvičení 7.5. Homogenní vedení o impedanci $Z_1 = 50\,\Omega$ je napojeno na vedení o impedanci $Z_2 = 100\,\Omega$ následujícími dvěma způsoby:



Nalezněte koeficienty průchodu a odrazu pro napěťové vlny tyto dvě situace. Za jakých podmínek nedochází k odrazu? Použijte harmonické postupné vlny. Zapište podmínky napojení a vyřešte je.

Řešení: Rozdíl oproti předchozí úloze je pouze v podmínkách napojení. Zde může docházet ke skokové změně proudu, resp. napětí. Napěťové a proudové vlny budou vypadat zcela stejně jako v předchozí úloze.

Uvažujme první z případů. Zde napětí na rozhraní je spojité, ale část proudu odtéká přes svodový odpor:

$$u_1(0,t) = u_2(0,t), \qquad i_1(0,t) = i_2(0,t) + i_s(t), \tag{252}$$

kde svodový proud $i_s(t)$ je dán z Ohmova zákona $i_s(t) = \frac{u_{1,2}(0,t)}{R_s}$ – ve zlomku můžeme volit buď u_1 nebo u_2, jelikož tyto jsou si v místě napojení rovny; a jelikož u_2 má jednodušší vyjádření než u_1, volme svodový proud ve tvaru $i_s = \frac{u_2}{R_s}$. Po dosazení tvarů vln z předchozího příkladu dostaneme rovnice

$$1 + R = P, \qquad \frac{1}{Z_1}(1-R) = \frac{1}{Z_2}P + \frac{1}{R_s}P. \tag{253}$$

Druhou z rovnic upravíme na tvar $1 - R = Z_1(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{R_s})P$. Jejich řešením jsou koeficienty

$$R = \frac{R_s(Z_2 - Z_1) - Z_1 Z_2}{Z_1 Z_2 + R_s Z_1 + R_s Z_2}, \qquad P = \frac{2 Z_2 R_s}{Z_1 Z_2 + R_s Z_1 + R_s Z_2}. \tag{254}$$

Požadujeme-li, aby $R = 0$, pak dostaneme podmínku $R_s(Z_2 - Z_1) = Z_1 Z_2$, tzn. $R_s = \frac{Z_1 Z_2}{Z_2 - Z_1}$. Fyzikálně je možné pouze $R_s > 0$ a tedy, abychom v tomto napojení dvou vedení mohli eliminovat odrazy, je třeba aby platilo $Z_2 > Z_1$. Tedy pro eliminaci odrazů pro zadané hodnoty impedancí musíme volit $R_s = \frac{50 \cdot 100}{100 - 50} = 100\,\Omega$.

Uvažujme nyní druhý případ. Zde jsou spojité proudy, ale napětí má skok vlivem úbytku napětí na bočním odporu R_b:

$$u_1(0,t) = u_2(0,t) + u_b(t), \qquad i_1(0,t) = i_2(0,t), \tag{255}$$

kde úbytek napětí u_b vyjádříme pomocí Ohmova zákona $u_b(t) = R_b\, i_{1,2}(0,t)$ – ze spojitosti proudu v místě napojení je opět jedno, jestli použijeme funkci i_1 nebo i_2, volíme opět pro jednodušší tvar i_2. Dosaďme do podmínek napojení tvary napěťových a proudových vln:

$$1 + R = P + R_b \frac{1}{Z_2} P, \qquad \frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_1} R = \frac{1}{Z_2} P. \tag{256}$$

Po úpravě máme rovnice $1 + R = (1 + \frac{R_b}{Z_2})P$, $1 - R = \frac{Z_1}{Z_2} P$. Jejich řešením jsou koeficienty

$$R = \frac{Z_2 - Z_1 + R_b}{Z_1 + Z_2 + R_b}, \qquad P = \frac{2 Z_2}{Z_1 + Z_2 + R_b}. \tag{257}$$

Podmínky vymizení odrazů, $R = 0$, vede na velikost bočního odporu $R_b = Z_1 - Z_2$. Opět z požadavku $R_b > 0$ plyne, že v tomto zapojení můžeme eliminovat odrazy pouze pro vedení splňující $Z_1 > Z_2$. Pro zadané hodnoty impedancí toto zapojení tedy použít nemůžeme.

Cvičení 7.6. Uvažujte tři na sebe navazující prostředí prostřednictvím dvou rozhraní, jedno v $z = 0$ a druhé v $z = L$. Označme amplitudové koeficienty průchodu a odrazu jako T_{ij} a R_{ij} představující koeficienty průchodu a odrazu při přechodu z i-tého do j-tého prostředí. Vlnová čísla v jednotlivých prostředích jsou k_1, k_2, k_3. Uvažujte harmonickou dopadající vlnu tvaru $Ae^{i(\omega t - k_1 z)}$. Nalezněte celkový koeficient odrazu $R \in \mathbb{C}$, tzn. celkovou odraženou vlnu tvaru $ARe^{i(\omega t + k_1 z)} = A|R|e^{i(\omega t + k_1 z + \varphi)}$ vzniklou nekonečnou superpozicí odražených vln mezi dvěma rozhraními. Na rozhraních požadujte spojitost funkcí fáze jednotlivých vln.

Na závěr specializujte výsledek, uvažujete-li vztahy $1 + R_{ij} = T_{ij}$ a $R_{ij} = -R_{ji}$.

Řešení: Zde máme přímo zadané amplitudové koeficienty průchodu a odrazu na jednotlivých rozhraních. Zbývá si rozmyslet, co znamená požadavek spojitosti funkcí fáze na rozhraní. Uvažujme zatím pro jednoduchost jedno rozhraní na $z = L$ mezi prostředími s vlnovými čísly k_1 a k_2. Uvažujeme-li dopadající, odraženou a prošlou vlnu tvarů

$$\psi_d(z,t) = e^{i(\omega t - k_1 z + \phi_d)}, \qquad \psi_r(z,t) = R_{12} e^{i(\omega t + k_1 z + \phi_r)}, \qquad \psi_p(z,t) = T_{12} e^{i(\omega t - k_2 z + \phi_p)}, \quad (258)$$

kde uvažujeme v jednotlivých vlnách obecné fázové posuvy ϕ_d, ϕ_r a ϕ_p. Funkce fáze jednotlivých vln jsou tedy tvaru

$$\varphi_d(z,t) = \omega t - k_1 z + \phi_d, \qquad \varphi_r(z,t) = \omega t + k_1 z + \phi_r, \qquad \varphi_p(z,t) = \omega t - k_2 z + \phi_p. \quad (259)$$

Požadavek spojitosti těchto fází při odrazu a průchodu na souřadnici $z = L$ vede na požadavky

$$\varphi_d(L,t) = \varphi_r(L,t), \qquad \varphi_d(L,t) = \varphi_p(L,t), \quad (260)$$

$$\omega t - k_1 L + \phi_d = \omega t + k_1 L + \phi_r, \qquad \omega t - k_1 L + \phi_d = \omega t - k_2 L + \phi_p. \quad (261)$$

Z těchto vztahů snadno vyjádříme fázové posuvy odražené a prošlé vlny:

$$\phi_r = \phi_d - 2k_1 L, \qquad \phi_p = \phi_d + (k_2 - k_1)L. \quad (262)$$

Při odrazu mimo $z = 0$ tedy dochází k posuvům fáze odražených a prošlých vln! Tyto je třeba přidávat při každém odrazu, resp. průchodu, jak uvidíme dále. Naopak pro $z = 0$ není třeba nic řešit, platí totiž $\phi_r = \phi_d$ a $\phi_p = \phi_d$ – posuny fáze zůstávají stejné jako u dopadající vlny.

Také jsme mohli naopak vyjít z faktu, že pro rozhraní na $z = 0$ se neděje nic zvláštního (tzn. fáze nemusíme řešit) a zavést substituci $z' = z + L$ a tím rozhraní přenést do $z' = L$, potom bychom dostali

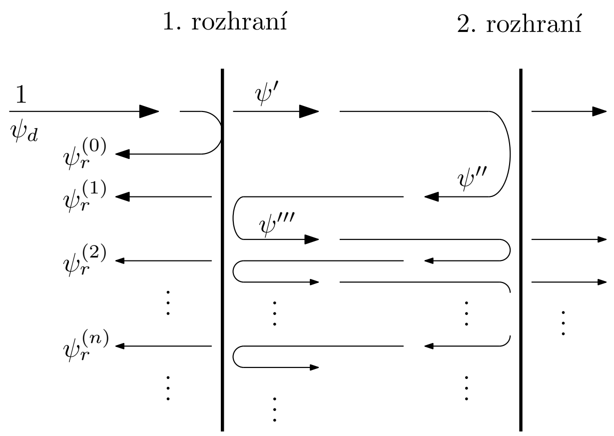
$$\psi_d(z,t) = e^{i(\omega t - k_1 z)} = e^{i(\omega t - k_1 z' + k_1 L)}, \quad (263)$$

$$\psi_r(z,t) = R_{12}\, e^{i(\omega t + k_1 z)} = R_{12}\, e^{i(\omega t + k_1 z' - k_1 L)} = R_{12}\, e^{-2ik_2 L} e^{i(\omega t - k_1 z' + k_1 L)}, \quad (264)$$

$$\psi_p(z,t) = T_{12}\, e^{i(\omega t - k_2 z)} = T_{12}\, e^{i(\omega t - k_2 z' - k_2 L)} = T_{12}\, e^{i(k_2 - k_1)L} e^{i(\omega t - k_1 z' + k_1 L)}, \quad (265)$$

kde jsme u odražené a prošlé vlny v poslední úpravě vytknuli posun fáze oproti dopadající vlně.

Postupme k řešení úlohy se dvěma rozhraními. Položme $A = 1$, ušetříme si tím psaní. Označme nyní $\psi_r^{(n)}(z,t)$ vlnu, která se odrazila zpět do prvního prostředí a na druhém rozhraní se odrazila právě n-krát. Viz obrázek:



Jednotlivé vlny získáme započítáním příslušných amplitudových koeficientů na jednotlivých rozhraních a za každý odraz na druhém rozhraní musíme přidat fázi $\Delta\varphi = -2k_2L$. Máme tedy

$$\psi_r^{(0)}(z,t) = R_{12}\, e^{i(\omega t + k_1 z)}. \tag{266}$$

Vlnu $\psi_r^{(1)}(z,t)$, která se na druhém rozhraní odrazí právě jednou, dostaneme z vlny prošlé prvním rozhraním $\psi'(z,t) = T_{12}\, e^{i(\omega t - k_2 z)}$, odrazem od druhého rozhraní $\psi''(z,t) = R_{23}T_{12}\, e^{i(\omega t + k_2 z - 2k_2 L)}$ a nakonec průchodem přes první rozhraní zpátky, tedy

$$\psi_r^{(1)}(z,t) = T_{21}R_{23}T_{12}\, e^{i(\omega t + k_1 z - 2k_2 L)}. \tag{267}$$

Dál postupujeme analogicky. Pro získání $\psi_r^{(2)}(z,t)$ musíme vzít vlnu $\psi''(z,t)$, odrazit ji doprava od prvního rozhraní (a získat tak vlnu $\psi'''(z,t) = R_{21}R_{23}T_{12}e^{i(\omega t - k_2 z - 2k_2 L)}$), odrazit ji od druhého rozhraní (přidáme $R_{23}e^{-2ik_2L}$) a nechat projít zpět do prvního prostředí (přidáme T_{21}). Dostaneme

$$\psi_r^{(2)}(z,t) = T_{21}R_{21}R_{23}^2T_{12}\, e^{i(\omega t + k_1 z - 4k_2 L)}. \tag{268}$$

Odtud už můžeme vykoukat obecnou formulku – za každý „vnitřní odraz“ přibývá faktor $R_{21}R_{23}e^{-2ik_2L}$. Dostáváme

$$\psi_r^{(n)}(z,t) = T_{21}R_{21}^{n-1}R_{23}^{n}T_{12}\, e^{i(\omega t + k_1 z - 2nk_2 L)}. \tag{269}$$

Pro získání celkové odražené vlny $\psi_r(z,t)$ musíme jednotlivé příspěvky sečíst, $\psi_r(z,t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\psi_r^{(k)}(z,t)$. Dostáváme tedy řadu

$$\psi_r(z,t) = \psi_r^{(0)}(z,t) + \sum_{k=1}^{+\infty}\psi_r^{(k)}(z,t) = \left[R_{12} + \frac{T_{21}T_{12}}{R_{21}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(R_{21}R_{23}e^{-2ik_2L}\right)^k\right]e^{i(\omega t + k_1 z)}. \tag{270}$$

Výraz v hranatých závorkách je hledaný celkový koeficient odrazu R. Výraz značně zjednodušíme sečtením geometrické řady pomocí vzorce $\sum_{k=1}^{+\infty}x^k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty}x^k\right) - 1 = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$ pro $x = R_{21}R_{23}e^{-2ik_2L}$:

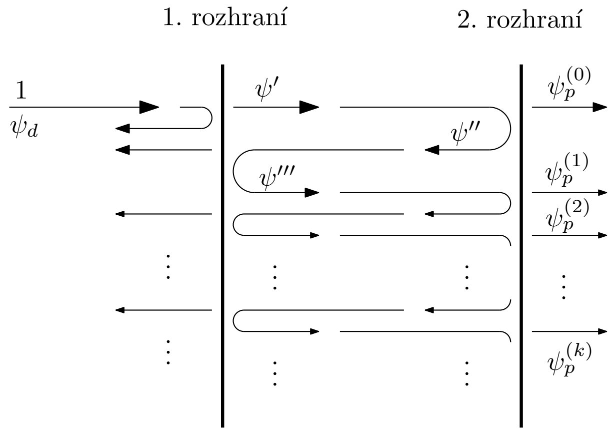
$$R = R_{12} + \frac{T_{21}T_{12}}{R_{21}}\frac{R_{21}R_{23}e^{-2ik_2L}}{1 - R_{21}R_{23}e^{-2ik_2L}} = R_{12} + \frac{T_{21}T_{12}R_{23}e^{-2ik_2L}}{1 - R_{21}R_{23}e^{-2ik_2L}}. \tag{271}$$

Uvažujeme-li na závěr vztahy $R_{21} = -R_{12}$, $T_{12} = 1 + R_{12}$, $T_{21} = 1 - R_{12}$ dostaneme výraz pro celkový koeficient odrazu R pouze v závislosti na odrazivostech na jednotlivých rozhraních R_{12} a R_{23}:

$$R = R_{12} + \frac{(1 - R_{12}^2)R_{23}e^{-2ik_2L}}{1 + R_{12}R_{23}e^{-2ik_2L}} = \frac{R_{12} + R_{23}e^{-2ik_2L}}{1 + R_{12}R_{23}e^{-2ik_2L}}. \tag{272}$$

***Cvičení 7.7.** Nalezněte celkový koeficient průchodu $T \in \mathbb{C}$, tzn. celkovou prošnou vlnu $ATe^{i(\omega t - k_3 z)}$ pro situaci popsanou v předchozím cvičení.

