Diferenciální formy

V následujícím textu budeme vždy předpokládat, že funkce, se kterými pracujeme, jsou dostatečněkrát diferencovatelné. Přesněji řečeno potřebujeme, aby existovaly druhé parciální derivace a byly spojité.

Definice 1. ***Derivací funkce*** *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$* ***ve směru*** *$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ rozumíme následující limitu:*

$$\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{v}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{h}.$$

Nevyžadujeme zde, aby vektor směru $\vec{v}$ měl jednotkovou velikost. Derivace ve směru $\vec{v}$ udává, o kolik se v prvním přiblížení funkce f změní, při posunu z bodu $\vec{x}_0$ o vektor $\vec{v}$ do bodu $\vec{x}_0 + \vec{v}$.

Věta 1. *Pro derivaci ve směru platí následující vztah:*

$$\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{v}} = \vec{v} \cdot \nabla f(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_i}.$$

Definice 2. *Mějme funkci $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.* ***Diferenciálem*** *funkce f* ***v bodě*** *$\vec{x}_0$ rozumíme lineární zobrazení*

$$df_{\vec{x}_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \textit{tedy} \quad df_{\vec{x}_0} \in (\mathbb{R}^n)^{\#},$$

definované jako

$$df_{\vec{x}_0}(\vec{v}) := \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{v}} = \vec{v} \cdot \nabla f(\vec{x}_0).$$

Definice 3. ***Diferenciálem*** *funkce f rozumíme zobrazení $df : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^{\#}$ definované jako $df(\vec{x}) := df_{\vec{x}}$.*

Diferenciál df zapisujeme následujícím způsobem

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i,$$

kde dx_i je i-tý souřadnicový funkcionál, $dx_i(\vec{v}) = v_i$. Po dosazení konkrétního bodu $\vec{x}$ a konkrétního směru $\vec{v}$ do diferenciálu df dostaneme hodnotu přírůstku funkce f v daném bodě a směru:

$$df(\vec{x})(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} dx_i(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} v_i = \vec{v} \cdot \nabla f(\vec{x}).$$

Diferenciál funkce tedy obsahuje informace o přírůstku funkce ve všech bodech při posunech ve všemožných směrech $\vec{v}$.

Definice 4. *Zobrazení $\omega : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^\#$ nazýváme **diferenciální formou**. Zapisujeme*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, dx_i,$$

kde $\omega_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jsou obecné funkce.

S obecnou diferenciální formou se pracuje stejně jako s diferenciálem funkce. Vyberu si bod $\vec{x}$ a směr $\vec{v}$ a dostanu hodnotu

$$\omega(\vec{x})(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\vec{x}) \, dx_i(\vec{v}).$$

Každý diferenciál funkce df je tedy diferenciální formou (pro $\omega_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$). Jak uvidíme dále, tak ale neplatí, že každá diferenciální forma by byla diferenciálem nějaké funkce.

Definice 5. *Diferenciální formu $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, dx_i$ nazveme **uzavřenou**, jestliže platí*

$$\frac{\partial \omega_i(\vec{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j(\vec{x})}{\partial x_i}, \quad \forall i, j \in \hat{n}, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Pro formu ve dvou dimenzích tvaru $\omega = \omega_x \, dx + \omega_y \, dy$ se výše uvedené podmínky redukují na

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial y} = \frac{\partial \omega_y}{\partial x}.$$

Ve třech dimenzích máme formu tvaru $\omega = \omega_x \, dx + \omega_y \, dy + \omega_z \, dz$. Zavedeme-li označení $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, lze podmínky uzavřenosti napsat v jednoduchém tvaru $\operatorname{rot} \vec{\omega} = 0$.

Definice 6. *Diferenciální formu ω nazveme **exaktní**, jestliže existuje funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taková, že $\omega = df$.*

Věta 2. *Každá exaktní forma je zároveň uzavřená.*

Důkaz. Máme-li exaktní formu $\omega = df$, platí $\omega_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Po dosazení do podmínky uzavřenosti

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Díky záměnnosti parciálních derivací je forma uzavřená (zde potřebujeme spojitost druhých parciálních derivací). □

Tato věta poskytuje snadný nástroj, jak rozhodnout, že forma exaktní není, neboť uzavřenost je nutnou podmínkou exaktnosti. Jak pomocí uzavřenosti rozhodnout o exaktnosti se dozvíme dále.

