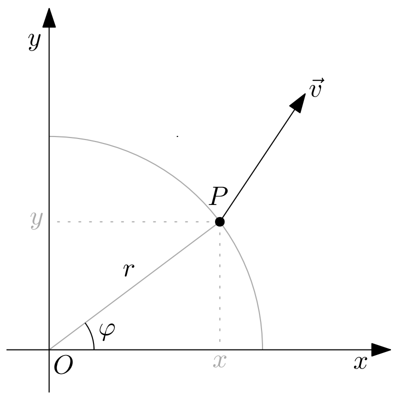
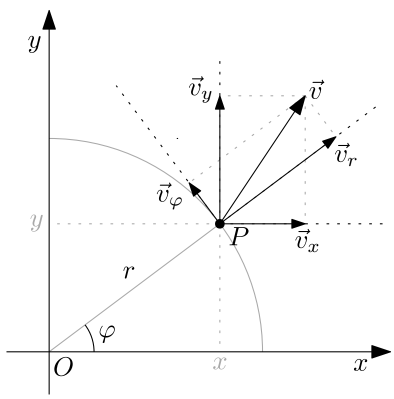
Složky rychlosti a zrychlení v polárních souřadnicích

Mějme částici v bodě P – v kartézských souřadnicích na pozici (x, y) a v polárních souřadnicích (r, φ). Částice se pohybuje rychlostí $\vec{v}$ a se zrychlením $\vec{a}$.



Budeme nyní pracovat s vektorem rychlosti $\vec{v}$ a ke zrychlení se vrátíme na konci. Vektor $\vec{v}$ můžeme rozložit buďto do směrů daných kartézskými osami anebo do směrů daných polárními souřadnicemi – radiální směr daný přímkou spojující počátek s bodem P a tangenciální směr daný tečnou ke kružnici o poloměru r:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi. \tag{1}$$

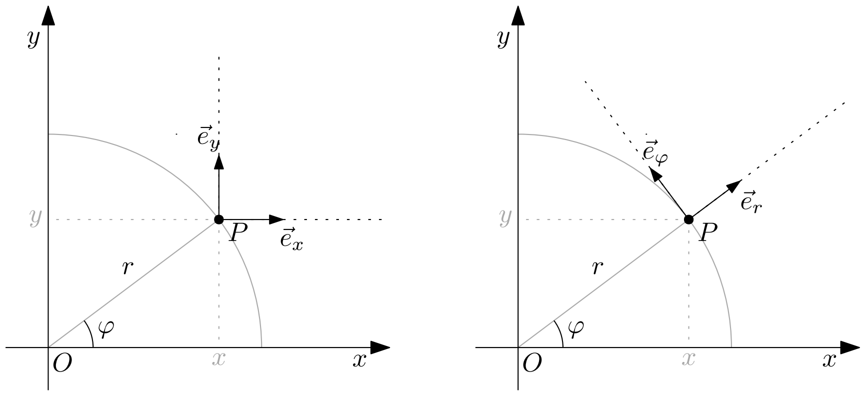


Uvidíme, že se vlastně jedná jen o zápis daného vektoru $\vec{v}$ pomocí souřadnic v různých bázích. Vektory báze pro kartézské souřadnice $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ (jednotkové vektory ve směrech kartézských os) mají vyjádření

$$\vec{e}_x = (1, 0), \qquad \vec{e}_y = (0, 1). \tag{2}$$

Vektory báze polárních souřadnic $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ (tzn. opět jednotkové vektory mířící ve směru souřadných čar (tečně k souřadným čarám)) mají vyjádření

$$\vec{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi), \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi). \tag{3}$$



Zapišme nyní rozklad (1) vektoru $\vec{v}$ pomocí kartézských a polárních bází:

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y$$

$$\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\varphi\vec{e}_\varphi$$

Porovnáním těchto vyjádření dostaneme rovnici vztahující souřadnice vektoru $\vec{v}$ v kartézské bázi (v_x, v_y) a souřadnice v polární bázi (v_r, v_φ):

$$v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y = v_r\vec{e}_r + v_\varphi\vec{e}_\varphi$$

Dosazením konkrétních vyjádření bazických vektorů (2) a (3) a rozepsání po složkách dostaneme následující rovnice:

$$v_x = v_r\cos\varphi - v_\varphi\sin\varphi, \tag{4}$$

$$v_y = v_r\sin\varphi + v_\varphi\cos\varphi. \tag{5}$$

Snadnou úpravou získáme vyjádření polárních složek rychlosti (v_r, v_φ) pomocí kartézských (v_x, v_y):

$$-(4)\cdot\sin\varphi + (5)\cdot\cos\varphi: \quad v_\varphi = -v_x\sin\varphi + v_y\cos\varphi, \tag{6}$$

$$(4)\cdot\cos\varphi + (5)\cdot\sin\varphi: \quad v_r = v_x\cos\varphi + v_y\sin\varphi. \tag{7}$$

My bychom ale chtěli vyjádření obsahující *pouze* polární souřadnice. Musíme tedy ještě najít vyjádření kartézských složek rychlosti (v_x, v_y) pomocí polárních souřadnic. Ty získáme snadno zderivováním transformačních vztahů mezi kartézskými a polárními souřadnicemi podle času:

$$x = r\cos\varphi, \qquad v_x = \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \tag{8}$$

$$y = r\sin\varphi, \qquad v_y = \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi. \tag{9}$$

Po dosazení do (6) a (7) dostaneme finální výrazy:

$$v_\varphi = -(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi)\cos\varphi + (\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi)\cos\varphi = r\dot{\varphi}, \tag{10}$$

$$v_r = (\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi)\cos\varphi + (\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi)\sin\varphi = \dot{r}. \tag{11}$$

Předchozí postup pro vektor rychlosti $\vec{v}$ můžeme úplně stejně zopakovat pro vektor zrychlení $\vec{a}$ (ve skutečnosti pro jakýkoliv vektor), stačí tedy v (6) a (7) zaměnit v za a:

$$a_\varphi = -a_x \sin\varphi + a_y \cos\varphi, \qquad a_r = a_x \cos\varphi + a_y \sin\varphi. \tag{12}$$

Vyjádření kartézských složek zrychlení (a_x, a_y) pomocí polárních souřadnic získáme dalším derivováním (8) a (9):

$$\begin{aligned} a_x &= \ddot{x} = \ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi, \\ a_y &= \ddot{y} = \ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi. \end{aligned}$$

Po dosazení do (12) konečně máme:

$$a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}, \qquad a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2.$$