Řešení: Postup řešení bude velmi podobný předchozímu příkladu. Již tedy víme, jak se chovají fáze při průchodu a odrazu na rozhraní v místě $z = L$. Nyní označme $\psi_p^{(n)}$ vlnu, která se prošla do třetího prostředí, ale cestou se na druhém rozhraní odrazila právě n-krát, viz obrázek:



Vlna $\psi_p^{(0)}(z,t)$ vznikne z vlny $\psi'(z,t) = T_{12}\, e^{i(\omega t - k_2 z)}$ (viz předchozí příklad) průchodem na druhém rozhraní:

$$\psi_p^{(0)}(z,t) = T_{23} T_{12} e^{i(k_3-k_2)L} e^{i(\omega t - k_3 z)}, \tag{273}$$

kde jsme přidali kromě amplitudového koeficientu T_{23} také fázový posun $\Delta\varphi = (k_3 - k_2)L$ za průchod na rozhraní v místě $z = L$ (viz první část předchozího příkladu). Analogicky získáme vlnu $\psi_p^{(1)}(z,t)$ z vlny $\psi'''(z,t) = R_{21} R_{23} T_{12} e^{i(\omega t - k_2 z - 2k_2 L)}$:

$$\psi_p^{(1)}(z,t) = T_{23} R_{21} R_{23} T_{12} e^{-2ik_2 L} e^{i(k_3-k_2)L} e^{i(\omega t - k_3 z)}. \tag{274}$$

Každá následující prošlá vlna bude mít o jeden odraz na vnitřních stranách rozhraní navíc, tedy

$$\psi_p^{(2)}(z,t) = T_{23} R_{21}^2 R_{23}^2 T_{12} (e^{-2ik_2 L})^2 e^{i(k_3-k_2)L} e^{i(\omega t - k_3 z)}. \tag{275}$$

Snadno již vykoukáme výraz pro k-tou prošlou vlnu

$$\psi_p^{(k)}(z,t) = T_{23} R_{21}^k R_{23}^k T_{12} (e^{-2ik_2 L})^k e^{i(k_3-k_2)L} e^{i(\omega t - k_3 z)}. \tag{276}$$

Nyní pro získání celkové prošlé vlny $\psi_p(z,t)$ musíme jednotlivé příspěvky sečíst:

$$\psi_p(z,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \psi_p^{(k)}(z,t) = \left[T_{12} T_{23} e^{i(k_3-k_2)L} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(R_{21} R_{23} e^{-2ik_2 L} \right)^k \right] e^{i(\omega t - k_3 z)}. \tag{277}$$

Výraz v hranatých závorkách je náš hledaný celkový koeficient průchodu T. Výraz opět zjednodušíme sečtěním nekonečné geometrické řady, $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ pro $x = R_{21} R_{23} e^{-2ik_2 L}$, tzn.

$$T = \frac{T_{12} T_{23} e^{i(k_3-k_2)L}}{1 - R_{21} R_{23} e^{-2ik_2 L}}. \tag{278}$$

Uvažujeme-li na závěr $R_{21} = -R_{12}$, $T_{12} = 1 + R_{12}$ a $T_{23} = 1 + R_{23}$ dostaneme

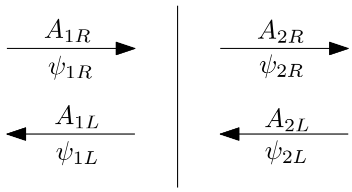
$$T = \frac{(1 + R_{12})(1 + R_{23}) e^{i(k_3-k_2)L}}{1 + R_{12} R_{23} e^{-2ik_2 L}}. \tag{279}$$

Cvičení 7.8. Je dána matice přechodu $\mathbb{D}$. Nalezněte koeficienty průchodu P a odrazu R pro vlnu dopadající z prvního (levého) prostředí do druhého (pravého).

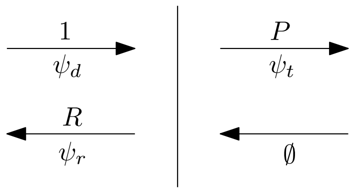
Řešení: Matice přenosu $\mathbb{D} \in \mathbb{C}^{2,2}$ je definována rovnicí

$$\begin{pmatrix} A_{1R} \\ A_{1L} \end{pmatrix} = \mathbb{D} \begin{pmatrix} A_{2R} \\ A_{2L} \end{pmatrix}, \tag{280}$$

kde A_{1R} a A_{1L} jsou amplitudy harmonických postupných vln postupujících doprava (resp. doleva) v prostředí vlevo od rozhraní, A_{2R} a A_{2L} podobně vpravo od rozhraní, viz obrázek.



Matici $\mathbb{D}$ bychom získali řešením podmínek napojení vlnových funkcí na rozhraní. Pro nalezení P a R uvažujeme $A_{1R} = 1$, $A_{1L} = R$, $A_{2R} = P$ a $A_{2L} = 0$:



Dostaneme tedy

$$\begin{pmatrix} 1 \\ R \end{pmatrix} = \mathbb{D} \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{281}$$

Označme si známe prvky matice $\mathbb{D}$ jako

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}. \tag{282}$$

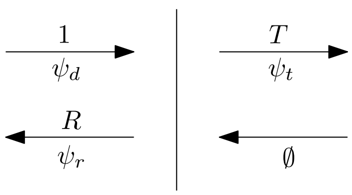
Dosazením do maticové rovnice tedy dostáváme soustavu rovnic

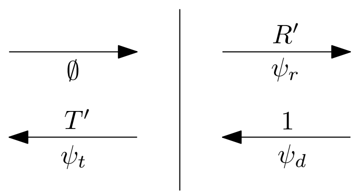
$$1 = d_{11}P, \quad R = d_{21}P. \tag{283}$$

Odtud tedy $P = 1/d_{11}$ a $R = d_{21}/d_{11}$.

Cvičení 7.9. Jsou dány koeficienty průchodu a odrazu, T a R, pro vlnu dopadající z prvního do druhého prostředí, a koeficienty T' a R' pro vlnu dopadající z druhého prostředí do prvního. Nalezněte příslušný tvar matice přenosu $\mathbb{D}$. Specializujte tvar této matice předpokládáte-li, že $R' = -R$ a $1 + R = T$ (a $1 + R' = T'$).

Řešení: Koeficienty T, R, T' a R' určují amplitudy vln v následujících dvou situacích:





Tzn. z definice matice přenosu $\mathbb{D}$ (viz předchozí příklad) máme maticové rovnice

$$\begin{pmatrix} 1 \\ R \end{pmatrix} = \mathbb{D} \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ T' \end{pmatrix} = \mathbb{D} \begin{pmatrix} R' \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{284}$$

Rozepsáno do složek (označení prvků matice stejně jako v předchozím příkladě) dostaneme

$$\begin{aligned} 1 &= d_{11}T & 0 &= d_{11}R' + d_{12} \\ R &= d_{21}T & T' &= d_{21}R' + d_{22}. \end{aligned} \tag{285}$$

Z levé sady rovnic snadno nalezneme $d_{11} = \frac{1}{T}$, $d_{21} = \frac{R}{T}$, dosazením do pravých rovnic hned máme $d_{12} = -\frac{R'}{T}$ a $d_{22} = T' - \frac{RR'}{T} = \frac{TT'-RR'}{T}$. Celkově

$$\mathbb{D} = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} 1 & -R' \\ R & TT' - RR' \end{pmatrix}. \tag{286}$$

Pro vztahy $R' = -R$, $T = 1 + R$ a $T' = 1 + R' = 1 - R$ dostaneme

$$\mathbb{D} = \frac{1}{1+R} \begin{pmatrix} 1 & R \\ R & 1 \end{pmatrix}. \tag{287}$$

Cvičení 7.10. Uvažujte rozhraní definovaná ve cvičení 7.6. Napište matice přenosu pro jednotlivá rozhraní analýzou odrazů harmonických vln na jednotlivých rozhraní za využití výsledku cvičení 7.9. Tyto matice složte a pomocí výsledku příkladu 7.8 se přesvědčte, že celkový koeficient odrazu R pro dvě rozhraní vyjde stejně jako ve cvičení 7.6.

Řešení: Najít matici přenosu $\mathbb{D}_1$ pro rozhraní v $z = 0$ je snadné. Zde nedochází k žádným fázovým posuvům a stačí tedy přímo využít výsledek předchozího cvičení a jen dosadit správné amplitudové koeficienty:

$$\mathbb{D}_1 = \frac{1}{T_{12}} \begin{pmatrix} 1 & -R_{21} \\ R_{12} & T_{12}T_{21} - R_{12}R_{21} \end{pmatrix}. \tag{288}$$

Pro rozhraní v $z = L$ musíme myslet na to, že z požadavku spojitosti fáze plyne dodatečný fázový posun při odrazu nebo průchodu skrze toto rozhraní. V první části cvičení 7.6 jsme si odvodili, že pro dopadající vlnu zleva na druhé rozhraní se při odrazu přidá fáze e^{-2ik_2L} a při průchodu $e^{i(k_3-k_2)L}$. Tzn. koeficienty R a T zde nabydou tvaru

$$R = R_{23}e^{-2ik_2L}, \qquad T = T_{23}e^{i(k_3-k_2)L}. \tag{289}$$

Ještě musíme určit tvary koeficientů R' a T' pro vlnu dopadající na druhé rozhraní zprava. Opět to nebudou pouze amplitudové koeficienty R_{32} a T_{32}, ale je třeba přidat fáze za odraz, resp. průchod, na rozhraní $z = L$. Proveďme stručně stejnou analýzu jako v první části příkladu 7.6. Uvažujeme-li dopadající vlnu zprava na druhé rozhraní a odraženou a prošlou vlnu tvarů

$$\psi_d(z,t) = e^{i(\omega t + k_3 z)}, \qquad \psi_r(z,t) = R_{32}e^{i(\omega t - k_3 z + \phi_r)}, \qquad \psi_p(z,t) = T_{32}e^{i(\omega t + k_2 z + \phi_p)}, \tag{290}$$

Požadavek spojitosti funkcí fází těchto vln při odrazu a průchodu na souřadnici $z = L$ vede na požadavky

$$\varphi_d(L,t) = \varphi_r(L,t), \qquad \varphi_d(L,t) = \varphi_p(L,t), \tag{291}$$

$$\omega t + k_3L = \omega t - k_3L + \phi_r, \qquad \omega t + k_3L = \omega t + k_2L + \phi_p. \tag{292}$$

Z těchto vztahů snadno vyjádříme fázové posuvy odražené a prošlé vlny:

$$\phi_r = 2k_3L, \qquad \phi_p = (k_3 - k_2)L. \tag{293}$$

Koeficienty odrazu a průchodu pro vlnu dopadající zprava tedy jsou

$$R' = R_{32}e^{2ik_3L}, \qquad T' = T_{32}e^{i(k_3-k_2)L}. \tag{294}$$

Matice přenosu pro druhé rozhraní pak má tvar (opět dle výsledku cvičení 7.9):

$$\mathbb{D}_2 = \frac{1}{T_{23}e^{i(k_3-k_2)L}} \begin{pmatrix} 1 & -R_{32}e^{2ik_3L} \\ R_{23}e^{-2ik_2L} & (T_{23}T_{32} - R_{23}R_{32})e^{2i(k_3-k_2)L} \end{pmatrix}. \tag{295}$$

Celkovou matici přenosu získáme vynásobením jednotlivých matic, $\mathbb{D} = \mathbb{D}_1\mathbb{D}_2$ a dle výsledku cvičení 7.8 je celkový koeficient odrazu $R = \frac{d_{21}}{d_{11}}$. Nemusíme tedy počítat všechny prvky matice $\mathbb{D}$, ale stačí pouze dva:

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{1}{T_{12}T_{23}e^{i(k_3-k_2)L}} \left[1 - R_{21}R_{23}e^{-2ik_2L}\right], \\ d_{21} &= \frac{1}{T_{12}T_{23}e^{i(k_3-k_2)L}} \left[R_{12} + R_{23}e^{-2ik_2L}(T_{12}T_{21} - R_{12}R_{21})\right]. \end{aligned} \tag{296}$$

Po dosazení do vztahu pro R a drobné úpravě:

$$R = \frac{d_{21}}{d_{11}} = \frac{R_{12}(1 - R_{21}R_{23}e^{-2ik_2L}) + R_{23}T_{12}T_{21}e^{-2ik_2L}}{1 - R_{21}R_{23}e^{-2ik_2L}} = R_{12} + \frac{R_{23}T_{12}T_{21}e^{-2ik_2L}}{1 - R_{21}R_{23}e^{-2ik_2L}}. \tag{297}$$

A to je přesně výsledek příkladu 7.6.

***Cvičení 7.11.** To samé jako v předchozím cvičení ale pro celkový koeficient průchodu T.

Řešení: Matice přenosu jednotlivých rozhraní už máme nalezené v předchozím cvičení. Dle cvičení 7.8 je koeficient průchodu dán vztahem $T = \frac{1}{d_{11}}$. Tento prvek matice jsme si už ale počítali v předchozím příkladu. Máme tedy

$$T = \frac{1}{d_{11}} = \frac{T_{12}T_{23}e^{i(k_3-k_2)L}}{1 - R_{21}R_{23}e^{-2ik_2L}}. \tag{298}$$

A to je přesně výsledek cvičení 7.7.

***Cvičení 7.12.** Uvažujte napojení dvou strun se stejným napětím v $z = L$. Matice přenosu je

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \frac{k_2}{k_1})e^{i(k_1-k_2)L} & (1 - \frac{k_2}{k_1})e^{i(k_1+k_2)L} \\ (1 - \frac{k_2}{k_1})e^{-i(k_1+k_2)L} & (1 + \frac{k_2}{k_1})e^{-i(k_1-k_2)L} \end{pmatrix}. \tag{299}$$

Nalezněte matici přechodu pro dvě rozhraní tří strun. Rozhraní jsou na $z = 0$ a $z = L$. Nalezněte celkový koeficient odrazu R.

Řešení: Jsou-li $\mathbb{D}_1$ a $\mathbb{D}_2$ matice přenosu na dvou rozhraních, dostaneme matici přenosu z prvního do třetího rozhraní prostým vynásobením, tedy $\mathbb{D} = \mathbb{D}_1\mathbb{D}_2$. Zde máme tedy

$$\mathbb{D}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{k_2}{k_1} & 1 - \frac{k_2}{k_1} \\ 1 - \frac{k_2}{k_1} & 1 + \frac{k_2}{k_1} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \frac{k_3}{k_2})e^{i(k_2-k_3)L} & (1 - \frac{k_3}{k_2})e^{i(k_2+k_3)L} \\ (1 - \frac{k_3}{k_2})e^{-i(k_2+k_3)L} & (1 + \frac{k_3}{k_2})e^{-i(k_2-k_3)L} \end{pmatrix}. \tag{300}$$

K výpočtu R potřebujeme dle příkladu 7.8 znalost pouze d_{11} a d_{21}. Dostáváme

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{1}{4}\left[\left(1+\frac{k_2}{k_1}\right)\left(1+\frac{k_3}{k_2}\right)e^{i(k_2-k_3)L} + \left(1-\frac{k_2}{k_1}\right)\left(1-\frac{k_3}{k_2}\right)e^{-i(k_2+k_3)L}\right] \\ &= \frac{1}{4}e^{i(k_2-k_3)L}\frac{k_1+k_2}{k_1}\frac{k_2+k_3}{k_2}\left(1+\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\frac{k_2-k_3}{k_2+k_3}e^{-2ik_2L}\right). \end{aligned} \tag{301}$$

Pro koeficient d_{21} vyjde

$$\begin{aligned} d_{21} &= \frac{1}{4}\left[\left(1-\frac{k_2}{k_1}\right)\left(1+\frac{k_3}{k_2}\right)e^{i(k_2-k_3)L} + \left(1+\frac{k_2}{k_1}\right)\left(1-\frac{k_3}{k_2}\right)e^{-i(k_2+k_3)L}\right] \\ &= \frac{1}{4}e^{i(k_2-k_3)L}\frac{k_1+k_2}{k_1}\frac{k_2+k_3}{k_2}\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}+\frac{k_2-k_3}{k_2+k_3}e^{-2ik_2L}\right). \end{aligned} \tag{302}$$

Po vydělení obou výrazů tedy dostáváme výraz ve tvaru

$$R = \frac{d_{21}}{d_{11}} = \frac{\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}+\frac{k_2-k_3}{k_2+k_3}e^{-2ik_2L}}{1+\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\frac{k_2-k_3}{k_2+k_3}e^{-2ik_2L}}. \tag{303}$$

Vidíme, že označíme-li $R_{ij} = \frac{k_i-k_j}{k_i+k_j}$ (což tak přesně vyjde pro napojení strun se stejným napětím), dostaneme výsledek příkladu 7.6.

8 Vlny v prostoru

Cvičení 8.1. Ukažte, že harmonická postupná rovinná vlna tvaru $\psi(\vec{r},t) = Ae^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}$, kde $A \in \mathbb{C}$, $\vec{k} = k\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$ a $k > 0$, splňuje trojrozměrnou vlnovou rovnici za předpokladu splnění jistého disperzního vztahu. Nalezněte tento vztah.