Definice 7. *Spojité zobrazení $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, kde $I = \langle a, b \rangle$ je uzavřený interval, nazveme **křivkou**.*

Definice 8. *Mějme křivku $\gamma : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}^n$. Křivku se stejným počátečním a koncovým bodem, $\gamma(a) = \gamma(b)$, nazveme **uzavřenou** křivkou.*

Definice 9. *Množinu M nazveme **jednoduše souvislou**, jestliže je každá uzavřená křivka $\gamma : I \to M$ spojitě deformovatelná do bodu (tak aby při deformacích stále zůstávala v množině M).*

Intuitivně je jednoduše souvislá množina „bez děr“, které by nám bránily křivky smrsknout do jednoho bodu. Nejjednodušším příkladem jednoduše souvislých množin je $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Příklad množiny, která není jednoduše souvislá je například $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$. Uzavřená křivka, která obkružuje počátek není stažitelná do bodu, jelikož se nám ji nepodaří přetáhnout přes chybějící počátek. (Ale například množina $\mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\}$ jednoduše souvislá je, protože díky dimenzi navíc se můžeme díře v počátku vyhnout.)

Příkladem zajímavých množin, které nejsou jednoduše souvislé, jsou například kružnice anebo povrch toru.

Nyní můžeme formulat důležitou větu ohledně exaktnosti forem:

Věta 3. *Diferenciální forma uzavřená na jednoduše souvislé množině je na této množině exaktní.*

Prozatím jsme definovali diferenciální formy jako zobrazení z množiny $\mathbb{R}^n$. Můžeme samozřejmě uvažovat i menší definiční obor $D_\omega \subset \mathbb{R}^n$. Pod pojmem forma uzavřená na množině M, resp. forma exaktní na množině M, pak rozumíme uzavřenou, resp. exaktní, formu s definičním oborem $D_\omega = M$.

Definice 10. *Křivkový integrál z formy ω podél křivky $\gamma : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$, $\int_\gamma \omega$, je definován následujícím způsobem:*

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \sum_{i=1}^n \omega_i \, dx_i = \int_a^b \sum_{i=1}^n \omega_i(\gamma(t)) \frac{dx_i(t)}{dt} \, dt,$$

kde funkce $x_i(t)$ jsou složky křivky γ, tzn. $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$.

Definici si jednoduše můžeme „ospravedlnit“ tak, že v integrálu si výraz pro rozepsanou formu $\sum \omega_i \, dx_i$ rozšíříme zlomkem $\frac{dt}{dt}$, což vlastně představuje přechod od abstraktního integrování k integraci přes parametr t křivky γ.

Pokud zavedeme značení $\vec{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ a $d\vec{r} = (dx_1, \ldots, dx_n)$, můžeme psát

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \sum_{i=1}^n \omega_i \, dx_i = \int_\gamma \vec{\omega} \cdot d\vec{r},$$

tedy integrál z diferenciální formy ω není nic jiného než křivkový integrál z vektorového pole $\vec{\omega}$.

Věta 4. *Nechť je diferenciální forma ω exaktní, $\omega = df$. Integrál $\int_A^B \omega$ pak nezávisí na volbě křivky γ spojující body A a B. Navíc platí*

$$\int_A^B \omega = f(B) - f(A).$$

Důkaz. Buď křivka $\gamma : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$. Koncové body této křivky jsou $\gamma(a) = A$, $\gamma(b) = B$; složky křivky $\gamma(t)$ jsou $x_i(t)$. Z definice křivkového integrálu a použitím exaktnosti formy, tj. $\omega_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ máme

$$\int_A^B \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^n \omega_i(\gamma(t)) \frac{dx_i(t)}{dt} \, dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial x_i} \frac{dx_i(t)}{dt} \, dt.$$

Výraz pod integrálem $\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$ představuje derivaci složené funkce $\frac{d}{dt}\left(f(\gamma(t))\right) = \frac{d}{dt}\left(f \circ \gamma\right)$. Dosazením

$$\int_A^B \omega = \int_a^b \frac{d}{dt}\big(f(\gamma(t))\big) \, dt = \big[f(\gamma(t))\big]_a^b = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(B) - f(A).$$

$\square$

Důsledek 1. *Integrál podél uzavřené křivky γ z exaktní formy vymizí, tj. $\oint_\gamma \omega = 0$.*

Definice 11. *Buď ω diferenciální forma. Funkci $\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazveme **integrujícím faktorem** formy ω, jestliže je forma $\tilde{\omega} = \mu\,\omega$ exaktní.*

Důležitým příkladem formy, která není exaktní, je forma tepla ω_Q (často značená ∂Q). Jejím integrujícím faktorem je převrácená hodnota teploty $\frac{1}{T}$. Výsledná forma je exaktní a je rovna diferenciálu entropie dS:

$$dS = \frac{\omega_Q}{T}.$$