Řešení: Trojrozměrná vlnová rovnice pro funkci $\psi = \psi(\vec{r},t)$ má tvar

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\Delta\psi \equiv v^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right), \tag{304}$$

kde $v =$ konst. Do levé strany snadno dosadíme, dostaneme

$$\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} = -\omega^2 Ae^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})} = -\omega^2\psi(\vec{r},t). \tag{305}$$

Na pravé straně máme součet tří druhých derivací. Stačí spočítat jednu z nich, zbytek uhodneme[2]:

$$\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial x^2} = -k_x^2 Ae^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}, \quad \text{tedy} \quad \frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial x_i^2} = -k_i^2 Ae^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})} = -k_i^2\psi(\vec{r},t). \tag{306}$$

[2] Anebo to spočítáme pořádně:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_i} = \frac{\partial(-i\vec{k}\cdot\vec{r})}{\partial x_i}Ae^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})} = -ik_iAe^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}, \qquad \frac{\partial\vec{k}\cdot\vec{r}}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial k_jx_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{3}k_j\delta_{ji} = k_i.$$

Potom

$$\Delta\psi = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{3}(-ik_i)^2Ae^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})} = -|\vec{k}|^2\psi.$$

Dosazení do vlnové rovnice tedy vede na

$$\omega^2 = v^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = v^2|\vec{k}|^2 = v^2k^2. \tag{307}$$

Dostáváme disperzní vztah ve tvaru $\omega = vk$. Pokud tedy ω a $|\vec{k}|$ splňuje výsledný disperzní vztah, je zadaná vlna řešení 3D vlnové rovnice.

Cvičení 8.2. Nalezněte disperzní vztah vlnové rovnice tvarů

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\Delta\psi - \omega_0^2\psi, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\Delta\psi - \alpha\Delta(\Delta\psi). \tag{308}$$

pro harmonickou rovinnou postupnou vlnu.

Řešení: Postupujeme stejně jako v minulém příkladě. V prvním případě se pravá strana po dosazení modifikuje na $-(v^2k^2 + \omega_0^2)Ae^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$. Disperzní vztah je tedy

$$\omega^2 = v^2k^2 + \omega_0^2. \tag{309}$$

V druhém případě na pravé straně vyjde $-(v^2k^2 + \alpha k^4)Ae^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$, jelikož $\Delta(\Delta\psi) = -k^2\Delta\psi = (-k^2)^2\psi$. Disperzní vztah dává

$$\omega^2 = v^2k^2 + \alpha k^4. \tag{310}$$

Cvičení 8.3. Ukažte, že postupná rovinná vlna tvaru $\psi(\vec{r}, t) = F(\vec{n}\cdot\vec{r} - vt)$, kde $|\vec{n}| = 1$ a $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je libovolná dvakrát diferencovatelná funkce, splňuje trojrozměrnou vlnovou rovnici.

Řešení: Opět jednoduše ověříme dosazením do vlnové rovnice. Levá strana rovnice dává:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}(\vec{r}, t) = v^2F''(\vec{n}\cdot\vec{r} - vt). \tag{311}$$

Na pravé straně analogicky jako v příkladu 8.1 (tedy používáme $\frac{\partial \vec{n}\cdot\vec{r}}{\partial x_i} = n_i$):

$$v^2\Delta\psi(\vec{r}, t) = v^2(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)F''(\vec{n}\cdot\vec{r} - vt). \tag{312}$$

Ale $|\vec{n}| = 1$, což dává hledaný výsledek.

***Cvičení 8.4.** Ukažte, že sférická vlna tvaru $\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{r}e^{i(\omega t - kr)}$ splňuje vlnovou rovnici za předpokladu lineárního disperzního vztahu $\omega = vk$.

Řešení: Na přednášce jste napsali Laplaceův operátor pro funkci, která závisí jen na vzdálenosti r od počátku (tento jednodušší postup je na konci tohoto řešení). My to zkusíme „pěšáckým způsobem“ v kartézských souřadnicích. Nejtěžší úkol je spočítat Laplaceův operátor vpuštěný na skalární funkci $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{r}e^{-ikr}$. Tato funkce je součinem funkcí $f(\vec{r}) = \frac{1}{r}$ a $g(\vec{r}) = e^{-ikr}$. Obecně platí pravidlo

$$\Delta(fg) = \operatorname{div}\operatorname{grad}(fg) = \operatorname{div}(f\operatorname{grad}g + g\operatorname{grad}f) = f\Delta g + g\Delta f + 2(\operatorname{grad}f)\cdot(\operatorname{grad}g). \tag{313}$$

Na cvičení z elektřiny a magnetismu jste spočítali, že $\operatorname{grad}(r^\alpha) = \alpha\, r^{\alpha-2}\vec{r}$. Odtud snadno

$$\operatorname{grad}f = -r^{-3}\vec{r}. \tag{314}$$

Dosazením do $\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad}$ a s použitím vzorce pro divergenci součinu skalárního a vektorového pole ($\operatorname{div}(f\vec{F}) = f \operatorname{div}\vec{F} + (\operatorname{grad} f)\cdot\vec{F}$) dostaneme

$$\Delta f = -\operatorname{div}(r^{-3}\vec{r}) = -(\operatorname{grad} r^{-3})\cdot\vec{r} - r^{-3}\operatorname{div}\vec{r} = \frac{3}{r^5}\vec{r}\cdot\vec{r} - \frac{3}{r^3} = 0. \tag{315}$$

Pro funkci g je výpočet podobný, dostaneme

$$\operatorname{grad} g = -ike^{-ikr}\operatorname{grad} r = -ik\frac{1}{r}e^{-ikr}\vec{r}. \tag{316}$$

Zapůsobením divergencí potom

$$\begin{aligned}\Delta g = &-ik\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}e^{-ikr}\right)\cdot\vec{r} - ik\frac{1}{r}e^{-ikr}\operatorname{div}\vec{r}\\ = &-ik\left(-r^{-3}\vec{r}e^{-ikr} + r^{-1}(-ik)\frac{1}{r}e^{-ikr}\vec{r}\right)\cdot\vec{r} - ik\frac{3}{r}e^{-ikr}\\ = &-k^2e^{-ikr} - \frac{2ik}{r}e^{-ikr}.\end{aligned} \tag{317}$$

Po dosazení tedy celkově dostaneme

$$\begin{aligned}\Delta\varphi = f\Delta g + 2(\operatorname{grad} f)\cdot(\operatorname{grad} g) + g\Delta f = \frac{1}{r}\left(-k^2e^{-ikr} - \frac{2ik}{r}e^{-ikr}\right)\\ + 2(-r^{-3}\vec{r})\cdot(-ik\frac{1}{r}e^{-ikr}\vec{r}) = -k^2\varphi(\vec{r}).\end{aligned} \tag{318}$$

Vlnová funkce má tvar $\psi(\vec{r},t) = e^{i\omega t}\varphi(\vec{r})$. Po dosazení do vlnové rovnice dostaneme

$$-\omega^2e^{i\omega t}\varphi(\vec{r}) = -v^2k^2e^{i\omega t}\varphi(\vec{r}). \tag{319}$$

Při použití disperzního vztahu tedy vidíme, že zadaná sférická vlna splňuje vlnovou rovnici.

Pokud vyjdeme z toho, že známe tvar Laplaceova operátoru pro funkci závislou jen na radiální souřadnici $\varphi(r)$:

$$\Delta\varphi(r) = \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr}, \tag{320}$$

pak stačí spočítat jednoduše

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{1}{r^2}e^{-ikr} - ik\frac{1}{r}e^{-ikr}, \qquad \frac{d^2\varphi}{dr^2} = \frac{2}{r^3}e^{-ikr} + ik\frac{2}{r^2}e^{-ikr} - k^2\frac{1}{r}e^{-ikr}. \tag{321}$$

Potom již po dosazení snadno vyjde

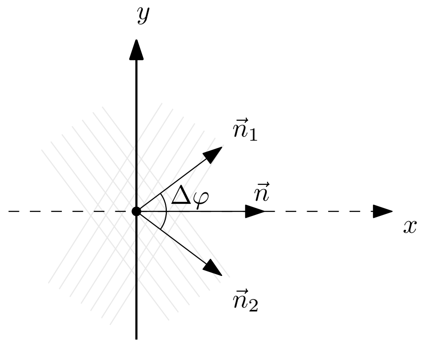
$$\Delta\varphi = -k^2\frac{1}{r}e^{-ikr} = -k^2\varphi(r). \tag{322}$$

Cvičení 8.5. *Superpozice prostorových vln.* Uvažujte dvě rovinné postupné harmonické vlny se stejnou vlnovou délkou λ a různými amplitudami, mezi jejichž směry postupu je úhel $\Delta\varphi$. Uvažujte rovinné stínítko, které je kolmé na „průměrný směr“ postupu těchto vln. Nalezněte průběh intenzity (tzn. časové střední hodnoty kvadrátu) výsledné superpozice na stínítku. Určete vzdálenost Δy interferenčních maxim.

Řešení: Uvažujeme tedy dvě vlny tvaru

$$\psi_1(\vec{r},t) = A_1\cos(\omega t - k\,\vec{n}_1\cdot\vec{r}),\ \ \psi_2(\vec{r},t) = A_2\cos(\omega t - k\,\vec{n}_2\cdot\vec{r}), \tag{323}$$

kde $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2 = \cos\Delta\varphi$. Je výhodné vyřešit problém v souřadnicích, kde oba směrové vektory leží v rovině $z=0$, a stínítko je rovina $x=0$. Viz obrázek:



V těchto souřadnicích máme

$$\vec{n}_1 = \left(\cos\frac{\Delta\varphi}{2}, \sin\frac{\Delta\varphi}{2}, 0\right), \qquad \vec{n}_2 = \left(\cos\frac{\Delta\varphi}{2}, -\sin\frac{\Delta\varphi}{2}, 0\right). \tag{324}$$

Také nás zajímá hodnota superpozice jen na stínítku, tedy pro $\vec{r}=(0,y,z)$. Dostáváme

$$\begin{aligned}\psi(\vec{r}=(0,y,z),t) &= \psi_1(\vec{r}=(0,y,z),t) + \psi_2(\vec{r}=(0,y,z),t)\\ &= A_1\cos\left(\omega t - ky\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right) + A_2\cos\left(\omega t + ky\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right).\end{aligned} \tag{325}$$

Intenzita vlny je dána časovou střední hodnotou kvadrátu vlny, $I = \langle\psi^2\rangle$. Po dosazení

$$\begin{aligned}I &= A_1^2\left\langle\cos^2(\omega t + \ldots)\right\rangle + A_2^2\left\langle\cos^2(\omega t+\ldots)\right\rangle + 2A_1A_2\left\langle\cos\left(\omega t - ky\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\cos\left(\omega t + ky\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\right\rangle\\ &= \frac{1}{2}A_1^2 + \frac{1}{2}A_2^2 + A_1A_2\left\langle\cos(2\omega t) + \cos\left(2ky\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\right\rangle = \frac{1}{2}A_1^2 + \frac{1}{2}A_2^2 + A_1A_2\cos\left(2ky\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right),\end{aligned} \tag{326}$$

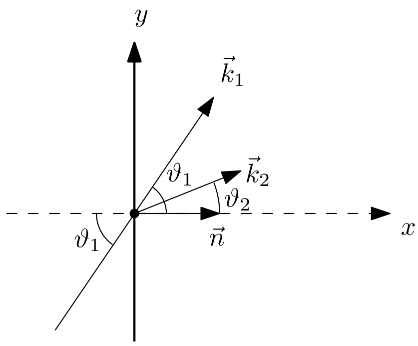
kde jsme použili součtový vzorec $\cos a\cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$. Intenzita se tedy mění „harmonicky“ podél osy y a zůstává konstantní podél osy z – dostali jsme tedy na stínítku řadu interferenčních proužků. Vzdálenost těchto proužků určíme nalezením poloh jednotlivých interferenčních maxim y_m a poté $\Delta y = y_{m+1} - y_m$. Poloha interferenčních maxim y_m je dána vztahy

$$\cos\left(2ky_m\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad 2ky_m\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = 2\pi m, \quad\Leftrightarrow\quad y_m = \frac{\pi m}{k\sin\frac{\Delta\varphi}{2}} = \frac{m\lambda}{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}, \quad m\in\mathbb{Z}. \tag{327}$$

Vzdálenost sousedních maxim na stínítku je tedy $\Delta y = \frac{\lambda}{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}$. Pro malý úhel $\Delta\varphi$ můžeme psát $\Delta y \approx \frac{\lambda}{\Delta\varphi}$.

Cvičení 8.6. Uvažujte rovinné rozhraní dvou transparentních prostředí s indexy lomu n_1 a n_2. Uvažujte dopadající a prošlou harmonickou postupnou vlnu. Vlnové vektory $\vec{k}_1$ a $\vec{k}_2$ leží v rovině kolmé na rovinu rozhraní a s normálovým vektorem svírají úhel ϑ_1, resp. ϑ_2. Na základě podmínky $\vec{k}_{1\parallel} = \vec{k}_{2\parallel}$ (tato podmínka plyne z podmínky spojitosti tečných složek elektrického pole na rozhraní, $\vec{E}_{1\parallel} = \vec{E}_{2\parallel}$) odvoďte Snellův zákon lomu.

Řešení: Pro účel této úlohy si nakreslíme podobný obrázek jako minule, tedy



Vlnové vektory si tedy můžeme vyjádřit pomocí výše zavedených úhlů jako

$$\vec{k}_1 = k_1(\cos\vartheta_1, \sin\vartheta_1, 0), \qquad \vec{k}_2 = k_2(\cos\vartheta_2, \sin\vartheta_2, 0). \tag{328}$$

Složky vlnových vektorů rovnoběžné s rozhraním jsou tedy velmi jednoduché, $\vec{k}_{1\|} = (0, k_1 \sin\vartheta_1, 0)$ a $\vec{k}_{2\|} = (0, k_2 \sin\vartheta_2, 0)$. Odtud tedy dostaneme podmínku $k_1 \sin\vartheta_1 = k_2 \sin\vartheta_2$. Index lomu je dán poměrem rychlosti světla a fázové rychlosti, tedy $n_i = \frac{c}{v_i} = \frac{ck_i}{\omega}$. Odtud již dostáváme známý **Snellův zákon lomu**:

$$n_1 \sin\vartheta_1 = n_2 \sin\vartheta_2. \tag{329}$$

Uvažujeme-li $n_1 > n_2$ (druhé prostředí je opticky řidší), dostáváme pro druhý úhel vztah $\sin\vartheta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\vartheta_1$. Pro dostatečně velký úhel ϑ_1 tak nastane situace, kdy je pravá strana vetší než jedna a ϑ_2 tak vůbec nelze najít. To znamená, že do druhého prostředí se nešíří postupná vlna (dochází k tzv. totálnímu odrazu). Kritický úhel ϑ_c je tedy daný vztahem $\sin\vartheta_c = \frac{n_2}{n_1}$.

Cvičení 8.7. Mějme stejné zadání jako v předchozí úloze. Uvažujte nyní rozhraní těchto dvou prostředí: transparentní prostředí o indexu lomu n a ionosféru s plazmovou frekvencí ω_p. Odvoďte příslušný zákon lomu.

Řešení: Lehce modifikujeme postup z předchozího příkladu. Tam jsme si odvodili podmínku $k_1 \sin\vartheta_1 = k_2 \sin\vartheta_2$. Nyní ale máme na jedné straně ionosféru, kterou považujeme za plazma; její disperzní vztah je tedy $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2$. Uvažujme pro jednoduchost pouze $\omega > \omega_p$, tak aby se prošlá vlna mohla v ionosféře šířit. Vlnová čísla v jednotlivých prostředích tedy můžeme vyjádřit vztahy

$$k_1 = \frac{\omega}{c}n, \qquad k_2 = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}. \tag{330}$$

Po dosazení dostáváme zákon lomu ve tvaru

$$n \sin\vartheta_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}\sin\vartheta_2. \tag{331}$$

Index lomu je vždy $n \geq 1$ a odmocnina na pravé straně $\sqrt{1 - (\omega_p/\omega)^2} \leq 1$. Vyjádříme-li sinus druhého úhlu: $\sin\vartheta_2 = \frac{n}{\sqrt{1-(\omega_p/\omega)^2}}\sin\vartheta_1$, můžeme opět prozkoumat mezní hodnotu úhlu ϑ_1, při kterém bude $\vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$; který vychází

$$\sin\vartheta_c = \frac{1}{n}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}. \tag{332}$$

Cvičení 8.8. Ukažte, že elektromagnetická stojatá vlna tvaru

$$\vec{E} = (A\cos\omega t\cos kz, 0, 0), \quad \vec{B} = \left(0, \frac{1}{c}A\sin\omega t\sin kz, 0\right), \tag{333}$$

kde $\omega = ck$, splňuje Maxwellovy rovnice ve vakuu. Určete hustotu elektrické a magnetické energie a Poyntingův vektor.

Řešení: Vakuové Maxwellovy rovnice (bez nábojů a proudů) mají tvar

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0, \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot}\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \tag{334}$$

První dvě rovnice jsou triviálně splněny:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{B} = \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0. \tag{335}$$

V druhé sadě rovnic dostáváme

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \left(0, \frac{\partial E_x}{\partial z}, -\frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = (0, -Ak\cos\omega t\sin kz, 0), \tag{336}$$

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \left(-\frac{\partial B_y}{\partial z}, 0, \frac{\partial B_y}{\partial x}\right) = \left(-\frac{1}{c}kA\sin\omega t\cos kz, 0, 0\right), \tag{337}$$

$$-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \left(0, -\frac{1}{c}\omega A\cos\omega t\sin kz, 0\right), \tag{338}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \left(-\frac{1}{c^2}\omega A\sin\omega t\cos kz, 0, 0\right). \tag{339}$$

Vidíme, že Maxwellovy rovnice opravdu splníme, je-li $\omega = ck$. Hustota elektrického a magnetického pole jsou dány vztahy

$$w_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2, \quad w_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2. \tag{340}$$

Po dosazení tedy dostáváme

$$w_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 A^2\cos^2\omega t\cos^2 kz, \quad w_B = \frac{1}{2\mu_0 c^2}A\sin^2\omega t\sin^2 kz = \frac{1}{2}\epsilon_0 A\sin^2\omega t\sin^2 kz. \tag{341}$$

Snadno dosadíme do vztahu pro Poyntingův vektor:

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \left(0, 0, \frac{1}{\mu_0 c}A^2\cos\omega t\sin\omega t\cos kz\sin kz\right) \\ &= \left(0, 0, \frac{A^2}{4\mu_0 c}\sin 2\omega t\sin 2kz\right).\end{aligned} \tag{342}$$

Cvičení 8.9. *Larmorova formule.* Ukažte, že integrací Poyntingova vektoru $\vec{S}$ radiačního pole $\vec{E}_{\text{rad}}$ od urychleného náboje,

$$\vec{E}_{\text{rad}}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{c^2}\frac{\vec{a}_\perp(t_r)}{r},$$

přes sféru poloměru r dostanete Larmorovu formuli pro celkový vyzařovaný výkon P vysílané elektromagnetické vlny,

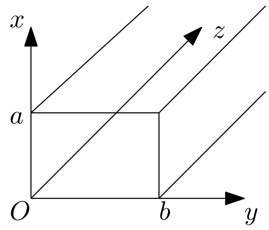
$$P(t, r) = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}a^2(t_r).$$

Retardovaný čas t_r je $t_r = t - \frac{r}{c}$. Poyntingův vektor má tvar $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E^2\,\vec{n}$, kde $\vec{n}$ je směr šíření kolmý na myšlenou sféru.

Řešení: Viz skripta kapitola 6.3.6.

Cvičení 8.10. Uvažujte vlnovod obdélníkového průřezu $a = 5\,\mathrm{cm}$ a $b = 10\,\mathrm{cm}$. Jakou nejmenší frekvenci f_0 může mít elektromagnetická vlna, aby prošla vlnovodem bez tlumení. Vypočtete fázovou a grupovou rychlost (jako násobek c), jejíž frekvence je $f = \frac{5}{4} f_0$. Jaký nejvyšší mód m_0 lze vybudit pro šířící se vlnu této frekvence? Pro vlnu s frekvencí $f = \frac{4}{5} f_0$ určete vzdálenost, na níž amplituda vlny poklesne e-krát.

Řešení: Obdélníkový vlnovod je nekonečná trubka obdélníkového průřezu jako na obrázku:



Stěny jsou z dokonale vodivého materiálu. Vyřešením Maxwellových rovnic s okrajovými podmínkami, kde předpokládeme závislost $\vec{E}$ pouze na (y, z, t), vyjde uvnitř elektrické pole $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$, kde $E_x = E_x(y, z, t)$ je superpozicí módů ve tvaru

$$E_x(y, z, t) = E_0 \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{i(\omega t - kz)}, \tag{343}$$

kde konstanty ω, k a $m \in \mathbb{N}$ splňují disperzní vztah

$$\omega^2 = \left(\frac{m\pi c}{b}\right)^2 + c^2 k^2. \tag{344}$$

Vidíme, že pro dané m má tato rovnice reálné řešení pro vlnové číslo k jen pro $\omega > \omega_{\min(m)}$, kde $\omega_{\min(m)} = \frac{m\pi c}{b}$. Nejnižší hodnotu dostáváme pro $m = 1$, což je nejmenší z úhlových frekvencí, kterou se může cokoliv vlnovodem šířit bez tlumení, $\omega_0 = \frac{\pi c}{b}$. Odtud $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{c}{2b}$. V našem případě je

$$f_0 = \frac{3.10^8}{2 \cdot 0,1}\mathrm{Hz} = 1,5\,\mathrm{GHz}. \tag{345}$$

Fázová rychlost je daná podílem $v_\varphi = \omega/k$. Odtud tedy

$$v_\varphi(k) = c\sqrt{1 + \frac{m^2\omega_0^2}{k^2c^2}}. \tag{346}$$

Potřebujeme si ale vyjádřit $v_\varphi = v_\varphi(\omega)$, musíme tedy do pravé strany dosadit za k z disperzního vztahu:

$$v_\varphi(\omega) = c\sqrt{1 + \frac{m^2\omega_0^2}{\omega^2 - m^2\omega_0^2}} = c\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - m^2\omega_0^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(m\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}. \tag{347}$$

Máme najít hodnotu fázové rychlosti pro $\omega = \frac{5}{4}\omega_0$, tedy $f = 1,875\,\mathrm{GHz}$. Jelikož $f_{\min(m)} = m \cdot 1,5\,\mathrm{GHz}$, je možné vybudit pouze nejnižší mód $m = 1$ a dostáváme

$$v_\varphi\left(\frac{5}{4}\omega_0\right) = \frac{5}{3}c. \tag{348}$$

Grupovou rychlost jako funkci k dostaneme zderivováním disperzního vztahu podle k s výsledkem

$$v_g(k) = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 m^2}{c^2 k^2}}}. \tag{349}$$

Po dosazení za k z disperzního vztahu dostaneme grupovou rychlost jako funkci ω s přesně převrácenou závislostí než u fázové rychlosti:

$$v_g(\omega) = c\sqrt{\frac{\omega^2 - m^2\omega_0^2}{\omega^2}} = c\sqrt{1 - \left(m\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} \overset{m=1}{=} \frac{3}{5}c. \tag{350}$$

Rovněž jsme už odpoveděli na otázku, jaký největší mód lze vybudit – pouze první. Je-li frekvence $\omega < \omega_{\min(m)}$, pak nelze najít reálné k splňující disperzní vztah. Ansatz $k = -i\kappa$ vede na $\omega^2 = m^2\omega_0^2 - c^2\kappa^2$, kde κ pak vystupuje v exponenciálně tlumené stojaté vlně nešířící se vlnovodem:

$$E_x(y, z, t) = E_0 \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{i\omega t} e^{-\kappa z}. \tag{351}$$

Po vyjádření z disperzního vztahu koeficient κ vyjde

$$\kappa = \frac{1}{c}\sqrt{m^2\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{352}$$

Nejméně se tlumí vlna pro $m = 1$, zde máme $\omega = \frac{3}{5}\omega_0$ a tedy $\kappa = \frac{3\omega_0}{5c} = \frac{6\pi f_0}{5c}$. Řešíme tedy úlohu $e^{-\kappa z} = e^{-1}$, tedy $\kappa z = 1$. Odkud $z = \kappa^{-1} = \frac{5c}{6\pi f_0} \approx \frac{5}{3\pi} \cdot 10^{-1}\mathrm{m} \approx 5\,\mathrm{cm}$.

9 Polarizace

Cvičení 9.1. Jak se změní intenzita kruhově polarizovaného světla po průchodu polarizátorem?

Řešení: Postupná elektromagnetická vlna šířící se ve směru osy z má obecně elektrickou složku v komplexifikovaném tvaru (na daném místě $z = z_0$) tvaru

$$\vec{E}(t) = E_{x0}\,\vec{x}\,e^{i(\omega t + \varphi_1)} + E_{y0}\,\vec{y}\,e^{i(\omega t + \varphi_2)} = \begin{pmatrix} E_{x0}e^{i\varphi_1} \\ E_{y0}e^{i\varphi_2} \end{pmatrix} e^{i\omega t} = \hat{\vec{E}}\,e^{i\omega t}, \tag{353}$$

kde $\vec{x}$ a $\vec{y}$ označují jednotkové vektory ve směrech os x a y.

Orientace polarizátoru je určena osou propustnosti popsanou jednotkovým směrovým vektorem $\vec{n}$. Je-li $\vec{E}_{in}$ dopadající vlna a $\vec{E}_{out}$ prošlá vlna, jsou jednotlivé vlny vztaženy jako

$$\vec{E}_{out} = (\vec{E}_{in} \cdot \vec{n})\,\vec{n}. \tag{354}$$

To se dá přepsat jednoduše v řeči příslušných komplexních vektorů $\hat{\vec{E}}_{in}$ a $\hat{\vec{E}}_{out}$, dostaneme

$$\hat{\vec{E}}_{out} = \mathbb{P}_{\vec{n}}\hat{\vec{E}}_{in}, \tag{355}$$

kde $\mathbb{P}_{\vec{n}}$ je matice projektoru na osu se směrem $\vec{n}$. Explicitně pro $\vec{n} = (n_x, n_y)$ dostáváme

$$\mathbb{P}_{\vec{n}} = \begin{pmatrix} n_x^2 & n_x n_y \\ n_x n_y & n_y^2 \end{pmatrix}. \tag{356}$$

Intenzita elektrického pole je daná předpisem

$$I = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\langle \vec{E}^2\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(E_{x0}^2 + E_{y0}^2\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(|\hat{E}_1|^2 + |\hat{E}_2|^2\right), \tag{357}$$

kde $\hat{\vec{E}} = (\hat{E}_1, \hat{E}_2)^T$. Typicky při výpočtu intenzity nebudeme psát faktor $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$, budeme tedy uvažovat vztah $I = \langle \vec{E}^2\rangle$, to odpovídá pouze změně jednotek, ve kterých intenzitu měříme.

Zde je dopadající světlo kruhově polarizované. To je charakterizované podmínkami $E_{x0} = E_{y0} = E_0$ a $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm\frac{\pi}{2}$. Rozdělme nyní výpočet podle toho, jestli chceme příklad počítat „vektorově“ anebo „maticově“:

Vektorově: Kruhově polarizované světlo můžeme zapsat

$$\vec{E}_{in} = E_0\vec{x}\cos(\omega t + \varphi) + E_0\vec{y}\cos(\omega t + \varphi \pm \tfrac{\pi}{2}) = E_0\vec{x}\cos(\omega t + \varphi) \mp E_0\vec{y}\sin(\omega t + \varphi). \tag{358}$$

Vstupní intenzita pak je

$$I_{in} = \langle \vec{E}^2\rangle = \frac{1}{2}E_0^2 + \frac{1}{2}E_0^2 = E_0^2. \tag{359}$$

BÚNO můžeme uvažovat směr propustnosti polarizátoru ve směru $\vec{n} = \vec{x} = (1,0)^T$. Tedy akce lineárního polarizátoru bude

$$\vec{E}_{out} = (\vec{E}_{in}\cdot\vec{x})\,\vec{x} = E_0\,\vec{x}\cos(\omega t + \varphi). \tag{360}$$

Jednoduše spočteme výstupní intenzitu

$$I_{out} = \langle \vec{E}_{out}^2\rangle = \frac{1}{2}E_0^2 = \frac{1}{2}I_{in}. \tag{361}$$

Maticově: Pro kruhově polarizované světlo má vektor $\hat{\vec{E}}_{in}$ tvar

$$\hat{\vec{E}}_{in} = E_0 e^{i\varphi}\begin{pmatrix}1\\ e^{\pm i\frac{\pi}{2}}\end{pmatrix} = E_0 e^{i\varphi}\begin{pmatrix}1\\ \pm i\end{pmatrix} \sim E_0\begin{pmatrix}1\\ \pm i\end{pmatrix}, \tag{362}$$

kde jsme v poslední úpravě odstranili společnou fázi, která neovlivňuje polarizační stav. Vidíme, že intenzita vstupující vlny je jednoduše

$$I_{in} = \frac{1}{2}\left(|\hat{E}_1|^2 + |\hat{E}_2|^2\right) = \frac{1}{2}(E_0^2 + E_0^2) = E_0^2. \tag{363}$$

BÚNO můžeme uvažovat směr propustnosti polarizátoru ve směru $\vec{n} = \vec{x} = (1,0)^T$. Potom projektor nabude tvaru

$$\mathbb{P}_{\vec{n}} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{364}$$

Světlo za polarizátorem $\hat{\vec{E}}_{out}$ tedy

$$\hat{\vec{E}}_{out} = \mathbb{P}_{\vec{n}}\hat{\vec{E}}_{in} = E_0\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}. \tag{365}$$

Výstupní intenzita tedy je

$$I_{out} = \frac{1}{2}\left(|\hat{E}_1|^2 + |\hat{E}_2|^2\right) = \frac{1}{2}E_0^2 = \frac{1}{2}I_{in}. \tag{366}$$

Cvičení 9.2. Jak se změní intenzita nepolarizovaného světla po průchodu lineárním polarizátorem?

Řešení: Úplně nepolarizované světlo intenzity I_{in} si lze představit například jako lineárně polarizovanou vlnu, jejíž směr $\vec{n} = \vec{n}(t)$ se zcela náhodně mění v čase. Označme jako $\theta(t)$ úhel, který svírá směr $\vec{n}$ s osou propustnosti lineárního polarizátoru. Podle Malusova zákona je okamžitá intenzita prošlé vlny

$$I_{out}(t) = I_{in} \cos^2 \theta(t). \tag{367}$$

Přístroj, kterým měříme intenzitu $I_{out}(t)$ však nedokáže měřit okamžitou intenzitu (světlo svoji polarizaci mění příliš rychle), ale pouze její střední hodnotu přes dobu měření přístroje t_{roz}:

$$I_{out} = I_{in} \langle \cos^2 \theta(t) \rangle_{t_{roz}} \tag{368}$$

Jelikož se $\theta(t)$ mění zcela náhodně, každý úhel je zastoupen zcela rovnoměrně. Časovou střední hodnotu můžeme nahradit průměrem přes úhly:

$$I_{out} = I_{in} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{2} I_{in}. \tag{369}$$

Cvičení 9.3. Uvažujte lineárně polarizované světlo $\vec{E} = E_0 \, \vec{x} \cos \omega t$. Dejte mu do cesty N polarizátorů, každý s osou propustnosti otočenou o $\frac{\pi}{2N}$ oproti předchozímu (a první oproti rovině dopadajícího světla). Jaká bude intenzita prošlého světla pro $N = 1$, $N = 2$ a obecné $N \in \mathbb{N}$? Jaká je limita pro $N \to +\infty$?

Řešení: Na přednášce jste si odvodili, že dopadá-li světlo lineárně polarizované ve směru $\vec{n}_1$ na lineární polarizátor s osou propustnosti $\vec{n}_2$, budou vstupní a výstupní intenzita vztažené *Malusovým zákonem*:

$$I_{out} = I_{in} \cos^2 \theta, \tag{370}$$

kde θ je úhel svíraný vektory $\vec{n}_1$ a $\vec{n}_2$. Intenzita původní vlny je $I_0 = \langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{1}{2} E_0^2$.

(i) Pro $N = 1$ dojde k jednomu otočení o úhel $\frac{\pi}{2}$. Výsledná intenzita je $I_{out}^{(1)} = I_0 \cos^2 \frac{\pi}{2} = 0$.

(ii) Pro $N = 2$ dojde k dvěma otočením o úhel $\frac{\pi}{4}$. Výsledná intenzita je daná výrazem

$$I_{out}^{(2)} = \left(I_0 \cos^2 \tfrac{\pi}{4} \right) \cos^2 \tfrac{\pi}{4} = \frac{1}{4} I_0. \tag{371}$$

(iii) Pro obecné $N \in \mathbb{N}$ dojde k N otočením o úhel $\frac{\pi}{2N}$. Výsledná intezita je tedy

$$I_{out}^{(N)} = I_0 \cos^{2N} \left(\tfrac{\pi}{2N} \right). \tag{372}$$

Platí[3] $\lim_{k \to +\infty} \cos^k \left(\frac{\pi}{k} \right) = 1$ a tedy $\lim_{N \to +\infty} I_{out}^{(N)} = I_0$.

Cvičení 9.4. Uvažujte obecně elipticky polarizované světlo. Vložíte mu do cesty polarizátor s osou propustnosti $\vec{n} = \frac{\vec{x} + \vec{y}}{\sqrt{2}}$. Ukažte, že pro intenzitu výstupního světla platí

$$I_{out} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + I_{xy}, \tag{373}$$

kde $I_{out} = \langle E_{out}^2 \rangle$, $I_x = \langle E_x^2 \rangle$, $I_y = \langle E_y^2 \rangle$, $I_{xy} = \langle E_x E_y \rangle$.

[3] Tuto limitu lze spočítat například takto:

$$\lim_{k \to +\infty} \cos^k \left(\tfrac{\pi}{k} \right) = \lim_{k \to +\infty} \exp \left(\pi \frac{\ln \cos \frac{\pi}{k}}{\frac{\pi}{k}} . \right)$$

Nyní stačí ukázat, že $\lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{x} = 0$. Použitím l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} -\frac{\sin x}{\cos x} = 0.$$

Řešení: Z důvodu definic jednotlivých intenzit se v tomto příkladě vyplatí pracovat s obecným výrazem pro elektrické pole v rovině xy a nerozepisovat ho podrobně do příslušných harmonických vln.

Vektorově: Obecně elipticky polarizované světlo má tvar $\vec{E} = E_x\vec{x} + E_y\vec{y}$. Po průchodu polarizátorem dostaneme

$$\vec{E}_{out} = (\vec{E}\cdot\vec{n})\,\vec{n} = \left(\frac{E_x}{\sqrt{2}} + \frac{E_y}{\sqrt{2}}\right)\vec{n}, \tag{374}$$

jelikož $\vec{x}\cdot\vec{n} = \vec{y}\cdot\vec{n} = \frac{1}{2}$. Výsledná intenzita je pak

$$I_{out} = \langle \vec{E}_{out}^2\rangle = \left\langle \left(\frac{E_x + E_y}{\sqrt{2}}\right)^2 \vec{n}^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\langle E_x^2 + E_y^2 + 2E_xE_y\rangle = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + I_{xy}. \tag{375}$$

Maticově: Obecně elipticky polarizované světlo má tvar

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \tag{376}$$

Projektor na osu $\vec{n}$ má tvar

$$\mathbb{P}_{\vec{n}} = \begin{pmatrix} n_x^2 & n_xn_y \\ n_xn_y & n_y^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{377}$$

Po průchodu polarizátorem tedy dostaneme

$$\vec{E}_{out} = \mathbb{P}_{\vec{n}}\vec{E} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} E_x + E_y \\ E_x + E_y \end{pmatrix}. \tag{378}$$

Výsledná intenzita je pak

$$I_{out} = \langle \vec{E}_{out}^2\rangle = \left\langle 2\frac{1}{4}(E_x + E_y)^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\langle E_x^2 + E_y^2 + 2E_xE_y\rangle = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + I_{xy}. \tag{379}$$

Cvičení 9.5. Indexy lomu krystalického křemene pro světlo o vlnové délce ve vakuu $\lambda_0 = 500\,\mathrm{nm}$ jsou $n_1 = 1,544$ a $n_2 = 1,553$. Určete nejmenší tloušťku čtvrtvlnové destičky vyrobené z tohoto materiálu.

Řešení: Máme-li dva na sebe kolmé směry $\vec{n}_1$ a $\vec{n}_2$ tak, že se světlo v krystalu v prvním směru šíří s indexem lomu n_1 a v druhém s n_2, můžeme přicházející vlnu psát ve tvaru

$$\vec{E}_{in} = E_1\vec{n}_1e^{i(\omega t+\varphi_1)} + E_2\vec{n}_2e^{i(\omega t+\varphi_2)}. \tag{380}$$

Cestou skrz destičku o tloušťce d se fáze v jednotlivých vlnách změní o k_1d, resp. k_2d, na vlnu tvaru

$$\vec{E}_{out} = E_1\vec{n}_1e^{i(\omega t+\varphi_1-k_1d)} + E_2\vec{n}_2e^{i(\omega t+\varphi_2-k_2d)}. \tag{381}$$

Rozdíl fází $\delta\varphi$ se průchodem změní na $\varphi_1 - \varphi_2 + \Delta\varphi$, kde $\Delta\varphi = (k_2 - k_1)d$. Pro studium polarizace jsou konkrétní hodnoty fází irelevantní, proto lze vektor elektrického pole $\vec{E}_{out}$ psát jako

$$\vec{E}_{out} = E_1\vec{n}_1e^{i(\omega t+\varphi_1+\Delta\varphi)} + E_2\vec{n}_2e^{i(\omega t+\varphi_2)} \tag{382}$$

(do obou exponenciál jsme přičetli fázi $+k_2d$). Máme disperzní vztah $k = \frac{n}{c}\omega$ a pro vakuum $k_0 = \frac{\omega}{c}$ a $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ a tedy $\Delta\varphi = (n_2 - n_1)\frac{\omega}{c}d = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_2 - n_1)d$. Volíme-li směry tak aby $n_2 > n_1$, vyjde tedy $\Delta\varphi > 0$ a přičítá se k vlně ve směru $\vec{n}_1$.

Čtvrtvlnová destička má posunout fázi o čtvrt vlny, tedy $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$. Řešíme tedy rovnici

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_2 - n_1)d. \tag{383}$$

Odtud $d = \frac{\lambda_0}{4(n_2-n_1)} = \frac{5\cdot 10^{-7}}{4\cdot 9\cdot 10^{-3}} \approx 0,014$ mm.

Cvičení 9.6. Zapište matici $\mathbb{D}_{\Delta\varphi}$ pro vlnovou destičku s osou $\vec{n}_1 = \frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}$ (a k ní kolmému směru $\vec{n}_2 = \frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}$).

Řešení: Protože vlnová destička jen přičte fázi $\Delta\varphi$ komponentě vlny ve směru $\vec{n}_1$ (tedy ose příslušející menšímu indexu lomu), je matice vlnové destičky daná předpisem

$$\mathbb{D}_{\Delta\varphi} = e^{i\Delta\varphi}\mathbb{P}_{\vec{n}_1} + \mathbb{P}_{\vec{n}_2}. \tag{384}$$

Matice projektoru na obecnou osu $\vec{n} = (n_x, n_y)^T$ je tvaru

$$\mathbb{P}_{\vec{n}} = \begin{pmatrix} n_x^2 & n_x n_y \\ n_x n_y & n_y^2 \end{pmatrix} \tag{385}$$

a tedy pro směry $\vec{n}_1$ a $\vec{n}_2$ dostaneme konkrétně

$$\mathbb{P}_{\vec{n}_1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{P}_{\vec{n}_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{386}$$

Dosazením do výše zmíněného vztahu tedy dostáváme

$$\mathbb{D}_{\Delta\varphi} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{i\Delta\varphi}+1 & e^{i\Delta\varphi}-1 \\ e^{i\Delta\varphi}-1 & e^{i\Delta\varphi}+1 \end{pmatrix} = e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}}\begin{pmatrix} \cos\frac{\Delta\varphi}{2} & i\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \\ i\sin\frac{\Delta\varphi}{2} & \cos\frac{\Delta\varphi}{2} \end{pmatrix}. \tag{387}$$

Všimněte si, že z hlediska polarizace můžu komplexní jednotku před maticí zapomenout – mění mi fáze obou složek stejně, je tedy irelevantní, můžu tedy psát výsledné $\mathbb{D}_{\Delta\varphi}$:

$$\mathbb{D}_{\Delta\varphi} \sim \begin{pmatrix} \cos\frac{\Delta\varphi}{2} & i\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \\ i\sin\frac{\Delta\varphi}{2} & \cos\frac{\Delta\varphi}{2} \end{pmatrix}. \tag{388}$$

Cvičení 9.7. Uvažujte lineárně polarizované světlo $\vec{E} = E_0\vec{x}\cos(\omega t)$. Dejte mu do cesty půlvlnovou destičku s osou orientovanou ve směru $\vec{n} = \frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}$. Jaký polarizační stav bude mít světlo po průchodu destičkou? Jak se změní intenzita?

Řešení: **Vektorově**: Jelikož elektrické pole vstupujícího světla není rozepsané ve směru osy vlnové destičky $\vec{n} = \frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}$ (a k ní kolmé $\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}$), nemůžeme zatím jen jednoduše příčíst fázi π jakožto akci vlnové desticky. Musíme si nejdřív vstupní světlo do těchto směrů přepsat, tzn. chtěli bychom najít následující koeficienty lineární kombinace α a β:

$$\vec{x} = \alpha\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}} + \beta\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}. \tag{389}$$

Po přepsání

$$\left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)\vec{x} + \left(\frac{\beta}{\sqrt{2}} - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)\vec{y} = 0 \tag{390}$$

Vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou lineárně nezávislé, tedy závorky musí být nulové a tedy $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Případně můžeme přepsání udělat bez výpočtu: $\vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{x}+\vec{y}-\vec{y}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}\right)$. Vstupní světlo lze tedy zapsat ve tvaru

$$\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}\cos\omega t + \frac{E_0}{\sqrt{2}}\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}\cos\omega t. \tag{391}$$

Akci vlnové destičky nyní provedeme triviálně:

$$\vec{E}_{out} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}\cos(\omega t + \pi) + \frac{E_0}{\sqrt{2}}\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}\cos\omega t, \tag{392}$$

přičtením fáze π do elektrického pole ve směru $\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}$. Použitím vzorce $\cos(x+\pi) = -\cos x$ můžeme psát

$$\vec{E}_{out} = -\frac{E_0}{\sqrt{2}}\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}\cos\omega t + \frac{E_0}{\sqrt{2}}\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}\cos\omega t = -E_0\vec{y}\cos\omega t \sim E_0\vec{y}\cos\omega t. \tag{393}$$

(v poslední úpravě jsme posunuli celkovou fázi o π, abychom se zbavili znaménka minus, tato úprava nemění polarizační stav). Po průchodu vlnovou destičkou dostanete lineárně polarizované světlo s rovinou polarizace ve směru osy $\vec{y}$, tedy otočenou o 90° oproti původní! Navíc má stejnou amplitudu jako původní světlo, tudíž nedošlo ke ztrátě intenzity (narozdíl od příkladu 9.3)!

Maticově[4]: Stačí dosadit $\Delta\varphi = \pi$ do předchozího příkladu abychom dostali matici

$$\mathbb{D}_\pi = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & i\sin\frac{\pi}{2} \\ i\sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{394}$$

kde jsme v poslední rovnosti vynásobili matici komplexní jednotkou $e^{i\pi} = -i$ (celková fáze nemění polarizační stav), abychom nalezli co nejjednodušší tvar matice $\mathbb{D}_\pi$. Naše vstupní světlo má polarizační vektor $\hat{\vec{E}} = (E_0, 0)^T$. Prošlá vlna tedy

$$\hat{\vec{E}}_{out} = \mathbb{D}_\pi \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \vec{E}_{out} = E_0\vec{y}\cos\omega t. \tag{395}$$

Zjistili jsme, že prošlá vlna je lineárně polarizovaná s rovinou polarizace ve směru osy $\vec{y}$, tedy otočenou o 90° oproti původní! Navíc má stejnou amplitudu jako původní světlo, tudíž nedošlo ke ztrátě intenzity (narozdíl od příkladu 9.3)!

Cvičení 9.8. Kruhový polarizátor je lineární polarizátor následovaný čtvrtvlnovou destičkou s osami natočenými o $\pi/4$ oproti ose propustnosti lineárního polarizátoru. Ukažte, že v závislosti na volbě os vlnové destičky dostaneme levotočivý nebo pravotočivý kruhový polarizátor, který jakékoliv světlo přicházející ze strany lineárního polarizátoru převádí na korespondující kruhově polarizované světlo.

Ukažte, že levotočivě polarizované světlo šířící se ze strany vlnové destičky se pohltí v pravotočivém polarizátoru.

Řešení: Zvolme si BÚNO osu lineárního polarizátoru ve směru $\vec{x}$. Čtvrtvlnovou destičku pak můžeme orientovat buď s osou ve směru $\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}$ (a k ní kolmou $\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}$) anebo obráceně, tj. s osou ve směru $\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}$ (a k ní kolmou $\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}$). Dle volby natočení tedy osa čtvrtvlnové desticky svírá s osou x úhel $\pm\frac{\pi}{4}$.

[4]Zde se řešení zdá o mnoho kratší než vektorovým způsobem, ale je to tím, že jsme si již všechno předpočítali v příkladu 9.6.

Vektorově: Z příkladu 9.7 víme, že světlo vstupující do vlnové destičky lze zapsat ve tvaru

$$\vec{E}_{in} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}\cos\omega t + \frac{E_0}{\sqrt{2}}\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}\cos\omega t. \tag{396}$$

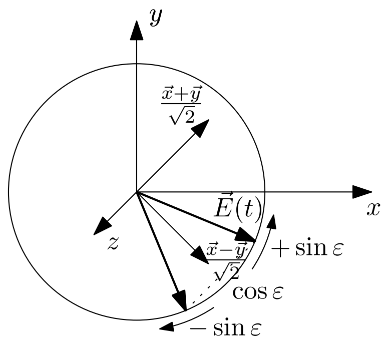
Čtvrtvlnová destička přičte fázový posun $\frac{\pi}{4}$ do vlny v příslušném směru. Přičtení fáze v komponentě $\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}$ můžeme také zapsat jako odečtení fáze v komponentě $\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}$. Můžeme tedy zapsat akce vlnové destičky pro obě možnosti jako

$$\vec{E}_{out} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}\cos(\omega t \pm \tfrac{\pi}{2}) + \frac{E_0}{\sqrt{2}}\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}\cos\omega t, \tag{397}$$

kde znaménka u fázového posunu $\pm\frac{\pi}{2}$ korespondují se znaménkem úhlu osy vlnové destičky $\pm\frac{\pi}{2}$. Použitím vzorce $\cos(x \pm \frac{\pi}{2}) = \mp\sin x$ můžeme psát

$$\vec{E}_{out} = \mp\frac{E_0}{\sqrt{2}}\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}\sin\omega t + \frac{E_0}{\sqrt{2}}\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}\cos\omega t, \tag{398}$$

což je zjevně kruhově polarizované světlo (má stejnou amplitudu v obou směrech a u jednoho je sinus a u druhého cosinus). Které z nich je levotočivé a které pravotočivé? Vyneseme-li si do roviny xy vektor elektrického pole $\vec{E}_{out}$ v malém kladném čase $\omega t = +\varepsilon$:



V malém kladném čase míří vektor elektrického pole téměř celý do směru $\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}$ a dle znaménka u $\sin\omega t$ míří trochu do/proti směru vektoru $\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}$. Vidíme tedy, že pro kladné znaménko se $\vec{E}$ otáčí proti směru hodinových ručiček, jedná se tedy o levotočivě polarizované světlo, pro záporné znaménko jde o otáčení po směru hodinových ručiček, tedy o světlo pravotočivě polarizované. Pravotočivý polarizátor je tedy ten, kde vlnová destička měla osu orientovanou ve směru $\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}$, a levotočivý ve směru $\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}$.

Zbývá poslat levotočivě polarizované světlo do pravotočivého polarizátoru z druhé strany. Za vstupní světlo tedy vezměme

$$\vec{E}_{in} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}\sin\omega t + \frac{E_0}{\sqrt{2}}\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}\cos\omega t \tag{399}$$

a pošleme ho do otočeného pravotočivého polarizátoru, takže první narazí na čtvrtvlnovou destičku a poté na lineární polarizátor. Zde je důležité si uvědomit, že při otočení vlnové destičky se změní směr její osy! Tzn. otočený pravotočivý polarizátor má vlnovou destičku s osou ve směru $\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}$. Světlo po průchodu touto destičkou bude

$$\vec{E}_{out} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}\sin\omega t - \frac{E_0}{\sqrt{2}}\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}\sin\omega t = E_0\vec{y}\sin\omega t \tag{400}$$

(použili jsme znovu $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$), což je lineárně polarizované světlo ve směru $\vec{y}$ a to se plně pohltí v lineárním polarizátoru s osou propustnosti $\vec{x}$.

Maticově: Pro čtvrtvlnovou destičku s osou $\vec{n}_+ = \frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}$ jsme si příslušnou matici $\mathbb{D}_{\Delta\varphi}$ již odvodili ve cvičení 9.6. Stačí dosadit $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$\mathbb{D}_{\frac{\pi}{2},\vec{n}_+} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & i\sin\frac{\pi}{4} \\ i\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}. \tag{401}$$

Pokud má vlnová destička osu orientovanou ve směru $\vec{n}_- = \frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}$ (která je kolmá ke směru $\vec{n}_+ = \frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}$) musíme prohodit matice $\mathbb{P}_{\vec{n}_1}$ a $\mathbb{P}_{\vec{n}_2}$ v řešení příkladu 9.6, tedy:

$$\mathbb{D}_{\frac{\pi}{2},\vec{n}_-} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+e^{i\frac{\pi}{2}} & 1-e^{i\frac{\pi}{2}} \\ 1-e^{i\frac{\pi}{2}} & 1+e^{i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \ldots = e^{i\frac{\pi}{4}}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -i\sin\frac{\pi}{4} \\ -i\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \sim \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}. \tag{402}$$

Můžeme tedy celkově psát

$$\mathbb{D}_{\frac{\pi}{2},\vec{n}_\pm} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & \pm i \\ \pm i & 1 \end{pmatrix}. \tag{403}$$

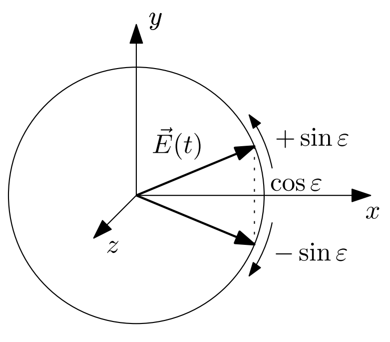
Světlo vstupující do destičky má polarizační vektor tvaru $\hat{\vec{E}}_{in} = (E_0, 0)^T$. Za vlnovou destičkou pak dostaneme světlo

$$\hat{\vec{E}}_{out} = \mathbb{D}_{\frac{\pi}{2},\vec{n}_\pm}\hat{\vec{E}}_{in} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & \pm i \\ \pm i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{\pm i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix}. \tag{404}$$

Obě složky mají stejnou amplitudu a jsou fázově posunuté o $\pm\frac{\pi}{2}$ – jedná se tedy v obou případech o kruhově polarizované světlo. Levotočivost/pravotočivost rozhodneme přepisem do vektorového tvaru

$$\vec{E}_{out} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\left(\vec{x}\,e^{i\omega t} + \vec{y}\,e^{i(\omega t\pm\frac{\pi}{2})}\right) \stackrel{Re}{=} \frac{E_0}{\sqrt{2}}\Big(\vec{x}\,\cos\omega t + \vec{y}\,\underbrace{\cos(\omega t \pm \tfrac{\pi}{2})}_{\mp\sin\omega t}\Big). \tag{405}$$

Smysl otáčení elektrického pole je znázorněn v následujícím obrázku:



Pro $+\sin\omega t$ (a tedy osu vlnové destičky $\vec{n}_- = \frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}$) máme otáčení proti směru hodinových ručiček, tedy levotočivě polarizované světlo. Pro $-\sin\omega t$ (osu $\vec{n}_+ = \frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}$) po směru hodinových ručiček – pravotočivě polarizované světlo.

Pošleme nyní levotočivě polarizované světlo, tzn. se vstupním vektorem

$$\hat{\vec{E}}_{in} = E_0\begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = E_0\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \tag{406}$$

do otočeného pravotočivého polarizátoru (tzn. toho, kde měla vlnová destička osu ve směru $\vec{n}_+$). Otočení samozřejmě změní pořadí optických elementů – nejprve světlo dopadá na vlnovou destičku a poté na lineární polarizátor. Otočení ale má také za následek, že osa vlnové destičky změní směr na $\vec{n}_-$! Akce otočeného pravotočivého polarizátoru je tedy

$$\hat{\vec{E}}_{out} = \mathbb{P}_{\vec{x}}\,\mathbb{D}_{\frac{\pi}{2},\vec{n}_-}\hat{\vec{E}}_{in} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -2i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}. \tag{407}$$

Nic tedy neprojde.

Cvičení 9.9. Do optického přístroje vstupuje lineárně polarizované světlo ve směru $\vec{x}$ s intenzitou I_0. Určete elektrické pole (a pojmenujte příslušné polarizační stavy) a intenzitu světla za každým z optických elementů v následujícím přístroji skládajícím se po řadě z následujících optických elementů:

1.) polarizátor s osou $\vec{n} = \frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}$;

2.) půlvlnová destička s osou $\vec{n} = \vec{y}$;

3.) polarizátor s osou $\vec{y}$;

4.) čtvrtvlnová destička s osou $\vec{n} = \frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}$.

Řešení: **Vektorově**: Vstupní světlo má elektrické pole tvaru $\vec{E}_0 = E_0\vec{x}\cos\omega t$, jeho intenzita je $I_0 = \langle\vec{E}_0^2\rangle = \frac{1}{2}E_0^2$. Po průchodu lineárním polarizátorem získáme pole

$$\vec{E}_1 = (\vec{E}\cdot\vec{n})\,\vec{n} = E_0\left(\vec{x}\cdot\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}\right)\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}\cos\omega t = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}\cos\omega t, \tag{408}$$

tedy lineárně polarizované světlo s rovinou polarizace ve směru $\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}$. Intenzita je pak $I_1 = \langle\vec{E}_1^2\rangle = \frac{E_0^2}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}I_0$. Dále světlu stojí v cestě vlnová destička s osou $\vec{n} = \vec{y}$, pole $\vec{E}_1$ stačí rozepsat jako

$$\vec{E}_1 = \frac{E_0}{2}\vec{x}\cos\omega t + \frac{E_0}{2}\vec{y}\cos\omega t \tag{409}$$

a pak přičíst fázi π (půlvlnová destička) ke složce ve směru $\vec{y}$:

$$\vec{E}_2 = \frac{E_0}{2}\vec{x}\cos\omega t + \frac{E_0}{2}\vec{y}\underbrace{\cos(\omega t+\pi)}_{-\cos\omega t} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}\cos\omega t. \tag{410}$$

Za vlnovou destičkou máme tedy lineárně polarizované světlo s rovinou polarizace danou směrovým vektorem $\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}$. Jeho intenzita je $I_2 = \langle\vec{E}_2^2\rangle = \frac{E_0^2}{2}\frac{1}{2} = I_1$ – vlnová destička intenzitu nemění. Polarizátor s osou propustnosti $\vec{n} = \vec{y}$ jednoduše anihiluje složku elektrického pole ve směru $\vec{x}$:

$$\vec{E}_3 = (\vec{E}_2\cdot\vec{y})\,\vec{y} = -\frac{E_0}{2}\vec{y}\cos\omega t \sim \frac{E_0}{2}\vec{y}\cos\omega t \tag{411}$$

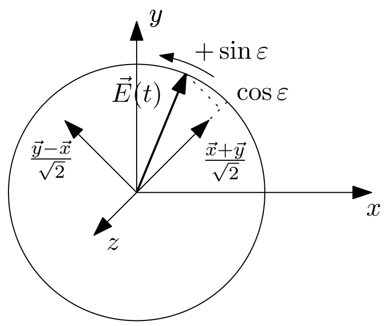
(zbavili jsme se znaménka minus, protože představuje jen celkový posun fáze o π). Intenzita je $I_3 = \langle\vec{E}_3^2\rangle = \frac{E_0^2}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}I_0$. Na závěr světlo prochází čtvrtvlnovou destičkou s osou $\vec{n} = \frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}$. Musíme tedy nejprve pole $\vec{E}_3$ zapsat ve směrech $\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}$ a (k ní kolmému) $\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}$. Provedeme analogický výpočet jako v příkladu 9.7 a dostaneme $\vec{y} = \frac{1}{2}(\vec{y}+\vec{y}+\vec{x}-\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}} - \frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}\right)$, tedy

$$\vec{E}_3 = \frac{E_0}{2\sqrt{2}}\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}\cos\omega t - \frac{E_0}{2\sqrt{2}}\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}\cos\omega t. \tag{412}$$

Čtvrtvlnová destička přičte fázi $\frac{\pi}{2}$ do části vlny ve směru $\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}$:

$$\vec{E}_4 = \frac{E_0}{2\sqrt{2}}\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}\cos\omega t - \frac{E_0}{2\sqrt{2}}\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}\underbrace{\cos\left(\omega t+\tfrac{\pi}{2}\right)}_{-\sin\omega t} = \frac{E_0}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}\cos\omega t + \frac{\vec{y}-\vec{x}}{\sqrt{2}}\sin\omega t\right). \tag{413}$$

Zjevně se jedná o kruhově polarizované světlo. Pravotočivost/levotočivost rozhodneme podle smyslu otáčení elektrického pole:



Vektor elektrického pole se tedy točí proti směru hodinových ručiček a jedná se tedy o levotočivě kruhově polarizované světlo. Jeho intenzita je $I_4 = \langle \vec{E}_4^2\rangle = \frac{E_0^2}{8}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}I_0$ (opět, vlnová destička nemění intenzitu).

Maticově: Vstupní světlo má polarizační vektor tvaru

$$\hat{\vec{E}}_0 = E_0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \tag{414}$$

a vstupní intenzita je $I_0 = \frac{1}{2}\left(E_0^2+0^2\right) = \frac{1}{2}E_0^2$. Polarizátor s osou propustnosti ve směru $\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}$ zapůsobí pomocí projektoru

$$\hat{\vec{E}}_1 = \mathbb{P}_{\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}}\hat{\vec{E}}_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}E_0\\E_0\end{pmatrix} = \frac{E_0}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}. \tag{415}$$

Za polarizátorem je tedy lineárně polarizované světlo s rovinou polarizace ve směru $\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}$. Intenzita je $I_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{4}\left(E_0^2+E_0^2\right) = \frac{1}{2}I_0$. Půlvlnová destička zapůsobí dále jako

$$\hat{\vec{E}}_2 = \mathbb{D}_{\pi,\vec{y}}\hat{\vec{E}}_1 = \left[e^{i\pi}\mathbb{P}_{\vec{y}}+\mathbb{P}_{\vec{x}}\right]\hat{\vec{E}}_1 = \left[e^{i\pi}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\frac{1}{2}E_0\\\frac{1}{2}E_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}E_0\\\frac{1}{2}E_0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}E_0\\-E_0\end{pmatrix}. \tag{416}$$

Intenzita po průchodu destičkou $I_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}E_0^2+\frac{1}{4}E_0^2\right) = \frac{1}{2}I_0$ – vlnová destička intenzitu nemění. Opět mezi komponenty polarizačního vektoru $\hat{\vec{E}}_2$ není žádný fázový posun, tudíž se jedná o lineárně polarizované světlo tentokrát s rovinou polarizace ve směru $\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}$. (můžeme psát $\hat{\vec{E}}_2 = \frac{E_0}{2\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})^T$).

Polarizátor s osou propustnosti $\vec{n} = \vec{y}$ zapůsobí následovně

$$\hat{\vec{E}}_3 = \mathbb{P}_{\vec{y}}\hat{\vec{E}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E_0}{2} \\ -\frac{E_0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{E_0}{2} \end{pmatrix} \sim \frac{E_0}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{417}$$

Opět se jedná o lineárně polarizované světlo s rovinou polarizace ve směru $\vec{y}$ s intenzitou $I_3 = \frac{1}{2}\left(0^2 + \frac{E_0^2}{4}\right) = \frac{1}{4}I_0$.

V posledním kroku máme čtvrtvlnovou destičku s osou $\vec{n} = \frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}}$. Komplementární směr je tedy $\vec{n}' = \frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}}$. Její matice je tedy dána vztahem $\mathbb{D}_{\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}}\mathbb{P}_{\vec{n}} + \mathbb{P}_{\vec{n}'}$. Explicitně

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{\frac{\pi}{2},\vec{n}} &= e^{i\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{2}} & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{2}} & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} & e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ e^{-i\frac{\pi}{4}} & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{418}$$

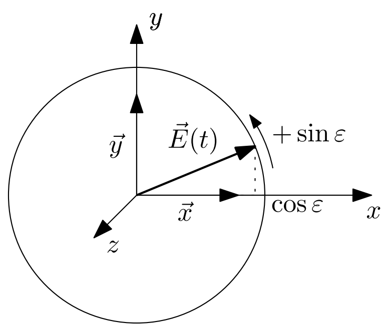
Výsledné světlo pak je

$$\hat{\vec{E}}_4 = \mathbb{D}_{\frac{\pi}{2},\vec{n}}\hat{\vec{E}}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E_0}{2} \end{pmatrix} = \frac{E_0}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{E_0}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{2}} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{419}$$

Mezi jednotlivými komponentami elektrického pole (se stejnou amplitudou) je fázový rozdíl $\frac{\pi}{2}$, jedná se tedy o kruhově polarizované světlo. Po rozepsání do vektorového zápisu

$$\vec{E}_4 = \frac{E_0}{2\sqrt{2}}\left(\vec{x}\,e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})} + \vec{y}\,e^{i\omega t}\right) \overset{Re}{=} \frac{E_0}{2\sqrt{2}}\Big(\vec{x}\underbrace{\cos(\omega t - \tfrac{\pi}{2})}_{\sin\omega t} + \vec{y}\cos\omega t\Big) \tag{420}$$

nyní snadno rozhodneme o smyslu otáčení elektrického pole:



Jedná se tedy o levotočivě polarizované světlo, jelikož se vektor elektrického pole v rovině xy otáčí proti směru hodinových ručiček. Výsledná intenzita je $I_4 = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{8}(1+1) = \frac{1}{4}I_0$ – vlnová destička opět nemění intenzitu.

***Cvičení 9.10.** Jakým hodnotám Stokesových parametrů P_1, P_2 a P_3 odpovídá lineárně, resp. kruhově polarizované světlo. Výsledky zakreslete.

Řešení: Stokesovy parametry jsou pro elektrické pole $\vec{E}(t) = (E_x(t), E_y(t))$ dány následujícími výrazy:

$$P_1 = \frac{\langle E_x^2\rangle - \langle E_y^2\rangle}{\langle E_x^2\rangle + \langle E_y^2\rangle}, \qquad P_2 = \frac{\langle 2E_x E_y\rangle}{\langle E_x^2\rangle + \langle E_y^2\rangle}, \qquad P_3 = \frac{\langle 2E_x(\omega t - \frac{\pi}{2})E_y\rangle}{\langle E_x^2\rangle + \langle E_y^2\rangle}. \tag{421}$$

Uvažujme světlo lineárně polarizované ve směru $\vec{n}$, tedy $\vec{E}(t) = E_0\vec{n}\cos\omega t$. Odtud

$$E_x(t) = E_0 n_x \cos\omega t, \qquad E_y(t) = E_0 n_y \cos\omega t. \tag{422}$$

Odtud zjistíme, že platí vztahy

$$\langle E_x^2\rangle = E_0^2 n_x^2 \langle\cos^2\omega t\rangle = \frac{1}{2}E_0^2 n_x^2, \qquad \langle E_y^2\rangle = \frac{1}{2}E_0^2 n_y^2. \tag{423}$$

Při výpočtu P_2 potřebujeme střední hodnotu

$$\langle 2E_x E_y\rangle = \langle 2E_0^2 n_x n_y \cos^2\omega t\rangle = E_0^2 n_x n_y. \tag{424}$$

Konečně, pro výpočet P_3 potřebujeme střední hodnotu

$$\begin{aligned} \left\langle 2E_x(\omega t - \tfrac{\pi}{2})E_y\right\rangle &= 2\left\langle E_0^2 n_x n_y \cos\omega t \cos(\omega t - \tfrac{\pi}{2})\right\rangle \\ &= 2E_0^2 n_x n_y \langle\cos\omega t \sin\omega t\rangle \\ &= E_0^2 n_x n_y \langle\sin 2\omega t\rangle = 0. \end{aligned} \tag{425}$$

Nyní zbývá dosadit do Stokesových parametrů, dostáváme

$$P_1 = n_x^2 - n_y^2, \;\; P_2 = 2n_x n_y, \;\; P_3 = 0. \tag{426}$$

Zapíšeme-li si $n_x = \cos\theta$ a $n_y = \sin\theta$, pak $P_1 = \cos 2\theta$, $P_2 = \sin 2\theta$, $P_3 = 0$. V prostoru Stokesových parametrů (P_1, P_2, P_3) tedy dostáváme jednotkovou kružnici v rovině $P_3 = 0$. Všimněte si, že danému bodu na kružnici odpovídají právě dva směry $\vec{n}$ a $-\vec{n}$, Stokesovy parametry jsou tedy určeny jednoznačně rovinou polarizace daného světla!

Kruhově polarizované světlo je dané například vektorem $\vec{E}(t) = E_0(\cos\omega t, \pm\sin\omega t)$. Odtud

$$\langle E_x^2\rangle = \langle E_0^2\cos^2\omega t\rangle = \frac{1}{2}E_0^2 = \langle E_0^2\sin^2\omega t\rangle = \langle E_y^2\rangle. \tag{427}$$

Pro výpočet P_2 potřebujeme střední hodnotu

$$\langle 2E_x E_y\rangle = \pm E_0^2\langle\cos\omega t\sin\omega t)\rangle = 0. \tag{428}$$

Konečně, pro výpočet P_3 potřebujeme spočítat

$$\left\langle 2E_x(\omega t - \tfrac{\pi}{2})E_y\right\rangle = \pm 2E_0^2\langle\sin^2\omega t\rangle = \pm E_0^2. \tag{429}$$

Po dosazení do Stokesových parametrů tedy dostáváme $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ a $P_3 = \pm 1$. Kruhově polarizovanému světlu tedy odpovídají póly sféry o poloměru 1.

***Cvičení 9.11.** Světlo dopadající na lineární polarizátor je směsí lineárně polarizovaného a nepolarizovaného světla. Otočíte-li polarizátorem o 60° oproti natočení s maximální prošlou intenzitou, dostanete intenzitu poloviční. Určete poměr intenzit nepolarizovaného a lineárně polarizovaného světla ve směsi.

Řešení: Intenzita dopadajícího světla I_d je součtem $I_d = I_p + I_n$, kde I_p je intenzita lineárně polarizovaného a I_n intenzita nepolarizovaného světla. Interferenční člen lze zanedbat, jelikož se jedná o superpozici nekoherentních vln. V závislosti na úhlu θ k rovině lineárně polarizovaného světla je intenzita prošlého světla $I_o(\theta) = I_p \cos^2\theta + \frac{1}{2}I_n$ (dle Malusova zákona a příkladu 9.2). Prošlá intenzita je největší pro $\theta = 0$. Ze zadání tedy máme rovnici $I_o(0) = 2I_o(\pm\frac{\pi}{3})$. Po dosazení

$$I_p + \frac{1}{2}I_n = 2\left(\frac{1}{4}I_p + \frac{1}{2}I_n\right) = \frac{1}{2}I_p + I_n. \tag{430}$$

Odtud $I_p = I_n$ – ve směsi je stejný poměr lineárně polarizovaného a nepolarizovaného světla.

***Cvičení 9.12.** Směr polarizace lineárně polarizovaného světla se rychle mění (mnohem rychleji, než je rozlišovací doba měřícího přístroje) mezi následujícími dvěma stavy: $\vec{n} = (\cos\theta_0, \pm\sin\theta_0)$, kde $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$. Vypočtěte Stokesovy parametry. Určete míru polarizace $|\vec{P}| = |(P_1, P_2, P_3)|$ v závislosti na θ_0.

Řešení: Máme tedy elektrické pole, ve kterém se rychle střídají následující dva stavy $\vec{E}^+$ a $\vec{E}^-$:

$$\vec{E}^\pm(t) = E_0 \begin{pmatrix} \cos\theta_0 \\ \pm\sin\theta_0 \end{pmatrix} \cos\omega t. \tag{431}$$

Střední hodnoty složek elektrického pole přes rozlišovací dobu přístroje budou dány aritmetickým průměrem středních hodnot přes periodu dvou stavů uvedených výše, tedy schematicky

$$\langle E^2\rangle_{t_{roz}} = \frac{1}{2}\left(\langle E^{+2}\rangle_T + \langle E^{-2}\rangle_T\right). \tag{432}$$

Konkrétně pak

$$\langle E_x^2\rangle_{t_{roz}} = \frac{1}{2}\left(\langle E_x^{+2}\rangle_T + \langle E_x^{-2}\rangle_T\right) = \frac{1}{2}\left(\cos^2\theta_0\frac{1}{2} + \cos^2\theta_0\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos^2\theta_0. \tag{433}$$

Úplně stejným výpočtem vyjde $\langle E_y^2\rangle = \frac{1}{2}\sin^2\theta_0$. Pro smíšené členy pak vyjde

$$\begin{aligned}\langle 2E_xE_y\rangle_{t_{roz}} &= \frac{1}{2}\left(\langle 2E_x^+E_y^+\rangle_T + \langle 2E_x^-E_y^-\rangle_T\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2E_0^2\cos\theta_0\sin\theta_0\langle\cos^2\omega t\rangle_T - 2E_0^2\cos\theta_0\sin\theta_0\langle\cos^2\omega t\rangle_T\right) = 0.\end{aligned} \tag{434}$$

Poslední střední hodnota potřebná pro výpočet P_3 je

$$\langle 2E_x(\omega t - \tfrac{\pi}{2})E_y\rangle = \frac{1}{2}\left(2E_0^2\cos\theta_0\sin\theta_0\langle\sin\omega t\cos\omega t\rangle_T - 2E_0^2\cos\theta_0\sin\theta_0\langle\sin\omega t\cos\omega t\rangle_T\right) = 0. \tag{435}$$

Celkově dostáváme

$$P_1 = \cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0 = \cos 2\theta_0, \qquad P_2 = 0, \qquad P_3 = 0. \tag{436}$$

Vidíme, že Stokesovy parametry vyjdou podobně jako světlo polarizované ve směru osy $\vec{x}$ anebo $\vec{y}$, ale vektor $\vec{P} = (P_1, P_2, P_3)$ neleží na jednotkové sféře, protože $|\vec{P}| = |\cos 2\vartheta_0|$. Míra polarizace se tedy zmenšuje se zvětšujícím se úhlem ϑ_0, až pro $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ vyjde $|\vec{P}| = 0$, což odpovídá nepolarizovanému světlu (pak opět roste, jelikož pro $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ dostáváme lineárně polarizované světlo ve směru osy $\vec{y}$).

11 Difrakce

Cvičení 11.1. Maximum jakého nejvyššího řádu můžete pozorovat v zeleném světle o vlnové délce $\lambda = 550$nm pro difrakční mřížku s 5000 vrypy na 1cm?

Řešení: Nechť d je vzdálenost sousedních vrypů na mřížce. Úhel θ_m, pod kterým pozorujeme maximum m-tého řádu na stínítku je dán vztahem

$$\sin\theta_m = m\frac{\lambda}{d}. \tag{437}$$

Odtud dostaneme podmínku na maximální řád maxima ve tvaru $m\frac{\lambda}{d} < 1$, tedy

$$m < \frac{d}{\lambda}. \tag{438}$$

Hustota počtu vrypů v našem případě $n = 5.10^5\,\mathrm{m}^{-1}$. Vzdálenost sousedních vrypů je potom $d = 1/n$ a dostáváme podmínku

$$m < \frac{1}{n\lambda} = \frac{1}{550 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{2{,}75 \cdot 10^{-1}} \approx 3{,}6. \tag{439}$$

Odtud vidíme, že pozorujeme maxima nejvýše třetího řádu.

Cvičení 11.2. Mohou se překrývat spektra 1. a 2. řádu a spektra 2. a 3. řádu vznikající na difrakční mřížce, osvětlíme-li ji bílým světlem složeným z vlnových délek 400–700 nm?

Řešení: Vzdálenost m-tého maxima od osy difrakční mřížky závisí na vlnové délce vztahem $y_m(\lambda) = m\frac{L\lambda}{d}$. Řešíme tedy nejprve podmínku, zda může nastat situace $y_1(\lambda_1) \geq y_2(\lambda_0)$, kde $\lambda_0 = 400\,\mathrm{nm}$ a $\lambda_1 = 700\,\mathrm{nm}$. Po dosazení tedy dostáváme požadavek

$$1\frac{L\lambda_1}{d} \geq 2\frac{L\lambda_0}{d}, \tag{440}$$

odkud vyjde podmínka $\lambda_1 \geq 2\lambda_0$. Pro zadané hodnoty toto nastat nemůže a první a druhé spektrum se nikdy nepřekrývají. Pro druhé a třetí maximum dostaneme nerovnici

$$\lambda_1 \geq \frac{3}{2}\lambda_0, \tag{441}$$

kterou výše zmíněné vlnové délky splní. Spektrum 2. a 3. řádu se tedy mohou překrývat. O tom jestli skutečně budou rozhodnou parametry difrakční mřížky (spektrum 2. a 3. řádu vůbec nemusí být vidět).

***Cvičení 11.3.** Difrakční mřížka má 500 vrypů na 1 mm. Vypočítejte tzv. disperzi, tj. veličinu $\frac{d\theta}{d\lambda}$, v okolí zeleného světla ($\lambda = 500$ nm) pro první a druhý řád.

Řešení: Pro mřížku je úhlová závislost maxima m-tého řádu dána vztahem $\sin\theta_m = m\frac{\lambda}{d}$. Odtud tedy $\theta_m(\lambda) = \arcsin(m\frac{\lambda}{d})$. Disperzi pro m-tý řád tedy dostaneme derivací:

$$\frac{d\theta_m}{d\lambda}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{m\lambda}{d})^2}} \cdot \frac{m}{d} = \frac{m}{\sqrt{d^2 - m^2\lambda^2}}. \tag{442}$$

Hustota počtu vrypů n je v tomto případě $n = 5{\cdot}10^5\,\mathrm{m}^{-1}$. Odtud $d = 20{\cdot}10^{-7}\,\mathrm{m}$. Vlnová délka je $\lambda = 5{\cdot}10^{-7}\,\mathrm{m}$. Číslo pod odmocninou je tedy

$$d^2 - m^2\lambda^2 = (400 - 25m^2) \cdot 10^{-14}. \tag{443}$$

Pro $m = 1$ a $m = 2$ tedy dostáváme

$$\frac{d\theta_1}{d\lambda}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{375}} \cdot 10^7\,\mathrm{m}^{-1} \approx 5{,}16{\cdot}10^{-5}\,\mathrm{m}^{-1}, \quad \frac{d\theta_2}{d\lambda}(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{300}} \cdot 10^7\,\mathrm{m}^{-1} \approx 11{,}5{\cdot}10^{-5}\,\mathrm{m}^{-1}. \tag{444}$$

Cvičení 11.4. Žluté světlo vyzařované atomy sodíku je dominované tzv. sodíkovým dubletem, jehož vlnové délky jsou $\lambda_1 = 589{,}0$ nm a $\lambda_2 = 589{,}6$ nm. Jaká je minimální hodnota počtu vrypů/štěrbin mřížky, aby bylo možné tyto dvě vlnové délky rozlišit ve spektru prvního řádu.

Řešení: Úhly, pod kterými pozorujeme maxima prvního řádu pro obě vlnové délky označme θ_1 a θ_2. Platí přibližný vztah

$$\theta_1 = \frac{\lambda_1}{d}, \qquad \theta_2 = \frac{\lambda_2}{d}. \tag{445}$$

Pro difrakční mřížku jsou šířky difrakčních maxim (vzdálenost mezi prvními nulami intenzity okolo maxima) dané vztahy

$$\delta\theta = \frac{2\lambda}{Nd}, \tag{446}$$

kde N je celkový počet vrypů na difrakční mřížce. Aby se dala spektra obou vlnových délek rozlišit, musí se obě půlky šířek „vejít“ mezi dvě maxima. Dostaneme tedy vztah

$$\frac{1}{d}(\lambda_2 - \lambda_1) = \theta_2 - \theta_1 \geq \frac{1}{2}\big(\delta\theta(\lambda_1) + \delta\theta(\lambda_2)\big) = \frac{1}{Nd}(\lambda_2 + \lambda_1). \tag{447}$$

Odtud můžeme vyjádřit konstantu N jako

$$N \geq \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{589{,}6 + 589{,}0}{0{,}6} \approx 1964{,}3. \tag{448}$$

Mřížka tedy musí obsahovat alespoň 1965 vrypů.

Cvičení 11.5. Laserovému paprsku o vlnové délce $\lambda = 632{,}8$ nm postavte do cesty vlas průměru d. Na stínítku ve vzdálenosti $L = 6$ m pozorujete difrakční maxima ve vzdálenosti $\Delta l = 3$ cm. Jaký je průměr vlasu?

Řešení: Dle Babinetova principu je interferenční vzor pro vlas stejný jako pro konečně velikou štěrbinu o šířce d. Pro štěrbinu konečné šířky d to vyjde stejně jako pro dvě tenké štěrbiny d od sebe. Vzdálenost sousedních maxim je tedy

$$\Delta l \approx L \cdot \Delta\theta = L\frac{\lambda}{d}. \tag{449}$$

Odsud můžeme vyjádřit d jako funkci zbývajících proměnných a dostaneme

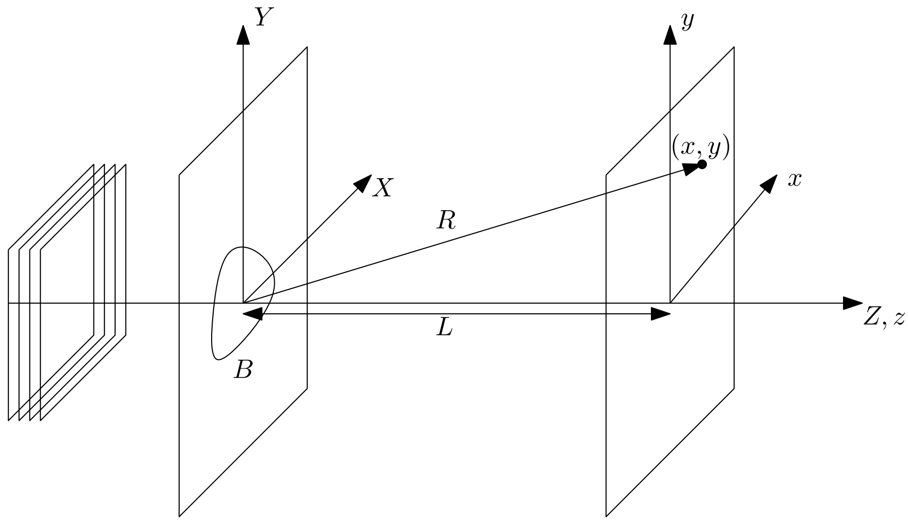
$$d = \frac{L\lambda}{\Delta l} = \frac{6 \cdot 632,8 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 10^{-2}} m = 2 \cdot 632{,}8 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} = 126\,\mu\mathrm{m}. \tag{450}$$

Cvičení 11.6 (*Difrakční obrazec obdélníkové štěrbiny*)**.** Nalezněte difrakční obrazec (průběh intenzity na stínítku) obdélníkové štěrbiny o rozměrech a, b.

Řešení: Dopadá-li rovinná vlna elektrického pole (ve směru osy z) na přepážku s otvorem B, je intenzita elektrického pole $\vec{E} = \vec{E}(x,y)$ na rovnoběžném stínítku v kolmé vzdálenosti L daná Fraunhoferovým integrálem

$$\vec{E}(x,y) = \frac{\vec{E}_0}{R} e^{i(\omega t - kR)} \int_B e^{i\frac{k}{R}(xX+yY)} dX dY, \tag{451}$$

kde napravo je plošný integrál přes plochu otvoru B a $R = R(x,y) = \sqrt{L^2 + x^2 + y^2}$. Viz obrázek:



V tomto příkladě je B obdélník se středem v $(X,Y) = (0,0)$ o stranách a a b. Plošný integrál je v tomto případě velmi jednoduchý, máme vypočítat

$$\int_B e^{i\frac{k}{R}(xX+yY)} dX dY = \left(\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{i\frac{kx}{R}X} dX \right) \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{i\frac{ky}{R}Y} dY \right). \tag{452}$$

Oba integrály dají podobný výsledek, spočtěme si jen jeden z nich:

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{i\frac{kx}{R}X} dX = \frac{R}{ikx} \left(e^{i\frac{kx}{R}\frac{a}{2}} - e^{-i\frac{kx}{R}\frac{a}{2}} \right) = \frac{2R}{kx} \sin\left(\frac{kx}{R}\frac{a}{2} \right). \tag{453}$$

Výsledné elektrické pole je tedy po dosazení

$$\vec{E}(x,y) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kR)} \frac{ab}{R} \frac{\sin\left(\frac{kxa}{2R}\right)}{\frac{kxa}{2R}} \frac{\sin\left(\frac{kyb}{2R}\right)}{\frac{kyb}{2R}}. \tag{454}$$

Intenzita $I = I(x,y)$ je časová střední hodnota kvadrátu (reálné části) tohoto pole:

$$I(x,y) = \left\langle \mathrm{Re}[\vec{E}(x,y)]^2 \right\rangle = \frac{E_0^2 a^2 b^2}{2R^2} \left(\frac{\sin(\frac{kxa}{2R})}{\frac{kxa}{2R}} \right)^2 \left(\frac{\sin(\frac{kyb}{2R})}{\frac{kyb}{2R}} \right)^2. \tag{455}$$

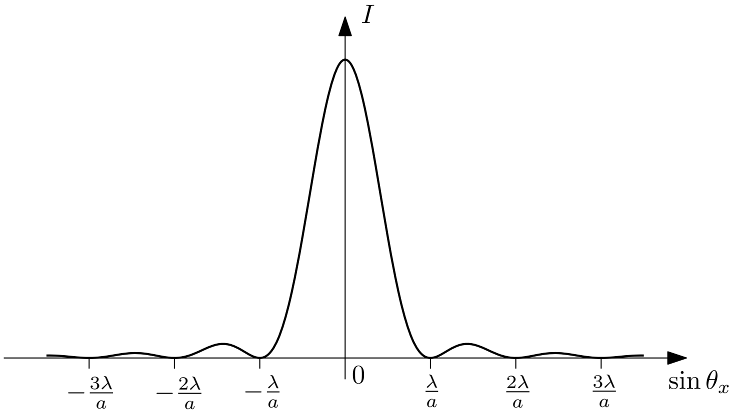
Výsledek můžeme zapsat pomocí dvou úhlů definovaných vztahy $\sin\theta_x = \frac{x}{R}$ a $\sin\theta_y = \frac{y}{R}$. Potom dostaneme

$$I(x,y) = \frac{E_0^2 a^2 b^2}{2R^2} \left(\frac{\sin(\frac{ka}{2}\sin\theta_x)}{\frac{ka}{2}\sin\theta_x} \right)^2 \left(\frac{\sin(\frac{kb}{2}\sin\theta_y)}{\frac{kb}{2}\sin\theta_y} \right)^2. \tag{456}$$

Pro průběh intenzity na ose x můžeme dosadit $y = 0$ (resp. spočítat $\lim_{y\to 0}$) s výsledkem

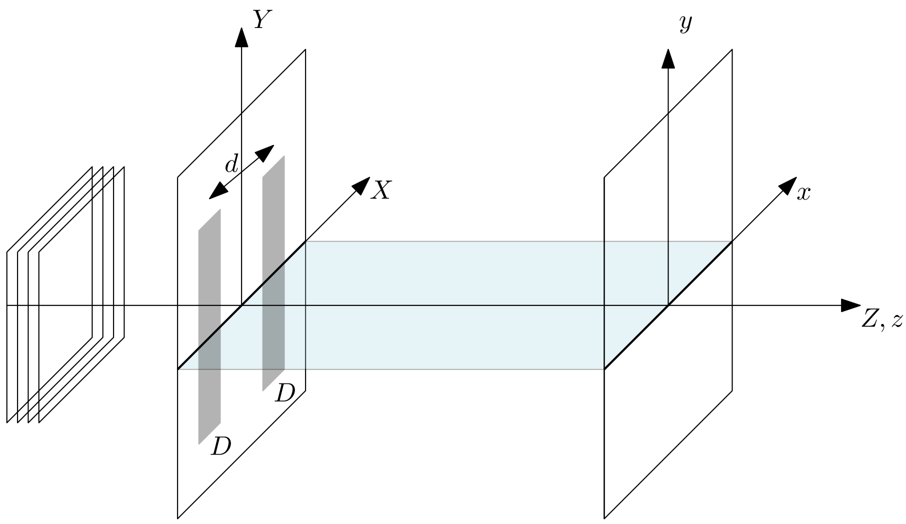
$$I(x) = \frac{E_0^2 a^2 b^2}{2R^2} \left(\frac{\sin(\frac{ka}{2} \sin \theta_x)}{\frac{ka}{2} \sin \theta_x} \right)^2 . \tag{457}$$

Průběh této intenzity je (v proměnné $\sin \theta_x$) znázorněn na následujícím obrázku:



Cvičení 11.7 (*Difrakční obrazec dvou štěrbin*)**.** Najděte difrakční obrazec dvou štěrbin šířky D, jejiž středy jsou ve vzdálenosti d.

Řešení: Zkoumáme jednorozměrný problém, tedy průběh intenzity v závislosti na x na řezu $y = 0$. Výsledek získáme modifikací předcházejícího výpočtu.



Spočtěme nejprve zvlášť elektrická pole od jednotlivých štěrbin $\vec{E}_{\pm}(x)$. Tyto se liší od elektrického pole jedné štěrbiny posunutím mezí v integrálu přes X. Oproti předchozímu příkladu tedy počítáme:

$$\int_{\pm\frac{d}{2}-\frac{D}{2}}^{\pm\frac{d}{2}+\frac{D}{2}} e^{i\frac{kx}{R}X} dX = \frac{R}{ikx} e^{\pm i\frac{kx}{R}\frac{d}{2}} \left(e^{i\frac{kx}{R}\frac{D}{2}} - e^{-i\frac{kx}{R}\frac{D}{2}} \right) = \frac{D}{2} e^{\pm ik\frac{d}{2}\sin\theta} \frac{\sin(\frac{1}{2}kD\sin\theta)}{\frac{1}{2}kD\sin\theta}, \tag{458}$$

kde nyní $R(x) = \sqrt{L^2 + x^2}$ a $\sin\theta = \frac{x}{R}$. Druhý integrál pro $y = 0$ dává $\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dY = b$. Máme tedy

$$\vec{E}_{\pm}(x) = \vec{E}_0 \frac{bD}{2R} e^{i(\omega t - kR)} e^{\pm i \frac{1}{2} kd \sin\theta} \frac{\sin(\frac{1}{2}kD\sin\theta)}{\frac{1}{2}kD\sin\theta}. \tag{459}$$

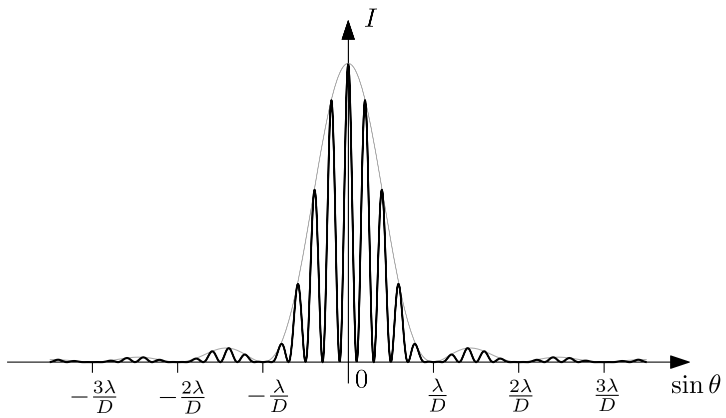
Výsledné elektrické pole je superpozicí těchto dvou, dostáváme

$$\vec{E}(x) = \vec{E}_+(x) + \vec{E}_-(x) = \vec{E}_0 \frac{bD}{R} e^{i(\omega t - kR)} \cos\left(\frac{1}{2}kd\sin\theta\right) \frac{\sin(\frac{1}{2}kD\sin\theta)}{\frac{1}{2}kD\sin\theta}. \tag{460}$$

Průběh intenzity snadno spočteme jako

$$I(x) = \left\langle \mathrm{Re}[\vec{E}(x,y)]^2 \right\rangle = \frac{E_0^2 b^2 D^2}{2R^2} \cos^2\left(\frac{1}{2}kd\sin\theta\right) \cdot \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}kD\sin\theta)}{\frac{1}{2}kD\sin\theta}\right)^2. \tag{461}$$

Průběh intenzity na ose x pro $d = \frac{D}{5}$ má tento tvar (šedě je pro srovnání intenzita jedné štěrbiny šířky D):



***Cvičení 11.8** (*Difrakční obrazec kruhového otvoru*)**.** Sestavte difrakční integrál pro kruhový otvor průměru D. Výsledek zapište pomocí Besselovy funkce $J_n(x)$, jejíž integrální definice je

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin(u) - nu)} du. \tag{462}$$

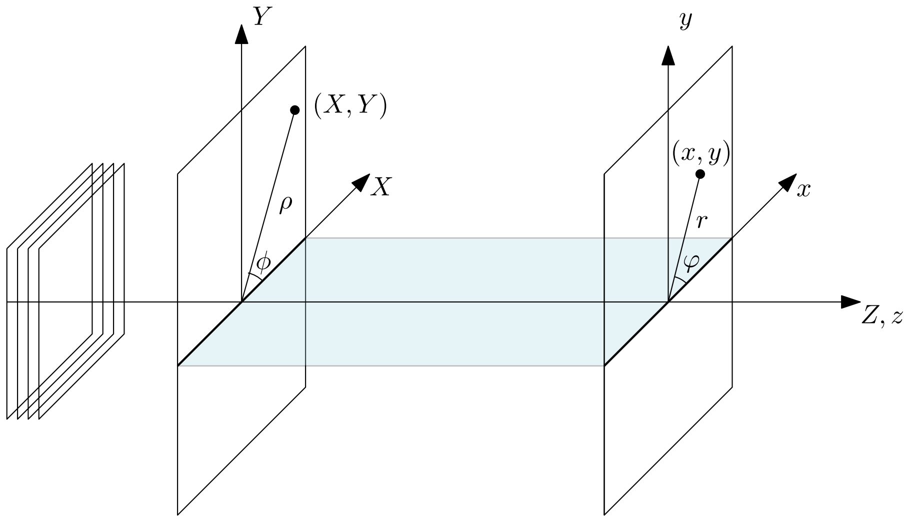
Návod: Zaveďte polární souřadnice v rovině stínítka i přepážky. Uvědomte si, že výsledek nemůže záviset na hodnotě polárního úhlu v rovině stínítka a položte ho roven vhodné konstantě. Integrujte nejprve podle úhlové proměnné. Použijte rekurentní vztah

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) \tag{463}$$

pro $n = 1$.

Řešení: Označme si (r, φ) polární souřadnice v stínítku a (ρ, ϕ) v rovině přepážky. Máme

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad X = \rho\cos\phi, \qquad Y = \rho\sin\phi. \tag{464}$$



Všimněte si, že $R = \sqrt{L^2 + x^2 + y^2} = \sqrt{L^2 + r^2}$. Nesmíme zapomenout na změnu elementu plochy, máme $dS = dXdY = \rho\, d\rho\, d\phi$. Pokládáme $\varphi = \frac{\pi}{2}$ a tedy dosazujeme $x = 0$ a $y = r$, $Y = \rho \sin\phi$. Difrakční integrál pak má tvar

$$\vec{E}(r) = \frac{\vec{E}}{R} e^{i(\omega t - kR)} \underbrace{\int_B e^{i\frac{k}{R} r\rho \sin\phi} \rho\, d\rho\, d\phi}_{f(r)}. \tag{465}$$

Samotný integrál přes otvor $f(r)$ zapíšeme konkrétně takto:

$$f(r) := \int_0^{\frac{D}{2}} \rho \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\frac{k}{R} r\rho \sin\phi} d\phi\, d\rho. \tag{466}$$

Vnitřní úhlový integrál je až na nasobení 2π přesně Besselova funkce J_0 vyčíslená v bodě $\frac{kr\rho}{R}$, dostaneme tedy

$$f(r) = 2\pi \int_0^{\frac{D}{2}} \rho\, J_0\left(\frac{kr\rho}{R}\right) d\rho. \tag{467}$$

Nyní si zavedeme substituci $u = \frac{kr\rho}{R}$ a dostaneme

$$f(r) = \frac{2\pi R^2}{k^2 r^2} \int_0^{\frac{krD}{2R}} u\, J_0(u)\, du. \tag{468}$$

Z rekurentního vztahu výše ale víme, že $u\, J_0(u) = \frac{d}{du}[u\, J_1(u)]$. Potom snadno

$$f(r) = \frac{2\pi R^2}{k^2 r^2} [u J_1(u)]_0^{\frac{krD}{2R}} = \frac{2\pi R^2}{k^2 r^2} \frac{krD}{2R} J_1\left(\frac{krD}{2R}\right) = \frac{\pi RD}{kr} J_1\left(\frac{krD}{2R}\right). \tag{469}$$

Všimněte si, že funkce $f(r)$ je reálná. Výslednou intenzitu tedy již získáme triviálně jako

$$\begin{aligned} I(r) = \left\langle \mathrm{Re}[\vec{E}(r)]^2 \right\rangle = \frac{E_0^2}{2R^2} f(r)^2 = \frac{E_0^2 \pi^2 D^2}{2k^2 r^2} J_1\left(\frac{1}{2} kD \sin\theta\right)^2 = \frac{E_0^2 \pi^2 D^4}{8R^2} \left(\frac{J_1(\frac{1}{2}kD\sin\theta)}{\frac{1}{2}kD\sin\theta}\right)^2 \\ = \frac{2E_0^2 S^2}{R^2} \left(\frac{J_1(\frac{1}{2}kD\sin\theta)}{\frac{1}{2}kD\sin\theta}\right)^2, \end{aligned} \tag{470}$$

kde jsme opět definovali úhel θ tentokrát vztahem $\sin\theta = \frac{r}{R}$ a $S = \frac{1}{4}\pi D^2$ je plocha kruhového otvoru. Průběh intenzity pak má následující tvar (šedě je pro srovnání intenzita pro štěrbinu šířky D), $\alpha \approx 1,22$: