

Řešené příklady ze skript ELMA v. 0.956

Josef Schmidt¹

¹schmijos@fjfi.cvut.cz

Dostává se vám do rukou sbírka **podrobně** řešených příkladů ze skript Štoll: Elektřina a magnetismus.

Každý z příkladů by měl víceméně tvořit samostatnou jednotku. Pro porozumění řešení daného příkladu často není nutné číst příklady předchozí nebo následující (ale ne vždy...). Pokud je nějaký příklad výjimkou z tohoto pravidla, je obvykle na příslušnou pasáž na jiném místě sbírky odkázáno.

Řešený příklad se vždy sestává ze zadání, jeho řešení a případného dodatku. Dodatek není k (pochopení) řešení nutný, často příklad komentuje, rozšiřuje nebo se na výpočet dívá z jiného pohledu.

Příklady jsou seřazeny do logických celků a často tedy nejsou v pořadí, v jakém jsou uvedeny ve skriptech. Nicméně, jejich číslo je zachováno pro snadnější orientaci. Za obsahem následuje seznam příkladů seřazený stejně jako ve skriptech, díky čemuž se dá rychle dohledat, kde daný příklad v této sbírce je.

V aktuální verzi chybí některé nepodstatné dodatky, které se časem („již brzy“) objeví.

Obsah

Seznam příkladů	5
1 Základy teorie relativity	8
1.1 Dilatace času a kontrakce délek	8
1.1.1 1.1 Mion v atmosféře	8
1.1.2 1.2 Protony prolétající skrz galaxii	10
1.1.3 1.5 Hustota	11
1.1.4 1.4 Dopplerův jev	11
1.2 Skládání rychlostí	12
1.2.1 Odvození vzorce pro skládání rychlosti pomocí složení Lorentzových transformací	12
1.2.2 1.3 Kosmická loď a raketa	14
1.2.3 1.6 Kosmonaut na Měsíci	14
1.3 Relativistická pohybová rovnice	15
1.3.1 1.7 Hyperbolický pohyb	15
1.4 Relativistická energie a práce	17
1.4.1 1.8 Urychlovač	17
1.4.2 1.9 Práce vynaložená na elektronu	17
1.4.3 1.10 Rozpad mezonu	17
1.4.4 1.11 Vazebná energie alfa částice	18
1.4.5 1.12 Slunce	19
2 Elektrostatika	20
2.1 Přehled vzorců	20
2.2 Coulombův zákon	24
2.2.1 2.1 Kuličky na nitích	24
2.2.2 2.2 Nabité kapky	25
2.3 Elektrostatická energie	25
2.3.1 2.3 Tři náboje	25
2.3.2 2.4 Nulová elektrostatická energie	26
2.3.3 2.5 Nabitý čtyřstěn	27
2.3.4 2.6 Rozpad jádra	28
2.4 Gaussův zákon	29
2.4.1 2.7 Náboj v krychli	29
2.5 Elektrostatický potenciál a intenzita elektrického pole	30
2.5.1 2.8 Nabitá tyč	30
2.5.2 2.9 Nabité destičky	31
2.5.3 2.10 Osa nabitého kruhového kotouče	33
2.5.4 2.11 Půlkulová slupka	34

2.5.5	2.13 Skoro uzavřená kružnice	36
2.5.6	2.14 Useknutý vrchlík	38
2.5.7	2.12 Potenciál mýdlové bubliny 2.15 Elektrostatické pole Země 2.16 Dielektrická pevnost vzduchu	41
2.6	Elektrický dipólový a kvadrupólový moment	44
2.6.1	2.17 Bodové náboje	44
2.6.2	2.18 Polarizovaná tyč	45
2.6.3	2.19 Polarizovaná koule	46
2.6.4	2.20 Síla elektrického dipólu	48
2.6.5	2.21 Kvadrupólový moment bodových nábojů	49
2.6.6	2.22 Kvadrupólový moment elipsoidu	51
2.7	Kondenzátory	53
2.7.1	2.26, 2.28 a 2.29 Deskový kondenzátor	53
2.7.2	2.30 a 2.33 Válcový kondenzátor a Geiger-Müllerův počítač	57
2.7.3	2.31 Kulový kondenzátor	61
2.7.4	2.32 Kapacita vedení	62
2.7.5	2.34 Skládání kapacit	64
2.7.6	2.35 Kondenzátor s polovičním dielektrikem	65
2.7.7	2.36 Kondenzátor s měnícím se dielektrikem	67
2.7.8	2.37 Energie kondenzátoru	68
3	Stacionární elektrické pole	69
3.1	Přehled vzorců	69
3.2	Skládání odporů	70
3.2.1	3.4 Skládání odporů I	70
3.2.2	3.5 Skládání odporů II	71
3.3	Odpor vodičů	72
3.3.1	3.1 Poměrné vodiče	72
3.3.2	3.2 Napnutý drát	72
3.3.3	3.3 Odporová krychle	73
3.3.4	3.8 Izolace v koaxiálním kabelu	75
3.3.5	3.9 Svodový odpor kulového kondenzátoru	76
3.4	Ohmův zákon	77
3.4.1	3.6 Krychle z odporů	77
3.4.2	3.11 Úbytky napětí v obvodu	81
3.4.3	3.10 Poškozené telegrafní vedení	81
3.4.4	3.13 Rozvětvený proud	83
3.4.5	3.12 Vnitřní odpor baterie I	84
3.4.6	3.18 Vnitřní odpor baterie II	84
3.4.7	3.16 Voltmetr a ampérmetr	85
3.5	Jouleovo teplo	86
3.5.1	3.14 Dimenzování odporů	86
3.5.2	3.15 Ztráty ve vedení	87
3.6	Kirchhoffovy zákony	88
3.6.1	3.7 Dvousmyčkový obvod	89
3.6.2	3.17 Blbec zapojující baterie	90
3.7	Definice proudu	91
3.7.1	3.19 Rychlost elektronů v drátu	91

3.7.2	3.20	Elektrony v urychlovači	92
3.7.3	3.21	Van der Graaffův proud	93
4		Stacionární magnetické pole	94
4.1		Relativita	94
4.1.1	4.1	Letící kondenzátor	94
4.1.2	4.2	Hustota proudu	96
4.1.3	4.4 a 4.5	Transformace elektrického a magnetického pole	96
4.2		Síla na vodič s proudem	99
4.2.1	4.3	Obdélníková smyčka v magnetickém poli	99
4.3		Biot-Savartův zákon	102
4.3.1	4.7	Magnetické pole kruhové a polygonální smyčky	102
4.3.2	4.11	Ohnutý drát	107
4.3.3	4.10	Magnetické pole na ose čtvercové smyčky	108
4.3.4	4.8	Trojúhelník z drátu	111
4.3.5	4.9	Krychle z drátu	112
4.3.6	4.14	Tři dráty	114
4.4		Ampérův zákon	115
4.4.1	4.13	Trubka s proudem	115
4.4.2	4.12	Vyvrтанá díra	119
4.4.3	4.15	Solenoid	121
4.5		Magnetický dipól	125
4.5.1	4.16	Zemský magnetický dipól	125
4.6		Lorentzova síla	127
4.6.1	4.6	Kolmá pole	127
4.6.2	4.21	Kruhový pohyb v magnetickém poli	127
4.6.3	4.20	Pohyb v magnetickém poli po šroubovici	128
5		Elektromagnetické pole	131
5.1		Elektromagnetická indukce	131
5.1.1	5.2	Indukce na kolejích	131
5.1.2	5.1	Pohybující se smyčka	134
5.1.3	5.7 a 5.8	Rotující cívky	136
5.1.4	5.6	Homopolární generátor	138
5.2		Vlastní a vzájemná indukčnost	140
5.2.1	5.3 a 5.4	Vlastní indukčnost válcové cívky	140
5.2.2	5.5	Vlastní indukčnost toroidální cívky	141
5.2.3	5.9	Vzájemná indukčnost I	145
5.2.4	5.10	Vzájemná indukčnost II	145
5.3		LR a RC obvody	147
5.3.1	5.11 a 5.12	RC obvod	147
5.3.2	5.13	Energie kondenzátoru	147
5.3.3	5.14	LR obvod	148
5.4		Obvody se střídavým proudem	148
5.4.1	5.15	Nabíjení baterie	148
5.4.2	5.20	Spotřebič	150

Seznam příkladů

1	Základy teorie relativity	8
1.1	Mion v atmosféře	8
1.2	Protony prolétající skrz galaxii	10
1.3	Kosmická loď a raketa	14
1.4	Dopplerův jev	11
1.5	Hustota	11
1.6	Kosmonaut na Měsíci	14
1.7	Hyperbolický pohyb	15
1.8	Urychlovač	17
1.9	Práce vynaložená na elektronu	17
1.10	Rozpad mezonu	17
1.11	Vazebná energie alfa částice	18
1.12	Slunce	19
2	Elektrostatika	20
2.1	Kuličky na nitích	24
2.2	Nabité kapky	25
2.3	Tři náboje	25
2.4	Nulová elektrostatická energie	26
2.5	Nabitý čtyřstěn	27
2.6	Rozpad jádra	28
2.7	Náboj v krychli	29
2.8	Nabitá tyč	30
2.9	Nabité destičky	31
2.10	Osa nabitého kruhového kotouče	33
2.11	Půlkulová slupka	34
2.12	Potenciál mýdlové bubliny	41
2.13	Skoro uzavřená kružnice	36
2.14	Useknutý vrchlík	38
2.15	Elektrostatické pole Země	41
2.16	Dielektrická pevnost vzduchu	41
2.17	Bodové náboje	44
2.18	Polarizovaná tyč	45
2.19	Polarizovaná koule	46
2.20	Síla elektrického dipólu	48
2.21	Kvadrupólový moment bodových nábojů	49
2.22	Kvadrupólový moment elipsoidu	51
2.26	Deskový kondenzátor I	53
2.28	Deskový kondenzátor II	53

2.29	Deskový kondenzátor III	53
2.30	Válcový kondenzátor	57
2.31	Kulový kondenzátor	61
2.32	Kapacita vedení	62
2.33	Geiger-Müllerův počítač	57
2.34	Skládání kapacit	64
2.35	Kondenzátor s polovičním dielektrikem	65
2.36	Kondenzátor s měnícím se dielektrikem	67
2.37	Energie kondenzátoru	68
3	Stacionární elektrické pole	69
3.1	Poměrné vodiče	72
3.2	Napnutý drát	72
3.3	Odporová krychle	73
3.4	Skládání odporů I	70
3.5	Skládání odporů II	71
3.6	Krychle z odporů	77
3.7	Dvousmyčkový obvod	89
3.8	Izolace v koaxiálním kabelu	75
3.9	Svodový odpor kulového kondenzátoru	76
3.10	Poškozené telegrafní vedení	81
3.11	Úbytky napětí v obvodu	81
3.12	Vnitřní odpor baterie I	84
3.13	Rozvětvený proud	83
3.14	Dimenzování odporů	86
3.15	Ztráty ve vedení	87
3.16	Voltmetr a ampérmetr	85
3.17	Blbec zapojující baterie	90
3.18	Vnitřní odpor baterie II	84
3.19	Rychlost elektronů v drátu	91
3.20	Elektrony v urychlovači	92
3.21	Van der Graaffův proud	93
4	Stacionární magnetické pole	94
4.1	Letící kondenzátor	94
4.2	Hustota proudu	96
4.3	Obdélníková smyčka v magnetickém poli	99
4.4	Transformace elektrického a magnetického pole I	96
4.5	Transformace elektrického a magnetického pole II	96
4.6	Kolmá pole	127
4.7	Magnetické pole kruhové a polygonální smyčky	102
4.8	Trojúhelník z drátu	111
4.9	Krychle z drátu	112
4.10	Magnetické pole na ose čtvercové smyčky	108
4.11	Ohnutý drát	107
4.12	Vyvrtaná díra	119
4.13	Trubka s proudem	115
4.14	Tři dráty	114
4.15	Solenoid	121

4.16 Zemský magnetický dipól	125
4.20 Pohyb v magnetickém poli po šroubovici	128
4.21 Kruhový pohyb v magnetickém poli	127
5 Elektromagnetické pole	131
5.1 Pohybující se smyčka	134
5.2 Indukce na kolejkách	131
5.3 Vlastní indukčnost válcové cívky I	140
5.4 Vlastní indukčnost válcové cívky II	140
5.5 Vlastní indukčnost toroidální cívky	141
5.6 Homopolární generátor	138
5.7 Rotující cívka I	136
5.8 Rotující cívka II	136
5.9 Vzájemná indukčnost I	145
5.10 Vzájemná indukčnost II	145
5.11 RC obvod I	147
5.12 RC obvod II	147
5.13 Energie kondenzátoru	147
5.14 LR obvod	148
5.15 Nabíjení baterie	148
5.20 Spotřebič	150

Kapitola 1

Základy teorie relativity

1.1 Dilatace času a kontrakce délek

1.1.1 1.1 Mion v atmosféře

Mion v kosmickém záření byl pozorován, jak v atmosféře urazil od svého vzniku do rozpadu vzdálenost $d_0 = 5 \text{ km}$ rychlostí $v = 0,99c$. Jakou dobu existoval v naší pozorovací soustavě, jakou dobu ve vlastní klidové soustavě a jak silná vrstva atmosféry prošla kolem něho ve vlastní soustavě?

Řešení: Doby života v naší pozorovací soustavě určíme jednoduše z kinematického vztahu

$$t = \frac{d_0}{v} = \frac{5 \text{ km}}{0,99c} = 1,68 \cdot 10^{-5} \text{ s} = 16,8 \mu\text{s} \quad (1.1)$$

(použili jsme přibližnou hodnotu rychlosti světla $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$). Z našeho pohledu zároveň mionu ubíhá čas pomaleji vlivem dilatace času. Určíme tedy ze vztahu pro dilataci vlastní čas mionu:

$$\tau = \frac{t}{\gamma} = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{d_0}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 2,375 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 2,375 \mu\text{s}. \quad (1.2)$$

Z pohledu mionu kolem něj atmosféra sviští rychlostí v , tudíž bude kontrahovaná ve směru svého pohybu, dosazením do vztahu pro kontrakci délek získáme tloušťku atmosféry z pohledu mionu:

$$d = \frac{d_0}{\gamma} = d_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 705 \text{ m}. \quad (1.3)$$

Stejného výsledku dosáhneme použitím kinematického vztahu

$$d = \tau v = 705 \text{ m}, \quad (1.4)$$

kde jsme využili faktu, že kolem mionu atmosféra letí rychlostí v po dobu jeho vlastního času života τ .

Dodatek: V tomto příkladu je možné natrefit na relativistický „paradox“. Z pohledu mionu je to pozorovatel na Zemi, kdo se pohybuje, tudíž dilatace času „postihuje“ jeho. Mion tedy na svých hodinkách během svého života naměří spočtený čas $\tau = 2,37 \mu\text{s}$ a dle něj pozorovateli na Zemi uběhne pouze

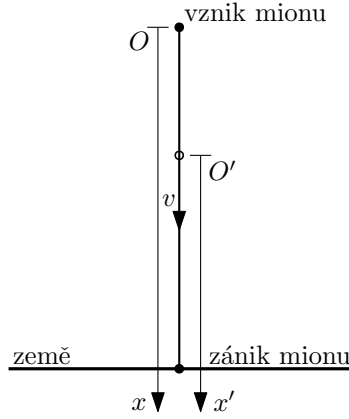
$$\tau' = \frac{\tau}{\gamma} = \tau \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0,335 \mu\text{s} \quad (\text{místo } t = 16,8 \mu\text{s}). \quad (1.5)$$

Jak je to možné? Problém je zde s relativitou současnosti. Dvě události, které se z jedné vztažné soustavy jeví, že nastaly současně, tak v jiné vztažné soustavě vůbec současné být nemusí. V soustavě spojené s pozorovatelem na Zemi máme dvě současné události: vznik mionu a „spuštění stopek“ pozorovatelem na Zemi, stejně jsou zde současné události: zánik mionu a zastavení stopek pozemského pozorovatele. V soustavě spojené s mionem tyto události současné obecně nebudou! Z pohledu mionu tedy pozorovatel na Zemi nejspíš zcela nepochopitelně spouští a zastavuje stopky úplně jindy, než v okamžiku, kdy mion vzniká a zaniká. Kvantifikujme nyní tyto úvahy.

Napišme si prostorové a časové souřadnice jednotlivých událostí v soustavě spojené se Zemí a transformujme je pomocí Lorentzovy transformace do soustavy spojené s mionem. Vezměme jednu prostorovou souřadnici x jejíž počátek je v místě vzniku mionu a míří dolů směrem k pozorovateli. Pak vznik mionu P_V , začátek měření P_M , zánik mionu P_Z a konec měření P_K mají prostorčasové souřadnice (x, t) :

$$P_V = (0, 0), \quad P_M = (d_0, 0), \quad P_Z = (d_0, t), \quad P_K = (d_0, t). \quad (1.6)$$

(pro jednoduchost uvažujeme, že mion se rozpadne přesně u nohou pozorovatele).



Obrázek 1.1: Souřadnice x spojená s pozorovatelem na Zemi, s počátkem v místě vzniku mionu. Souřadnice x' spojená s pohybujícím se mionem, mion je umístěn v počátku.

Souřadnici x' zavedeme tak, že bude mířit ve směru souřadnice x , a její počátek bude spojen s pohybujícím se mionem. Zavedení souřadnic x a x' také viz obrázek 1.1. Mezi souřadnicemi (x, t) a (x', t') v takto zavedených vztažných soustavách můžeme přejít následujícími Lorentzovými transformacemi

$$x' = \gamma(x - vt) = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1.7)$$

Po dosazení konkrétních hodnot souřadnic (x, t) pro jednotlivé události dostaneme souřadnice (x', t') událostí ve vztažné soustavě spojené s mionem (po řadě vznik mionu P'_V , začátek měření P'_M , zánik mionu P'_Z , konec měření P'_K):

$$P'_V = (0, 0), \quad P'_M = \left(\gamma d_0, -\gamma \frac{v}{c^2} d_0\right), \quad P'_Z = \left(0, \frac{t}{\gamma}\right), \quad P'_K = \left(0, \frac{t}{\gamma}\right), \quad (1.8)$$

kde jsme pro získání finálních tvarů použili vztah $d_0 = vt$. Vidíme tedy, že v soustavě spojené s mionem pozorovatel na Zemi začal měření dávno před vznikem mionu v čase $t'_M = -\gamma \frac{v}{c^2} d_0 =$

$-117 \mu s$ (mion vznikl v čase $t'_V = 0 s$). Konec měření nastal (současně se zánikem mionu) v čase $t'_Z = t'_K = \frac{t}{\gamma} = 2,37 \mu s$. Celkově tedy pozorovatel v soustavě spojené s mionem měřil po dobu

$$t'_m = t'_M - t'_Z = \frac{t}{\gamma} + \gamma \frac{v}{c^2} d_0 = t \left(\frac{1}{\gamma} + \gamma \frac{v^2}{c^2} \right) = t\gamma = 119 \mu s, \quad (1.9)$$

kde jsme opět použili vztah $d_0 = vt$. Vlastní čas měřícího pozorovatele pak je $\frac{t'_m}{\gamma} = t = 16,8 \mu s$, což je přesně hodnota, kterou jsme měli na začátku. Čas $0,335 \mu s$, který nás vedl k celé této úvaze, jednoduše představuje jen malou část vlastního času stopujícího pozorovatele. O žádný paradox se tedy nejedná.

1.1.2 1.2 Protony prolétající skrz galaxii

V kosmickém záření se vyskytují protony o energii $E = 10^{10} GeV$. Za jak dlouho proletí naší Galaxií v naší vztažné soustavě a ve své vlastní?

Řešení: Nejprve si spočteme rychlosti prolétajících protonů. Vztah mezi energií a rychlostí získáme ze slavného vztahu

$$E = mc^2 = m_0\gamma c^2 = E_0\gamma = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1.10)$$

kde jsme zavedli označení faktoru $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ a klidové energie $E_0 = m_0c^2$. Vyjádřením rychlosti dostaneme

$$v = \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2} c. \quad (1.11)$$

Klidová energie protonu je přibližně $E_0 = 1 GeV$. Hodnota rychlosti je pak

$$v = \sqrt{1 - 10^{-20}} c \approx (1 - 0,5 \cdot 10^{-20})c = 0, \underbrace{99 \dots 99}_{20x} c. \quad (1.12)$$

kde jsme použili aproximaci (Taylorův rozvoj do prvního řádu) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$. Z hlediska pozorovatele v galaxii můžeme uvažovat $v \approx c$. Jestliže uvažujeme délku naší Galaxie $l_0 = 100\,000$ sv.let, pak doba, za kterou protony skrze Galaxii proletí z hlediska pozorovatele v Galaxii, je jednoduše

$$t = \frac{l_0}{v} \approx \frac{l_0}{c} = 100\,000 \text{ let}. \quad (1.13)$$

Čas uběhlý z hlediska protonu získáme pomocí vztahu pro dilataci času (zde musíme použít přesnou rychlost v)

$$\tau = \frac{t}{\gamma} = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (1.14)$$

Ze vztahu (1.10) vidíme, že $\frac{E_0}{E} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, pro vlastní čas protonu pak dostaneme

$$\tau = t \frac{E_0}{E} = 10^5 \text{ let} \cdot 10^{-10} = 10^{-5} \text{ let} = 315 \text{ s}. \quad (1.15)$$

Dodatek: Pokud se na situaci podíváme z pohledu protonů, Galaxie kolem nich sviští obrovskou rychlostí v a je tedy extrémně zkrácená vlivem kontrakce délek. Spočteme tuto délku pomocí vztahu pro kontrakci délek (opět musíme použít přesnou rychlost v):

$$l = \frac{l_0}{\gamma} = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = l_0 \frac{E_0}{E} = 10^5 \text{ sv.let} \cdot 10^{-10} = 10^{-5} \text{ sv.let} = 315 \text{ sv.s}, \quad (1.16)$$

což je méně než vzdálenost ze Země na Slunce. Tuto vzdálenost také můžeme dostat použitím kinematického vztahu

$$l = \tau v \approx \tau c, \quad (1.17)$$

kde jsme využili faktu, že kolem protonu Galaxie letí rychlostí přibližně c po dobu jeho vlastního času průletu τ .

1.1.3 1.5 Hustota

Těleso se vzhledem k dané vztažné soustavě pohybuje rychlostí $v = 0,8c$. Určete poměr mezi jeho hustotou v této soustavě a hustotou klidovou.

Řešení: Hustota v klidové soustavě ρ_0 a hustota v pohybující se soustavě ρ jsou z definice dány vztahy

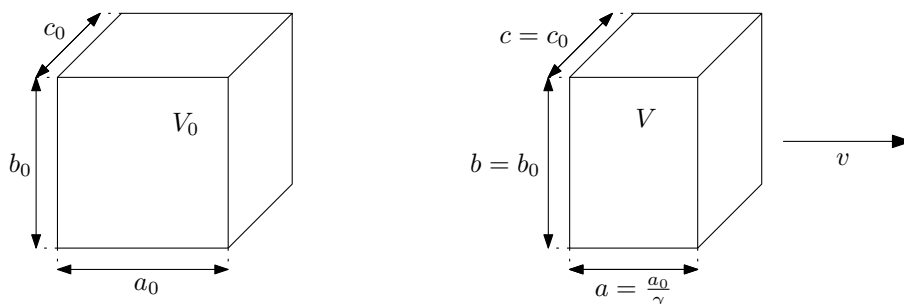
$$\rho_0 = \frac{m_0}{V_0}, \quad \rho = \frac{m}{V}, \quad (1.18)$$

kde m_0 a V_0 jsou hmotnost a objem v klidové soustavě a m a V jsou hmotnost a objem v pohybující se soustavě.

Objem se vlivem Lorentzovy kontrakce délek transformuje jako

$$V = \frac{V_0}{\gamma} = V_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (1.19)$$

Tento transformační vztah plyne z toho, že rozměr ve směru pohybu podléhá kontrakci, viz obrázek 1.2.



Obrázek 1.2: Objem a pohybující se objem.

Při pohybu se zároveň zvětšuje hmotnost tělesa, $m = m_0\gamma$. Dáme-li tyto vztahy dohromady, dostaneme výsledek:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_0\gamma}{\frac{V_0}{\gamma}} = \frac{m_0}{V_0}\gamma^2 = \rho_0\gamma^2. \quad (1.20)$$

1.1.4 1.4 Dopplerův jev

Fyzik hazardér, který přešel autem křižovatku na červenou a byl zastaven policistou, se hájil tím, že v důsledku Dopplerova jevu viděl místo červené zelenou. Fyzikálně vzdělaný policista ho však stejně pokutoval, a to za nedovolenou rychlost. Určete tuto rychlost za předpokladu, že červené odpovídá spektrální čára $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$ a zelené $\lambda = 550 \text{ nm}$.

Řešení: Relativistický vztah mezi vysílanou frekvencí zdroje f_0 a pozorovanou frekvencí f_p , pokud se pozorovatel přibližuje ke zdroji rychlostí v (a tedy s faktorem $\beta = \frac{v}{c}$) je

$$f_p = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} f_0. \quad (1.21)$$

Za frekvence dosadíme pomocí vlnových délek, $f = \frac{c}{\lambda}$:

$$\frac{c}{\lambda} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \frac{c}{\lambda_0}. \quad (1.22)$$

Nyní již jen vyjádříme faktor β :

$$\beta = \frac{\lambda_0^2 - \lambda^2}{\lambda_0^2 + \lambda^2} = 0,237, \quad (1.23)$$

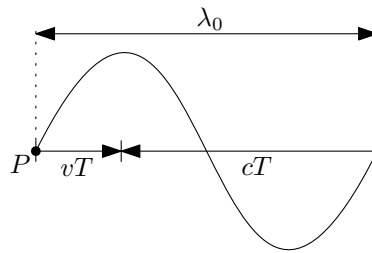
rychlost fyzika hazardéra v autě tedy byla $v = \beta c = 71\,000 \text{ km/s}$.

Dodatek: Odvodme výše zmíněný vztah mezi frekvencemi f_0 a f_p . Uvažujme zdroj, který je v klidu, a k němu se přibližuje pozorovatel rychlostí v .

Jaká bude perioda vlnění T pro pozorovatele? Ten jede rychlostí v vstříc vlnoplochám šířící se rychlostí c . Perioda T udávající, za jak dlouho kolem pozorovatele „propluje“ jedna vlnová délka, je pak dána rovnicí

$$vT + cT = \lambda_0, \quad (1.24)$$

kde λ_0 je vlnová délka světla vysílaného zdrojem, viz také obrázek 1.3. Tedy $T = \frac{\lambda_0}{v+c}$.



Obrázek 1.3: Pozorovatel P jede rychlostí v vstříc vlnění šířící se proti němu rychlostí c .

Nesmíme ovšem zapomenout na to, že pohybujícímu pozorovateli jdou hodiny pomaleji. Perioda T , kterou jsme zatím určili, je dána časem v soustavě spojené se zdrojem vlnění. Pohybujícímu se pozorovateli mezitím uběhne vlastní čas τ daný vztahem pro dilataci času:

$$\tau = \frac{T}{\gamma} = T \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = T \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (1.25)$$

Takže pozorovaná frekvence je $f_p = \frac{1}{\tau}$, postupným dosazováním dostaneme výsledný vztah:

$$f_p = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1}{T} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{v+c}{\lambda_0} = \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{c}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} f_0. \quad (1.26)$$

1.2 Skládání rychlostí

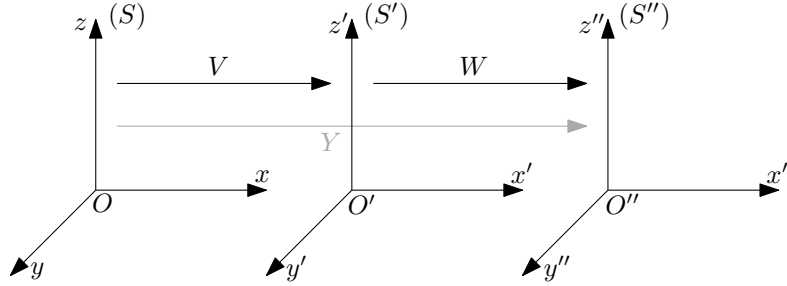
1.2.1 Odvození vzorce pro skládání rychlostí pomocí složení Lorentzových transformací

Naleznete zákon relativistického skládání rychlostí v jednom směru složením dvou Lorentzových transformací. Konkrétněaleznete tvar jedné Lorentzovy transformace, která bude ekvivalentní složení dvou výše zmíněných transformací.

Řešení: Pro dvě soustavy (S) a (S') , které mají stejně orientované osy a soustava (S') se vůči (S) pohybuje podél osy x (resp. x') rychlostí V , má Lorentzova transformace tvar¹

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right), \quad \gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \quad (1.27)$$

Uvažujme tři vztažné soustavy (S) , (S') a (S'') . Mezi soustavami (S) a (S') přecházíme zadanou rychlostí V , mezi (S') a (S'') zadanou rychlostí W a mezi (S) rovnou do (S'') přejdeme hledanou rychlostí Y . Viz také obrázek 1.4.



Obrázek 1.4: Tři vztažné soustavy (S) , (S') a (S'') .

Označme faktory gamma indexem podle rychlosti, kterou obsahují:

$$\gamma = \gamma_V = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad \gamma_W = \left(1 - \frac{W^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad \gamma_Y = \left(1 - \frac{Y^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \quad (1.28)$$

Pak Lorentzovy transformace pro souřadnice x, x', x'' a t, t', t'' mezi soustavami (S) a (S') , (S') a (S'') , (S) a (S'') mají tvar

$$x' = \gamma_V(x - Vt), \quad t' = \gamma_V\left(t - \frac{V}{c^2}x\right), \quad (1.29)$$

$$x'' = \gamma_W(x' - Wt'), \quad t'' = \gamma_W\left(t' - \frac{W}{c^2}x'\right), \quad (1.30)$$

$$x'' = \gamma_Y(x - Yt), \quad t'' = \gamma_Y\left(t - \frac{Y}{c^2}x\right). \quad (1.31)$$

Nyní provedeme složení Lorentzových transformací (1.30) a (1.29) a výsledek porovnáme s (1.31). Vezměme vztah pro transformaci x'' (1.30) a dosadíme za x' a t' z (1.29):

$$x'' = \gamma_W \left(\gamma_V(x - Vt) - W \gamma_V \left(t - \frac{V}{c^2}x \right) \right). \quad (1.32)$$

Výše uvedený výraz chceme upravit do tvaru $x'' = \gamma_Y(x - Yt)$ (1.31) – u proměnné t pak odečteme výraz pro složenou rychlost Y . Upravujme tedy (1.32):

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma_W \gamma_V \left(\left(1 + \frac{VW}{c^2}\right) x - (V + W)t \right) \\ &= \left[\gamma_W \gamma_V \left(1 + \frac{VW}{c^2}\right) \right] \left(x - \frac{V + W}{1 + \frac{VW}{c^2}} t \right) = \gamma_Y(x - Yt). \end{aligned} \quad (1.33)$$

¹Pro počátky soustav splývající v čase $t = t' = 0$.

²Mohli bychom vzít i vztah pro transformaci t'' , ale postup by byl v podstatě identický.

Z poslední rovnosti v předchozím výrazu dostáváme porovnáním hledaný vztah pro složenou rychlost Y :

$$Y = \frac{V + W}{1 + \frac{VW}{c^2}}. \quad (1.34)$$

Zároveň obdržíme vztah mezi gama koeficienty pro jednotlivé rychlosti,

$$\gamma_W \gamma_V \left(1 + \frac{VW}{c^2} \right) = \gamma_Y; \quad (1.35)$$

jeho platnost můžeme dokázat prostým rozepsáním všech gama faktorů (a dosažení konkrétní hodnoty rychlosti Y) a následnou zdlouhavou úpravou...

1.2.2 1.3 Kosmická loď a raketa

Z kosmické lodi pohybující se vzhledem k Zemi rychlostí $v_1 = 0,8c$ byla ve směru jejího pohybu vypuštěna raketa rychlostí $v_2 = 0,6c$ vzhledem k lodi. Vlastní délka rakety je $l_0 = 10\text{ m}$. Jaká je délka této rakety z hlediska pozorovatele v lodi a z hlediska pozorovatele na Zemi?

Řešení: Vzorec pro relativistické skládání rychlostí je následující:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}, \quad (1.36)$$

kde v je výsledná rychlost, v_1 a v_2 jsou původní rychlosti se shodným kladným směrem. Po dosažení dostaneme konkrétní výslednou rychlost v :

$$v = \frac{(0,8 + 0,6)c}{1 + 0,6 \cdot 0,8} = 0,946c. \quad (1.37)$$

Pro získání pozorovaných délek rakety musíme jen dosadit správné rychlosti do vzorce pro kontrakci délek

$$l = \frac{l_0}{\gamma} = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (1.38)$$

kde l_0 je vlastní (klidová) délka, l délka po kontrakci a v příslušná rychlost pohybu.

Raketa z pohledu kosmonauta na kosmické lodi má rychlost v_2 , z hlediska pozorovatele na Zemi má právě složenou rychlost v . Výsledné kontrahované délky tedy jsou:

$$l_{v_2} = 10\sqrt{1 - 0,6^2} = 8\text{ m}, \quad l_v = 10\sqrt{1 - (0,946)^2} = 3,24\text{ m}. \quad (1.39)$$

1.2.3 1.6 Kosmonaut na Měsíci

Kosmonaut na Měsíci pozoruje dvě kosmické lodi blížící se k němu z opačných stran rychlostmi $v_1 = 0,8c$ a $v_2 = 0,9c$. Jaká je rychlost jedné z lodí měřená z paluby druhé?

Řešení: Jenom pro zajímavost si uvědomme, že kosmonaut pozoruje kosmické lodi blížít se k sobě prostým součtem rychlostí: $v_1 + v_2 = 1,7c$.

Jiná je situace pro pozorovatele na jednotlivých kosmických lodích, z jejich pohledu se k sobě kosmické lodě blíží rychlostí

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{(0,8 + 0,9)c}{1 + 0,8 \cdot 0,9} = 0,988c. \quad (1.40)$$

1.3 Relativistická pohybová rovnice

1.3.1 1.7 Hyperbolický pohyb

Určete rychlost a dráhu relativistické částice, na níž působí konstantní síla F . Porovnejte s rovnoměrně zrychleným pohybem v nerelativistické fyzice a ukažte, že rychlost částice nepřekročí rychlost světla c .

Řešení: Řešme relativistickou pohybovou rovnici, resp. její jednorozměrnou verzi

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma\vec{v}) = \vec{F}, \quad \frac{d}{dt}(m_0\gamma v) = F. \quad (1.41)$$

Po dosazení $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ a zintegrování podle času (síla F je konstantní) získáme

$$m_0 \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = Ft + C_1, \quad (1.42)$$

kde integrační konstantu C_1 určíme z počátečních podmínek. Uvažujeme-li nulovou rychlost v čase nula, $v(0) = 0$, dostaneme $C_1 = 0$. Z předchozí rovnice vyjádříme rychlost $v(t)$:

$$v(t) = \frac{Ftc}{\sqrt{m_0^2c^2 + F^2t^2}} = \frac{Ft}{m_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0c}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_0c}{Ft}\right)^2}}. \quad (1.43)$$

Z posledního vyjádření zjevně $v(t) < c$ pro libovolný čas t , navíc platí $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = c$. Dráhu $x(t)$ získáme integrací rychlosti podle času:

$$x(t) = \int v(t) dt = \int \frac{Ftc}{\sqrt{m_0^2c^2 + F^2t^2}} dt. \quad (1.44)$$

Použitím substituce $u = m_0^2c^2 + F^2t^2$, $du = 2F^2t dt$ obdržíme výsledek

$$x(t) = \frac{c}{F} \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{c}{F} \sqrt{u} + C_2 = \frac{c}{F} \sqrt{m_0^2c^2 + F^2t^2} + C_2. \quad (1.45)$$

Pro počáteční podmínku $x(0) = 0$ máme $C_2 = -\frac{c}{F}m_0c$. Výsledek pak můžeme napsat ve tvaru:

$$x(t) = \frac{m_0c^2}{F} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0c}\right)^2} - 1 \right). \quad (1.46)$$

Na závěr ukážeme, jak se liší relativistický výsledek od nerelativistického. Bude se nám hodit Taylorův polynom funkce $(1+x)^\alpha$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a x je blízké nule:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots \quad (1.47)$$

Vezměme nyní funkce $v(t)$ v prostředním vyjádření (1.43) a $x(t)$ (1.46) a použijme Taylorův rozvoj na odmocniny v nich:

$$\left(1 + \left(\frac{Ft}{m_0c}\right)^2\right)^{\pm 1/2} = 1 \pm \frac{1}{2} \left(\frac{Ft}{m_0c}\right)^2 + \frac{\pm 1}{2} \left(\frac{\pm 1}{2} - 1\right) \left(\frac{Ft}{m_0c}\right)^4 + \dots, \quad (1.48)$$

kde jsme uvažovali $x = \left(\frac{Ft}{m_0c}\right)^2$ a tedy náš rozvoj platí jen pro časy t , kdy je x malé. Po dosazení těchto rozvoje do funkcí $x(t)$ a $v(t)$ (u polohy jsme použili rozvoj do druhého řádu, u rychlosti jen do prvního řádu) dostaneme

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{F}{m_0} t^2 - \frac{1}{8} \frac{F^3}{m_0^3 c^2} t^4 + \dots, \quad (1.49)$$

$$v(t) = \frac{F}{m_0} t - \frac{1}{2} \frac{F^3}{m_0^3 c^2} t^3 + \dots \quad (1.50)$$

Vidíme tedy, že vzorce pro nerelativistický pohyb jsou prvním přiblížením pohybu relativistického. V tzv. nerelativistické limitě $c \rightarrow +\infty$ dostaneme vzorce pro nerelativistický pohyb.

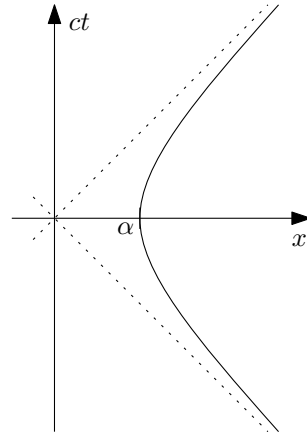
Dodatek: Proč se příklad jmenuje hyperbolický pohyb? Protože trajektorii relativistického pohybu s působící konstantní silou je v prostoročasovém diagramu hyperbola. Pro snazší úpravy se nám bude hodit pozměnit počáteční podmínku počáteční polohy na $x(0) = \frac{m_0 c^2}{F} = \alpha$. Pak integrační konstanta vyjde $C_2 = 0$ a výsledná závislost polohy na čase $x(t)$ je

$$x(t) = \alpha \sqrt{1 + \frac{c^2 t^2}{\alpha^2}}. \quad (1.51)$$

Úpravou získáme rovnici trajektorie v prostoročasovém diagramu s proměnnými (x, t) jako

$$x^2 - c^2 t^2 = \alpha^2, \quad (1.52)$$

což je rovnice hyperboly znázorněné na obrázku 1.5. Nerelativistický pohyb $x = \frac{1}{2} \frac{F}{m_0} t^2$ pak představuje pohyb parabolický.



Obrázek 1.5: Hyperbolický pohyb zakreslený v prostoročasovém diagramu.

Dodatek: Ve skriptech je výsledek zapsán pomocí konstanty $a = \frac{F}{m_0}$. Tato konstanta **nepředstavuje** zrychlení částice. Pro relativistický pohyb je při působení konstantní síly zrychlení nekonstantní. Skutečnou hodnotu zrychlení získáme klasickým způsobem z kinematického vztahu:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{Ftc}{\sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2}} \right) = \frac{m_0^2 F c^3}{(m_0^2 c^2 + F^2 t^2)^{3/2}}. \quad (1.53)$$

1.4 Relativistická energie a práce

1.4.1 1.8 Urychlovač

Urychlovač dodává protonům energii $E = 500 \text{ GeV}$. Jaké rychlosti dosahují? (Klidová energie protonu je $E_0 = 0,938 \text{ GeV}$.)

Řešení: Vztah mezi energií a rychlostí získáme ze slavného vztahu

$$E = mc^2 = m_0\gamma c^2 = E_0\gamma = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1.54)$$

kde jsme zavedli označení faktoru $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ a klidové energie protonu $E_0 = m_0c^2$. Vyjádřením rychlosti získáme

$$v = \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2} c = 0,9999982c. \quad (1.55)$$

1.4.2 1.9 Práce vynaložená na elektronu

Jak velkou práci je třeba vynaložit na zvýšení rychlosti elektronu z $v_1 = 1,2 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ na $v_2 = 2,4 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ podle nerelativistické a relativistické mechaniky? (Klidová energie elektronu je $0,511 \text{ MeV}$.)

Řešení: V nerelativistické mechanice je práce rozdíl kinetických energií objektu

$$W = E_{K2} - E_{K1} = \frac{1}{2}m_0v_2^2 - \frac{1}{2}m_0v_1^2 = \frac{1}{2}m_0c^2 \left(\frac{v_2^2}{c^2} - \frac{v_1^2}{c^2}\right) = \frac{1}{2}E_0(\beta_2^2 - \beta_1^2) = 0,24E_0 = 0,123 \text{ MeV}, \quad (1.56)$$

kde jsme vztah zapsali pomocí „relativistických“ veličin – klidové energie E_0 a faktoru $\beta = \frac{v}{c}$; v našem konkrétním případě máme $\beta_1 = \frac{2}{5}$ a $\beta_2 = \frac{4}{5}$ (při použití přibližné hodnoty rychlosti světla $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$).

V relativistickém případě je práce rovna přímo rozdílu celkových energií těles:

$$W = E_2 - E_1 = m_2c^2 - m_1c^2 = m_0c^2(\gamma_2 - \gamma_1) = E_0(\gamma_2 - \gamma_1) = 0,58E_0 = 0,296 \text{ MeV}, \quad (1.57)$$

kde jsme ve výrazu použili faktor $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Výsledné vztahy pro nerelativistickou, resp. relativistickou, práci jsou

$$W = \frac{1}{2}E_0(\beta_2^2 - \beta_1^2), \quad \text{resp.} \quad W = E_0(\gamma_2 - \gamma_1). \quad (1.58)$$

Nerelativistický vztah získáme z toho relativistického Taylorovým rozvojem faktoru γ do prvního řádu: $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2$.

1.4.3 1.10 Rozpad mezonu

Mezon π^- (s klidovou energií $E_{0\pi} = 139,6 \text{ MeV}$) se rozpadá z klidu na mion μ^- (klidová energie $E_{0\mu} = 105,7 \text{ MeV}$) a antineutrino $\bar{\nu}$. Určete energii mionu a antineutrina a uvolněnou kinetickou energii.

Řešení: Nejprve spočteme celkovou uvolněnou kinetickou energii. Ta je dána prostým rozdílem celkových klidových energií před a po rozpadu – úbytek hmoty se musel přeměnit na kinetickou energii:

$$E_K = E_{0\pi} - (E_{0\mu} + E_{0\bar{\nu}}) = E_{0\pi} - E_{0\mu} = 33,9 \text{ MeV}, \quad (1.59)$$

kde jsme položili klidovou energii antineutrina $E_{0\bar{\nu}}$ rovnu nule. Současné experimenty sice ukazují, že hmotnost neutrin je nenulová, ale zároveň v řádu jednotek eV nebo méně (tedy asi o 8 řádů méně než jsou klidové hmotnosti mezonu π a mionu).

Jak se kinetická energie rozdělí mezi vzniklé částice? K tomu musíme využít zákony zachování hybnosti a energie:

$$p_\pi = p_\mu + p_{\bar{\nu}}, \quad E_\pi = E_\mu + E_{\bar{\nu}}. \quad (1.60)$$

Mezon π byl na začátku v klidu a tedy $p_\pi = 0$ a $E_\pi = E_{0\pi}$:

$$0 = p_\mu + p_{\bar{\nu}}, \quad E_{0\pi} = E_\mu + E_{\bar{\nu}}. \quad (1.61)$$

Relativistický vztah mezi energií a hybností je

$$\frac{E_0^2}{c^2} = \frac{E^2}{c^2} - p^2 \quad \rightarrow \quad p^2 = \frac{1}{c^2}(E^2 - E_0^2). \quad (1.62)$$

Ze zákona zachování hybnosti plyne rovnost kvadrátů hybností, $p_\mu^2 = p_{\bar{\nu}}^2$, a po dosazení z výše uvedeného vztahu dostaneme (opět po položení $E_{0\bar{\nu}} = 0$)

$$\frac{1}{c^2}(E_\mu^2 - E_{0\mu}^2) = \frac{1}{c^2}(E_{\bar{\nu}}^2 - E_{0\bar{\nu}}^2) \quad \rightarrow \quad E_\mu^2 - E_{0\mu}^2 = E_{\bar{\nu}}^2. \quad (1.63)$$

Dospěli jsme tedy k následující soustavě dvou rovnic o neznámých E_μ a $E_{\bar{\nu}}$:

$$E_{0\pi} = E_\mu + E_{\bar{\nu}}, \quad E_{0\mu}^2 = E_\mu^2 - E_{\bar{\nu}}^2. \quad (1.64)$$

Po rozložení pravé strany druhé rovnice na $(E_\mu - E_{\bar{\nu}})(E_\mu + E_{\bar{\nu}})$ a dosazení z první se vyhneme řešení kvadratické rovnice a dostaneme sadu lineárních rovnic:

$$E_{0\pi} = E_\mu + E_{\bar{\nu}}, \quad \frac{E_{0\mu}^2}{E_{0\pi}} = E_\mu - E_{\bar{\nu}}. \quad (1.65)$$

Sečtením a odečtením těchto rovnic dostaneme výsledky:

$$E_\mu = \frac{1}{2} \left(E_{0\pi} + \frac{E_{0\mu}^2}{E_{0\pi}} \right) = 109,8 \text{ MeV}, \quad E_{\bar{\nu}} = \frac{1}{2} \left(E_{0\pi} - \frac{E_{0\mu}^2}{E_{0\pi}} \right) = 29,8 \text{ MeV}. \quad (1.66)$$

Na závěr stojí za to ještě explicitně spočítat kinetickou energii rozpadlých částic jednoduše odečtením klidových energií:

$$E_{K\mu} = E_\mu - E_{0\mu} = 4,1 \text{ MeV}, \quad E_{K\bar{\nu}} = E_{\bar{\nu}} = 29,8 \text{ MeV}. \quad (1.67)$$

Vidíme, že nehmotné antineutrino odnáší většinu vzniklé kinetické energie!

1.4.4 1.11 Vazebná energie alfa částice

Určete vazebnou energii částice α v MeV , jsou-li klidové hmotnosti protonu, neutronu a částice α : $m_p = 1,67265 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, $m_n = 1,67495 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ a $m_\alpha = 6,644 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Řešení: Vazebná energie je dána rozdílem klidových energií produktu a jeho konstituentů:

$$E_V = m_\alpha c^2 - (2m_p + 2m_n)c^2 = -4,61 \cdot 10^{-12} \text{ J} = -28,8 \text{ MeV}, \quad (1.68)$$

kde jsme použili přibližnou hodnotu rychlosti světla $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Záporné znaménko naznačuje, že při vzniku alfa částice se tato energie uvolní. Přepoččet mezi jouly a elektronvolty je dán následující jednoduchou jednotkovou úvahou

$$1 \text{ eV} = (1 e) \cdot V = \frac{1 e}{C} C \cdot V = \frac{1 e}{C} J = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}. \quad (1.69)$$

1.4.5 1.12 Slunce

Energie slunečního záření, které dopadá za jednotku času na čtvereční metr na hranici zemské atmosféry, představuje takzvanou *sluneční konstantu* $K = 1327 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$, střední vzdálenost Země od Slunce je $d = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m} = 1 \text{ AU}$. Zdrojem sluneční energie je tzv. vodíkový cyklus, při němž se vždy čtyři jádra vodíku (protony) o relativní atomové hmotnosti $m_{rp} = 1,008$ mění na jádro hélia ($m_{r\alpha} = 4,0039$). Určete úbytek hmotnosti Slunce a množství spáleného vodíku za sekundu. Odhadněte dobu, během níž by se spálilo množství vodíku odpovídající dnešní hmotnosti Slunce $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.

Řešení: Nejprve určíme celkový zářivý výkon Slunce P_{\odot} . Jestliže ve vzdálenosti d prochází jedním metrem čtverečním výkon K , pak celkový výkon získáme vynásobením plochou sféry o poloměru d :

$$P_{\odot} = 4\pi d^2 K = 3,752 \cdot 10^{26} \text{ W} = 3,752 \cdot 10^{14} \text{ TW}. \quad (1.70)$$

Tato energie se bere z jaderných reakcí uvnitř Slunce, kde se malá část hmoty přeměňuje na energii (ať už kinetickou posléze vyzářenou pomocí elektromagnetického záření anebo rovnou na gamma záření). Množství přeměňované hmoty určíme z rovnice $E = mc^2$, resp. její časové derivace:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{dm}{dt} c^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dm}{dt} = \frac{P}{c^2} = \frac{4\pi d^2 K}{c^2} = 4,169 \cdot 10^9 \text{ kg/s} = 4,169 \text{ Mt/s}, \quad (1.71)$$

kde jsme použili přibližnou hodnotu rychlosti světla $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Toto je tedy celkový úbytek hmotnosti Slunce za jednotku času vlivem přeměny hmoty na vyzářenou energii.

Nyní určíme množství spáleného vodíku za jednotku času. Jedna reakce vodíkového cyklu poskytne následující množství energie:

$$E_1 = \Delta m c^2 = (4m_p - m_{\alpha}) c^2. \quad (1.72)$$

Celkový počet potřebných reakcí za jednu vteřinu pro výkon P_{\odot} pak je

$$N = \frac{P_{\odot}}{E_1} = \frac{4\pi d^2 K}{(4m_p - m_{\alpha}) c^2}. \quad (1.73)$$

Za jednu reakci se spálí $4m_p$ vodíku, celkové množství spáleného vodíku pak je

$$\frac{dm_H}{dt} = 4m_p N = 4m_p \cdot \frac{4\pi d^2 K}{(4m_p - m_{\alpha}) c^2} = \frac{4\pi d^2 K}{(1 - \frac{m_{\alpha}}{4m_p}) c^2}. \quad (1.74)$$

V posledním vyjádření již vystupuje pouze poměr hmotností $\frac{m_{\alpha}}{m_p}$ a tedy hmotnosti můžeme dosadit v jakýchkoliv jednotkách, třeba pomocí relativních atomových hmotností:

$$\frac{dm_H}{dt} = \frac{4\pi d^2 K}{(1 - \frac{m_{r\alpha}}{4m_{rp}}) c^2} = 5,982 \cdot 10^{11} \text{ kg/s} = 598,2 \text{ Mt/s}. \quad (1.75)$$

Pokud by Slunce bylo jen z vodíku a jaderné reakce by po celou dobu probíhaly stejnou rychlostí, pak by se vodík propálil za čas

$$T = \frac{M_{\odot}}{\frac{dm_H}{dt}} = 3,343 \cdot 10^{18} \text{ s} = 106 \text{ mld. let}. \quad (1.76)$$

Stelární evoluce je samozřejmě mnohem komplikovanější a současné modely předpovídají celkovou dobu spalování vodíku na přibližně 10 miliard let.

Kapitola 2

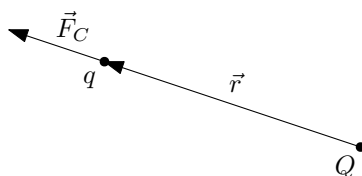
Elektrostatika

2.1 Přehled vzorců

- **Coulombův zákon** Síla \vec{F}_C od bodového náboje Q působící na bodový náboj q je dána jako

$$\vec{F}_C = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2}, \quad (2.1)$$

kde \vec{r} je vektor spojující náboj Q s nábojem q (od Q ke q), r je jeho velikost a $\epsilon_0 \doteq 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ je permitivita vakua.

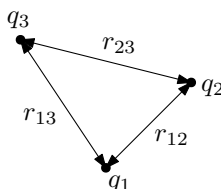


Obrázek 2.1: Coulombův zákon (směr síly je zde zakreslen pro souhlasné náboje).

- **Elektrostatická energie W soustavy bodových nábojů:**

$$W = \sum_{\alpha < \beta} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_\alpha q_\beta}{r_{\alpha\beta}}, \quad (2.2)$$

kde q_α jsou jednotlivé velikosti bodových nábojů a $r_{\alpha\beta}$ jsou vzdálenosti mezi jednotlivými náboji.

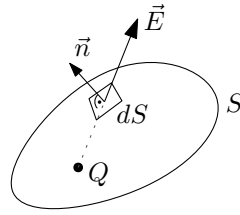


Obrázek 2.2: Elektrostatická energie soustavy tří bodových nábojů.

- **Gaussův zákon** vztahuje tok elektrického pole \vec{E} uzavřenou plochou s celkovým nábojem Q obklopeným touto plochou:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (2.3)$$

Element plochy je $d\vec{S} = \vec{n} dS$, kde \vec{n} je jednotkový normálový vektor k plošce velikosti dS , viz také obrázek 2.3. Normála \vec{n} je orientována tak, aby mířila ven z uzavřené plochy.



Obrázek 2.3: Uzavřená plocha S v Gaussově zákoně s bodovým nábojem Q a znázorněným elementem plochy $d\vec{S} = \vec{n} dS$.

Pokud vektor intenzity elektrického pole \vec{E} je v daném místě k ploše S tečný, pak do integrálu nepřispívá, neboť $\vec{E} \perp \vec{n}$ a tedy $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$. Pokud naopak vektor \vec{E} je v daném místě kolmý k ploše S , pak se skalární součin redukuje na $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS$.

V případě, že pracujeme s bodovými náboji a některý z nábojů leží přímo na ploše, Gaussův zákon neplatí (nelze vlastně rozhodnout, zda náboj leží či neleží uvnitř plochy)¹! Část elektrických siločar pak totiž „uniká“ ven z plochy a není započítána do celkového toku elektrického pole.

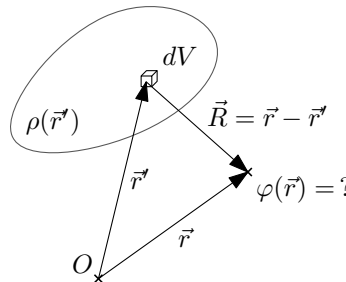
- **Elektrostatický potenciál** φ pro bodové náboje:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{R_{\alpha}}, \quad (2.4)$$

q_{α} jsou náboje jednotlivých částic. Pro spojitě rozložené náboje; po řadě: délkové, plošné a objemové rozložení:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\tau}{R} dl, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma}{R} dS, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{R} dV, \quad (2.5)$$

kde τ , σ a ρ jsou po řadě funkce délkové, plošné, objemové nábojové hustoty. Vzdálenost R (pro bodové náboje R_{α}) je vzdálenost mezi místem určování elektrostatického potenciálu φ o polohovém vektoru \vec{r} a integračním elementem (dl , dS , dV) o polohovém vektoru \vec{r}' , tzn. $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$, viz obrázek 2.4. Pro bodové náboje má roli \vec{r}' polohový vektor částic \vec{r}_{α} , tzn. $R_{\alpha} = |\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}|$.



Obrázek 2.4: Znázorněný vektor $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ pro určování elektrostatického (skalárního) potenciálu φ . Vektor \vec{r} je polohový vektor místa určování hodnoty $\varphi(\vec{r})$, vektor \vec{r}' je polohový vektor elementu objemu dV .

¹Podobně je to v případě délkového a plošného rozložení náboje, pokud část křivky či část plochy s náboji leží na ploše S v Gaussově zákoně.

Podrobně mají vzorce následující tvary. Pro bodové náboje:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{|\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}|}, \quad (2.6)$$

a pro spojitě rozložení nábojů:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\tau(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dl, \quad \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS, \quad \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV. \quad (2.7)$$

- **Intenzita elektrického pole \vec{E} (ve statickém případě):** je definováno jako (Coulombická) síla působící na jednotkový (testovací) náboj:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_C}{q}. \quad (2.8)$$

Vektor intenzity elektrického pole \vec{E} můžeme získat z elektrostatického potenciálu φ :

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}, -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right). \quad (2.9)$$

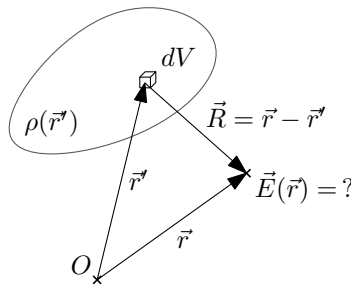
Přímý výpočet pro bodové náboje:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \frac{\vec{R}_{\alpha}}{R_{\alpha}^3}, \quad (2.10)$$

a pro spojitě rozložení nábojů:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \tau \frac{\vec{R}}{R^3} dl, \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \sigma \frac{\vec{R}}{R^3} dS, \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho \frac{\vec{R}}{R^3} dV, \quad (2.11)$$

kde τ , σ a ρ jsou po řadě funkce délkové, plošné, objemové nábojové hustoty. Vektor \vec{R} (pro bodové náboje \vec{R}_{α}) je vzdálenost mezi místem určování intenzity elektrického pole \vec{E} o polohovém vektoru \vec{r} a integračním elementem (dl , dS , dV) o polohovém vektoru \vec{r}' , tzn. $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, viz obrázek 2.5. Pro bodové náboje má roli \vec{r}' polohový vektor částic \vec{r}_{α} , tzn. $\vec{R}_{\alpha} = \vec{r} - \vec{r}_{\alpha}$. Vzdálenost R je velikost vektoru \vec{R} , tzn. $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ (pro bodové náboje máme $R_{\alpha} = |\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}|$).



Obrázek 2.5: Znázorněný vektor $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ pro určování intenzity elektrického pole \vec{E} . Vektor \vec{r} je polohový vektor místa určování hodnoty $\vec{E}(\vec{r})$, vektor \vec{r}' je polohový vektor elementu objemu dV .

Podrobně mají vzorce následující tvary. Pro bodové náboje:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \frac{\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}}{|\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}|^3} \quad (2.12)$$

a pro spojité rozložení nábojů:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \tau(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dl, \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \sigma(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS, \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV.\end{aligned}\quad (2.13)$$

- **Multipólový rozvoj elektrostatického potenciálu** je dán vztahem

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{\sum_{i,j} Q_{ij} x_i x_j}{r^5} + \dots \right], \quad (2.14)$$

kde r je velikost polohového vektoru \vec{r} , Q je celkový náboj, \vec{p} je vektor dipólového momentu a (Q_{ij}) je tenzor kvadrupólového momentu. Tyto veličiny se určí dle následujících vzorců (vždy pro bodové náboje a spojité objemové rozložení náboje²):

- **Celkový náboj:**

$$Q = \sum_{\alpha} q_{\alpha}, \quad Q = \int_V \rho(\vec{r}) dV, \quad (2.15)$$

- **Dipólový moment:**

$$\vec{p} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}, \quad \vec{p} = \int_V \rho(\vec{r}) \vec{r} dV, \quad (2.16)$$

- **Kvadrupólový moment:**

$$Q_{ij} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2)_{\alpha}, \quad Q_{ij} = \int_V \rho(\vec{r}) (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) dV, \quad (2.17)$$

kde q_{α} jsou náboje jednotlivých částic, $\vec{r}_{\alpha} = (x_{1\alpha}, x_{2\alpha}, x_{3\alpha}) = (x_{\alpha}, y_{\alpha}, z_{\alpha})$ jejich polohové vektory, pro zpřehlednění zápisu používáme značení $(x_{\alpha}, y_{\alpha}, z_{\alpha}) = (x, y, z)_{\alpha}$. Vektor $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ je polohový vektor elementu objemu dV , $\rho(\vec{r})$ je funkce objemové nábojové hustoty.

- **Elektrické napětí** je definované jako práce vnějších sil \vec{F} při přemístění jednotkového náboje po dráze l :

$$U = \frac{1}{q} \int_l \vec{F} \cdot d\vec{l}, \quad (2.18)$$

kde $d\vec{l} = \vec{t} dl$, dl je element délky a \vec{t} je jednotkový tečný vektor ke křivce l . V elektrostatice je obvykle jedinou silou působící na náboj síla elektrická, $\vec{F} = q\vec{E}$, pak se tedy vzorec konkretizuje na

$$U = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (2.19)$$

- **Kapacita kondenzátoru** je definována jako náboj na kondenzátoru na jednotkové napětí:

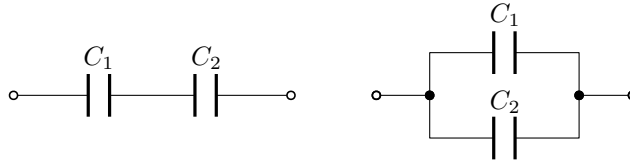
$$C = \frac{Q}{U}. \quad (2.20)$$

Jednotky: kapacita $C [F] = [C \cdot V^{-1}]$, náboj $Q [C]$, napětí $U [V]$.

²Pro krátkost nejsou uvedené vzorce pro délkové a plošné rozložení náboje. Spočívají jen v záměně objemového integrálu za délkový nebo plošný a v záměně funkce objemové nábojové hustoty za délkovou nebo plošnou.

- **Skládání kapacit:** Vzorce pro sériové (vlevo) a paralelní (vpravo) zapojení (viz obrázek 2.6) kondenzátorů jsou

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \quad C = C_1 + C_2. \quad (2.21)$$

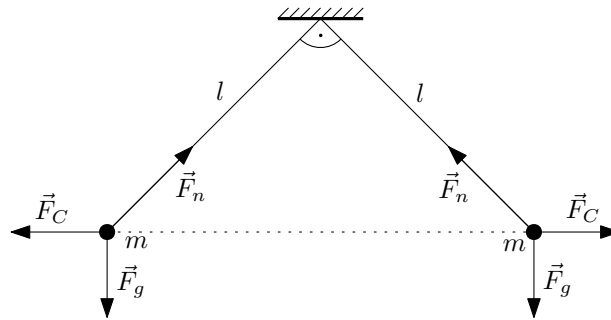


Obrázek 2.6: Skládání kapacit C_1 a C_2 . Vlevo je sériové zapojení a vpravo paralelní.

2.2 Coulombův zákon

2.2.1 2.1 Kuličky na nitích

Dvě stejné malé kuličky o hmotnostech $m = 1 \text{ g}$ visí na dvou nitích délky $l = 1 \text{ m}$. Nabijeme-li je souhlasným nábojem stejné velikosti q , rozestoupí se tak, že niti budou svírat pravý úhel. Určete velikost náboje q .



Obrázek 2.7: Kuličky na niti.

Řešení: Aby byly kuličky v rovnováze, musí výslednice gravitační \vec{F}_g a Coulombovy síly \vec{F}_C směřovat ve směru nití (pak mohou být vyrovnány napětovou silou \vec{F}_n). Velikost Coulombovy síly mezi dvěma náboji je obecně dána vztahem

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (2.22)$$

kde q_1, q_2 jsou hodnoty jednotlivých nábojů a r je vzdálenost mezi nimi. Pro niti svírající pravý úhel a tedy pro odklon jednotlivých nití o úhel 45° musí být velikosti gravitační a Coulombovy síly stejné, $F_C = F_g$. Vzdálenost mezi kuličkami je z Pythagorovy věty $r = \sqrt{2}l$ a velikosti jednotlivých sil pak:

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2l^2}, \quad F_g = mg. \quad (2.23)$$

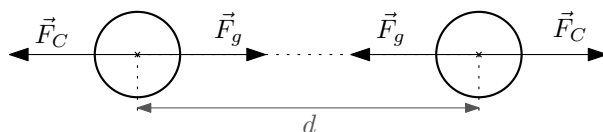
Vyjádríme-li náboj q z rovnice rovnosti sil, dostaneme

$$F_C = F_g \quad \longrightarrow \quad q = \pm\sqrt{8\pi\epsilon_0 mgl} = \pm 1,48 \cdot 10^{-6} \text{ C}, \quad (2.24)$$

kde jsme pro numerický výsledek použili hodnotu permitivity vakua $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$ a gravitačního zrychlení $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

2.2.2 2.2 Nabité kapky

Na dvou stejných vodních kapkách je po jednom přebytečném elektronu, přičemž síla elektrického odpuzování je stejně velká jako síla gravitačního přitahování. Určete poloměr kapek.



Obrázek 2.8: Kapky s přebytečným elektronem.

Řešení: Kuličky jsou odpuzovány Coulombovou silou \vec{F}_C a přitahovány gravitační silou \vec{F}_g , velikosti těchto sil jsou obecně dány vztahy

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.25)$$

kde q_1, q_2 jsou jednotlivé náboje, m_1 a m_2 hmotnosti těles, r je jejich vzdálenost. Tyto vzorce platí pro sféricky symetricky rozložený náboj a hmotu (Gaussova věta) – r je vzdálenost jejich středů. Uvažujeme zde, že jediný přebytečný elektron na kapkách se nachází právě v jejich středu. Vzorce (2.25) pak jsou konkrétně

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{d^2}, \quad F_g = \kappa \frac{m^2}{d^2}, \quad (2.26)$$

kde m jsou hmotnosti jednotlivých kapek, e je velikost elementárního elektrického náboje a d je vzdálenost středů kapek.

Hmotnost kapek vyjádříme pomocí jejich hustoty ρ a poloměru r :

$$m = \rho V = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho. \quad (2.27)$$

Z rovnosti velikostí sil $F_C = F_g$ vyjádříme potřebný poloměr kapek:

$$r = \sqrt[6]{\frac{9e^2}{64\pi^3\epsilon_0\kappa\rho^2}} = 7,63 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 76,3 \text{ } \mu\text{m}, \quad (2.28)$$

kde jsme pro numerický výsledek použili hodnoty elementárního elektrického náboje $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, permitivity vakua $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$, gravitační konstanty $\kappa = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ a hustoty vody $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$.

2.3 Elektrostatická energie

2.3.1 2.3 Tři náboje

Tři náboje $-e, e, -e$ jsou umístěny v uvedeném pořadí ve stejných vzdálenostech a . Určete síly působící na každý náboj a elektrostatickou energii soustavy.



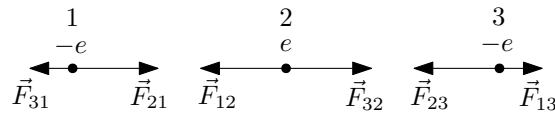
Obrázek 2.9: Tři náboje $-e, e, -e$ ve vzdálenostech a od sebe.

Řešení: Coulombova síla \vec{F}_C od bodového náboje Q působící na bodový náboj q je dána jako

$$\vec{F}_C = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (2.29)$$

kde \vec{r} je vektor spojující náboj Q s nábojem q (od Q ke q) a r je jeho velikost. Tento zápis pak přirozeně vyjadřuje vlastnost, že souhlasné náboje se odpuzují a nesouhlasné přitahují. Označme sílu působící od i -tého náboje na j -tý jako \vec{F}_{ij} . Tyto síly jsou znázorněny na obrázku 2.10. Jejich velikosti jsou

$$F_{12} = F_{21} = F_{23} = F_{31} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a^2}, \quad F_{13} = F_{31} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{4a^2}. \quad (2.30)$$

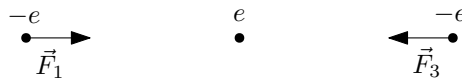


Obrázek 2.10: Jednotlivé síly působící na náboje. Síla \vec{F}_{ij} představuje sílu od i -tého náboje působící na j -tý náboj.

Označíme-li F_1 , F_2 a F_3 celkové velikosti sil působících po řadě zleva na jednotlivé náboje dostaneme (dle velikostí dílčích sil \vec{F}_{ij} (2.30) a jejich směrů na obrázku 2.10):

$$F_1 = F_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{e^2}{a^2} - \frac{e^2}{(2a)^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3e^2}{4a^2}, \quad F_2 = 0. \quad (2.31)$$

Směry těchto výsledných sil jsou na obrázku 2.11.



Obrázek 2.11: Celkové síly působící na náboje. Síla \vec{F}_2 je nulová.

Elektrostatická energie soustavy je dána obecným vztahem

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha < \beta} \frac{q_\alpha q_\beta}{r_{\alpha\beta}}, \quad (2.32)$$

kde q_α jsou náboje na jednotlivých částicích a $r_{\alpha\beta}$ jsou jejich vzájemné vzdálenosti. Zde konkrétně

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-e^2}{a} + \frac{e^2}{2a} + \frac{-e^2}{a} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3e^2}{2a}. \quad (2.33)$$

2.3.2 2.4 Nulová elektrostatická energie

Najděte takové uspořádání jednoho protonu a dvou elektronů na jedné přímce, aby elektrostatická energie soustavy byla nulová.

Řešení: Na přímce jsou možné dvě neekvivalentní uspořádání jednoho protonu a dvou elektronů, viz obrázek 2.12. Vzdálenosti mezi náboji jsme označili obecně a a b .



Obrázek 2.12: Dvě uspořádání jednoho protonu a dvou elektronů na přímce.

Elektrostatická energie pro soustavu tří nábojů je

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha < \beta} \frac{q_\alpha q_\beta}{r_{\alpha\beta}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right), \quad (2.34)$$

kde q_α jsou náboje na jednotlivých částicích a $r_{\alpha\beta}$ jsou jejich vzájemné vzdálenosti.

Pro uspořádání elektron-proton-elektron máme výraz

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-e^2}{a} + \frac{e^2}{a+b} + \frac{-e^2}{b} \right) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{a^2 + b^2 + ab}{ab(a+b)}. \quad (2.35)$$

V čitateli máme součet samých kladných čísel (vzdálenosti a a b musíme uvažovat kladné, jelikož jsme je použili jako hodnoty pro r_{12} , r_{13} a r_{23} , které jsou vždy kladné), takže v uspořádání e-p-e nemůže být elektrostatická energie W nulová.

Pro uspořádání elektron-elektron-proton dostáváme

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{e^2}{a} + \frac{-e^2}{a+b} + \frac{-e^2}{b} \right) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{b^2 - a^2 - ab}{ab(a+b)}. \quad (2.36)$$

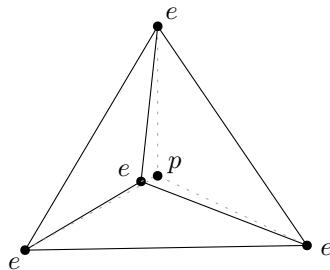
Elektrostatická energie je rovna nule, $W = 0$, právě tehdy když

$$b^2 - a^2 - ab = 0 \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{b}{a} \right)^2 - \frac{b}{a} - 1 = 0 \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{b}{a} \right)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \quad (2.37)$$

Poměr kladných vzdáleností musí být kladný, řešením tedy je poměr vzdáleností $\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, kdy je elektrostatická energie W uspořádání e-e-p nulová.

2.3.3 2.5 Nabitý čtyřstěn

Najděte energii potřebnou k umístění čtyř elektronů do vrcholů čtyřstěnu o hraně $a = 10^{-10} \text{ m}$, v jehož středu je proton.



Obrázek 2.13: Čtyřstěn s elektrony v jeho vrcholech a protonem v jeho středu.

Řešení: Elektrostatická energie soustavy nábojů W je dána vztahem

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha < \beta} \frac{q_\alpha q_\beta}{r_{\alpha\beta}}, \quad (2.38)$$

kde q_α jsou náboje na jednotlivých částicích a $r_{\alpha\beta}$ jsou jejich vzájemné vzdálenosti.

Nebudeme zde vypisovat všech deset členů této sumy pro 5 nábojů. Uvědomíme si, že díky symetrii čtyřstěnu máme jen dva různé druhy interakcí mezi náboji. Je to vzájemná interakce elektronů ve vrcholech čtyřstěnu – všechny jsou stejně vzdálené na délku hrany čtyřstěnu a a

těchto hran je celkem šest. Druhou interakcí je proton ve středu čtyřstěnu působící na čtyři elektrony ve vzdálenosti r :

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(6 \frac{e^2}{a} + 4 \frac{-e^2}{r} \right). \quad (2.39)$$

Vzdálenost středu čtyřstěnu od jeho vrcholů je³ $r = \frac{\sqrt{6}}{4}a$, kde a je délka jeho hrany. Po dosazení:

$$W = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{6 - 8\sqrt{\frac{2}{3}}}{a} = 1,23 \cdot 10^{-18} \text{ J}, \quad (2.40)$$

pro numerický výsledek jsme použili hodnoty elementárního elektrického náboje $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ a permitivity vakua $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.

2.3.4 2.6 Rozpad jádra

Atomová jádra těžkých prvků můžeme považovat za koule nabitě s objemovou hustotou náboje $\rho = \frac{4}{3} \cdot 10^{25} \text{ C.m}^{-3}$. Jak se změní elektrostatičká energie při symetrickém rozpadu jádra uranu ${}_{92}\text{U}$ na dvě stejná jádra paladia ${}_{46}\text{Pd}$?

Řešení: Elektrostatičká energie objemově nabitě koule o poloměru R s konstantní nábojovou hustotou ρ , resp. celkovým nábojem na kouli Q , je

$$W = \frac{4\pi R^5 \rho^2}{15\epsilon_0} = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}. \quad (2.41)$$

Náboj jádra uranu je $Q_{\text{U}} = 92e$ a náboj jádra paladia je $Q_{\text{Pd}} = 46e = \frac{1}{2}Q_{\text{U}}$. Jejich poloměry určíme ze vztahu pro celkový náboj Q objemově homogenně nabitě koule:

$$Q = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \rightarrow \quad R = \sqrt[3]{\frac{3Q}{4\pi\rho}}. \quad (2.42)$$

Poloměry jader uranu a paladia tedy jsou

$$R_{\text{U}} = \sqrt[3]{\frac{69e}{\pi\rho}}, \quad R_{\text{Pd}} = \sqrt[3]{\frac{69e}{2\pi\rho}} = R_{\text{U}} \frac{1}{\sqrt[3]{2}}. \quad (2.43)$$

Změna elektrostatičké energie ΔW je

$$\begin{aligned} \Delta W = W_{\text{U}} - 2W_{\text{Pd}} &= \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_{\text{U}}^2}{R_{\text{U}}} - 2 \frac{Q_{\text{Pd}}^2}{R_{\text{Pd}}} \right) = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{U}}^2}{R_{\text{U}}} \left(1 - 2 \frac{\frac{1}{2^2}}{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \right) \\ &= \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_{\text{U}}^2 \sqrt[3]{\frac{\pi\rho}{69e}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \right) = 7,36 \cdot 10^{-11} \text{ J}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

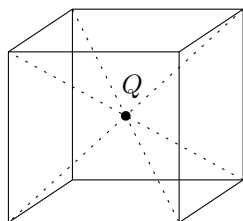
kde jsme pro numerický výsledek použili hodnoty elementárního elektrického náboje $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ a permitivity vakua $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.

³Odvození *záměrně* vynecháváme...

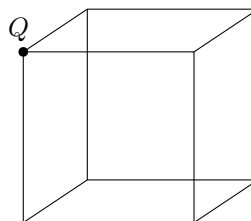
2.4 Gaussův zákon

2.4.1 2.7 Náboj v krychli

Bodový náboj je umístěn a) ve středu krychle, b) v jednom z rohů krychle. Určete tok intenzity elektrického pole každou ze stěn krychle.



(a) Náboj uprostřed krychle.



(b) Náboj v rohu krychle.

Obrázek 2.14: Náboje v krychlích.

Řešení: Pro řešení této úlohy použijeme Gaussův zákon. Ten říká, že tok intenzity elektrického pole Φ skrze uzavřenou plochu S je úměrný náboji Q v této ploše uzavřenému:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (2.45)$$

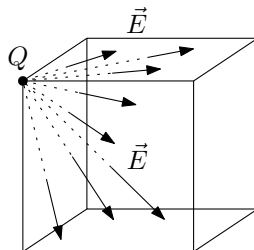
Pokud uvažujeme náboj uprostřed krychle, můžeme povrch krychle vzít jako uzavřenou plochu S v Gaussově zákoně. Celkový tok intenzity elektrického pole \vec{E} krychlí tedy je $\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$. Symetrie úlohy říká, že každou ze stěn krychle musí téct stejný tok elektrického pole⁴. Tento tok je zjevně roven

$$\Phi_{1 \text{ stěna}} = \frac{1}{6} \Phi = \frac{Q}{6\epsilon_0}. \quad (2.46)$$

Pro náboj v rohu krychle je situace komplikovanější v tom, že Gaussův zákon neplatí v případě, že bodový náboj leží na zvolené ploše S . Můžeme ale určit tok třemi stěnami krychle, v nichž náboj leží, přímo z definice toku intenzity elektrického pole:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (2.47)$$

Vektory elektrického pole \vec{E} jsou radiální – míří vždy přímo od nebo k náboji. To znamená, že vektory \vec{E} jsou tečné ke stěnám, ve kterých náboj leží, viz obrázek 2.15.

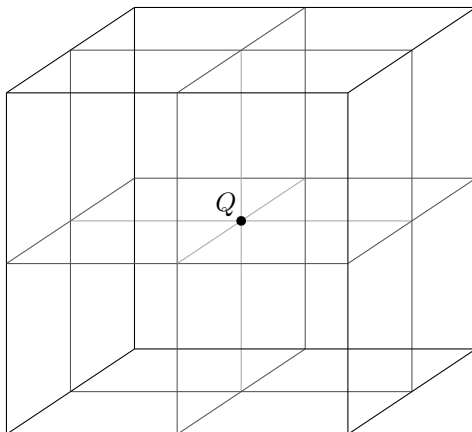


Obrázek 2.15: Vektory elektrické intenzity \vec{E} pro náboj v rohu krychle jsou tečné ke stěnám, ve kterých náboj leží.

⁴Krychle je symetrická při rotaci o násobky pravých úhlů okolo os procházející středem krychle (a nábojem) kolmých na příslušné dvě stěny krychle.

Jsou-li tečné ke stěnám, jsou kolmé k normálovému vektoru těchto stěn, $\vec{E} \perp \vec{n}$. Potom ovšem je tok těmito stěnami nulový, $\Phi_1 = 0$, neboť skalární součiny v definici toku, $\vec{E} \cdot d\vec{S} = (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS$, vymizí.

Pro určení toku zbylých třech stran obestavíme malou krychli s nábojem v rohu sedmi dalšími stejně velkými krychlemi tak, aby vytvořili jednu velkou krychli, viz obrázek 2.16. Tuto superkrychli použijeme jako plochu S do Gaussova zákona. Zákon je platný, náboj leží uvnitř (uprostřed) superkrychle.



Obrázek 2.16: Osm krychlí obestavěných okolo náboje.

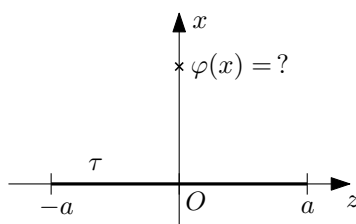
Nenulový tok jednou stěnou malé krychle pak bude čtvrtinou toku skrze velkou stěnou a ta je zase šestinou celkového toku superkrychlí:

$$\Phi_{1 \text{ malá stěna}} = \frac{1}{4} \Phi_{1 \text{ velká stěna}} = \frac{1}{4} \frac{1}{6} \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{Q}{24\epsilon_0}. \quad (2.48)$$

2.5 Elektrostatický potenciál a intenzita elektrického pole

2.5.1 2.8 Nabitá tyč

Tenká tyč nabitá s lineární hustotou náboje τ je umístěna na ose z mezi body $z = a$, $z = -a$. Určete potenciál φ v bodech na ose $x > 0$.



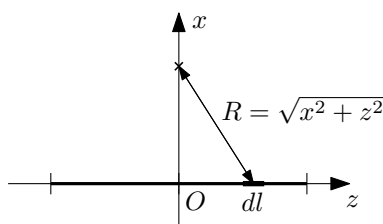
Obrázek 2.17: Nabitá tyč na ose z a jí vyvolaný elektrostatický potenciál φ na ose x .

Řešení: Elektrostatický potenciál délkového útvaru se určí pomocí následujícího vztahu:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\tau}{R} dl, \quad (2.49)$$

kde τ je délková nábojová hustota a R je vzdálenost mezi místem určování potenciálu a elementem délky dl , $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ (vektor \vec{r} je místo určování potenciálu φ , vektor \vec{r}' je polohový vektor elementu délky dl).

Tyč leží na kartézské ose z , element délky je $dl = dz$. Souřadnice z , na kterých se tyč rozkládá, jsou $z \in \langle -a, a \rangle$. Vzdálenost R je $R = \sqrt{x^2 + z^2}$, viz obrázek 2.18.



Obrázek 2.18: Element délky dl a jeho vzdálenost R od místa určování elektrostatičkého potenciálu φ .

Po dosazení výše zmíněných informací do vzorce pro elektrostatičký potenciál (2.49) dostaneme integrál:

$$4\pi\epsilon_0 \varphi = \int_{-a}^a \frac{\tau}{\sqrt{x^2 + z^2}} dz = \int_{-a}^a \frac{\tau}{x\sqrt{1 + \left(\frac{z}{x}\right)^2}} dz = 2 \int_0^a \frac{\tau}{x\sqrt{1 + \left(\frac{z}{x}\right)^2}}, \quad (2.50)$$

kde jsme v poslední úpravě využili sudost funkce v integrandu. Po substitucích $u = \frac{z}{x}$, $du = \frac{dz}{x}$ a $u = \sinh v$, $du = \cosh v dv$ dospějeme k výsledku:

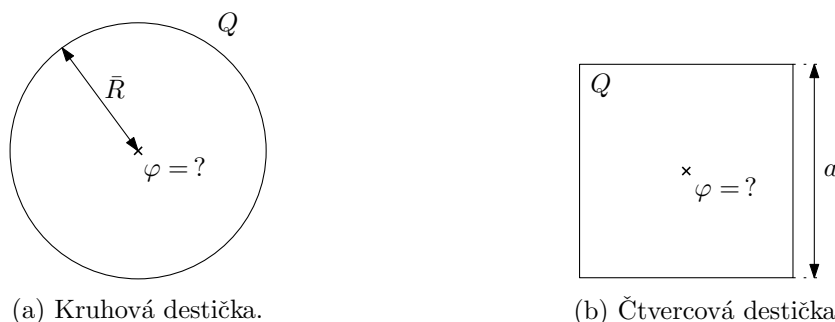
$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0 \varphi &= 2\tau \int_0^{\frac{a}{x}} \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = 2\tau \int_0^{\operatorname{argsinh} \frac{a}{x}} \frac{\cosh v dv}{\sqrt{1 + \sinh^2 v}} = 2\tau \int_0^{\operatorname{argsinh} \frac{a}{x}} dv \\ &= 2\tau [v]_0^{\operatorname{argsinh} \frac{a}{x}} = 2\tau \operatorname{argsinh} \frac{a}{x} = 2\tau \ln \left(\frac{a}{x} + \sqrt{\frac{a^2}{x^2} + 1} \right). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Upraveným výsledkem tedy je

$$\varphi(x) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{a}{x} + \sqrt{\frac{a^2}{x^2} + 1} \right). \quad (2.52)$$

2.5.2 2.9 Nabité destičky

Určete potenciál φ ve středu destičky nabitě nábojem Q , má-li destička tvar a) kruhu o poloměru \bar{R} , b) čtverce o straně a .



(a) Kruhová destička.

(b) Čtvercová destička.

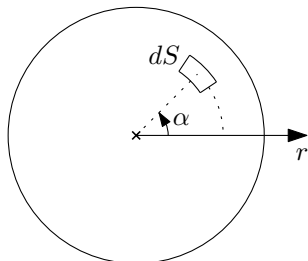
Obrázek 2.19: Elektrostatičký potenciál uprostřed kruhové a čtvercové destičky.

Řešení: Elektrostatičký potenciál plošného útvaru se určí pomocí následujícího vztahu:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma}{R} dS, \quad (2.53)$$

kde σ je plošná nábojová hustota a R je vzdálenost mezi místem určování potenciálu a elementem plochy dS , $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ (vektor \vec{r} je místo určování potenciálu φ , vektor \vec{r}' je polohový vektor elementu plochy dS).

Řešení pro kruhovou destičku: Zavedeme polární souřadnice (r, α) s počátkem ve středu destičky. Destička je pak na souřadnicích $r \in \langle 0, \bar{R} \rangle$ a $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$.



Obrázek 2.20: Polární souřadnice (r, α) v kruhové destičce, element plochy je $dS = r dr d\alpha$.

Element plochy v polárních souřadnicích je $dS = r dr d\alpha$. Vzdálenost R je zde jednoduše $R = r$. Plošná nábojová hustota je zde konstantní $\sigma = \frac{Q}{\pi \bar{R}^2} = \text{konst.}$ Po dosazení všech těchto informací do integrálu (2.53) pro elektrostatický potenciál dostaneme:

$$4\pi\epsilon_0 \varphi = \int_0^{\bar{R}} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma}{r} r dr d\alpha = \sigma \int_0^{\bar{R}} dr \int_0^{2\pi} d\alpha = \sigma \bar{R} 2\pi = \frac{2Q}{\bar{R}}. \quad (2.54)$$

Výsledný výraz pro elektrostatický potenciál φ je

$$\varphi = \frac{\sigma \bar{R}}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{2\pi \bar{R} \epsilon_0}. \quad (2.55)$$

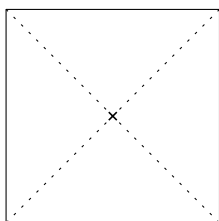
Řešení pro čtvercovou destičku: Zde využijeme výsledek předchozího příkladu 2.8 (sekce 2.5.1) pro potenciál nabitě tyčky délky $2a$ ve vzdálenosti x od tyčky na její ose:

$$\varphi(x) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{a}{x} + \sqrt{\frac{a^2}{x^2} + 1} \right). \quad (2.56)$$

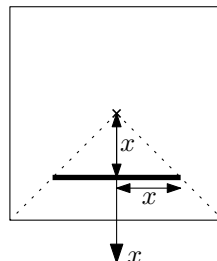
Rozdělme čtvercovou destičku úhlopříčně na čtyři části, viz obrázek 2.21 vlevo. Z důvodu symetrie bude každá část přispívat k celkovému potenciálu φ stejnou měrou $\varphi_{\text{výseč}}$:

$$\varphi = 4\varphi_{\text{výseč}}. \quad (2.57)$$

Každou z výsečí si rozdělíme na tenké pásky šířky dx , viz obrázek 2.21 vpravo.



(a) Destičku rozdělíme úhlopříčně na čtvrtiny.



(b) Čtvrtinu destičky si rozdělíme na tenké pásky šířky dx . Je-li jejich vzdálenost x od středu destičky, je jejich délka $2x$.

Obrázek 2.21: Dělení čtvercové destičky.

Nechť je vzdálenost pásku od středu destičky x , pak mají pásy délku $2x$. Celkový náboj na pásku je $dQ = \sigma dS = \sigma 2x dx$. „Délková nábojová hustota“ je pak $d\tau = \frac{dQ}{l} = \frac{dQ}{2x} = \sigma dx$. Po dosazení těchto údajů do vzorce pro potenciál nabitě tyčky (2.56) dostaneme příspěvek k potenciálu

$$d\varphi(x) = \frac{\sigma dx}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{x}{x} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + 1}\right) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2}) dx. \quad (2.58)$$

Tento příspěvek $d\varphi$ naintegrujeme, abychom dostali celkový potenciál výseče $\varphi_{\text{výseč}}$. Potřebujeme nasčítat příspěvky od pásků se vzdáleností $x \in \langle 0, \frac{a}{2} \rangle$:

$$\varphi_{\text{výseč}} = \int_0^{a/2} d\varphi(x) = \int_0^{a/2} \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2}) dx = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2}) \frac{a}{2}. \quad (2.59)$$

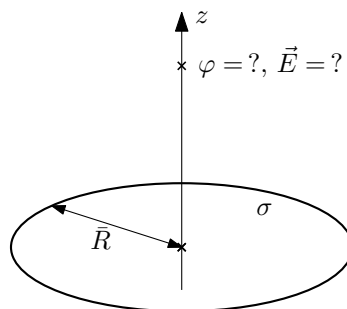
Plošná nábojová hustota je $\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{a^2}$. Po dosazení dostáváme výsledek:

$$\varphi = 4\varphi_{\text{výseč}} = \frac{\sigma a}{\pi\epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2}) = \frac{Q}{\pi a \epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2}). \quad (2.60)$$

Dodatek: Alternativně můžeme potenciál ve středu čtvercové destičky spočítat jako v případě kruhové destičky, tedy integrací v polárních(!) souřadnicích. Již brzy.

2.5.3 2.10 Osa nabitého kruhového kotouče

Určete potenciál φ a velikost intenzity elektrického pole E na ose kruhového kotouče poloměru \bar{R} nabitého s plošnou hustotou náboje σ .



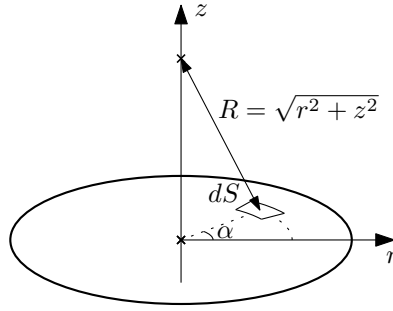
Obrázek 2.22: Elektrostatický potenciál φ a intenzita elektrického pole \vec{E} na ose kruhového kotouče.

Řešení: Elektrostatický potenciál plošného útvaru se určí pomocí následujícího vztahu:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma}{R} dS, \quad (2.61)$$

kde σ je plošná nábojová hustota a R je vzdálenost mezi místem určování potenciálu a elementem plochy dS , $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ (vektor \vec{r} je místo určování potenciálu φ , vektor \vec{r}' je polohový vektor elementu plochy dS).

Zavedeme polární souřadnice (r, α) s počátkem ve středu kotouče (a do osy kotouče zavedeme kartézskou souřadnici z). Kotouč je pak na souřadnicích $r \in \langle 0, \bar{R} \rangle$ a $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$.



Obrázek 2.23: Vzdálenost R mezi elementem plochy dS a místem určování elektrostatického potenciálu φ .

Element plochy v polárních souřadnicích je $dS = r dr d\alpha$. Vzdálenost R je zde $R = \sqrt{r^2 + z^2}$, viz obrázek 2.23. Plošná nábojová hustota je zde konstantní $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2} = \text{konst.}$ Po dosazení těchto informací do integrálu (2.61) pro elektrostatický potenciál dostaneme:

$$4\pi\epsilon_0 \varphi = \int_0^{\bar{R}} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma}{\sqrt{r^2 + z^2}} r dr d\alpha = \sigma \int_0^{\bar{R}} \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr \int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi\sigma \int_0^{\bar{R}} \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr. \quad (2.62)$$

Po provedení substituce $u = r^2 + z^2$, $du = 2r dr$ máme:

$$4\pi\epsilon_0 \varphi = 2\pi\sigma \int_{z^2}^{\bar{R}^2 + z^2} \frac{du}{2\sqrt{u}} = 2\pi\sigma [\sqrt{u}]_{z^2}^{\bar{R}^2 + z^2} = 2\pi\sigma (\sqrt{\bar{R}^2 + z^2} - |z|). \quad (2.63)$$

Výsledný elektrostatický potenciál je (po případném dosazení za nábojovou hustotu σ):

$$\varphi(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{\bar{R}^2 + z^2} - |z|) = \frac{Q}{2\pi\bar{R}^2\epsilon_0} (\sqrt{\bar{R}^2 + z^2} - |z|). \quad (2.64)$$

Intenzitu elektrického pole \vec{E} na ose získáme ze vztahu

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right). \quad (2.65)$$

Musíme si však uvědomit, že potenciál φ máme spočtený pouze v bodech na ose kotouče – známe tedy pouze funkční hodnoty $\varphi(x = 0, y = 0, z)$ pro konstantní hodnoty souřadnice x a y . Nemůžeme proto počítat derivace $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ a $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$! Složky elektrického pole E_x a E_y musíme určit jinak.

Z rotační symetrie okolo osy kotouče plyne, že tyto složky musí být nulové, $E_x = E_y = 0$. Výsledný tvar \vec{E} je tedy

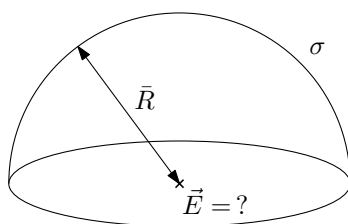
$$\vec{E}(z) = \left(0, 0, -\frac{d\varphi}{dz}\right) \quad (2.66)$$

a složka E_z je dána výrazem

$$E_z = -\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{\bar{R}^2 + z^2}} - \text{sgn } z\right). \quad (2.67)$$

2.5.4 2.11 Půlkulová slupka

Určete velikost intenzity elektrického pole E ve středu kulové slupky poloměru \bar{R} , je-li jedna její polovina nabitá s plošnou hustotou σ .



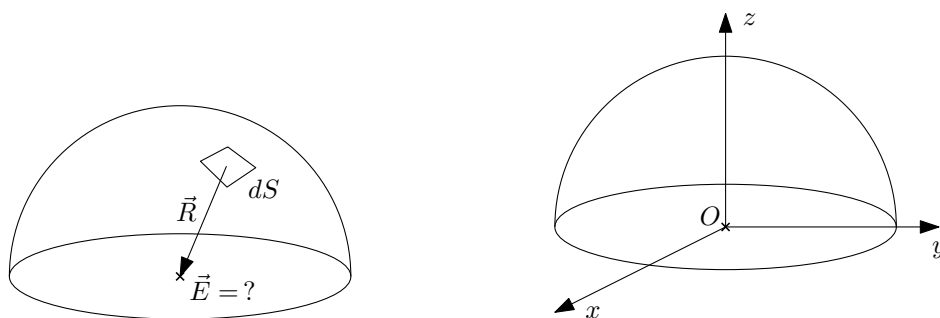
Obrázek 2.24: Intenzita elektrického pole \vec{E} uprostřed nabitě půlkulové slupky.

Řešení: Intenzita elektrického pole \vec{E} plošného útvaru se určí pomocí následujícího vztahu:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \sigma \frac{\vec{R}}{R^3} dS, \quad (2.68)$$

kde σ je plošná nábojová hustota a \vec{R} je vektor spojující místo určování potenciálu dané polohovým vektorem \vec{r} a polohu elementu plochy dS danou vektorem \vec{r}' , $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ (R je velikost tohoto vektoru, $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$).

Vektor $\vec{R} = (X, Y, Z)$ má zde konkrétně tvar $\vec{R} = -\vec{r}'$, neboť intenzitu \vec{E} určujeme v počátku souřadnic, tedy platí $\vec{r} = 0$, viz obrázek 2.25 vlevo. Zároveň z rotační symetrie okolo osy slupky musí platit, že výsledný vektor intenzity elektrického pole \vec{E} musí ležet na ose půlkulové slupky. Zavedeme-li kartézské souřadnice jako na obrázku 2.25 vpravo, bude platit $E_x = E_y = 0$, tedy $\vec{E} = (0, 0, E_z)$.



(a) Vektor \vec{R} spojující element plochy dS s místem určování intenzity elektrického pole \vec{E} . (b) Kartézské souřadnice (x, y, z) s počátkem ve středu slupky a osou z splývající s osou slupky.

Obrázek 2.25: Kartézské souřadnice a vektor \vec{R} na půlkulové slupce.

Vzorec pro složku E_z pak dle (2.68) vypadá následovně:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \sigma \frac{Z}{R^3} dS. \quad (2.69)$$

Zavedeme-li sférické souřadnice (r, θ, φ) (viz také obrázek 2.26)

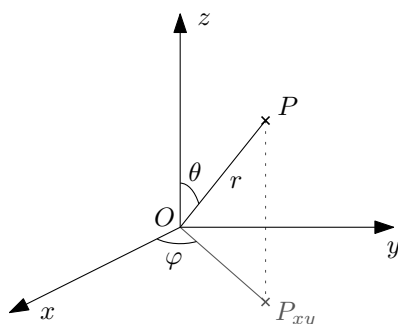
$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (2.70)$$

s počátkem ve středu kulové slupky, bude se poloslupka rozkládat na souřadnicích

$$r = \bar{R}, \quad \theta \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle. \quad (2.71)$$

Element plochy ve sférických souřadnicích je (zde máme konstantní $r = \bar{R}$):

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \bar{R}^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (2.72)$$



Obrázek 2.26: Sférické souřadnice (r, θ, φ) bodu P . Bod P_{xy} představuje kolmý průmět bodu P do roviny xy .

Vlastní výpočet pak vypadá následovně. Do integrálu (2.69) dosadíme (2.70)-(2.72) a $\vec{R} = -\vec{r}'$:

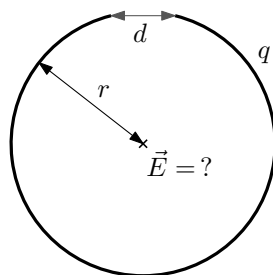
$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0 E_z &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sigma \frac{-\bar{R} \cos \theta}{\bar{R}^3} \bar{R}^2 \sin \theta d\alpha d\theta = -\sigma \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\alpha \\ &= -2\pi\sigma \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin 2\theta d\theta = 2\pi\sigma \left[\frac{1}{4} \cos 2\theta \right]_0^{\pi/2} = -\pi\sigma. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Hodnota E_z a velikost $|\vec{E}|$ tedy je

$$E_z = -\frac{\sigma}{4\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad |\vec{E}| = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}. \quad (2.74)$$

2.5.5 2.13 Skoro uzavřená kružnice

Tenká tyč je ohnuta do tvaru téměř uzavřené kružnice poloměru $r = 0,5 \text{ m}$. Mezi konci zůstává mezera šířky $d = 2 \text{ cm}$, tyč nese náboj $q = 3,34 \cdot 10^{-10} \text{ C}$. Určete velikost a směr elektrického pole ve středu kružnice.



Obrázek 2.27: Skoro uzavřená kružnice.

Řešení: Intenzita elektrického pole délkového útvaru se určí pomocí následujícího vztahu:

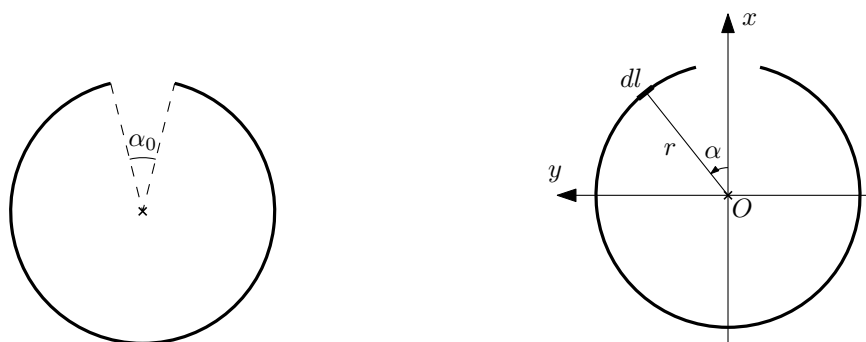
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \tau \frac{\vec{R}}{R^3} dl, \quad (2.75)$$

kde τ je délková nábojová hustota a \vec{R} je vektor spojující místo určování potenciálu dané polohovým vektorem \vec{r} a polohu elementu délky dl danou vektorem \vec{r}' , $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ (R je velikost tohoto vektoru, $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$).

Označme α_0 středový úhel, který svírají konce tyče, viz obrázek 2.28 vlevo. Tento můžeme vyjádřit jako $\sin \frac{\alpha_0}{2} = \frac{d/2}{r}$. Délkovou nábojovou hustoty je pak možno vyjádřit jako

$$\tau = \frac{q}{(2\pi - \alpha_0)r}, \quad (2.76)$$

kde $(2\pi - \alpha_0)r$ je délka tyče.



(a) Středový úhel α_0 vytínající chybějící úsek kružnice. (b) Kartézské a polární souřadnice na kružnici a příslušný délkový element.

Obrázek 2.28: Souřadnice na skoro uzavřené kružnici.

Vektor $\vec{R} = (X, Y, Z)$ má zde konkrétně tvar $\vec{R} = -\vec{r}'$, neboť intenzitu \vec{E} určujeme v počátku souřadnic, tedy platí $\vec{r} = 0$. Zároveň ze zrcadlicí symetrie okolo roviny půlicí kružnici musí platit, že výsledný vektor intenzity elektrického pole musí ležet v této rovině (a zároveň v rovině kružnice, jelikož jde o rovinný problém). Zavedeme-li kartézské souřadnice jako na obrázku 2.28 vpravo bude platit, že $E_y = E_z = 0$, tedy $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$. Vzorec pro složku E_x pak dle (2.75) vypadá následovně:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \tau \frac{X}{R^3} dl. \quad (2.77)$$

V polárních souřadnicích

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha \quad (2.78)$$

se tyč rozkládá na souřadnicích $\alpha \in \langle \frac{\alpha_0}{2}, 2\pi - \frac{\alpha_0}{2} \rangle$ a element délky je $dl = r d\alpha$. Vektor $\vec{r}' = (x, y, 0)$ má v těchto souřadnicích vyjádření $\vec{r}' = (r \cos \alpha, r \sin \alpha, 0)$ a tedy $\vec{R} = (-r \cos \alpha, -r \sin \alpha, 0)$ a $R = r$. Po dosazení všech výše zmíněných vyjádření do integrálu (2.77) můžeme vypočítat vlastní hodnotu E_x :

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0 E_x &= \int_{\alpha_0/2}^{2\pi - \alpha_0/2} \tau \frac{-r \cos \alpha}{r^3} r d\alpha = -\frac{\tau}{r} [\sin \alpha]_{\alpha_0/2}^{2\pi - \alpha_0/2} \\ &= \frac{\tau}{r} \left(\sin \frac{\alpha_0}{2} - \sin \left(2\pi - \frac{\alpha_0}{2} \right) \right) = \frac{2\tau}{r} \sin \frac{\alpha_0}{2}, \end{aligned} \quad (2.79)$$

kde jsme použili vztahy $\sin(2\pi + x) = \sin x$ a $\sin(-x) = -\sin x$. Po dosazení za nábojovou hustotu τ z (2.76) dostaneme

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \sin \frac{\alpha_0}{2}}{(2\pi - \alpha_0)} \frac{q}{r^2}. \quad (2.80)$$

Toto je přesný výsledek pro libovolně velký úhel α_0 ⁵. V zadání je zdůrazněno, že jde o malou

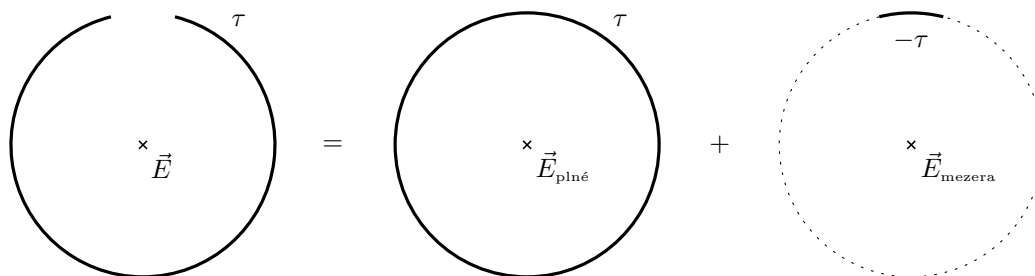
⁵Mohli bychom ještě dosadit za úhel α_0 : $\sin \frac{\alpha_0}{2} = \frac{d}{2r}$ a $\alpha_0 = 2\arcsin \frac{d}{2r}$ pro $\alpha_0 < \pi$.

mezeru, uvažujme tedy $\alpha_0 \ll 2\pi$ a udělejme aproximace z toho plynoucí. Máme $2\pi - \alpha_0 \approx 2\pi$, $\sin \frac{\alpha_0}{2} \approx \frac{\alpha_0}{2}$:

$$E_x \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{\alpha_0}{2\pi}q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tilde{q}}{r^2}, \quad (2.81)$$

kde jsme označili náboj $\tilde{q} = \frac{\alpha_0}{2\pi}q$, který představuje náboj, který by byl na chybějícím úseku kružnice. Aproximovaný výsledek pro velikost elektrické intenzity tedy vypadá jako intenzita od bodového náboje velikosti \tilde{q} umístěného ve středu chybějícího úseku kružnice. A to není náhoda, viz dodatek.

Dodatek: Příklad bychom také mohli počítat s využitím principu superpozice. Původní intenzitu elektrického pole \vec{E} bychom mohli napsat jako součet elektrických polí od plné kružnice $\vec{E}_{\text{plné}}$ a od malého **opačně nabitého** doplňku \vec{E}_{mezera} , $\vec{E} = \vec{E}_{\text{plné}} + \vec{E}_{\text{mezera}}$, viz obrázek 2.29.



Obrázek 2.29: Původní intenzita elektrického pole \vec{E} jako součet elektrických polí od plné kružnice $\vec{E}_{\text{plné}}$ a od malého opačně nabitého doplňku \vec{E}_{mezera} , $\vec{E} = \vec{E}_{\text{plné}} + \vec{E}_{\text{mezera}}$.

Ze symetrie je ovšem intenzita elektrického pole od plné kružnice $\vec{E}_{\text{plné}}$ nulová, $\vec{E}_{\text{plné}} = 0$. Původní elektrické pole uprostřed kružnice je tedy stejné jako pole od opačně nabitého doplňku, $\vec{E} = \vec{E}_{\text{mezera}}$. Přesný výsledek (2.79), resp. (2.80), bychom získali velmi podobným výpočtem jako v (2.79), tzn. počítáním integrálu

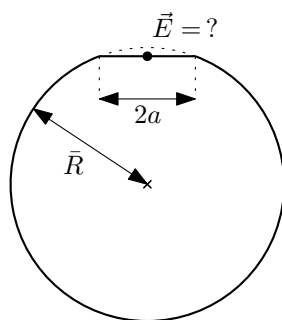
$$4\pi\epsilon_0 E_x = 4\pi\epsilon_0 E_{x\text{mezera}} = \int_{-\alpha_0/2}^{\alpha_0/2} (-\tau) \frac{-r \cos \alpha}{r^3} r d\alpha. \quad (2.82)$$

My ovšem provedeme rovnou aproximaci pro malou mezeru. V takovém případě můžeme považovat malý úsek kružnice za bodový náboj, jelikož střed kružnice je dostatečně daleko od nábojů. Velikost tohoto náboje je $-\tilde{q} = (-q)\frac{\alpha_0}{2\pi}$ a tedy velikost intenzity elektrického pole je přibližně

$$E_x \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tilde{q}}{r^2}. \quad (2.83)$$

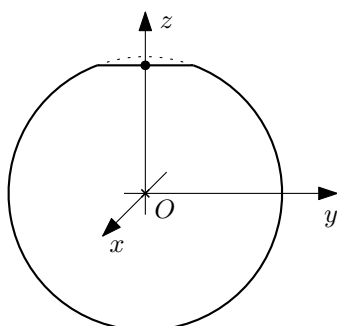
2.5.6 2.14 Useknutý vrchlík

Mějme kulovou slupku poloměru \bar{R} nabitou s plošnou hustotou σ . V okolí vybraného bodu na této ploše seřizneme malý kulový vrchlík o poloměru $a \ll \bar{R}$. Určete velikost elektrického pole uprostřed otvoru.



Obrázek 2.30: Intenzita elektrického pole \vec{E} uprostřed otvoru vzniklého seříznutím vrchlíku kulové slupky.

Řešení: Z rotační symetrie okolo osy kulové slupky (a seříznutého vrchlíku) vyplývá, že výsledný vektor intenzity elektrického pole \vec{E} bude ležet na této ose. Zavedeme-li kartézské souřadnice jako na obrázku 2.31, bude potom platit $\vec{E} = (0, 0, E_z)$.



Obrázek 2.31: Kartézské souřadnice (x, y, z) v seříznuté kulové slupce.

Složku intenzity elektrického pole E_z určíme tak, že si spočteme elektrostatický potenciál φ v libovolném místě na ose kulové slupky, $\varphi(z)$, a z něho pak záporně vzatou derivací určíme elektrické pole:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi, \quad E_z = -\frac{d\varphi}{dz}. \quad (2.84)$$

Vyjdeme ze vztahu pro potenciál plošně nabitého tělesa

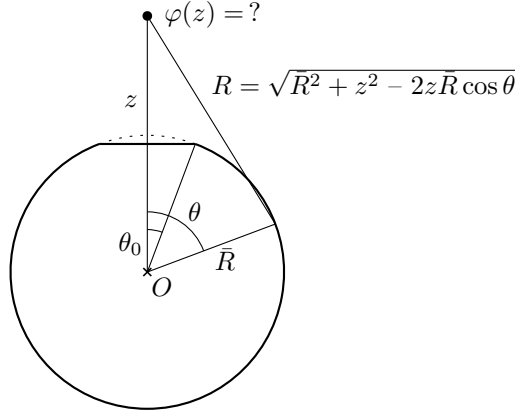
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma}{R} dS, \quad (2.85)$$

kde σ je plošná nábojová hustota a R je vzdálenost mezi místem určování potenciálu a elementem plochy dS , $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ (vektor \vec{r} je místo určování potenciálu φ , vektor \vec{r}' je polohový vektor elementu plochy dS).

Zavedeme sférické souřadnice

$$x = r \sin \theta \cos \alpha, \quad y = r \sin \theta \sin \alpha, \quad z = r \cos \theta. \quad (2.86)$$

Použitím cosinové věty je vzdálenost R daná jako $R = \sqrt{z^2 + \bar{R}^2 - 2z\bar{R} \cos \theta}$ (z zde představuje parametr polohy na ose z , nikoliv polohu elementu plochy dS , nedosazujeme tedy pomocí sférických souřadnic), viz obrázek 2.32. Slupka se rozprostírá na souřadnicích $r = \bar{R}$, $\theta \in \langle \theta_0, \pi \rangle$, $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$, kde θ_0 je polovina středového úhlu seříznutého vrchlíku (opět viz obrázek 2.32). Element plochy ve sférických souřadnicích je $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\alpha$.



Obrázek 2.32: Vzdálenost R vyjádřená pomocí poloměru slupky \bar{R} , úhlu θ a poloze na ose z .

Po dosazení všech výše zmíněných informací do (2.85) dostaneme následující dvojný integrál:

$$\varphi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sigma \bar{R}^2 \sin \theta}{\sqrt{z^2 + \bar{R}^2 - 2z\bar{R} \cos \theta}} d\alpha d\theta. \quad (2.87)$$

Relativně jednoduchým výpočtem

$$\varphi(z) = \frac{\sigma \bar{R}^2}{2\epsilon_0} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sin \theta}{\sqrt{z^2 + \bar{R}^2 - 2z\bar{R} \cos \theta}} d\theta = \left| \begin{array}{l} u = -\cos \theta \\ du = \sin \theta d\theta \end{array} \right| = \quad (2.88)$$

$$= \frac{\sigma \bar{R}^2}{2\epsilon_0} \int_{-\cos \theta_0}^1 \frac{du}{\sqrt{z^2 + \bar{R}^2 + 2z\bar{R}u}} = \frac{\sigma \bar{R}^2}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{z\bar{R}} \sqrt{z^2 + \bar{R}^2 + 2z\bar{R}u} \right]_{-\cos \theta_0}^1 \quad (2.89)$$

dostaneme vyjádření pro potenciál

$$\varphi(z) = \frac{\sigma \bar{R}}{2\epsilon_0} \frac{|z + \bar{R}| - \sqrt{z^2 + \bar{R}^2 - 2z\bar{R} \cos \theta_0}}{z} = \frac{\sigma \bar{R}^2}{\epsilon_0} \frac{1 + \cos \theta_0}{|z + \bar{R}| + \sqrt{z^2 + \bar{R}^2 - 2z\bar{R} \cos \theta_0}}. \quad (2.90)$$

Zderivováním a následnými algebraickými úpravami dospějeme k výrazu pro složku intenzity elektrického pole E_z ⁶:

$$E_z(z) = -\frac{d\varphi}{dz} = \dots = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{\bar{R}^2}{z^2} \left[\operatorname{sgn}(z + \bar{R}) - \frac{\bar{R} - z \cos \theta_0}{\sqrt{z^2 + \bar{R}^2 - 2z\bar{R} \cos \theta_0}} \right]. \quad (2.91)$$

Toto je přesný výsledek pro jakkoliv velký úhel θ_0 . Pro $z = \bar{R} \cos \theta_0$ (tedy pro místo uprostřed vrchlíku) máme

$$E(\bar{R} \cos \theta_0) = \dots = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{1}{1 + \sin \theta_0}. \quad (2.92)$$

Úhel θ_0 je pomocí poloměru seříznutého vrchlíku a dán jako $\sin \theta_0 = \frac{a}{\bar{R}}$. Výsledek pak nabude tvaru

$$E(\bar{R} \cos \theta_0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{1}{1 + \frac{a}{\bar{R}}}. \quad (2.93)$$

⁶Zderivujeme „levé“ vyjádření potenciálu φ , použijeme identitu $z \operatorname{sgn}(z + \bar{R}) = |z + \bar{R}| - \bar{R} \operatorname{sgn}(z + \bar{R})$ a členy s odmocninou převedeme na společného jmenovatele.

Pro malé a můžeme výsledek ještě drobně zjednodušit pomocí aproximace $(1+x)^{-1} = 1-x$ na

$$E(\bar{R} \cos \theta_0) \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{a}{\bar{R}}\right). \quad (2.94)$$

Dodatek: Další zajímavá místa na ose z jsou: na vrcholu chybějícího vrchlíku, tzn. pro $z = \bar{R}$; uprostřed kulové slupky, tzn. pro $z = 0$. Pro tato místa získáváme následující přesné a přibližné výrazy:

$$E(R) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \sin \frac{\theta_0}{2}\right) \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{a}{2\bar{R}}\right), \quad (2.95)$$

$$E(0) = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} \sin^2 \theta_0 \approx \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} \frac{a^2}{\bar{R}^2}, \quad (2.96)$$

kde jsme pro získání přibližných výrazů položili $\sin x \approx x$ a tedy i $\theta_0 \approx \frac{a}{\bar{R}}$.

2.5.7 2.12 Potenciál mýdlové bubliny

2.15 Elektrostatické pole Země

2.16 Dielektrická pevnost vzduchu

Z vodivé mýdlové bubliny poloměru $R = 2 \text{ cm}$ nabité na potenciál $\varphi_1 = 10^4 \text{ V}$ vznikne po prasknutí kapka vody o poloměru $r = 0,05 \text{ cm}$. Určete potenciál kapky.

Intenzita elektrostatického pole u povrchu Země je $E = 100 \text{ V.m}^{-1}$ a míří směrem dolů. Určete náboj a potenciál Země.

Jaký maximální náboj se udrží na kovové kouli o poloměru $R = 10 \text{ cm}$, je-li dielektrická pevnost vzduchu $E_{max} = 30 \text{ kV.cm}^{-1}$?

Řešení: Elektrostatický potenciál φ a velikost intenzity elektrického pole E od sféricky symetricky rozloženého náboje o celkové velikosti Q jsou dány vztahy

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad (2.97)$$

kde r je vzdálenost od centra sférické symetrie. Tyto vztahy použijeme k výpočtu všech tří příkladů, jejich odvození viz dodatek.

Příklad 2.12 Označme φ_2 potenciál po prasknutí kapky. Máme tedy

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad (2.98)$$

kde předpokládáme, že náboj je na kapce rozložen sféricky symetricky a při prasknutí se nikam neztratil. Po vyjádření Q máme

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 R \varphi_1, \quad Q = 4\pi\varepsilon_0 r \varphi_2, \quad (2.99)$$

a jejich porovnáním získáme výsledek

$$\varphi_2 = \frac{R}{r} \varphi_1 = 4 \cdot 10^5 \text{ V} = 400 \text{ kV}. \quad (2.100)$$

Příklad 2.15 Vyjádříme-li náboj Q ze vzorce (2.97) vpravo, máme

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 r^2 E(r). \quad (2.101)$$

Po dosazení poloměru Země, $r = R_Z$, obdržíme výsledek

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 R_Z^2 E(R_Z) = 4,52 \cdot 10^5 C, \quad (2.102)$$

kde jsme použili hodnotu permitivity vakua $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} F \cdot m^{-1}$ a poloměr Země $R_Z = 6378 km$. Jelikož je v zadání, že vektor \vec{E} míří směrem k Zemi, musí být celkový náboj Země záporný, tedy ve skutečnosti $Q = -4,52 \cdot 10^5 C$ (vzorec pro velikost E vlastně pracuje s absolutní hodnotou náboje $|Q|$). Potenciál na povrchu Země je

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R_Z} = R_Z E(R_Z) = 6,38 \cdot 10^8 V, \quad (2.103)$$

resp. tedy $\varphi = -6,38 \cdot 10^8 V$ s přihlédnutím ke znaménku náboje.

Příklad 2.16 Velikost intenzity elektrického pole E od nabitě koule je opět dána vztahem (2.97) vpravo. Požadujeme, aby platilo $E(r) \leq E_{max}$. Nejsilnější elektrické pole je zjevně pro $r = R$, tedy přímo na povrchu koule. Výsledný maximální náboj Q_{max} pak je

$$Q_{max} = 4\pi\varepsilon_0 R^2 E_{max} = 3,34 \cdot 10^{-6} C. \quad (2.104)$$

Dodatek: Odvodíme nyní vzorce (2.97) pro potenciál φ a intenzitu elektrického pole \vec{E} vně sféricky symetricky rozloženého náboje Q . Začneme určením elektrického pole \vec{E} pomocí Gaussova zákona

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \quad (2.105)$$

který vztahuje tok intenzity elektrického pole \vec{E} uzavřenou plochou S k celkovému náboji Q , který je v této ploše uzavřený.

Podívejme se nejprve, jaká omezení klade symetrie úlohy na tvar intenzity elektrického pole \vec{E} . Sférická symetrie zajišťuje, že velikost vektoru \vec{E} může záviset pouze na vzdálenosti od středu sférické symetrie $r = E(r)$ – velikosti vektorů \vec{E} musí být konstantní na sférách daného poloměru. Jaký bude směr vektoru \vec{E} ? Sférická symetrie povoluje jedině radiální směr – vektor mířící přímo k/od středu symetrie: uvažujeme osu symetrie spojující střed sférické symetrie a bod, u kterého určujeme elektrické pole \vec{E} – pak rotační symetrie okolo této osy zajišťuje, že vektor \vec{E} musí na této ose ležet, tzn. mířit v radiálním směru.

Nyní můžeme spočítat levou stranu Gaussova zákona (2.105). Jako plochu S zvolíme sféru o poloměru r (kde r je tak velké, aby již v této sféře ležel již veškerý náboj) se středem souhlasícím se středem symetrie. Vektor \vec{E} pak míří ve směru $d\vec{S} = \vec{n} dS$ (\vec{n} je jednotkový normálový vektor k plošce dS), tzn. $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS$:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E dS = E(r) \oint_S dS = 4\pi r^2 E(r), \quad (2.106)$$

kde jsme dále využili toho, že velikost intenzity elektrického pole na povrchu sféry S je konstantní a můžeme ji vytknout před integrál, a také integrál z jedničky přes sféru je plocha sféry $4\pi r^2$. Dosadíme-li tento výsledek do (2.105) a vyjádříme $E(r)$, dostaneme výsledek:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}. \quad (2.107)$$

Vztah pro vektor \vec{E} dostaneme jednoduše vynásobením $E(r)$ jednotkovým vektorem mířícím

radiálním směrem⁷ – $\vec{E} = E(r) \frac{\vec{r}}{r}$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (2.108)$$

Potenciál φ získáme „řešením“ rovnice

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (2.109)$$

Víme, že platí následující obecný vzorec pro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\text{grad } r^\alpha = \alpha r^{\alpha-2} \vec{r}, \quad (2.110)$$

při položení $\alpha = -1$ dostaneme

$$\text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (2.111)$$

což je přesně potřebný vztah pro vyřešení (2.109). Platí tedy

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}. \quad (2.112)$$

Tyto vztahy jdou jednoduše zobecnit i pro situace, kdy se ptáme, jaké bude elektrické pole nejen vně ale i uvnitř sféricky symetricky rozloženého náboje. Jediné, co se změní v Gaussově zákoně (2.105) je to, že náboj Q na pravé straně bude nyní záviset na r , $Q(r)$, a bude představovat celkový náboj uzavřený ve sféře o poloměru r . Výsledná velikost intenzity (a vlastní intenzita) elektrického pole pak je:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(r)}{r^2}, \quad \vec{E} = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (2.113)$$

Potenciál je opět dán řešením rovnice $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$, tentokrát s výsledkem

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{Q(r')}{r'^2} dr'. \quad (2.114)$$

(Pro r dostatečně velké, aby veškerý náboj byl již obsažen ve sféře o poloměru r , tzn. $Q(r) = Q_{\text{celk}}$ se vzorec (2.114) redukuje na jednodušší (2.112).)

Výpočet funkce $Q(r)$. Náboj obsažený v kouli o poloměru r (označme V_r a její povrch jako S_r) spočteme pomocí funkce objemové nábojové hustoty $\rho(\vec{r})$ jako

$$Q(r) = \int_{V_r} \rho(\vec{r}') dV, \quad (2.115)$$

kde \vec{r}' je polohový vektor elementu objemu dV . Ve sféricky symetrickém případě ale musí nábojová hustota záviset pouze na vzdálenosti od středu symetrie, $\rho(r)$. Napíšeme-li si objemový element dV jako $dV = dr dS$, kde dr je přírůstek radiální souřadnice r a dS je plošný element na sféře poloměru r . Pak objemový integrál přes kouli můžeme rozepsat následujícím způsobem:

$$Q(r) = \int_{V_r} \rho(\vec{r}') dV = \int_{V_r} \rho(\vec{r}') dS dr' = \int_0^r \int_{S_{r'}} dS \rho(r') dr'. \quad (2.116)$$

Po vyintegrování přes povrch sféry, $\int_{S_{r'}} dS = 4\pi r'^2$, dostaneme vztah

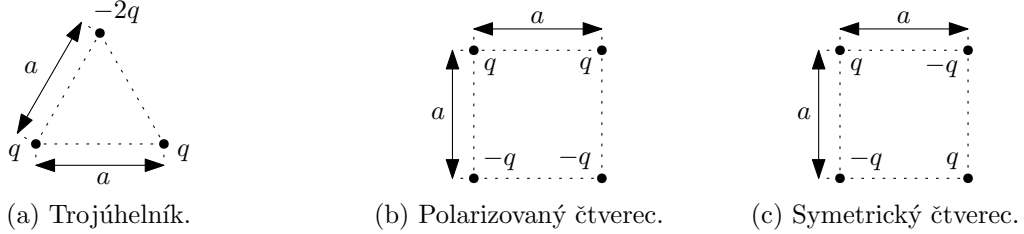
$$Q(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'. \quad (2.117)$$

⁷Poněkud jsme zametli pod koberec, jestli směr \vec{E} je radiálně ven od středu anebo dovnitř do středu. V Gaussově zákoně volíme vždy normálové vektory tak, aby mířily ven z uzavřené plochy. Zde tedy máme vektory \vec{n} mířící od středu symetrie. Pro $Q > 0$ je třeba, aby vektory \vec{E} a \vec{n} mířily ve stejném směru, pak je skalární součin $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS$ kladný a integrál $\int \vec{E} \cdot d\vec{S}$ taktéž (a pak Gaussův zákon dává do rovnosti dvě kladná čísla). Pro $Q < 0$ je třeba, aby směr \vec{E} byl opačný ke směru \vec{n} (tzn. \vec{E} nyní míří do středu) a pak je skalární součin $\vec{E} \cdot d\vec{S} = -E dS$ záporný a Gaussův zákon dává konzistentně do rovnosti dvě záporná čísla.

2.6 Elektrický dipólový a kvadrupólový moment

2.6.1 2.17 Bodové náboje

Bodové náboje jsou uspořádány a) ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka o straně a v pořadí $q, q, -2q$, b) ve vrcholech čtverce o straně a v pořadí $-q, q, q, -q$, c) v pořadí $-q, q, -q, q$. Určete elektrický dipólový moment soustavy.



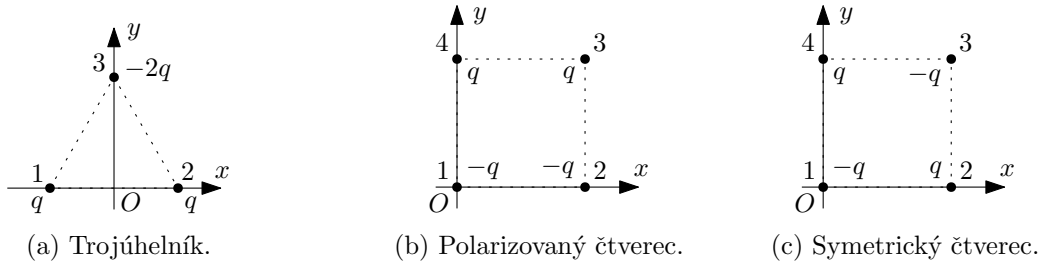
Obrázek 2.33: Dipólový moment \vec{p} bodových nábojů.

Řešení: Vzorec pro dipólový moment diskrétního rozložení bodových nábojů je následující:

$$\vec{p} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}, \quad (2.118)$$

kde sčítáme přes všechny náboje a q_{α} jsou velikosti a \vec{r}_{α} jsou polohové vektory příslušných nábojů. Platí, že je-li celkový náboj soustavy Q nulový, pak dipólový moment \vec{p} nezávisí na volbě počátku soustavy souřadnic.

Zaveďme tedy kartézské souřadnice tak, abychom měli co nejjednodušší výpočet. Jedna z možností je znázorněná na obrázku 2.34.



Obrázek 2.34: Kartézské souřadnice (x, y, z) pro jednotlivé soustavy bodových nábojů.

Dipólový moment \vec{p} pro trojúhelník se pak spočte následovně:

$$\vec{p} = q \vec{r}_1 + q \vec{r}_2 - 2q \vec{r}_3 = q \left(-\frac{a}{2}, 0, 0 \right) + q \left(\frac{a}{2}, 0, 0 \right) - 2q \left(0, \frac{\sqrt{3}a}{2}, 0 \right) = \left(0, -\sqrt{3}qa, 0 \right). \quad (2.119)$$

Pro polarizovaný čtverec máme:

$$\vec{p} = -q \vec{r}_1 - q \vec{r}_2 + q \vec{r}_3 + q \vec{r}_4 = -q(0, 0, 0) - q(a, 0, 0) + q(a, a, 0) + q(0, a, 0) = (0, 2qa, 0). \quad (2.120)$$

A konečně symetrický čtverec:

$$\vec{p} = -q \vec{r}_1 + q \vec{r}_2 - q \vec{r}_3 + q \vec{r}_4 = -q(0, 0, 0) + q(a, 0, 0) - q(a, a, 0) + q(0, a, 0) = (0, 0, 0). \quad (2.121)$$

V tomto případě máme celkový náboj Q a dipólový moment \vec{p} nulový. Nenulový pak bude až kvadrupólový moment, viz příklad 2.21 v sekci 2.6.5.

2.6.2 2.18 Polarizovaná tyč

Určete elektrický dipólový moment tenké tyče délky l , a) jejíž jedna polovina je nabitá kladně a druhá záporně s lineární hustotou náboje τ , b) jejíž nábojová hustota roste lineárně od $-\tau_0$ na jednom konci k τ_0 na druhém konci.



Obrázek 2.35: Polarizované tyče.

Řešení: Vzorec pro dipólový moment spojitěho délkového rozložení nábojů je následující:

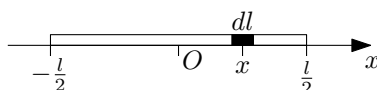
$$\vec{p} = \int_l \tau \vec{r} dl, \quad (2.122)$$

kde τ je délková nábojová hustota a \vec{r} je polohový vektor délkového elementu dl . Platí, že je-li celkový náboj soustavy Q nulový, pak dipólový moment \vec{p} nezávisí na volbě počátku soustavy souřadnic.

Zaveďme kartézskou souřadnici x s počátkem ve středu tyče, viz obrázek 2.36. Tyč se pak nachází na souřadnicích $x \in \langle -\frac{l}{2}, \frac{l}{2} \rangle$. Délkový element je pak $dl = dx$ a jeho polohový vektor je $\vec{r} = (x, 0, 0)$.



Obrázek 2.36: Polarizované tyče se zavedenou kartézskou souřadnicí x .



Obrázek 2.37: Délkový element dl na souřadnici x v tyči.

Po dosazení výše zmíněných informací do vzorce (2.122) pro dipólový moment \vec{p} dostaneme

$$\vec{p} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \tau(x) \vec{r} dx, \quad \vec{p} = (p_x, 0, 0), \quad p_x = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \tau(x) x dx, \quad (2.123)$$

(Jediná nenulová složka je p_x , jelikož jediná nenulová složka $\vec{r} = (x, 0, 0)$ je x .)

Pro polarizovanou tyč, kde každá polovina je nabitá opačnou nábojovou hustotou, máme následující funkci nábojové hustoty $\tau(x)$:

$$\tau(x) = \begin{cases} -\tau & \text{pro } x \in \langle -\frac{l}{2}, 0 \rangle \\ +\tau & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{l}{2} \rangle \end{cases} \quad (2.124)$$

Po dosazení do integrálu (2.123) máme:

$$p_x = \int_{-\frac{l}{2}}^0 (-\tau) x dx + \int_0^{\frac{l}{2}} \tau x dx = -\tau \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\frac{l}{2}}^0 + \tau \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{l}{2}} = 2\tau \frac{l^2}{4} = \frac{\tau l^2}{4}. \quad (2.125)$$

Pro tyč, kde se nábojová hustota lineárně mění, má funkce $\tau(x)$ obecně tvar $\tau(x) = ax + b$, přičemž musí platit $\tau(-\frac{l}{2}) = -\tau_0$ a $\tau(\frac{l}{2}) = +\tau_0$. Tyto podmínky vedou na funkci

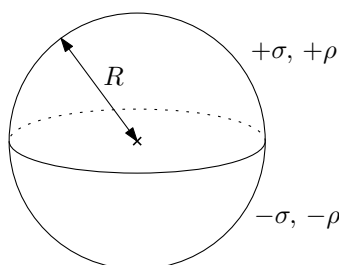
$$\tau(x) = \frac{2\tau_0}{l}x. \quad (2.126)$$

Po dosazení do integrálu (2.123):

$$p_x = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{2\tau_0}{l}x^2 dx = 2\frac{2\tau_0}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 dx = 2\frac{2\tau_0}{l} \frac{l^3}{8} = \frac{\tau_0 l^2}{6}. \quad (2.127)$$

2.6.3 2.19 Polarizovaná koule

Náboj je rozložen na povrchu koule o poloměru R tak, že na jedné polokouli je kladný náboj s hustotou σ , na druhé polokouli je záporný náboj s hustotou $-\sigma$. Určete elektrický dipólový moment koule. Jaký bude tento moment, budou-li obě polokoule nabitý objemově s opačnými náboji téže velikosti objemové hustoty ρ ?



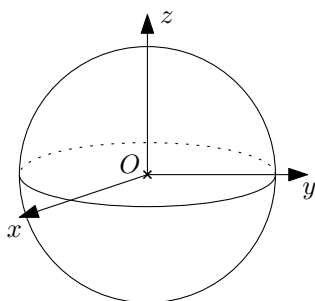
Obrázek 2.38: Dipólový moment \vec{p} povrchově a objemově nabitě koule.

Řešení: Vzorce pro dipólový moment spojitěho plošného a objemového rozložení nábojů jsou následující:

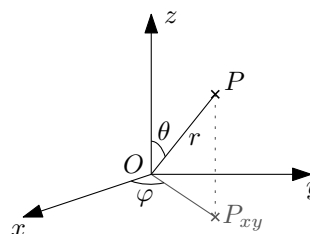
$$\vec{p} = \int_S \sigma \vec{r} dS, \quad \vec{p} = \int_V \rho \vec{r} dV, \quad (2.128)$$

kde σ , resp. ρ , je plošná, resp. objemová, nábojová hustota a \vec{r} je polohový vektor plošného elementu dS , resp. objemového elementu dV . Platí, že je-li celkový náboj soustavy Q nulový (což je zde ze symetrie rozložení náboje zjevně splněno), pak dipólový moment \vec{p} nezávisí na volbě počátku soustavy souřadnic.

Zavedeme kartézské souřadnice jako na obrázku 2.39 vlevo s počátkem ve středu koule a rovinou xy splývající s rovinou, která dělí kouli na dvě nabitě poloviny.



(a) Kartézské souřadnice (x, y, z) v kouli.



(b) Sférické souřadnice (r, θ, φ) .

Obrázek 2.39: Dipólový moment \vec{p} povrchově a objemově nabitě koule.

Ze symetrie úlohy (rotace okolo osy z) musí výsledný dipólový moment ležet na ose z , tzn. $\vec{p} = (0, 0, p_z)$. Pro složku dipólového momentu p_z máme dle (2.128) vzorce

$$p_z = \int_S \sigma z dS, \quad p_z = \int_V \rho z dV, \quad (2.129)$$

kde z je třetí složka polohového vektoru $\vec{r} = (x, y, z)$. Zavedeme dále sférické souřadnice jako na obrázku 2.39 vpravo, tzn. pomocí následujících předpisů,

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta. \quad (2.130)$$

Plošný a objemový element jsou pak následujících tvarů:

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi, \quad dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (2.131)$$

Plošně nabitá sféra se pak rozkládá na souřadnicích $r = R$, $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$ (polokoule nabitá $+\sigma$ na $\theta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, polokoule s $-\sigma$ na $\theta \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$), $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Vlastní výpočet integrálu (2.129) po dosazení všech výše zmíněných informací je pak následující:

$$\begin{aligned} p_z &= \int_S \sigma(\vec{r}) z dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sigma(\theta) R \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \sin \theta \cos \theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\sigma) \sin \theta \cos \theta d\theta \right) \\ &= 2\pi R^3 \sigma \left(\left[-\frac{1}{4} \cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\frac{1}{4} \cos 2\theta \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \right) \\ &= 2\pi R^3 \sigma \left(-\frac{1}{4} \right) ((-1 - 1) - (1 - (-1))) = 2\pi \sigma R^3. \end{aligned} \quad (2.132)$$

Pro objemově nabitou kouli máme rozsahy $r \in \langle 0, R \rangle$, $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$ (polokoule nabitá $+\rho$ opět na $\theta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, polokoule s $-\rho$ na $\theta \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$), $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Výpočet integrálu (2.129):

$$\begin{aligned} p_z &= \int_V \rho(\vec{r}) z dV = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(\theta) r \cos \theta r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho \sin \theta \cos \theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\rho) \sin \theta \cos \theta d\theta \right) \\ &= 2\pi \frac{R^4}{4} \rho \left(\left[-\frac{1}{4} \cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\frac{1}{4} \cos 2\theta \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \right) \\ &= \frac{1}{2} \pi R^4 \rho \left(-\frac{1}{4} \right) ((-1 - 1) - (1 - (-1))) = \frac{1}{2} \pi \rho R^4. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Dodatek: Argumenty symetrie nám umožňují rovnou říci, že tvar dipólového momentu bude $\vec{p} = (0, 0, p_z)$. Mohli bychom na ně ale klidně zapomenout a složky p_x a p_y spočítat přímo dle vztahů analogických k (2.129):

$$p_x = \int_S \sigma x dS, \quad p_y = \int_S \sigma y dS, \quad (2.134)$$

(a stejně pro objemově nabitou kouli).

2.6.4 2.20 Síla elektrického dipólu

Elektrický dipól o momentu $\vec{p} = (0, p, 0)$ leží v bodě $\vec{r} = (x, 0, 0)$ v elektrickém poli bodového náboje q umístěného v počátku. Určete sílu \vec{F} a moment silové dvojce \vec{D} , které budou na dipól působit.



Obrázek 2.40: Bodový náboj q a dipól \vec{p} .

Řešení: Máme-li malý elektrický dipól o dipólovém momentu \vec{p} ve vnějším elektrickém poli \vec{E} , pak síla působící na dipól vlivem tohoto pole je dána následujícím vztahem

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}, \quad (2.135)$$

tedy pomocí operátoru \vec{p} -grad, který je definovaný následovně:

$$\vec{p}\text{-grad } \vec{E} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} = (\vec{p} \cdot \nabla E_x, \vec{p} \cdot \nabla E_y, \vec{p} \cdot \nabla E_z) = \left(\sum_{i=1}^3 p_i \frac{\partial E_x}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^3 p_i \frac{\partial E_y}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^3 p_i \frac{\partial E_z}{\partial x_i} \right). \quad (2.136)$$

Vektor intenzity elektrického pole od bodového náboje velikosti q umístěného v počátku (resp. jeho složkové vyjádření) je:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad E_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_i}{r^3} \quad (2.137)$$

Spočteme si nyní obecně derivace $\frac{\partial E_i}{\partial x_j}$ pro pole od bodového náboje (2.137), které budeme potřebovat pro výpočet síly \vec{F} dle vztahu (2.136):

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_j} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_i}{r^3} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\partial x_i}{\partial x_j} \frac{1}{r^3} + x_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{r^3} \right) \right], \quad (2.138)$$

kde jsme využili pravidla o derivování součinu. Spočteme si postupně derivace jednotlivých členů ve výrazu (2.138) výše:

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j, \\ 1 & \text{pro } i = j \end{cases}, \quad (2.139)$$

kde jsme zavedli symbol Kroneckerovo delta δ_{ij} . Člen r^{-3} derivujeme jako složenou funkci:

$$\frac{\partial r^{-3}}{\partial x_j} = -3r^{-4} \frac{\partial r}{\partial x_j}, \quad (2.140)$$

kde derivaci velikosti polohového vektoru r spočteme následovně:

$$\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \cdot 2x_j = \frac{x_j}{r}. \quad (2.141)$$

Po dosazení těchto mezivýpočtů do (2.138) dostaneme

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_j} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\delta_{ij}}{r^3} - 3 \frac{x_i x_j}{r^5} \right). \quad (2.142)$$

Jelikož máme ze zadání $\vec{p} = (0, p, 0)$, obecný vzorec (2.136) pro sílu \vec{F} se zjednoduší na

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} = p \left(\frac{\partial E_x}{\partial y}, \frac{\partial E_y}{\partial y}, \frac{\partial E_z}{\partial y} \right). \quad (2.143)$$

Po dosazení z obecného vzorce pro derivace $\frac{\partial E_i}{\partial x_j}$ (2.142):

$$\vec{F} = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0} \left(-3\frac{xy}{r^5}, \frac{1}{r^3} - 3\frac{y^2}{r^5}, -3\frac{yz}{r^5} \right). \quad (2.144)$$

Tento výsledek představuje sílu působící na dipól $\vec{p} = (0, p, 0)$ na libovolném místě $\vec{r} = (x, y, z)$. Pro $\vec{r} = (x, 0, 0)$, tj. $y = 0$ a $z = 0$ dostáváme

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0} \left(0, \frac{1}{r^3}, 0 \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{pq}{r^3} (0, 1, 0). \quad (2.145)$$

Moment silové dvojce \vec{D} působící na dipól \vec{p} v elektrickém poli \vec{E} je

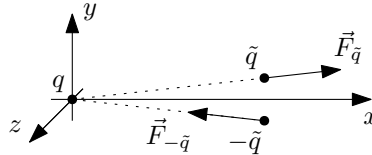
$$\vec{D} = \vec{p} \times \vec{E}. \quad (2.146)$$

Po dosazení $\vec{p} = (0, p, 0)$ a $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$ máme

$$\vec{D} = (0, 0, -pE_x) = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2} (0, 0, -1), \quad (2.147)$$

kde jsme dosadili $E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2}$.

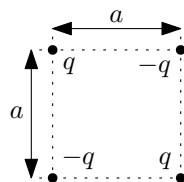
Dodatek: Celková síla působící na dipól se dá názorně získat pomocí složení Coulombických sil působících na jednotlivé náboje „modelového“ dipólu, viz obrázek 2.41. Již brzy.



Obrázek 2.41: Bodový náboj q a modelový dipól \vec{p} složený z nábojů \tilde{q} a $-\tilde{q}$ separovaných vzdáleností d tak, aby $p = \tilde{q}d$.

2.6.5 2.21 Kvadrupólový moment bodových nábojů

Čtyři náboje $q, -q, q, -q$ jsou v tomto pořadí rozmístěny v rozích čtverce o straně a . Určete hlavní kvadrupólové momenty soustavy.



Obrázek 2.42: Kvadrupólový moment soustavy bodových nábojů.

Řešení: Vzorec pro kvadrupólové momenty soustavy bodových nábojů je následující:

$$Q_{ij} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2)_{\alpha}, \quad (2.148)$$

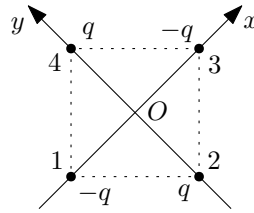
kde q_α jsou náboje jednotlivých částic a $\vec{r}_\alpha = (x_{1\alpha}, x_{2\alpha}, x_{3\alpha}) = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$ jsou jejich polohové vektory (čistě pro zjednodušení zápisu jsme index α „vytknuli“ za závorku, $(\dots)_\alpha$).

Platí, že jsou-li celkový náboj soustavy Q a dipólový moment \vec{p} nulové, pak kvadrupólové momenty Q_{ij} nezávisí na volbě počátku soustavy souřadnic. (Zde je dipólový moment \vec{p} nulový, viz příklad 2.17 v sekci 2.6.1.)

Hlavní kvadrupólové momenty získáme, pokud zvolíme kartézské osy tak, aby matice Q_{ij} vyšla diagonální. Chceme tedy, aby mimodiagonální momenty byly nula, vzorce pro ně vypadají následovně:

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} (3xy)_{\alpha}, \quad Q_{13} = Q_{31} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} (3xz)_{\alpha}, \quad Q_{23} = Q_{32} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} (3yz)_{\alpha}. \quad (2.149)$$

Jelikož máme rovinný problém, zvolme náboje v rovině $z = 0$, tím pádem $Q_{13} = Q_{23} = 0$. Pokud nyní zvolíme osy x a y tak, aby náboje ležely střídavě na těchto osách, tzn. jako na obrázku 2.43, dostaneme také $Q_{12} = 0$ (viz dále).



Obrázek 2.43: Souřadný systém pro výpočet kvadrupólového momentu soustavy bodových nábojů.

Polohové vektory jednotlivých částic totiž mají následující tvar,

$$\vec{r}_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} a, 0, 0 \right), \quad \vec{r}_2 = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2} a, 0 \right), \quad \vec{r}_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a, 0, 0 \right), \quad \vec{r}_4 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2} a, 0 \right), \quad (2.150)$$

a součiny $x_\alpha y_\alpha$ jsou tak vždy nulové.

Obecný vzorec pro moment Q_{11} je následující

$$Q_{11} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} (3x^2 - r^2)_{\alpha} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} (2x^2 - y^2 - z^2)_{\alpha}; \quad (2.151)$$

po dosazení hodnot nábojů a polohových vektorů (2.150):

$$Q_{11} = -q \left(2\frac{a^2}{2} \right) + q \left(-\frac{a^2}{2} \right) - q \left(2\frac{a^2}{2} \right) + q \left(-\frac{a^2}{2} \right) = -3qa^2. \quad (2.152)$$

Stejným výpočtem dospějeme i k hodnotě $Q_{22} = 3qa^2$. Jelikož pro diagonální kvadrupólové momenty platí

$$\sum_{i=1}^3 Q_{ii} = Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0, \quad (2.153)$$

musí již být $Q_{33} = 0$. Výsledná matice kvadrupólových momentů Q_{ij} má tedy tvar

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} -3qa^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3qa^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.154)$$

kde na diagonále jsou příslušné hlavní kvadrupólové momenty.

2.6.6 2.22 Kvadrupólový moment elipsoidu

Určete elektrický kvadrupólový moment rotačního elipsoidu.

Řešení: Vzorec pro kvadrupólové momenty objemového spojitého rozložení nábojů je následující:

$$Q_{ij} = \int_V \rho(\vec{r})(3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) dV, \quad (2.155)$$

kde $\rho(\vec{r})$ je funkce objemové nábojové hustoty a $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ je polohový vektor objemového elementu dV . Spočtěme nejprve kvadrupólový moment Q_{11} , který je ze vzorce (2.155), dán vztahem

$$Q_{11} = \int_V \rho(\vec{r})(2x^2 - y^2 - z^2) dV. \quad (2.156)$$

Objemová nábojová hustota ρ je zde uvažována konstantní. Zavedeme kartézské souřadnice s počátkem ve středu elipsoidu a osami orientovanými ve směrech os elipsoidu. Jelikož elipsoid má nenulový celkový náboj, $Q \neq 0$, závisí výsledný kvadrupólový moment Q_{ij} (a také dipólový moment \vec{p}) na volbě počátku souřadnic. Volit počátek ve středu elipsoidu je přirozené z toho důvodu, že pak vyjde dipólový moment \vec{p} elipsoidu nulový. Element objemu je v kartézských souřadnicích $dV = dx dy dz$ a výsledný vztah pro moment Q_{11} je:

$$Q_{11} = \int \int \int_{\text{odněkud}}^{\text{někam}} \rho (2x^2 - y^2 - z^2) dx dy dz. \quad (2.157)$$

Integrační meze jsou zvoleny tak, aby splňovaly nerovnost

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1. \quad (2.158)$$

Nyní provedeme substituci, kdy „z elipsoidu uděláme kouli“:

$$x = a\tilde{x}, \quad y = a\tilde{y}, \quad z = b\tilde{z}, \quad dx dy dz = a^2 b d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z}. \quad (2.159)$$

Po dosazení do integrálu máme

$$Q_{11} = \int \int \int_{\text{odněkud}'}^{\text{někam}' } \rho (2a^2 \tilde{x}^2 - a^2 \tilde{y}^2 - b^2 \tilde{z}^2) a^2 b d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z}, \quad (2.160)$$

kde nové meze v souřadnicích \tilde{x} , \tilde{y} a \tilde{z} splňují nerovnost

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 \leq 1, \quad (2.161)$$

tzn. substitucí jsme z elipsoidu udělali jednotkovou kouli. Dále provedeme substituci do sférických souřadnic

$$\tilde{x} = r \sin \theta \cos \varphi, \quad \tilde{y} = r \sin \theta \sin \varphi, \quad \tilde{z} = r \cos \theta, \quad d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z} = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi, \quad (2.162)$$

v nich se elipsoid (nyní jednotková koule v souřadnicích \tilde{x} , \tilde{y} , \tilde{z}) nachází na souřadnicích $r \in \langle 0, 1 \rangle$, $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Integrál nyní vypadá následovně:

$$Q_{11} = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho (2a^2 \tilde{x}^2 - a^2 \tilde{y}^2 - b^2 \tilde{z}^2) a^2 b r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi, \quad (2.163)$$

kde jsme zatím nedosadili za \tilde{x} , \tilde{y} , \tilde{z} z (2.162). Nyní stojíme před otázkou, kolik je

$$\int_{\text{koule}} \tilde{x}^2 dV = ?, \quad \int_{\text{koule}} \tilde{y}^2 dV = ?, \quad \int_{\text{koule}} \tilde{z}^2 dV = ?, \quad (2.164)$$

což by se dalo prostě spočítat dosazením z (2.162) a vyintegrováním. Zkusme se ale vyhnout tomuto komplikovanému počítání následujícím trikem. Ze symetrie koule musí platit

$$\int_{\text{koule}} \tilde{x}^2 dV = \int_{\text{koule}} \tilde{y}^2 dV = \int_{\text{koule}} \tilde{z}^2 dV \quad (2.165)$$

a tedy i

$$\begin{aligned} \int_{\text{koule}} \tilde{x}^2 dV &= \frac{1}{3} \int_{\text{koule}} \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 dV = \frac{1}{3} \int_{\text{koule}} r^2 dV = \frac{1}{3} \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^1 [-\cos \theta]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{4\pi}{15}. \end{aligned} \quad (2.166)$$

Nyní již jenom tento výsledek dosadíme do (2.163) a dostaneme

$$Q_{11} = \frac{4\pi}{15} \rho (2a^2 - a^2 - b^2) a^2 b = \frac{4\pi}{15} \rho a^2 b (a^2 - b^2). \quad (2.167)$$

Výsledek ještě můžeme vyjádřit pomocí celkového náboje na elipsoidu Q , který je

$$Q = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi a^2 b, \quad (2.168)$$

a po dosazení do (2.167) máme

$$Q_{11} = \frac{1}{5} Q (a^2 - b^2). \quad (2.169)$$

Jelikož pro diagonální kvadrupólové momenty platí

$$\sum_{i=1}^3 Q_{ii} = Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0, \quad (2.170)$$

a dále ze symetrie elipsoidu máme $Q_{11} = Q_{22}$, musí být $Q_{33} = -2Q_{11}$:

$$Q_{33} = -2Q_{11} = -\frac{2}{5} (a^2 - b^2). \quad (2.171)$$

Mimodiagonální kvadrupólové momenty, které jsou dány vzorcí

$$Q_{ij} = \int_V 3\rho(\vec{r}) x_i x_j dV, \quad i \neq j, \quad (2.172)$$

vyjdou nulové. Pokud bychom provedli analogické výpočty až po rovnici (2.163) dostali bychom integrály v proměnné φ tvaru

$$\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi, \quad \text{resp.} \quad \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi, \quad \text{resp.} \quad \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi, \quad (2.173)$$

kteřé jsou nulové.

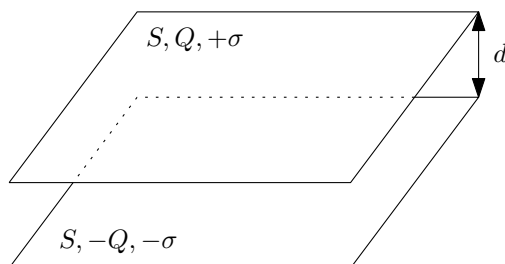
2.7 Kondenzátory

2.7.1 2.26, 2.28 a 2.29 Deskový kondenzátor

Kolik elektronů tvoří náboj kuličky o hmotnosti $m = 10^{-11} g$, jestliže je udržována v rovnováze v deskovém kondenzátoru, jehož desky jsou od sebe vzdáleny $d = 5 mm$ a jsou nabitý na napětí $U = 76,5 V$.

Jakou plochu by musely mít elektrody deskového kondenzátoru o vzdálenosti $d = 1 mm$, aby kondenzátor měl kapacitu $C = 1 F$?

Jakou silou se přitahují desky kondenzátoru?



Obrázek 2.44: Deskový kondenzátor.

Řešení: Velikosti intenzity elektrického pole E uvnitř deskového kondenzátoru, napětí U mezi deskami a kapacita tohoto kondenzátoru jsou dány vztahy (pro jejich odvození viz dodatek k tomuto příkladu):

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad U = E d = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d, \quad C = \epsilon_0 \frac{S}{d}, \quad (2.174)$$

kde σ je plošná nábojová hustota na deskách kondenzátoru, S je plocha desek (každé z nich) a d je vzdálenost těchto desek. Vektor intenzity elektrického pole \vec{E} míří kolmo na desky kondenzátoru.

Příklad 2.26: Umístíme-li mezi desky kondenzátoru náboj o velikosti q , bude na tento náboj působit síla o velikosti $F_E = q E = q \frac{U}{d}$. Tato síla musí být vyrušena gravitační silou $F_g = mg$, tzn.

$$F_E = F_g, \quad q \frac{U}{d} = mg, \quad q = \frac{mgd}{U}. \quad (2.175)$$

Napišeme-li si náboj q jako n -násobek elementárního elektrického náboje e , $q = n e$, můžeme psát výsledek jako počet elementárních elektrických nábojů na kuličce n :

$$n = \frac{mgd}{Ue} \doteq 40, \quad (2.176)$$

kde jsme použili hodnotu gravitačního zrychlení $g = 9,81 m.s^{-2}$ a velikost elementárního elektrického náboje $e = 1,602.10^{-19} C$.

Příklad 2.28: Po vyjádření ze vztahu (2.174) vpravo máme

$$S = \frac{Cd}{\epsilon_0} = 1,13.10^8 m^2 = 113 km^2, \quad (2.177)$$

kde jsme použili hodnotu permitivity vakua $\epsilon_0 = 8,854.10^{-12} F.m^{-1}$.

Příklad 2.29: Příklad můžeme řešit dvěma způsoby. Buď vyjdeme z energie W elektrostatického pole mezi deskami kondenzátoru:

$$W = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 dV = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \int_V dV = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 S d = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \frac{S}{d} \right) (Ed)^2 = \frac{1}{2} C U^2. \quad (2.178)$$

Nám se bude hodit vztah $W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 S d$. Při změně vzdálenosti desek o dx se elektrostatická energie pole změní o $dW = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 S dx$ (E a S je konstantní a $d(d) = dx$). Změna této energie musí pocházet z práce, kterou vykonáme při oddálení (přiblížení) desek kondenzátoru, tzn. $dW = F dx$ a tedy vztah pro sílu je

$$F = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 S = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 S}{\varepsilon_0} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 S}. \quad (2.179)$$

Jiným způsobem se k výsledku dostaneme tak, že spočteme sílu $dF = f dS$ působící na malou plošku dS jedné desky kondenzátoru od celé (nekonečně) velké druhé desky (f se nazývá hustota síly). Celková síla pak bude

$$F = \int_S dF = \int_S f dS = f \int_S dS = f S, \quad (2.180)$$

jelikož hustota síly je všude konstantní. Síla $dF = E dq$, kde $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ (Jsme přímo v rovině jedné z desek, kde je intenzita elektrického pole poloviční! Viz dodatek.) a $dq = \sigma dS$, tedy $dF = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS$. Pak $f = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$ a tím pádem $F = f S = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} S$, což je stejný výsledek jako přes výpočet pomocí energie.

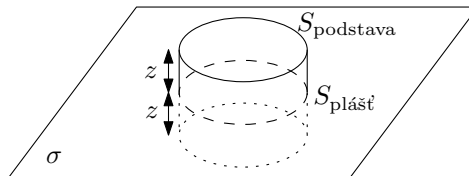
Dodatek: Odvodíme nyní vztahy (2.174) pro elektrické pole \vec{E} , napětí U a kapacitu C . Začneme určením intenzity elektrického pole \vec{E} od jedné **nekonečně velké** nabité roviny z Gaussova zákona

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \quad (2.181)$$

který vztahuje tok intenzity elektrického pole \vec{E} uzavřenou plochou S k celkovému náboji Q , který je v této ploše uzavřený.

Podívejme se, jaká omezení na elektrické pole \vec{E} klade symetrie úlohy. Máme-li nekonečnou nabitou rovinu, elektrické pole může záviset pouze na vzdálenosti z od této roviny, $\vec{E} = \vec{E}(z)$ – máme k dispozici translační symetrii libovolným směrem podél nabitou rovinu, která zajišťuje, že vektor \vec{E} musí být konstantní na rovinách rovnoběžných s nabitou rovinou. Zároveň musí elektrické pole mířit vždy kolmo na nabitou rovinu, jelikož máme k dispozici rotační symetrii okolo osy kolmé na rovinu a procházející bodem, kde pole \vec{E} určujeme – jediný směr vektoru \vec{E} , který se při této rotaci zachovává, je směr kolmý na rovinu. Reflexní symetrie skrze nabitou rovinu zajišťuje vztah $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$, tzn. že vektor \vec{E} na opačné straně roviny je opačný.

Pro použití Gaussova zákona zvolíme plochu S jako válcovou plochu, jejíž osa je kolmá na nabitou rovinu, a podstavy mají stejnou vzdálenost z od této roviny, viz obrázek 2.45.

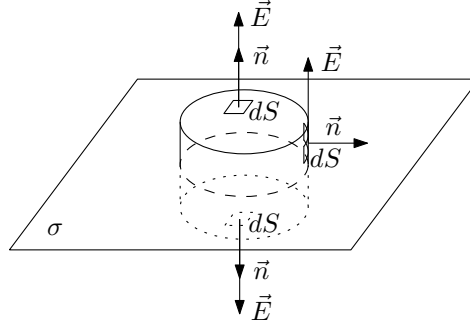


Obrázek 2.45: Uzavřená válcová plocha S v Gaussově zákoně pro určení velikosti intenzity elektrického pole E v okolí nekonečně nabitou rovinu. Plochu pláště válce jsme označili jako $S_{\text{plášť}}$ a plochu každé z podstav jako S_{podstava} .

Rozdělme nyní integrál na levé straně (2.181) zvlášť na integraci přes plášť a přes podstavy:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{\text{podstava}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{\text{plášť}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (2.182)$$

Protože vektory \vec{E} míří kolmo na nabitou rovinu, tak celkový tok pláštěm válce je nulový, jelikož $\vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 0$, kde \vec{n} je jednotkový normálový vektor na plošku dS . Naopak pro podstavy platí $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS$, jelikož vektor \vec{E} míří ve směru $d\vec{S}$, viz obrázek 2.46.



Obrázek 2.46: Směry vektorů \vec{E} a $d\vec{S} = \vec{n} dS$ pro jednotlivé podstavy a plášť válce. Vektor \vec{n} je jednotkový normálový vektor k plošce dS .

Pokračujme v úpravách (2.182):

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{\text{podstava}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{\text{plášť}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{\text{podstava}}} E dS = E(z) \int_{S_{\text{podstava}}} dS = 2S_{\text{podstava}} E(z), \quad (2.183)$$

kde jsme využili toho, že na podstavách (ve stejných vzdálenostech od nabitě roviny) je velikost intenzity elektrického pole $E(z)$ konstantní a můžeme ji tedy vytknout před integrál a integrál z jedničky přes plochu je obsah této plochy $2S_{\text{podstava}}$.

Náboj Q uzavřený v ploše S na pravé straně Gaussova zákona (2.181) je jednoduše $Q = \sigma S_{\text{podstava}}$. Gaussův zákon pak dává:

$$2E(z)S_{\text{podstava}} = \frac{\sigma S_{\text{podstava}}}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad (2.184)$$

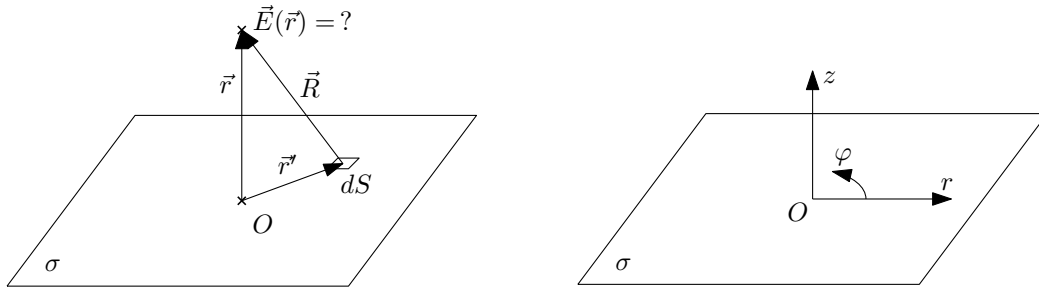
kde jsme vyjádřili velikost intenzity elektrického pole E a ukázalo se, že tato nezávisí na vzdálenosti od roviny z .

Poznámka: Tohoto výsledku můžeme dosáhnout i bez použití Gaussova zákona přímým integrováním příspěvků $d\vec{E}$ k intenzitě elektrického pole od jednotlivých částí nabitě roviny:

$$\vec{E} = \int_S d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \sigma \frac{\vec{R}}{R^3} dS, \quad (2.185)$$

kde \vec{R} je vektor spojující místo určování elektrického pole \vec{E} dané polohovým vektorem \vec{r} a polohu elementu plochy dS danou vektorem \vec{r}' , $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ (R je velikost tohoto vektoru, $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$), viz obrázek 2.47 vlevo.

Zavedme válcové souřadnice (r, φ, z) jako na obrázku 2.47 vpravo, tzn. počátek umístěný do nabitě roviny a osa z směřující kolmo na tuto rovinu. Poté nabitě rovina se rozkládá na souřadnicích $z = 0$, $r \in \langle 0, +\infty \rangle$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Plošný element v polárních souřadnicích je $dS = r dr d\varphi$. Z důvodů symetrie diskutovaných výše musí mít vektor \vec{E} tvar $\vec{E} = (0, 0, E_z)$. Vzdálenost R mezi elementem plochy dS a místem určování elektrického pole $\vec{r} = (0, 0, z)$ je $R = \sqrt{r^2 + z^2}$. Vektor \vec{R} vyjádřený pomocí válcových souřadnic má tvar $\vec{R} = (-r \cos \varphi, -r \sin \varphi, z)$.



(a) Vektor $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ jakožto vektor spojující element plochy dS a místo určování elektrického pole \vec{E} .

(b) Válcové souřadnice (r, φ, z) zavedené jako polární souřadnice (r, φ) v nabitě rovině a kartézská souřadnice z na tuto rovinu kolmá.

Obrázek 2.47: Nabitá rovina – vektor \vec{R} a souřadnice (r, φ, z) .

Dosadíme-li všechny výše uvedené informace do (2.185) a počítáme-li jedinou nenulovou složku E_z dostaneme:

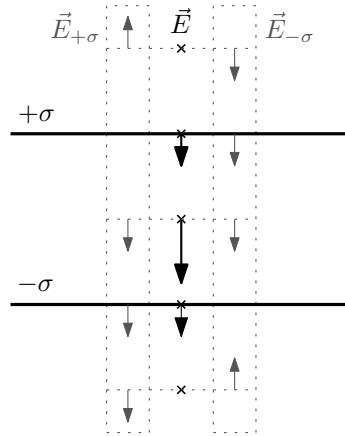
$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} r dr d\varphi = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2.186)$$

Po substituci $u = r^2 + z^2$, $du = 2r dr$ máme

$$E_z = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0} \int_{z^2}^{+\infty} \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{z\sigma}{4\epsilon_0} \left[-2 \frac{1}{\sqrt{u}} \right]_{z^2}^{+\infty} = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0} \frac{1}{|z|} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \operatorname{sgn} z, \quad (2.187)$$

tedy stejný výsledek jako z Gaussova zákona (nyní ještě se znaménkem).

Nyní musíme složit elektrická pole od dvou opačně nabitých nekonečných desek. Situace je znázorněná a popsána na obrázku 2.48. Pro naše účely potřebujeme výsledek, že uvnitř kondenzátoru je pole dvojnásobně silné oproti situaci s jednou nabitou deskou, $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.



Obrázek 2.48: Vektory intenzit elektrických polí od jednotlivých opačně nabitých rovin (šedě, $\vec{E}_{+\sigma}$ od kladně nabitě roviny a $\vec{E}_{-\sigma}$ od záporně nabitě roviny) a jejich výsledná superpozice (černě, \vec{E}). Výsledkem je nulové pole vně kondenzátoru, $\vec{E}_{\text{vně}} = 0$; dvojnásobné uvnitř kondenzátoru, $E_{\text{uvnitř}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$; přímo na deskách je pole $E_{\text{deska}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$!

Nyní musíme toto elektrické pole naintegrovat pro získání napětí mezi elektrodami. Definice napětí mezi dvěma body po dráze l je

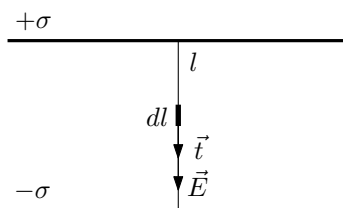
$$U = \frac{1}{q} \int_l \vec{F} \cdot d\vec{l}, \quad (2.188)$$

kde \vec{F} je síla působící na náboj q a $d\vec{l} = \vec{t} dl$ je element délky mířící tečně na křivku (\vec{t} je jednotkový tečný vektor). Napětí U je tedy práce vykonaná po dráze l při přemístění jednotkového náboje.

Jediná síla působící uvnitř kondenzátoru je od elektrického pole, $\vec{F} = q\vec{E}$. Jako křivku l zvolíme úsečku kolmou na elektrody, viz obrázek 2.49. Pak vektory \vec{E} a $d\vec{l}$ míří stejným směrem (opět viz obrázek 2.49) a platí $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E dl$. Tzn. máme

$$U = \frac{1}{q} \int_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_l E dl = E \int_l dl = E d = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d, \quad (2.189)$$

kde jsme navíc využili toho, že elektrické pole E je konstantní a integrál z jedničky $\int_l dl$ je délka křivky, tzn. vzdálenost desek, d .



Obrázek 2.49: Úsečka l spojující desky kondenzátoru pro výpočet napětí U . Vektory \vec{E} a $d\vec{l} = \vec{t} dl$ (kde \vec{t} je jednotkový tečný vektor ke křivce l) míří stejným směrem.

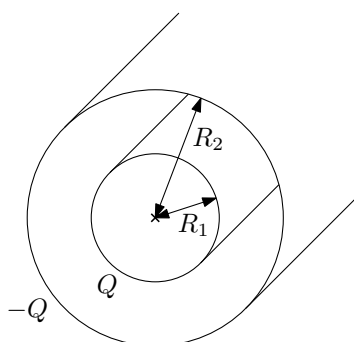
Kapacita C deskového kondenzátoru je z definice $C = \frac{Q}{U}$:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} d} = \epsilon_0 \frac{S}{d}. \quad (2.190)$$

2.7.2 2.30 a 2.33 Válcový kondenzátor a Geiger-Müllerův počítač

Mějme válcový kondenzátor o poloměrech elektrod $R_1 = 3 \text{ cm}$, $R_2 = 10 \text{ cm}$ nabitý na napětí $U = 450 \text{ V}$. Určete náboj připadající na jednotkovou délku, plošnou hustotu náboje na každém z válců a intenzitu elektrostatického pole ve středu vzdálenosti mezi válci.

Kondenzátor (Geigerův-Müllerův počítač) je tvořen drátem o poloměru $R_1 = 5 \text{ mm}$ a koaxiálním válcem poloměru $R_2 = 5 \text{ cm}$. Na jaké maximální napětí můžeme kondenzátor nabít, je-li průrazné napětí vzduchu $E_{max} = 3 \text{ kV} \cdot \text{cm}^{-1}$? Jak se bude měnit rozložení průběhu napětí mezi elektrodami, budeme-li zmenšovat poloměr vnitřní elektrody?



Obrázek 2.50: Válcový kondenzátor.

Řešení: Určeme nejprve intenzitu elektrického pole \vec{E} a napětí U mezi elektrodami **nekonečně** dlouhého válcového kondenzátoru a poté jeho kapacitu C pro jeho úsek délky l o

poloměrech vnitřní a vnější elektrody R_1 a R_2 . Výsledné vzorce pak aplikujeme na konkrétní zadání v příkladech 2.30 a 2.33.

Nechť je úsek délky l vnitřní elektrody nabitý na náboj Q a vnější na náboj $-Q$. Poté můžeme definovat délkovou nábojovou hustotu na elektrodách jako $\tau = \frac{Q}{l}$, tedy náboj na jednotku délky elektrody; a také plošné nábojové hustoty

$$\sigma_{\text{vnitřní}} = \frac{Q}{S_{\text{vnitřní}}} = \frac{Q}{2\pi R_1 l} = \frac{\tau}{2\pi R_1}, \quad \sigma_{\text{vnější}} = \frac{Q}{S_{\text{vnější}}} = \frac{Q}{2\pi R_2 l} = \frac{\tau}{2\pi R_2} \quad (2.191)$$

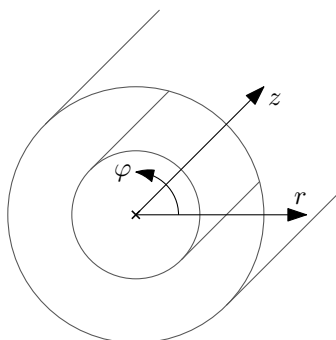
na vnitřní a vnější elektrodě o plochách $S_{\text{vnitřní}}$ a $S_{\text{vnější}}$ (jedná se o plochy úseku délky l).

Začneme určením intenzity elektrického pole \vec{E} mezi elektrodami (a tu pak naintegrujeme k určení napětí U mezi elektrodami) z Gaussova zákona

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (2.192)$$

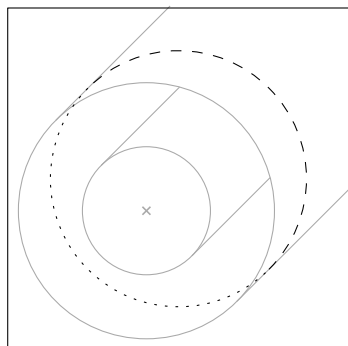
který vztahuje tok intenzity elektrického pole \vec{E} uzavřenou plochou S k celkovému náboji Q , který je v této ploše uzavřený.

Podívejme se, jaké omezení na elektrické pole \vec{E} klade symetrie úlohy. Zavedeme-li přirozeně válcové souřadnice (r, φ, z) (jako na obrázku 2.51), pak rotační symetrie okolo osy z (osy kondenzátoru) znemožňuje závislost velikosti $|\vec{E}|$ na úhlu φ a translační symetrie podél osy kondenzátoru (osy z) znemožňuje závislost na souřadnici z (toto platí pouze pro nekonečný kondenzátor). Velikost intenzity elektrického pole tedy může záviset pouze na vzdálenosti od osy symetrie, $E(r)$.

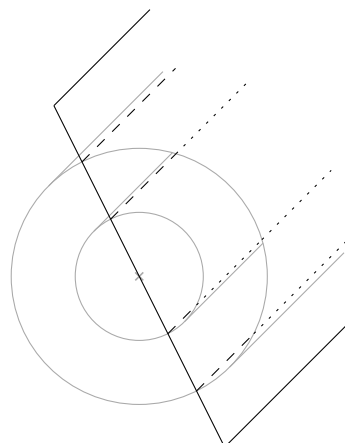


Obrázek 2.51: Válcové souřadnice (r, φ, z) ve válcovém kondenzátoru.

Ze zrcadlicí symetrie okolo rovin kolmých na osu z plyne, že vektor \vec{E} musí ležet v těchto rovinách. Zároveň ze zrcadlicí symetrie okolo rovin, v nichž osa z leží, opět plyne, že vektory \vec{E} musí v těchto rovinách ležet. Pro roviny symetrie viz obrázek 2.52. To vede na jediný přípustný směr, kterým je směr radiální – ve směru „os r “.



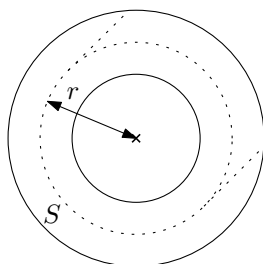
(a) Rovina symetrie kolmá na osu z .



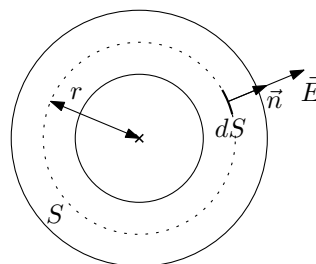
(b) Osa z leží v rovině symetrie.

Obrázek 2.52: Roviny zrcadlicí symetrie pro určení směru vektoru intenzity elektrického pole \vec{E} .

Dále potřebujeme plochu S do Gaussova zákona. Uvažujme válcovou plochu výšky l obecného poloměru r , $R_1 < r < R_2$, koncentrickou s elektrodami kondenzátoru, viz obrázek 2.53 vlevo.



(a) Myšlená válcová plocha S o poloměru r v Gaussově zákoně.



(b) Směry intenzity elektrického pole \vec{E} a normálového vektoru \vec{n} k plošce dS na plášti válce o poloměru r .

Obrázek 2.53: Pro určení intenzity elektrického pole \vec{E} použijeme Gaussův zákon.

Nyní již můžeme začít upravovat levou stranu Gaussova zákona (2.192). Nejprve si integrál přes válec S rozdělíme na integraci přes plášť a podstavy válce:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{\text{plášť}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{\text{podstavy}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad (2.193)$$

kde element plochy je $d\vec{S} = \vec{n} dS$; \vec{n} je jednotkový normálový vektor. Jelikož je vektor \vec{E} radiální, tzn. leží v podstavách válce S , skalární součin pod tímto integrálem vymizí, $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$:

$$\int_{S_{\text{podstavy}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (2.194)$$

Situace na plášti válce S je znázorněna na obrázku 2.53 vpravo. Zde vektor \vec{E} míří ve směru $d\vec{S}$ (ve směru \vec{n}) a tedy platí $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS$. Zároveň velikost intenzity elektrického pole E závisí pouze na souřadnici r , $E(r)$, je tedy na plášti válce S konstantní a můžeme ji vytknout před integrál:

$$\int_{S_{\text{plášť}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{\text{plášť}}} E dS = E(r) \int_{S_{\text{plášť}}} dS = E(r) 2\pi r l. \quad (2.195)$$

(Použili jsme vzorec pro povrch pláště válce, $S = \int dS = 2\pi r l$.) Celkový náboj uzavřený ve válcové ploše S je právě Q (je to náboj na délce l a válec S má také délku l). Po dosazení výsledku (2.195) do Gaussova zákona (2.192) a vyjádření velikosti intenzity elektrického pole $E(r)$ obdržíme

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi r l \varepsilon_0} = \frac{\tau}{2\pi r \varepsilon_0}. \quad (2.196)$$

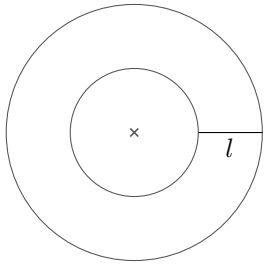
Nyní musíme toto elektrické pole naintegrovat pro získání napětí mezi elektrodami. Definice napětí mezi dvěma body po dráze l je

$$U = \frac{1}{q} \int_l \vec{F} \cdot d\vec{l}, \quad (2.197)$$

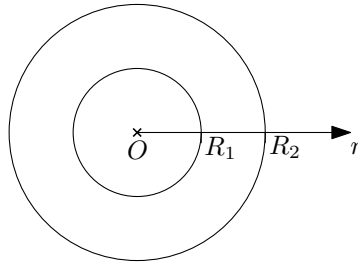
kde \vec{F} je síla působící na náboj q a $d\vec{l} = \vec{t} dl$ je element délky mířící tečně na křivku (\vec{t} je jednotkový tečný vektor). Napětí U je tedy práce vykonaná po dráze l při přemístění jednotkového náboje.

Jediná síla působící uvnitř kondenzátoru je od elektrického pole, $\vec{F} = q\vec{E}$. Jako křivku l zvolíme radiální úsečku spojující vnitřní a vnější elektrodu (viz obrázek 2.54 vlevo), při zavedení radiální souřadnice r se úsečka rozkládá na $r \in \langle R_1, R_2 \rangle$ (viz obrázek 2.54 uprostřed) a element délky je $dl = dr$. Pak vektory \vec{E} a $d\vec{l}$ míří stejným směrem (viz obrázek 2.54 vpravo) a platí $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E dl$. Tzn. máme

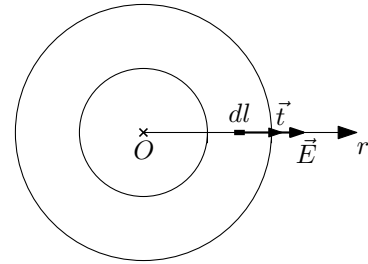
$$U = \frac{1}{q} \int_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_l E dl = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr. \quad (2.198)$$



(a) Úsečka l spojující vnitřní a vnější elektrodu.



(b) Radiální souřadnice r .



(c) Vektory \vec{E} a $d\vec{l} = \vec{t} dl$ míří stejným směrem.

Obrázek 2.54: Křivka l , její parametrizace a znázorněné vektory \vec{E} a $d\vec{l}$.

Po dosazení za $E(r)$ z (2.196) snadno dopočteme napětí U :

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi r l \varepsilon_0} dr = \frac{Q}{2\pi l \varepsilon_0} [\ln r]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{2\pi l \varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (2.199)$$

Kapacitu úseku délky l válcového kondenzátoru již získáme triviálně z definice $C = \frac{Q}{U}$, tzn.

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi l \varepsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}, \quad \frac{C}{l} = \frac{2\pi \varepsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}, \quad (2.200)$$

kde jsme vpravo uvedli kapacitu C/l na jednotku délky.

A nyní k vlastním příkladům. V příkladu 2.30 jednoduše vyjádříme délkovou nábojovou hustotu τ ze vztahu (2.199):

$$\tau = 2\pi \varepsilon_0 \frac{U}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = 2,08 \cdot 10^{-8} C \cdot m^{-1}, \quad (2.201)$$

kde jsme použili hodnotu permitivity vakua $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$. Plošné nábojové hustoty dle (2.191) jsou

$$\sigma_{\text{vnitřní}} = \frac{\tau}{2\pi R_1} = 1,10 \cdot 10^{-7} \text{ C.m}^{-2}, \quad \sigma_{\text{vnější}} = \frac{\tau}{2\pi R_2} = 3,31 \cdot 10^{-8} \text{ C.m}^{-2}. \quad (2.202)$$

Intenzita elektrického pole pro $r = \frac{R_1 + R_2}{2}$ je dle (2.196)

$$E\left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right) = \frac{\tau}{\pi(R_1 + R_2)\epsilon_0} = 5,75 \text{ kV.m}^{-1}. \quad (2.203)$$

V příkladu 2.33 potřebujeme vyjádřit intenzitu elektrického pole $E(r)$ pomocí napětí na kondenzátoru, tzn. zkombinujeme vztahy (2.196) a (2.199):

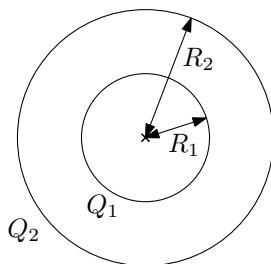
$$E(r) = \frac{U}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{1}{r}. \quad (2.204)$$

Vidíme, že nejsilnější elektrické pole je u vnitřní elektrody pro $r = R_1$. Naše omezení dané průrazným napětím vzduchu $E_{\text{max}} = 30 \text{ kV.cm}^{-1}$ tedy bude $E(R_1) \leq E_{\text{max}}$, což dává maximální napětí

$$U_{\text{max}} = R_1 \ln \frac{R_2}{R_1} E_{\text{max}} = 34,5 \text{ kV}. \quad (2.205)$$

2.7.3 2.31 Kulový kondenzátor

Určete napětí mezi dvěma koncentrickými koulemi o poloměrech $R_1 < R_2$ a nábojích Q_1, Q_2 .



Obrázek 2.55: Kulové elektrody.

Řešení: Velikost intenzity elektrického pole sféricky symetrického rozložení náboje je

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(r)}{r^2}, \quad (2.206)$$

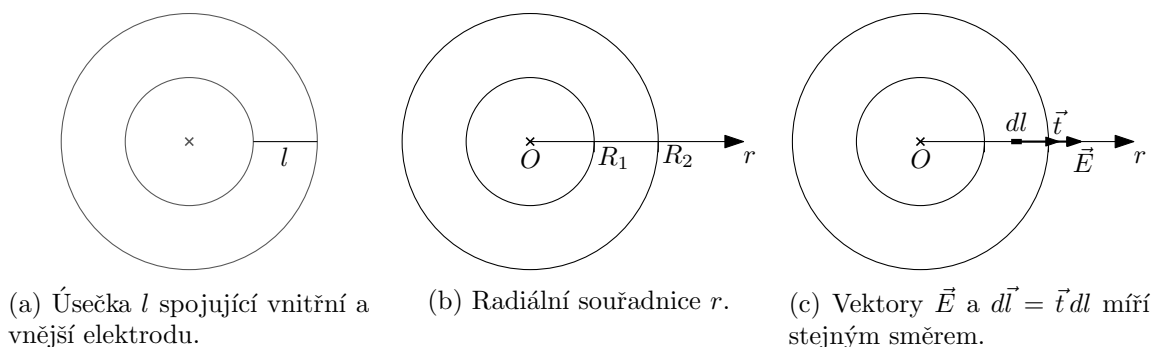
kde $Q(r)$ je celkový náboj uzavřený v kouli o poloměru r . Směry vektorů elektrického pole jsou radiální – mířící od/do středu sférické symetrie. Pro odvození viz dodatek v sekci 2.5.7. Toto elektrické pole nyní naintegrujeme pro získání napětí mezi kulovými elektrodami. Definice napětí mezi dvěma body po dráze l je

$$U = \frac{1}{q} \int_l \vec{F} \cdot d\vec{l}, \quad (2.207)$$

kde \vec{F} je síla působící na náboj q a $d\vec{l} = \vec{t} dl$ je element délky mířící tečně na křivku (\vec{t} je jednotkový tečný vektor). Napětí U je tedy práce vykonaná po dráze l při přemístění jednotkového náboje.

Jediná síla působící uvnitř kondenzátoru je od elektrického pole, $\vec{F} = q\vec{E}$. Jako křivku l zvolíme radiální úsečku spojující vnitřní a vnější elektrodu (viz obrázek 2.56 vlevo), při zavedení radiální souřadnice r se úsečka rozkládá na $r \in \langle R_1, R_2 \rangle$ (viz obrázek 2.56 uprostřed) a element délky je $dl = dr$. Pak vektory \vec{E} a $d\vec{l}$ míří stejným směrem (viz obrázek 2.56 vpravo) a platí $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E dl$. Tzn. máme

$$U = \frac{1}{q} \int_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_l E dl = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr. \quad (2.208)$$



Obrázek 2.56: Křivka l , její parametrizace a znázorněné vektory \vec{E} a $d\vec{l}$.

Po dosazení za $E(r)$ z (2.206), kde pokládáme $Q(r) = Q_1$ (jelikož pro $r \in \langle R_1, R_2 \rangle$ je náboj uzavřený ve sféře o poloměru r prostě náboj na vnitřní elektrodě Q_1), snadno dopočteme napětí U :

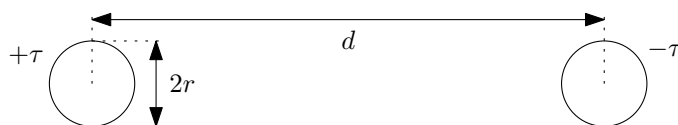
$$U = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_l E dl = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (2.209)$$

Dodatek: Pokud chceme znát kapacitu kulového kondenzátoru, pak klademe $Q_1 = Q$ (a $Q_2 = -Q$) a při znalosti napětí U (2.208) z definice snadno určíme kapacitu $C = \frac{Q}{U}$:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \frac{4\pi R_1 R_2 \epsilon_0}{R_2 - R_1}. \quad (2.210)$$

2.7.4 2.32 Kapacita vedení

Určete kapacitu vedení tvořeného dvěma rovnoběžnými dráty délky $l = 9 \text{ km}$, poloměru $r = 1 \text{ mm}$ a vzájemné vzdálenosti $d = 15 \text{ cm}$.



Obrázek 2.57: Kapacita elektrického vedení.

Řešení: Velikost intenzity elektrického pole E od nabitého válcového vodiče (pro odvození viz sekce 2.7.2) je dáno vztahem

$$E = \frac{\tau}{2\pi r \epsilon_0}, \quad (2.211)$$

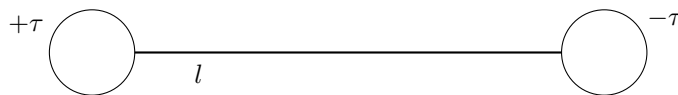
kde τ je délková nábojová hustota na jednotlivých vodičích, r je poloměr vodiče. Směr vektoru \vec{E} je vždy radiální od/k osy/e válcového vodiče. Pro určení celkové kapacity vedení C potřebujeme nalézt napětí U mezi vodiči, které získáme integrací elektrického pole \vec{E} mezi těmito vodiči.

Nechť jsou vodiče nabitý konstantní délkovou nábojovou hustotou $+\tau$, resp. $-\tau$, viz obrázek 2.57. Označme intenzity elektrických polí od těchto vodičů \vec{E}_1 (od vodiče $+\tau$) a \vec{E}_2 (od vodiče $-\tau$). Definice napětí mezi dvěma body po dráze l je

$$U = \frac{1}{q} \int_l \vec{F} \cdot d\vec{l}, \quad (2.212)$$

kde \vec{F} je síla působící na náboj q a $d\vec{l} = \vec{t} dl$ je element délky mířící tečně na křivku (\vec{t} je jednotkový tečný vektor). Napětí U je tedy práce vykonaná po dráze l při přemístění jednotkového náboje.

Jediná síla působící uvnitř kondenzátoru je od elektrického pole, $\vec{F} = q\vec{E}$, kde $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ je celkové elektrické pole od vodičů. Jako křivku l zvolíme nejkratší úsečku spojující levý a pravý drát, viz obrázek 2.58.



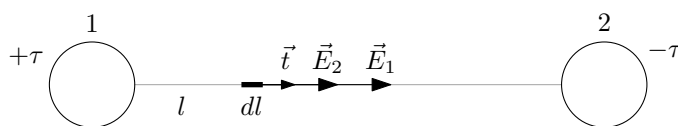
Obrázek 2.58: Úsečka l pro integraci napětí U mezi dráty.

Při zavedení kartézské souřadnice x jako na obrázku 2.59 se úsečka rozkládá na $x \in (r, d-r)$. Element délky je $dl = dx$. Vektory $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ a $d\vec{l}$ míří stejným směrem (jelikož \vec{E}_1 míří od kladně nabitého vodiče, tzn. v kladném směru osy x , a \vec{E}_2 míří k záporně nabitému vodiči, tzn. také v kladném směru osy x , viz obrázek 2.60) a platí tedy $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E dl$. Tzn. máme

$$U = \frac{1}{q} \int_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_l E dl = \int_r^{d-r} E(x) dx. \quad (2.213)$$



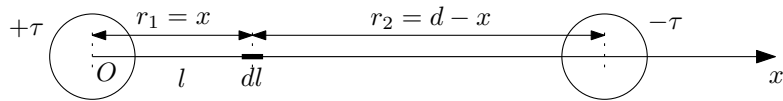
Obrázek 2.59: Kartézská souřadnice x pro kapacitu vedení.



Obrázek 2.60: Element délky dl a k němu příslušné vektory $d\vec{l} = \vec{t} dl$, \vec{E}_1 a \vec{E}_2 . Intenzita elektrického pole \vec{E}_1 je od levého (kladně nabitého) vodiče, intenzita \vec{E}_2 je od pravého (záporně nabitého) vodiče.

Velikosti intenzit elektrických polí $E_1(x)$ a $E_2(x)$ v závislosti na poloze x mezi vodiči získáme dosazením správné vzdálenosti r do vztahu (2.211). Pro tyto vzdálenosti platí $r_1 = x$ a $r_2 = d - x$, viz obrázek 2.61. Jednotlivé velikosti elektrických polí E_1 a E_2 a jejich celková velikost $E = E_1 + E_2$ pak jsou:

$$E_1(x) = \frac{\tau}{2\pi x \epsilon_0}, \quad E_2(x) = \frac{\tau}{2\pi(d-x) \epsilon_0}, \quad E(x) = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right). \quad (2.214)$$



Obrázek 2.61: Vzdálenosti r_1 a r_2 elementu délky dl od středů jednotlivých vodičů.

Po dosazení za $E(x)$ z (2.214) do (2.213) snadno dopočteme napětí U :

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \int_r^{d-r} \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} dx = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} [\ln x - \ln(d-x)]_r^{d-r} \\
 &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{d-r}{r} - \ln \frac{r}{d-r} \right) = \frac{\tau}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-r}{r}.
 \end{aligned} \tag{2.215}$$

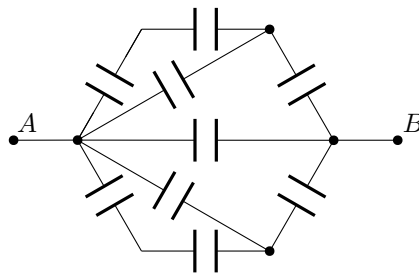
Kapacitu C vedení délky l určíme jednoduše z definice, $C = \frac{Q}{U}$, kde za náboj dosadíme celkový náboj na vedení, tzn. $Q = \tau l$:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{d-r}{r}} = 5,0 \cdot 10^{-8} F = 50 nF, \tag{2.216}$$

kde jsme použili hodnotu permitivity vakua $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} F.m^{-1}$.

2.7.5 2.34 Skládání kapacit

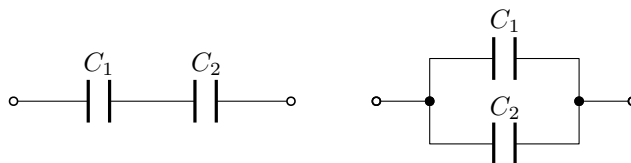
Určete kapacitu mezi body A, B soustavy kondenzátorů na obrázku 2.62. Všechny kondenzátory mají stejnou kapacitu C .



Obrázek 2.62: Skládání kapacit kondenzátorů.

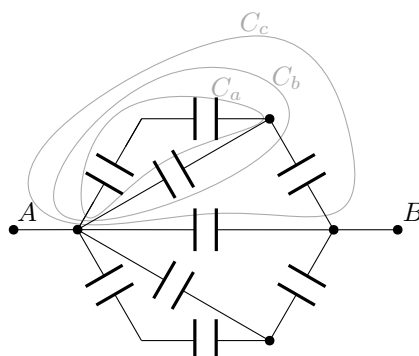
Řešení: Celkovou kapacitu C_{AB} určíme postupným složením sériově a paralelně zapojených příslušných kondenzátorů. Vzorce pro celkovou kapacitu C sériového, resp. paralelního, zapojení kondenzátorů o kapacitách C_1 a C_2 jsou

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \quad \text{resp.} \quad C = C_1 + C_2. \tag{2.217}$$



Obrázek 2.63: Skládání kapacit C_1 a C_2 . Vlevo je sériové zapojení a vpravo paralelní.

V kondenzátorové síti si označíme hodnotu kapacity daných skupin rezistorů jako C_a , C_b a C_c , viz obrázek 2.64.



Obrázek 2.64: Skládání kapacit kondenzátorů.

Kondenzátory ve skupině C_a jsou sériově spojené; skupinu C_b pak vytvoří k nim paralelně připojený kondenzátor a C_c získáme sériovým připojením dalšího kondenzátoru. Použitím vzorců pro skládání kapacit dospějeme ke vztahům:

$$C_a = \frac{C}{2}, \quad C_b = C_a + C, \quad \frac{1}{C_c} = \frac{1}{C_b} + \frac{1}{C}. \quad (2.218)$$

Celková kapacita C_{AB} je dána paralelním zapojením dvou kondenzátorů o kapacitách C_c a jednoho o kapacitě C :

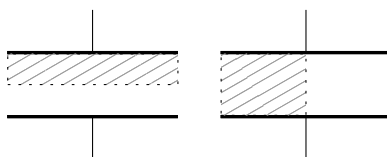
$$C_{AB} = C + 2C_c. \quad (2.219)$$

Po dosazení a úpravě dostaneme výsledek

$$C_{AB} = \frac{11}{5}C. \quad (2.220)$$

2.7.6 2.35 Kondenzátor s polovičním dielektrikem

Deskový kondenzátor je z poloviny zaplněn dielektrikem o relativní permitivitě ϵ_r a to a) rovnoběžně s deskami, b) kolmo k deskám (viz obrázek 2.65). Jak se změní jeho kapacita?



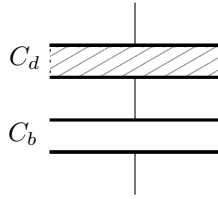
Obrázek 2.65: Skládání kapacit kondenzátorů s dielektrikem.

Řešení: Kapacita deskového kondenzátoru s dielektrikem o relativní permitivitě ϵ_r je dána vztahem

$$C = \epsilon_r \frac{\epsilon_0 S}{d}, \quad (2.221)$$

kde S je plocha jednotlivých desek a d je vzdálenost desek.

Kondenzátor s dielektrikem napůl podélně. Kondenzátor si myšleně rozdělíme na dva sériově zapojené kondenzátory, viz obrázek 2.66.



Obrázek 2.66: Sériové složení polovičních kondenzátorů o kapacitách C_d a C_b , z nichž kondenzátor C_d obsahuje dielektrikum.

Vztah pro sériové složení kondenzátorů C_d a C_b je

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_d} + \frac{1}{C_b}, \quad (2.222)$$

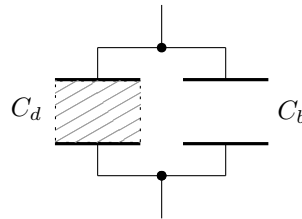
kde jednotlivé kapacity jsou podle (2.221)

$$C_d = \varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d}{2}} = 2\varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 S}{d} = 2\varepsilon_r C_0, \quad C_b = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d}{2}} = 2C_0, \quad (2.223)$$

jelikož plocha S kondenzátorů zůstala stejná a vzdálenost desek se zmenšila na polovinu $\frac{d}{2}$. Po dosazení obdržíme výsledek:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2\varepsilon_r C_0} + \frac{1}{2C_0} = \frac{1 + \varepsilon_r}{2\varepsilon_r C_0}, \quad C = \frac{2\varepsilon_r}{1 + \varepsilon_r} C_0. \quad (2.224)$$

Kondenzátor s dielektrikem napůl příčně. Kondenzátor si myšleně rozdělíme na dva paralelně zapojené kondenzátory, viz obrázek 2.67.



Obrázek 2.67: Paralelní složení polovičních kondenzátorů o kapacitách C_d a C_b , z nichž kondenzátor C_d obsahuje dielektrikum.

Vztah pro paralelní složení kondenzátorů C_d a C_b je

$$C = C_d + C_b, \quad (2.225)$$

kde jednotlivé kapacity jsou podle (2.221)

$$C_d = \varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 \frac{S}{2}}{d} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{2d} = \frac{\varepsilon_r}{2} C_0, \quad C_b = \frac{\varepsilon_0 \frac{S}{2}}{d} = \frac{1}{2} C_0, \quad (2.226)$$

jelikož vzdálenost desek kondenzátorů d zůstala stejná a plocha desek se zmenšila na polovinu $\frac{S}{2}$. Po dosazení obdržíme výsledek:

$$C = \frac{\varepsilon_r}{2} C_0 + \frac{1}{2} C_0 = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} C_0. \quad (2.227)$$

Dodatek: Příklad lze spočítat také „více z definice“ pomocí určení velikosti intenzity elektrického pole E v kondenzátoru, naintegrovaní napětí U a z definice kapacity C (podobně jako v příkladu 2.36 v sekci 2.7.7. Již brzy.

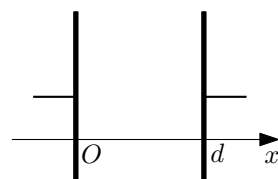
2.7.7 2.36 Kondenzátor s měnícím se dielektrikem

Prostor mezi deskami kondenzátoru je zaplněn dielektrikem, jehož permitivita se mění lineárně od hodnoty ε_1 u jedné desky k ε_2 u druhé desky. Určete jeho kapacitu.

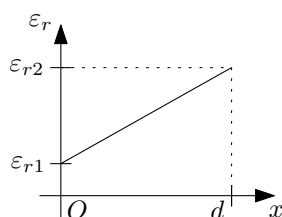
Řešení: Pracujme s relativními permitivitami místo absolutních, tzn. budeme počítat s konstantami ε_{r1} a ε_{r2} , kde $\varepsilon_1 = \varepsilon_{r1}\varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_{r2}\varepsilon_0$. Funkce relativní permitivity $\varepsilon_r(x)$ mezi deskami kondenzátoru v řeci kartézské souřadnice x zavedené jako na obrázku 2.68 vypadá následovně:

$$\varepsilon_r(x) = \varepsilon_{r1} + \frac{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}}{d}x, \quad (2.228)$$

viz obrázek 2.69. Získáme ji (buď uhodnutím anebo) řešením rovnic $\varepsilon_r(0) = \varepsilon_{r1}$ a $\varepsilon_r(d) = \varepsilon_{r2}$ pro obecnou lineární funkci $\varepsilon_r(x) = ax + b$.



Obrázek 2.68: Kartézská souřadnice x mezi deskami kondenzátoru.



Obrázek 2.69: Funkce relativní permitivity $\varepsilon_r(x)$.

Velikost intenzity elektrického pole v dielektriku E je zmenšena oproti intenzitě ve vakuu E_0 jako $E = \frac{1}{\varepsilon_r}E_0$. Napětí mezi deskami kondenzátoru získáme z definice jako práci sil v kondenzátoru na jednotkový náboj:

$$U = \frac{1}{q} \int_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_l E dl, \quad (2.229)$$

při úpravách jsme využili toho, že jediná síla působící v kondenzátoru je elektrická síla $\vec{F} = q\vec{E}$ a uvažujeme-li myšlenou dráhu l , po které integrujeme, jako úsečku kolmo spojující desky kondenzátoru, pak je směr intenzity elektrického pole \vec{E} a směr délkového elementu $d\vec{l}$ stejný a tedy skalární součin se redukuje na součin velikostí těchto vektorů, $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E dl$.

Uvažujeme-li opět kartézskou souřadnici jako na obrázku 2.68, pak úsečka l je dána rozsahem souřadnic $x \in \langle 0, d \rangle$ a délkový element je $dl = dx$. Vlastní výpočet napětí U je pak následující:

$$\begin{aligned} U &= \int_0^d \frac{1}{\varepsilon_r(x)} E_0 dx = \int_0^d \frac{E_0}{\varepsilon_{r1} + \frac{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}}{d}x} dx = E_0 \left[\frac{d}{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}} \ln \left(\varepsilon_{r1} + \frac{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}}{d}x \right) \right]_0^d \\ &= \frac{E_0 d}{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}} \ln \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} = \frac{U_0}{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}} \ln \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}, \end{aligned} \quad (2.230)$$

kde jsme původní napětí na deskovém kondenzátoru bez dielektrika označili jako $U_0 = E_0 d$. Po dosazení do vzorce pro definici kapacity C dostaneme

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{U_0} \frac{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}}{\ln \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}} = \frac{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}}{\ln \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}} C_0, \quad (2.231)$$

kde jsme původní kapacitu kondenzátoru bez dielektrika označili jako $C_0 = \frac{Q}{U_0}$.

Dodatek: Příklad lze také počítat jako sériové složení nekonečně kondenzátorů, tedy podobně (ale komplikovaněji a integrováním) jako v příkladu 2.35 v sekci 2.7.6. Již brzy.

2.7.8 2.37 Energie kondenzátoru

Deskový vzduchový kondenzátor má kapacitu C_0 . Je připojen ke zdroji napětí U_0 a je na něm nashromážděna energie W_0 . Potom je ponořen do oleje o relativní permitivitě ε_r , přičemž zůstává připojen ke zdroji napětí. Jeho energie se změní na W_1 . Nakonec jej odpojíme od zdroje a vyjmeme z oleje. Bude na něm napětí U_2 a energie W_2 . Určete W_1 , U_2 , W_2 .

Řešení: Energie W a náboj Q na kondenzátoru jsou dány následujícími vzorci

$$W = \frac{1}{2}CU^2, \quad Q = CU, \quad (2.232)$$

kde C je kapacita kondenzátoru a U je napětí na kondenzátoru. Původní energie a náboj nashromážděné na kondenzátoru je

$$W_0 = \frac{1}{2}C_0U_0^2, \quad Q_0 = C_0U_0. \quad (2.233)$$

Po ponoření do oleje s relativní permitivitou ε_r se kapacita změní na $C_1 = \varepsilon_r C_0$, napětí zůstává stejné, jelikož kondenzátor je stále připojen ke zdroji, tzn. $U_1 = U_0$. Energie W_1 a náboj Q_1 tedy je

$$W_1 = \frac{1}{2}C_1U_1^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_r C_0U_0^2 = \varepsilon_r W_0, \quad Q_1 = C_1U_1 = \varepsilon_r C_0U_0 = \varepsilon_r Q_0. \quad (2.234)$$

Po odpojení ze zdroje musí náboj na kondenzátoru zůstat neměnný, tzn. $Q_2 = Q_1$. Po vyjmutí z oleje se jeho kapacita vrátí na původní hodnotu, $C_2 = C_0$. Výsledná energie W_2 a napětí na kondenzátoru U_2 je

$$W_2 = \frac{1}{2}C_2U_2^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_r^2 C_0U_0^2 = \varepsilon_r^2 W_0, \quad U_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_1}{C_0} = \frac{\varepsilon_r C_0 U_0}{C_0} = \varepsilon_r U_0. \quad (2.235)$$

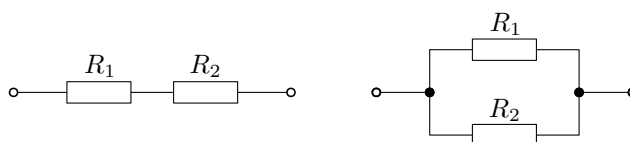
Kapitola 3

Stacionární elektrické pole

3.1 Přehled vzorců

- **Skládání odporů:** Celkový odpor R [Ω] sériově, resp. paralelně, zapojených odporů R_1 [Ω] a R_2 [Ω] je dán následujícími vztahy:

$$R = R_1 + R_2, \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (3.1)$$

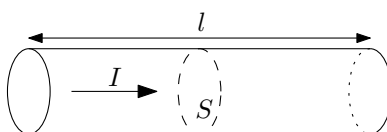


Obrázek 3.1: Sériově zapojené (vlevo), resp. paralelně zapojené (vpravo), rezistory o odporech R_1 a R_2 .

- **Odpor „válcového“ vodiče:**

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (3.2)$$

kde ρ [$\Omega \cdot m$] je rezistivita materiálu vodiče, l [m] je jeho délka a S [m^2] je jeho průřez.



Obrázek 3.2: Proud skrze válcový vodič délky l a průřezu S .

- **Ohmův zákon:**

$$U = RI, \quad (3.3)$$

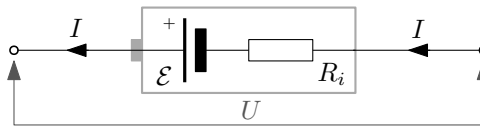
kde R [Ω] je odpor (rezistoru, spotřebiče, obvodu, atd.), I [A] je proud (tekoucí rezistorem, atd.) a U [V] je napětí (přiložené na rezistoru, atd.; resp. úbytek napětí).

- **Vnitřní odpor baterie:**

$$U = \mathcal{E} - R_i I, \quad (3.4)$$

kde \mathcal{E} [V] je elektromotorické napětí baterie, R_i [Ω] je vnitřní odpor baterie, U [V] je svorkové napětí na baterii a I [A] je proud procházející baterií. Při průchodu proudem

baterií dochází na vnitřním odporu k úbytku napětí a tedy svorkové napětí naměřené na baterii je o tento úbytek zmenšené oproti napětí elektromotorickému.



Obrázek 3.3: Baterie o elektromotorickém napětí \mathcal{E} s vnitřním odporem R_i a s protékajícím proudem I .

- **Jouleovo teplo:** Tepelný výkon generovaný na rezistoru (spotřebiči, atd.) o odporu R [Ω] s protékajícím proudem I [A] je

$$P_{tep} = RI^2. \quad (3.5)$$

- **Kirchhoffovy zákony:** První Kirchhoffův zákon říká, že suma proudů vtékajících a vytékajících do a z uzlu je nulová. Druhý Kirchhoffův zákon tvrdí, že suma napětí na zdrojích podél smyčky se musí rovnat sumě úbytků napětí na rezistorech v téže smyčce.

$$\sum_{\alpha} I_{\alpha} = 0, \quad \sum_{\alpha} U_{\alpha} = \sum_{\beta} R_{\beta} I_{\beta}. \quad (3.6)$$

Podrobněji (hlavně kvůli znaménkové konvenci) viz sekce 3.6.

- **Definice proudu:** Proud je náboj proteklý daným místem (danou plochou) za jednotku času:

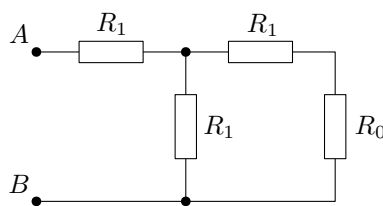
$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (3.7)$$

Jednotky: proud I [A] = [$C \cdot s^{-1}$], náboj Q [C], čas t [s].

3.2 Skládání odporů

3.2.1 3.4 Skládání odporů I

V obvodu na obrázku 3.4 je dán odpor R_0 . Určete odpor R_1 tak, aby vstupní odpor mezi body A , B byl opět R_0 .



Obrázek 3.4: Obvod s odpory R_0 a R_1 .

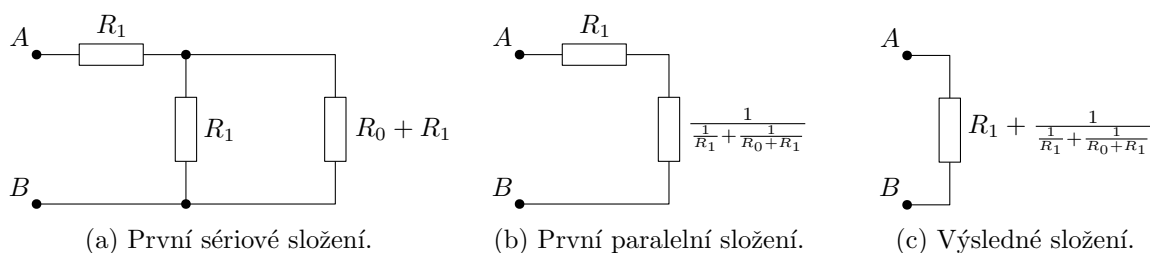
Řešení: Použijeme vzorce pro sériové, resp. paralelní, zapojení rezistorů o hodnotách odporu R_1 a R_2 . Celkový odpor R je pak

$$R = R_1 + R_2, \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (3.8)$$

Celkový odpor mezi body A a B je

$$R_{AB} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1 + R_0}} = \frac{3R_1^2 + 2R_1R_0}{2R_1 + R_0}, \quad (3.9)$$

kde na obrázku 3.5 je znázorněné postupné skládání odporů.



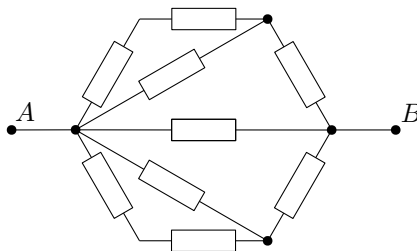
Obrázek 3.5: Znázorněné postupné skládání sériově a paralelně spojených rezistorů.

Z požadavku v zadání $R_{AB} = R_0$ plyne

$$R_1 = \frac{R_0}{\sqrt{3}}. \quad (3.10)$$

3.2.2 3.5 Skládání odporů II

Určete odpor mezi body A, B sítě na obrázku 3.6. Všechny odpory mají touž velikost R .

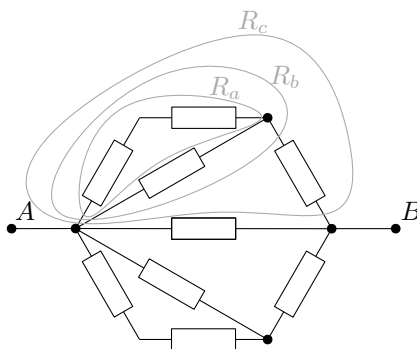


Obrázek 3.6: Všechny odpory mají stejnou velikost R .

Řešení: Celkový odpor R_{AB} určíme postupným složením sériově a paralelně zapojených příslušných odporů. Vzorce pro celkový odpor R sériového, resp. paralelního, zapojení rezistorů o hodnotách odporu R_1 a R_2 jsou

$$R = R_1 + R_2, \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (3.11)$$

V rezistorové síti si označíme hodnotu odporu konkrétních skupin rezistorů jako R_a, R_b a R_c , viz obrázek 3.7.



Obrázek 3.7: Celkovou hodnotu odporu zakroužkovaných rezistorů označíme R_a, R_b a R_c .

Rezistory ve skupině R_a jsou sériově spojené; skupinu R_b pak vytvoří k nim paralelně připojený rezistor a R_c získáme sériovým připojením dalšího rezistoru. Použitím vzorců pro skládání rezistorů dospějeme ke vztahům:

$$R_a = 2R, \quad \frac{1}{R_b} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R}, \quad R_c = R_b + R. \quad (3.12)$$

Celkový odpor R_{AB} je dán paralelním zapojením dvou rezistorů o hodnotách R_c a jednoho o velikosti R :

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_c} = \frac{1}{R} + \frac{2}{R_c}. \quad (3.13)$$

Po dosazení a úpravě dostaneme výsledek

$$R_{AB} = \frac{5}{11}R. \quad (3.14)$$

3.3 Odpor vodičů

3.3.1 3.1 Poměrné vodiče

Na třech stejně dlouhých úsecích se změní průřez vodiče v poměru $S_1 : S_2 : S_3 = 1 : 2 : 3$. Jak se na těchto úsecích změní napětí?

Řešení: Odpor R válcového vodiče je dán vztahem

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (3.15)$$

kde ρ je rezistivita materiálu vodiče, l je jeho délka a S je průřez. Odpory jednotlivých úseků tedy budou v převráceném poměru než poměry průřezů: $R_1 : R_2 : R_3 = 6 : 3 : 2$. Proud jedním vodičem musí být všude stejný, takže z Ohmova zákona máme pro úbytek napětí na jednotlivých úsecích vztah

$$U_{1,2,3} = R_{1,2,3}I, \quad (3.16)$$

poměry napětí jsou tedy stejné jako poměry odporů, tzn. $U_1 : U_2 : U_3 = 6 : 3 : 2$.

3.3.2 3.2 Napnutý drát

Jak se změní odpor měděného drátu, napneme-li jej tak, že se prodlouží o $\alpha = 0,1\%$?

Řešení: Odpor R válcového vodiče je dán vztahem

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (3.17)$$

kde ρ je rezistivita materiálu vodiče, l je jeho délka a S je průřez. Napneme-li drát o $\alpha = 0,1\%$, zvětší se jeho délka na $l' = (1 + \alpha)l$. Jelikož objem materiálu, ze kterého je vodič vyroben, musí zůstat stejný, musí se zmenšit jeho průřez:

$$V = Sl = S'l' \quad \longrightarrow \quad S' = S \frac{l}{l'} = \frac{S}{1 + \alpha}. \quad (3.18)$$

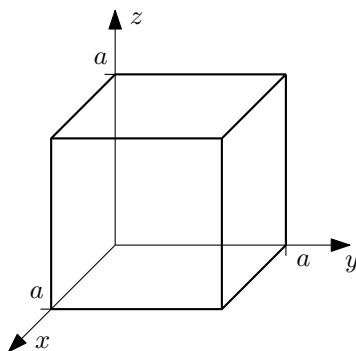
Odpor vodiče se pak změní na

$$R' = \rho \frac{l'}{S'} = \rho \frac{l}{S} (1 + \alpha)^2 = R(1 + \alpha)^2 \approx R(1 + 2\alpha), \quad (3.19)$$

kde jsme v poslední rovnosti zanedbali člen α^2 . Tzn. odpor se změní přibližně o $2\alpha = 0,2\%$.

3.3.3 3.3 Odporová krychle

Krychle o hraně a je umístěna tak, že jeden roh leží v počátku souřadné soustavy a celá krychle v oktantu určeném kladnými směry os. Rezistivita materiálu se mění ve směru osy x lineárně jako $\rho = \rho_0(1 + x/x_0)$. Určete odpor mezi stěnami krychle rovnoběžnými s osami y, z a osami x, z .



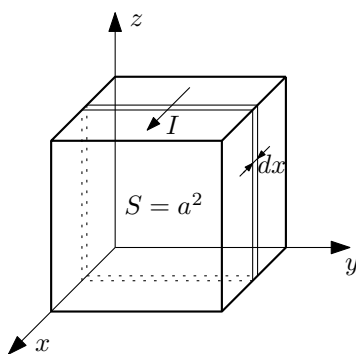
Obrázek 3.8: Odporová krychle.

Řešení: Chtěli bychom použít vzorec pro odpor R válcového vodiče dle vztahu

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (3.20)$$

kde ρ je rezistivita materiálu vodiče, l je jeho délka a S je průřez. Rezistivita se ovšem v průběhu vodiče mění. Musíme tedy krychli rozdělit na vhodně zvolené části a jejich odpor složit pomocí vztahů pro skládání odporů.

Podívejme se nejprve na případ odporu mezi stěnami krychle rovnoběžnými s osami y, z . Proud zde poteče mezi zadní a přední stěnou, viz obrázek 3.9, a rezistivita se tedy mění podél vodiče.



Obrázek 3.9: Odporová krychle.

Krychli si proto rozdělíme na tenké desky o tloušťce dx kolmé na směr proudu. V těchto deskách je rezistivita konstantní a můžeme spočítat jejich malý odpor dR jako

$$dR(x) = \rho(x) \frac{dl}{S} = \rho(x) \frac{dx}{a^2} = \rho_0 \left(1 + \frac{x}{x_0} \right) \frac{dx}{a^2}, \quad (3.21)$$

kde jsme dosadili za malou délku vodiče $dl = dx$ a průřez vodiče $S = a^2$. Desky jsou pak všechny spojeny sériově a můžeme použít vzorec pro sériové zapojení odporů, který zobecníme

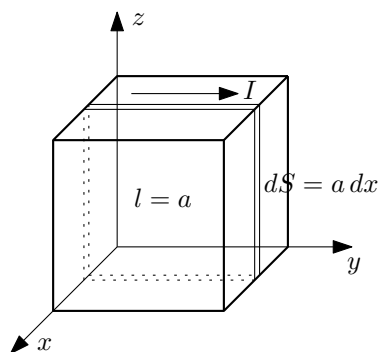
na spojitý případ:

$$R = R_1 + R_2 \quad \longrightarrow \quad R = \sum_i R_i \quad \longrightarrow \quad R = \int dR. \quad (3.22)$$

Konkrétní výpočet pak spočívá v naintegrovaní odporů všech desek, které jsou na souřadnicích $x \in \langle 0, a \rangle$:

$$R = \int_{\text{desky}} dR = \int_0^a dR(x) = \frac{\rho_0}{a^2} \int_0^a 1 + \frac{x}{x_0} dx = \frac{\rho_0}{a^2} \left(a + \frac{a^2}{2x_0} \right). \quad (3.23)$$

Postup pro určení odporu krychle mezi stěnami rovnoběžnými s osami x a z bude obdobný. Proud nyní teče mezi levou a pravou stěnou, viz obrázek 3.10, a rezistivita se mění napříč vodičem.



Obrázek 3.10: Odporová krychle.

Krychli si tedy rozdělíme na tenké desky rovnoběžné se směrem proudu. Desky jsou uloženy paralelně vedle sebe a jejich celkový odpor bude dán vztahem pro paralelní zapojení odporů:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{R} = \int d\left(\frac{1}{R}\right), \quad (3.24)$$

kde jsme opět zobecnili standardní vzorec pro dva paralelně zapojené odpory na spojitý případ¹. Převrácená hodnota odporu válcového vodiče je

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho} \frac{S}{l} \quad (3.25)$$

a jeho infinitezimální verze je poté

$$d\left(\frac{1}{R}\right)(x) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{dS}{l} = \frac{1}{\rho(x)} \frac{a dx}{a} = \frac{dx}{\rho_0 \left(1 + \frac{x}{x_0}\right)}, \quad (3.26)$$

kde délka vodiče je nyní $l = a$ a jeho malý průřez $dS = a dx$. Nyní již zbývá jen integrace přes všechny desky jako v minulém případě:

$$\frac{1}{R} = \int_{\text{desky}} d\left(\frac{1}{R}\right) = \int_0^a d\left(\frac{1}{R}\right)(x) = \frac{1}{\rho_0} \int_0^a \frac{dx}{1 + \frac{x}{x_0}} = \frac{x_0}{\rho_0} \ln \left(1 + \frac{a}{x_0}\right). \quad (3.27)$$

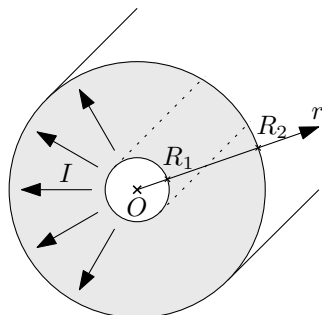
Převrácená hodnota je pak hledaným výsledkem:

$$R = \frac{\rho_0}{x_0} \frac{1}{\ln \left(1 + \frac{a}{x_0}\right)}. \quad (3.28)$$

¹V případě spojitého zapojení paralelních rezistorů je potřeba, aby odpor jednotlivých rezistorů šel limitně do nekonečna, tzn. aby jeho převrácená hodnota byla infinitezimální veličinou. Zde máme desku, jejíž průřez je nekonečně malý, takže odpor této desky je nekonečně velký a jeho převrácená hodnota je tedy infinitezimální veličinou vhodnou k integrování.

3.3.4 3.8 Izolace v koaxiálním kabelu

Stíněný koaxiální kabel délky $l = 10\text{ m}$ má poloměr vodiče $R_1 = 1\text{ mm}$ a stínění $R_2 = 10\text{ mm}$. Izolace je z polystyrolu o rezistivitě $\rho = 10^{17}\ \Omega\cdot\text{cm}$ a dielektrické pevnosti $E_{max} = 250\text{ kV}\cdot\text{cm}^{-1}$. Určete maximální napětí mezi vodičem a stíněním, svodový odpor a proud při tomto napětí.



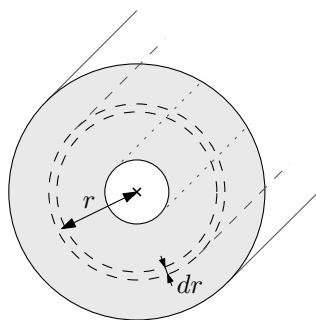
Obrázek 3.11: Příčný řez válcovou izolací.

Řešení: Spočteme nejprve svodový odpor koaxiálního kabelu. Bude se jednat o celkový odpor vodiče ve tvaru dutého válce, kde ovšem proud nepoteče podél kabelu ale napříč mezi vnitřní a vnější válcovou plochou. Chtěli bychom použít vzorec pro odpor R válcového vodiče dle vztahus

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (3.29)$$

kde ρ je rezistivita materiálu vodiče, l je jeho délka a S je průřez. Zde se ovšem mění průřez vodiče v závislosti na vzdálenosti r od osy koaxiálního kabelu, $S(r) = 2\pi r l$. Musíme tedy rozdělit vodič na vhodně zvolené části, jejichž rezistivita, délka a průřez bude konstantní, a odpory těchto částí potom složit.

Zde se přirozeně nabízí válcovou izolaci rozdělit na tenké válcové slupky o poloměru r tloušťky dr , kde se průřez vodiče mění jen zanedbatelně², viz obrázek 3.12.



Obrázek 3.12: Tenká válcová slupka o tloušťce dr a odporu dR .

Malý odpor dR této válcové slupky je

$$dR(r) = \rho \frac{dl}{S(r)} = \rho \frac{dr}{2\pi r l}. \quad (3.30)$$

²Přesněji řečeno půjde o změnu 2. řádu, která se při následné integraci neprojeví a dostaneme tedy přesný výsledek.

Jednotlivé malé válcové odpory jsou pak spojeny sériově a můžeme použít vzorec pro sériové zapojení odporů, který zobecníme na spojitý případ:

$$R = R_1 + R_2 \quad \longrightarrow \quad R = \sum_i R_i \quad \longrightarrow \quad R = \int dR. \quad (3.31)$$

Konkrétní výpočet pak spočívá v naintegrovaní odporů všech válečků, které jsou na souřadnicích $r \in \langle R_1, R_2 \rangle$:

$$R = \int_{R_1}^{R_2} dR(r) = \frac{\rho}{2\pi l} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{R_2}{R_1} = 3,66 \cdot 10^{13} \Omega. \quad (3.32)$$

Dielektrická pevnost E_{max} udává, do jaké maximální hodnoty intenzity elektrického pole si materiál udrží své izolační vlastnosti. V příkladu 2.30 (v sekci 2.7.2) jsme odvodili velikost intenzity elektrického pole okolo nabitého válcového vodiče a napětí mezi poloměry R_1 a R_2 jako:

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi r l \varepsilon_0}, \quad U = \frac{Q}{2\pi l \varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad (3.33)$$

kde Q je celkový náboj na vodiči a ε_0 je permitivita vakua. Nyní je ale kondenzátor vyplněn polystyrolem a musíme tudíž permitivitu vakua ε_0 nahradit za permitivitu polystyrolu ε (na výsledku to ale vůbec nic nezmění). Vidíme, že intenzita elektrického pole je nepřímo úměrná vzdálenosti od osy válce, takže největší intenzita bude v bezprostřední blízkosti vodiče a tato musí být menší než dielektrická pevnost $E(R_1) \leq E_{max}$. Nyní jen dosadíme za náboj Q pomocí napětí U z (3.33),

$$E_{max} \geq E(R_1) = \frac{Q}{2\pi R_1 l \varepsilon} = \frac{U}{R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}}, \quad (3.34)$$

a vyjádřením napětí U dostaneme výsledné maximální napětí, při kterém ještě izolace izoluje:

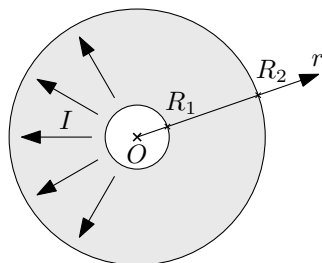
$$U_{max} = E_{max} R_1 \ln \frac{R_2}{R_1} \doteq 57,6 \text{ kV}. \quad (3.35)$$

Proud izolací při maximálním napětí U_{max} je jednoduše z Ohmova zákona

$$I = \frac{U_{max}}{R} = 1,57 \cdot 10^{-9} \text{ A} = 1,57 \text{ nA}. \quad (3.36)$$

3.3.5 3.9 Svodový odpor kulového kondenzátoru

Určete svodový odpor kulového kondenzátoru ($R_1 = 10 \text{ cm}$, $R_2 = 20 \text{ cm}$), je-li prostor mezi elektrodami zaplněn olejem o měrném odporu $\rho = 1,0 \cdot 10^{16} \Omega \cdot \text{cm}$.



Obrázek 3.13: Řez kulovým kondenzátorem.

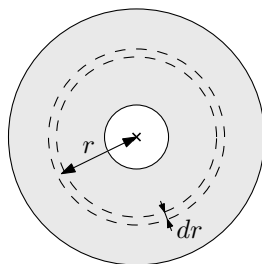
Řešení: Řešení je velmi podobné první části příkladu 3.8 v předchozí sekci 3.3.4. Zde chceme určit celkový odpor vodiče ve tvaru duté koule, kde svodový proud teče mezi vnitřní a vnější

kulovou elektrodou kondenzátoru. Chtěli bychom použít vzorec pro odpor R válcového vodiče dle vztahu

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (3.37)$$

kde ρ je rezistivita materiálu vodiče, l je jeho délka a S je průřez. Zde se ovšem mění průřez vodiče v závislosti na vzdálenosti r od společného středu kulových vodičů, $S(r) = 4\pi r^2$. Musíme tedy rozdělit vodič na vhodně zvolené části, jejichž rezistivita, délka a průřez bude konstantní, a odpory těchto částí potom složit.

Rozdělíme kulovou izolaci na tenké kulové slupky o poloměru r tloušťky dr , kde se průřez vodiče mění jen zanedbatelně³, viz obrázek 3.14.



Obrázek 3.14: Tenká kulová slupka o tloušťce dr a odporu dR .

Malý odpor dR této kulové slupky je

$$dR = \rho \frac{dl}{S} = \rho \frac{dr}{4\pi r^2}. \quad (3.38)$$

Jednotlivé malé kulové odpory jsou pak spojeny sériově a můžeme použít vzorec pro sériové zapojení odporů, který zobecníme na spojitý případ:

$$R = R_1 + R_2 \quad \longrightarrow \quad R = \sum_i R_i \quad \longrightarrow \quad R = \int dR. \quad (3.39)$$

Konkrétní výpočet pak spočívá v naintegrovaní odporů všech slupek, které jsou na souřadnicích $r \in \langle R_1, R_2 \rangle$:

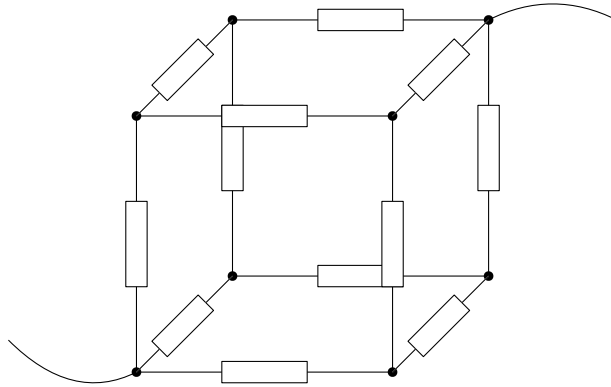
$$R = \int_{R_1}^{R_2} dR(r) = \frac{\rho}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \doteq 3,0 \cdot 10^{13} \Omega. \quad (3.40)$$

3.4 Ohmův zákon

3.4.1 3.6 Krychle z odporů

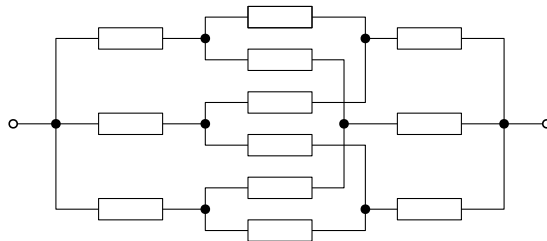
V každé hraně krychle je odpor R . Určete výsledný odpor mezi dvěma protilehlými vrcholy krychle.

³Stejná poznámka jako u minulého příkladu. Půjde zde o změnu průřezu 2. řádu, která se při následné integraci neprojeví a dostaneme tedy přesný výsledek.



Obrázek 3.15: Krychle z odporů v hranách.

Řešení: V tomto příkladě již nemůžeme použít formule pro sériové a paralelní zapojení rezistorů. Krychle s odpory v hranách se nedá rozložit na části sériově a paralelně zapojených rezistorů, které pak jen složíme dohromady (jako jsme to udělali např. v příkladu 3.5 v sekci 3.2.2). Pro ilustraci se podívejme na schéma obvodu překreslené do roviny na obrázku 3.16.

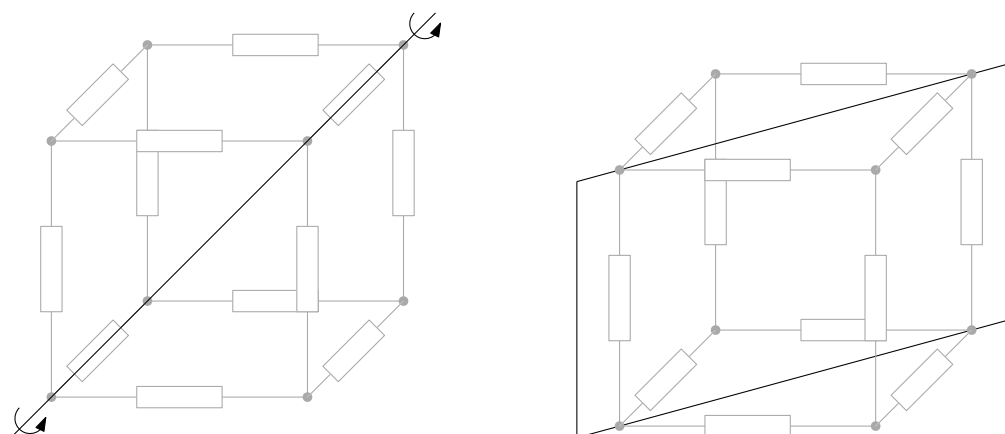


Obrázek 3.16: Odpory v hranách krychle zakreslené v rovině.

Strategie určení odporu bude následující. Ze symetrie určíme proudy tekoucí na jednotlivých rezistorech. Ty pak použijeme k výpočtu celkového úbytku napětí U po průchodu rezistorovou sítí pomocí Ohmova zákona. Celkový odpor krychle R_c pak bude dán opět Ohmovým zákonem:

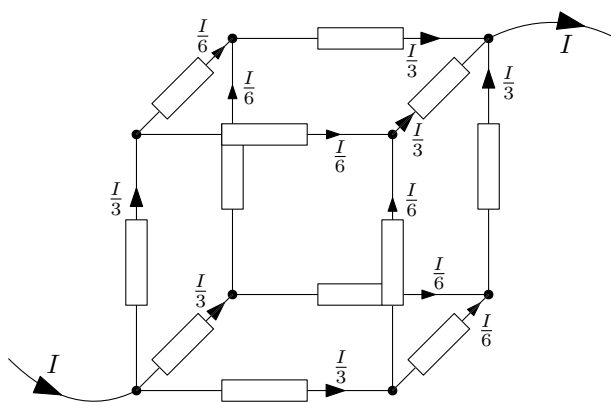
$$R_c = \frac{U}{I}. \quad (3.41)$$

Z důvodu symetrie se proud I vtékající do „vstupního“ uzlu krychle rozdělí na třetiny $\frac{I}{3}$ a stejně tak se musí proud I vytékající z „výstupního“ uzlu složit ze stejných proudů $\frac{I}{3}$. Na zbylých rezistorech se musí také z důvodu symetrie dělit dále na poloviny na $\frac{I}{6}$. Výsledné rozdělení proudů skrz jednotlivé hrany je znázorněné na obrázku 3.18. Využití symetrie jsou znázorněné na obrázku 3.17.



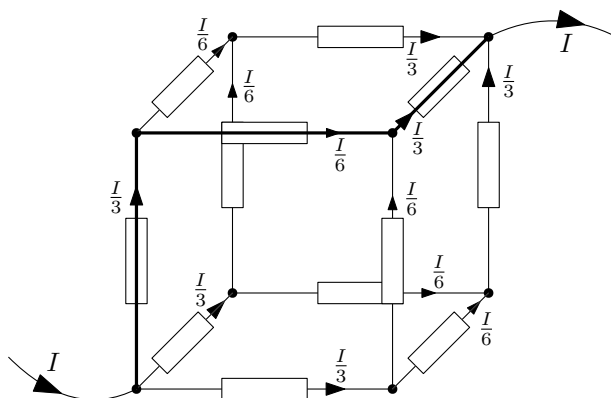
(a) Symetrie vůči diskrétní rotaci o násobky úhlu 120° ($\frac{2\pi}{3}$ rad) okolo tělesové uhlopříčky. (b) Symetrie zrcadlení vůči rovině procházející stěnovou uhlopříčkou kolmo na danou stěnu.

Obrázek 3.17: Symetrie krychle ospravedlňující rozdělení proudů na třetiny $\frac{I}{3}$ (vlevo) a následně na poloviny $\frac{I}{6}$ (vpravo).



Obrázek 3.18: Proudů v jednotlivých hranách krychle.

Nyní jen vybereme cestu, po které se dostaneme ze vstupního uzlu krychle do výstupního. Na jednotlivých odporech spočteme úbytky napětí a tyto sečteme⁴. Cesta může být libovolná, ale prakticky ji vybereme co nejjednodušší, např. jako na obrázku 3.19.



Obrázek 3.19: Cesta skrze krychli ze vstupního do výstupního uzlu.

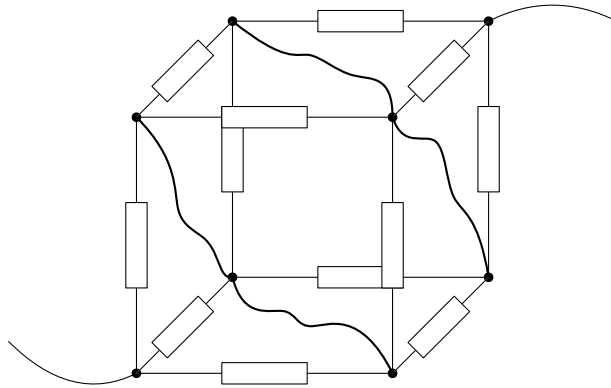
⁴Pokud by byla cesta taková, že jdeme proti směru tekoucího proudu, pak bychom příslušný úbytek odečítali.

Pak celkový úbytek je

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = R \frac{I}{3} + R \frac{I}{6} + R \frac{I}{3} = \frac{5R}{6} I = R_c I \quad (3.42)$$

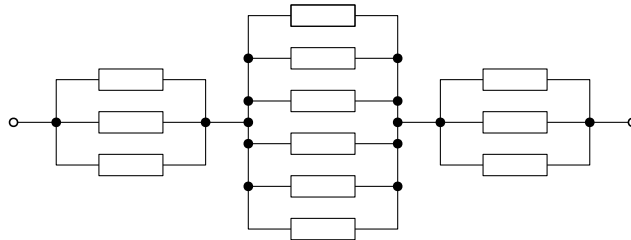
Celkový odpor tedy je $R_c = \frac{5}{6}R$.

Dodatek: Poté, co ze symetrie určíme proudy jednotlivými odpory, můžeme pro výpočet celkového odporu také použít následující „elektrotechnický trik“. V případě, že máme v obvodu místa se stejnou hladinou potenciálu, můžeme je propojit vodičem, aniž by tímto vodičem začal téci proud a nedojde tedy ani ke změně proudů kdekoli v obvodu. Tuto situaci máme za „prvními“ odpory u vstupního uzlu a před „posledními“ odpory výstupního uzlu. Spojme tato místa dvěma vodiči jako na obrázku 3.20.



Obrázek 3.20: Krychle s odpory s propojenými místy obvodu se stejnou úrovní potenciálu.

Pak budeme mít zapojení jako na obrázku 3.21, což není nic jiného než sériové zapojení skupin paralelně spojených rezistorů.



Obrázek 3.21: Zapojení s propojenými místy obvodu se stejnou úrovní potenciálu.

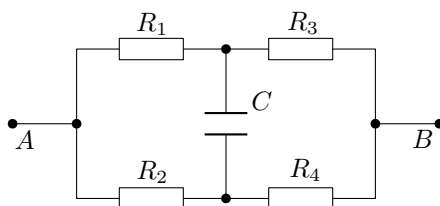
Celkový odpor pak spočteme jednoduše

$$R_c = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{5R}{6}. \quad (3.43)$$

Dodatek: Co s případem, kdy se nedají použít argumenty symetrie? Například, pokud bychom měli v hranách krychle obecné odpory R_1, \dots, R_{12} ? Pak musíme použít Kirchhoffovy zákony pro určení proudů jednotlivými větvemi, viz sekce 3.6. Máme dvanáct neznámých proudů jednotlivými hranami krychle I_1, \dots, I_{12} . Pro každý vrchol krychle dostaneme z prvního Kirchhoffova zákona zachování vtékajícího a vytékajícího proudu – celkem tedy osm rovnic, z těchto je 7 nezávislých. Zbylých pět rovnic obstará druhý Kirchhoffův zákon pro smyčky v obvodu – zde například smyčky tvořící pět stěn krychle (šestá stěna by dala závislou rovnici).

3.4.2 3.11 Úbytky napětí v obvodu

Na jaké napětí se nabije kondenzátor C na obrázku 3.22, je-li svorkové napětí mezi A , B rovno U_{AB} ?



Obrázek 3.22: Jaké napětí je na kondenzátoru C ?

Řešení: Napětí na kondenzátoru U_C bude dáno rozdílem potenciálů na horním, resp. dolním, přívodu kondenzátoru, $U_C = \varphi_h - \varphi_d$. Tyto potenciály získáme odečtením úbytků napětí U_1 , resp. U_2 , na rezistorech R_1 , resp. R_2 , od potenciálu φ_A v bodě A :

$$\varphi_h = \varphi_A - U_1, \quad \varphi_d = \varphi_A - U_2. \quad (3.44)$$

Pak je napětí na kondenzátoru

$$U_C = \varphi_h - \varphi_d = (\varphi_A - U_1) - (\varphi_A - U_2) = U_2 - U_1. \quad (3.45)$$

Úbytky na rezistorech získáme jednoduše z Ohmova zákona, $U = RI$:

$$U_1 = R_1 I_h, \quad U_2 = R_2 I_d, \quad (3.46)$$

kde I_h , resp. I_d , označuje proud horní, resp. dolní, větví obvodu. Proudů jednotlivými větvemi opět spočteme z Ohmova zákona, $I = \frac{U}{R}$. Jestliže je zde na větvi napětí U_{AB} , pak proud touto větví je jednoduše dán celkovým odporem větve. Zde:

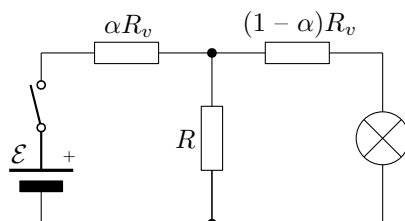
$$I_h = \frac{U_{AB}}{R_1 + R_3}, \quad I_d = \frac{U_{AB}}{R_2 + R_4}. \quad (3.47)$$

Po dosazení (3.46) a (3.47) do (3.45) obdržíme výsledek:

$$U_C = R_2 \frac{U_{AB}}{R_2 + R_4} - R_1 \frac{U_{AB}}{R_1 + R_3} = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)} U_{AB}. \quad (3.48)$$

3.4.3 3.10 Poškozené telegrafní vedení

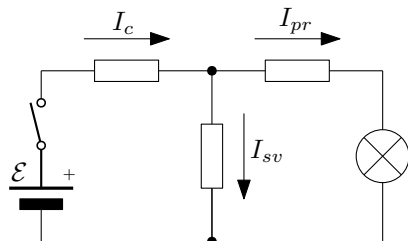
Homogenní telegrafní vedení je poškozeno tím, že je uzemněno odporem R . Dokažte, že proud na straně přijímacího přístroje bude nejmenší, bude-li porucha uprostřed vedení (odpor přístroje zanedbejte).



Obrázek 3.23: Telegrafní vedení o celkovém odporu R_v je v poškozeno svodovým odporem R .

Řešení: Schéma obvodu telegrafu je znázorněno na obrázku 3.23. Na vysílací straně se jedná o zdroj s vypínačem (telegrafním klíčem) a na přijímací straně se jedná o nějakou formu signalizace – žárovka, bzučák, elektromagnet, atp. Telegrafní vedení o celkovém odporu R_v je poškozeno svodovým odporem R v místě $\alpha = \frac{x}{l} \in \langle 0, 1 \rangle$, kde x je vzdálenost místa poruchy x od vysílače a l je celková délka vedení.

Proudy jednotlivými větvemi označme následovně: I_c – celkový proud protékající baterií, I_{sv} – proud protékající svodovým odporem, I_{pr} – proud protékající přijímacím přístrojem, viz obrázek 3.24.



Obrázek 3.24: Proudy v jednotlivých částech telegrafu – I_c , I_{sv} a I_{pr} .

Spočteme nyní proud skrze přijímací část telegrafu I_{pr} v závislosti na poloze poruchy α . Celkový proud I_c zjistíme snadno z Ohmova zákona, $\mathcal{E} = R_c I_c$, kde R_c je celkový odpor připojený ke zdroji telegrafu. Celkový odpor zjistíme pravidly pro skládání sériově a paralelně zapojených odporů jako

$$R_c = \alpha R_v + \frac{1}{\frac{1}{(1-\alpha)R_v} + \frac{1}{R}} = \frac{\alpha(1-\alpha)R_v^2 + RR_v}{(1-\alpha)R_v + R}. \quad (3.49)$$

Celkový proud I_c se musí rozdělit na svodový proud I_{sv} a proud přijímačem I_{pr} :

$$I_c = I_{pr} + I_{sv}, \quad \text{kde} \quad I_c = \frac{\mathcal{E}}{R_c} = \frac{(1-\alpha)R_v + R}{\alpha(1-\alpha)R_v^2 + RR_v} \mathcal{E}. \quad (3.50)$$

Proudy I_{pr} a I_{sv} k sobě vztáhneme opět pomocí Ohmova zákona, $U = RI$: úbytky napětí na svodovém odporu R a odporu vedení u přijímače $(1-\alpha)R_v$ se musí rovnat:

$$U = R I_{sv} = (1-\alpha)R_v I_{pr} \quad \longrightarrow \quad I_{sv} = \frac{(1-\alpha)R_v}{R} I_{pr}. \quad (3.51)$$

Po dosazení (3.51) do (3.50) dostaneme následující rovnici pro proud I_{pr} :

$$\frac{(1-\alpha)R_v + R}{\alpha(1-\alpha)R_v^2 + RR_v} \mathcal{E} = I_{pr} + \frac{(1-\alpha)R_v}{R} I_{pr}. \quad (3.52)$$

Vyjádřením I_{pr} máme

$$I_{pr} = \frac{R}{\alpha(1-\alpha)R_v^2 + RR_v} \mathcal{E}. \quad (3.53)$$

Tento výsledek zderivujeme

$$\frac{dI_{pr}}{d\alpha} = -\frac{(1-2\alpha)R_v^2 R}{[\alpha(1-\alpha)R_v^2 + RR_v]^2} \mathcal{E} \quad (3.54)$$

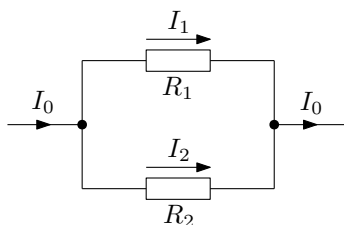
a hledáme, kdy je derivace nulová:

$$\frac{dI_{pr}}{d\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2}. \quad (3.55)$$

Proud přijímačem je tedy extrémální, pokud je svodový odpor v půlce vedení. Znaménka první derivace v okolí extrému říkají, že jde o minimum.

3.4.4 3.13 Rozvětvený proud

Proud I_0 se rozvětví mezi paralelní odpory R_1 , R_2 a pak se opět spojí (obrázek 3.25). Určete proudy I_1 , I_2 tekoucí po těchto odporech a ukažte, že rozdělení proudů odpovídá minimu rozptýleného tepelného výkonu.



Obrázek 3.25: Proud I_0 se rozvětví na proudy I_1 a I_2 .

Řešení: Z Ohmova zákona, $U = RI$, snadno získáme poměry proudů pro jednotlivé větve. Na obou odporech musí docházet ke stejnému úbytku napětí:

$$U = R_1 I_1 = R_2 I_2 \quad \longrightarrow \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}, \quad (3.56)$$

tedy že poměr proudů ve větvích je obrácený k poměru odporů jednotlivých větví. Součet proudů I_1 a I_2 musí dát celkový proud I_0 :

$$I_0 = I_1 + I_2. \quad (3.57)$$

Rovnice (3.56) a (3.57) dají následující vyjádření proudů I_1 a I_2 :

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_0, \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_0. \quad (3.58)$$

Ukážeme, že ztrátový tepelný výkon rozptýlený na rezistorech je nejmenší při tomto rozdělení proudů. Uvažujme, že by se proud rozdělil obecným způsobem:

$$I_1 = \alpha I_0, \quad I_2 = (1 - \alpha) I_0, \quad \alpha \in \langle 0, 1 \rangle. \quad (3.59)$$

Jouleovo teplo je dáno vztahem $P_{tep} = RI^2$ a tedy celkový rozptýlený výkon by byl

$$P_{tep}(\alpha) = P_{tep1} + P_{tep2} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = R_1 \alpha^2 I_0^2 + R_2 (1 - \alpha)^2 I_0^2, \quad (3.60)$$

Hledejme extrém v proměnné α :

$$\frac{dP_{tep}}{d\alpha} = 2[\alpha R_1 - R_2(1 - \alpha)] I_0^2 = 2[(R_1 + R_2)\alpha - R_2] I_0^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.61)$$

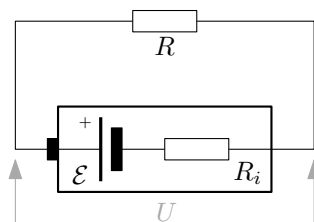
Tedy proudy, kdy je ztrátový výkon extrémální (znaménka první derivace říkají, že jde o minimum), jsou

$$I_1 = \alpha I_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_0, \quad I_2 = (1 - \alpha) I_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_0. \quad (3.62)$$

To jsou stejné hodnoty jako pro skutečné proudy určené z Ohmova zákona.

3.4.5 3.12 Vnitřní odpor baterie I

Vnitřní odpor galvanického článku R_i je pětikrát ($k = 5$) menší než vnější odpor R , kterým je obvod uzavřen. Kolikrát bude svorkové napětí U menší, než elektromotorické napětí článku?



Obrázek 3.26: Vnitřní odpor R_i galvanického článku způsobuje zmenšení svorkového napětí U oproti elektromotorickému napětí článku \mathcal{E} .

Řešení: Svorkové napětí U je oproti elektromotorickému napětí \mathcal{E} zmenšené o úbytek napětí na vnitřním odporu článku:

$$U = \mathcal{E} - R_i I. \quad (3.63)$$

Proud obvodem I je pak dán z Ohmova zákona,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_i}, \quad (3.64)$$

kde ve jmenovateli je celkový odpor v obvodu. Po dosazení vyjádření proudu I do rovnice pro svorkové napětí dostaneme

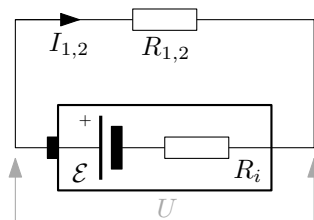
$$U = \mathcal{E} \left(1 - \frac{R_i}{R + R_i} \right) = \mathcal{E} \frac{R}{R + R_i}. \quad (3.65)$$

Jestliže je vztah mezi odporem spotřebiče a vnitřním odporem $R_i = \frac{1}{k}R$, vztah mezi U a \mathcal{E} je

$$U = \frac{R}{R + R_i} \mathcal{E} = \frac{R}{R + \frac{R}{k}} \mathcal{E} = \frac{k}{1 + k} \mathcal{E} = \frac{5}{6} \mathcal{E}. \quad (3.66)$$

3.4.6 3.18 Vnitřní odpor baterie II

Máme baterii o neznámém elektromotorickém napětí \mathcal{E} a vnitřním odporu R_i . Připojíme-li na ni odpor $R_1 = 30 \Omega$, poteče proud $I_1 = 125 \text{ mA}$; připojíme-li odpor $R_2 = 40 \Omega$, poteče proud $I_2 = 100 \text{ mA}$. Určete \mathcal{E} a R_i baterie.



Obrázek 3.27: Vnitřní odpor R_i baterie způsobuje zmenšení svorkového napětí U oproti elektromotorickému napětí článku \mathcal{E} .

Řešení: Svorkové napětí U je oproti elektromotorickému napětí \mathcal{E} zmenšené o úbytek napětí na vnitřním odporu článku:

$$U = \mathcal{E} - R_i I. \quad (3.67)$$

Toto napětí se „spotřebovává“ na připojených odporech $R_{1,2}$:

$$\mathcal{E} - R_i I_1 = R_1 I_1, \quad \mathcal{E} - R_i I_2 = R_2 I_2. \quad (3.68)$$

Také se dá říct, že elektromotorické napětí \mathcal{E} se spotřebovává na celkovém odporu v obvodu $R_i + R_{1,2}$, což samozřejmě vede na stejné rovnice:

$$\mathcal{E} = (R_i + R_1) I_1, \quad \mathcal{E} = (R_i + R_2) I_2. \quad (3.69)$$

Vyřešením těchto rovnic pro \mathcal{E} a R_i dospějeme k výsledku:

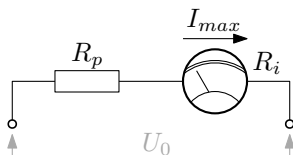
$$\mathcal{E} = (R_2 - R_1) \frac{I_1 I_2}{I_1 - I_2} = 5 \text{ V}, \quad R_i = \frac{R_2 I_2 - R_1 I_1}{I_1 - I_2} = 10 \Omega. \quad (3.70)$$

3.4.7 3.16 Voltmetr a ampérmetr

Přístroj má stupnici o $N = 100$ dílků a vnitřní odpor $R_i = 100 \Omega$. Při průchodu proudem $I_1 = 10 \mu\text{A}$ ukáže výchylku jednoho dílku. Jaké uspořádání musíme zvolit, chceme-li přístroj použít jako voltmetr s rozsahem do $U_0 = 100 \text{ V}$ a jako ampérmetr pro proudy do $I_0 = 1 \text{ A}$.

Řešení: Maximální proud přístrojem je zjevně $I_{max} = N I_1 = 1 \text{ mA}$. Nyní tedy musíme zvolit taková zapojení, aby při měření $U_0 = 100 \text{ V}$, resp. $I_0 = 1 \text{ A}$, tekla přístrojem právě proud I_{max} .

Začněme voltmetrem. Zde je třeba před přístroj předřadit odpor R_p , který omezí proud tekoucí vlivem připojeného napětí U_0 , viz obrázek 3.28.



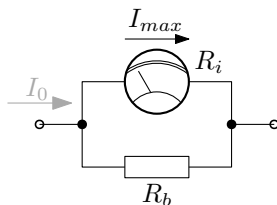
Obrázek 3.28: Zapojení měřícího přístroje jako voltmetru.

Potřebný odpor snadno spočteme z Ohmova zákona:

$$U_0 = (R_p + R_i) I_{max} \quad \longrightarrow \quad R_p = \frac{U_0}{I_{max}} - R_i \approx \frac{U_0}{I_{max}} = 100 \text{ k}\Omega, \quad (3.71)$$

kde jsme v závěru zanedbali vnitřní odpor přístroje R_i (jeho velikost je o tři řády menší než velikost předřadného odporu R_p).

Postupme nyní k ampérmetru. Nyní musíme paralelně k přístroji připojit boční odpor tak, aby většina z proudu I_0 byla svedena mimo přístroj, viz obrázek 3.29.



Obrázek 3.29: Zapojení měřícího přístroje jako ampérmetru.

Přístrojem poteče proud

$$I_{max} = \frac{R_b}{R_b + R_i} I_0 \quad (3.72)$$

(pro odvození pomocí Ohmova zákona viz první půlku řešení příkladu 3.13 v sekci 3.4.4).
Potřebný boční odpor pak je

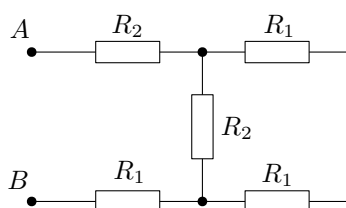
$$R_b = \frac{I_{max}}{I_0 - I_{max}} R_i \approx \frac{I_{max}}{I_0} R_i = 0,1 \Omega, \quad (3.73)$$

kde jsme ve jmenovateli zanedbali proud přístrojem I_{max} vůči měřenému proudu I_0 (opět je o tři řády menší).

3.5 Jouleovo teplo

3.5.1 3.14 Dimenzování odporů

U sítě na obrázku 3.30 jsou všechny odpory jednotlivě dimenzovány na $P_1 = 0,5 W$ s hodnotami $R_1 = 100 \Omega$ a $R_2 = 200 \Omega$. Určete celkový odpor a maximální přípustné napětí mezi body A, B .

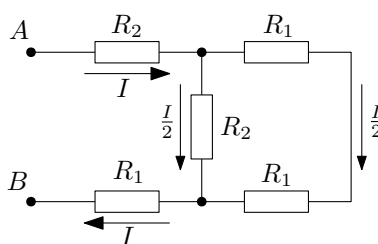


Obrázek 3.30: Odporová síť s hodnotami odporů $R_1 = 100 \Omega$ a $R_2 = 200 \Omega$.

Řešení: Celkový odpor zjistíme použitím vzorců pro sériové a paralelní spojení rezistorů (podrobněji viz příklady v sekci 3.2):

$$R_{AB} = R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{2R_1}} + R_1 = 400 \Omega. \quad (3.74)$$

Ztrátový výkon generovaný na rezistoru velikosti R , jímž protéká proud I , je $P_{tep} = RI^2$. Podívejme se nyní, který rezistor v obvodu bude nejvíce tepelně namáhán – ten bude limitovat maximální přípustné napětí. Proudy obvodem jsou znázorněné na obrázku 3.31.



Obrázek 3.31: Znázorněné proudy tekoucí obvodem.

Jelikož jsou odpory na obou pravých větvích stejné ($R_2 = 2R_1$), proud se zde rozdělí na poloviny. Vidíme, že největší tepelné namáhání zažívá rezistor vlevo nahoře – má větší odpor R_2 a teče jím větší proud I . Toto namáhání je tedy $P_{tep} = R_2 I^2$. Proud I určíme snadno z připojeného napětí U a celkového odporu R_{AB} pomocí Ohmova zákona:

$$I = \frac{U}{R_{AB}}. \quad (3.75)$$

Po dosazení do vzorce pro Jouleovo teplo pro daný rezistor:

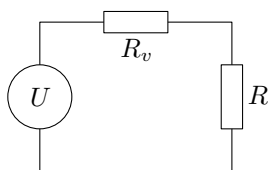
$$P_{tep} = R_2 I^2 = R_2 \frac{U^2}{R_{AB}^2}. \quad (3.76)$$

Toto tepelné namáhání musí být menší než zadaná maximální hodnota P_{max} ; z této podmínky jednoduše vyjádříme maximální připojené napětí:

$$P_{tep} \leq P_{max} \quad \longrightarrow \quad U_{max} = R_{AB} \sqrt{\frac{P_{max}}{R_2}} = 20 \text{ V}. \quad (3.77)$$

3.5.2 3.15 Ztráty ve vedení

Zdroj o napětí $U = 110 \text{ V}$ má dodávat výkon $P = 5 \text{ kW}$ do vzdálenosti $l = 5 \text{ km}$. Jaký musí být průměr měděného drátu, aby ztráty energie v síti nepřevyšovaly $\alpha = 10\%$ přenášeného výkonu?



Obrázek 3.32: Ztráty ve vedení o odporu R_v s připojeným spotřebičem o odporu R .

Řešení: Obvod je znázorněn na obrázku 3.32. Máme zde zdroj napětí o velikosti U následovaný sériově zapojeným odporem vedení R_v a spotřebičem o velikosti odporu R . Tepelný výkon generovaný na vedení P_v a na spotřebiči P jsou dány vzorcem pro Jouleovo teplo:

$$P = RI^2, \quad P_v = R_v I^2. \quad (3.78)$$

Naší podmínkou je, aby ztráty ve vedení byly menší než zadaná část přenášeného výkonu (výkonu na spotřebiči): $P_v \leq \alpha P$. Vedením i spotřebičem teče proud I daný Ohmovým zákonem:

$$I = \frac{U}{R + R_v}. \quad (3.79)$$

Podíl výkonů na vedení a spotřebiči při mezních ztrátách je po dosazení z (3.78):

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{P}{P_v} = \frac{RI^2}{R_v I^2} = \frac{R}{R_v} \quad \longrightarrow \quad R = \frac{R_v}{\alpha}, \quad (3.80)$$

kde jsme vyjádřili podmínku na odpor spotřebiče. Dosazením za R z (3.80) a za I z (3.79) do výrazu pro výkon na spotřebiči P (3.78) dostaneme:

$$P = RI^2 = R \frac{U^2}{(R + R_v)^2} = \frac{R_v}{\alpha} \frac{U^2}{R_v^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^2} = \alpha \frac{U^2}{R_v (1 + \alpha)^2}. \quad (3.81)$$

Nyní jen vyjádříme z předchozího vztahu maximální přípustný odpor vedení R_v :

$$R_v = \frac{\alpha U^2}{P(1 + \alpha)^2}. \quad (3.82)$$

Odpor vedení R_v dále vyjádříme pomocí jeho rozměrových parametrů pomocí vzorce pro odpor válcového vodiče:

$$R_v = \rho \frac{2l}{S} = \rho \frac{2l}{\pi \frac{d^2}{4}} \quad \longrightarrow \quad d = \sqrt{\frac{8\rho l}{\pi R_v}}, \quad (3.83)$$

kde ρ je rezistivita materiálu vodiče, délka vodiče je $2l$, jelikož vedení je tvořeno dvěma dráty o délce l , a průřez vodiče jsme vyjádřili pomocí jeho průměru d , $S = \frac{d^2}{4}$. Po dosazení za R_v z (3.82) dostaneme podmínku na průměr vodiče jako

$$d \geq \sqrt{\frac{8\rho l P}{\pi\alpha} \frac{1+\alpha}{U}} = 3,27 \text{ cm}, \quad (3.84)$$

kde jsme pro získání konkrétního výsledku dosadili zadané hodnoty a hodnotu rezistivity mědi $\rho_{Cu} = 1,68 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$.

3.6 Kirchhoffovy zákony

Pro nalezení proudů ve složitějších obvodech se zdroji a rezistory, kde se již nedá jednoduše použít Ohmův zákon a pravidla pro skládání odporů, používáme Kirchhoffovy zákony.

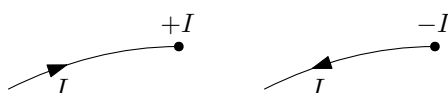
Obvody se skládají z větví pospojovaných v uzlech (kde se setkávají alespoň tři větve). Pro popis proudů v jednotlivých větvích obvodu je třeba v každé větvi zavést **kladný směr proudu**, tzn. libovolně zvolený myšlený směr, který nám na konci výpočtu umožní interpretovat, kam teče skutečný proud danou větví. Pokud nám z výpočtu vyjde kladný proud, teče ve zvoleném kladném směru; pokud nám vyšel záporný proud, teče proti zvolenému kladnému směru.

Větve mohou utvořit uzavřenou smyčku. V takovém případě zavádíme tzv. **směr obíhání**, libovolně zvolený myšlený směr průchodu po smyčce. Tento směr konzistentně podél celé smyčky definuje „kladný směr napětí“, vůči němuž pak definujeme příslušné přírůstky a úbytky napětí na zdrojích a rezistorech.

První **Kirchhoffův zákon o uzlech** představuje rovnici kontinuity proudu: suma proudů vtékajících a vytékajících do a z uzlu musí být nula:

$$\sum_{\alpha} I_{\alpha} = 0. \quad (3.85)$$

Obecně platí, že máme-li n uzlů, pak rovnice sestavené pro $n - 1$ libovolně vybraných uzlů budou nezávislé. **Znaménková konvence** je následující: pokud kladný směr proudu na dané větvi směřuje do uzlu, píšeme ho se znaménkem plus; pokud směřuje pryč od uzlu, píšeme ho se znaménkem minus, viz také obrázek 3.33.



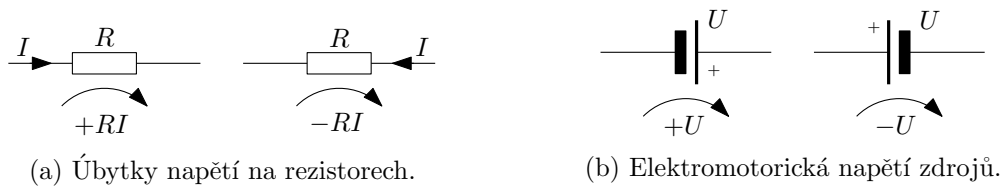
Obrázek 3.33: Znaménková konvence pro první Kirchhoffův zákon o uzlech.

Druhý **Kirchhoffův zákon o smyčkách** říká, že potenciálové přírůstky a úbytky podél smyčky v obvodu se musí sečíst na nulu. Tedy, že suma elektromotorických napětí na zdrojích musí být rovna sumě úbytků napětí na rezistorech podél smyčky:

$$\sum_{\alpha} U_{\alpha} = \sum_{\beta} R_{\beta} I_{\beta}. \quad (3.86)$$

Z prvního Kirchhoffova zákona máme $n - 1$ rovnic a jestliže máme m větví, tzn. m neznámých proudů skrze tyto větve, pak nám zbývá z druhého Kirchhoffova zákona nalézt $m - (n - 1)$ rovnic. **Znaménková konvence** je tato: Pro úbytky napětí na rezistorech platí, že pokud souhlasí směr obíhání v dané smyčce se směrem proudu v dané větvi, pak příslušný úbytek píšeme s kladným znaménkem, jinak se záporným. Pro elektromotorická napětí zdrojů platí, že je-li zdroj zapojen

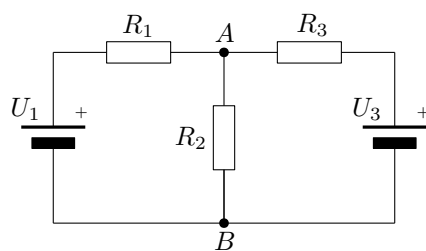
tak, že kladným pólem směřuje ve směru obíhání, pak napětí píšeme s kladným znaménkem, jinak se záporným⁵. Pro ilustraci viz obrázek 3.34.



Obrázek 3.34: Znaménková konvence ve druhém Kirchhoffově zákoně o smyčkách.

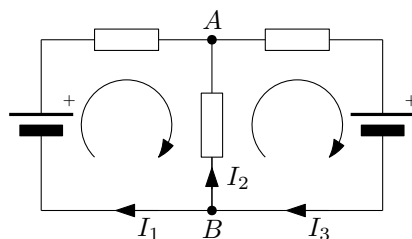
3.6.1 3.7 Dvousmyčkový obvod

Jaký proud poteče mezi body A , B na obrázku 3.35?



Obrázek 3.35: Obvod se dvěma uzly, třemi větvemi, dvěma zdroji a třemi odpory.

Řešení: Zavedeme kladné směry proudů v jednotlivých větvích a směry obíhání pro levou a pravou smyčku v obvodu například jako na obrázku 3.36. Zároveň jsme si pojmenovali proudy v levé, resp. prostřední, resp. pravé, větvi jako I_1 , I_2 a I_3 .



Obrázek 3.36: Zvolené kladné směry proudů a směry obíhání.

Hodnoty součástek jsou zadané. Neznámými jsou tedy proudy v jednotlivých větvích I_1 , I_2 , I_3 . Potřebujeme tedy pro tyto proudy nalézt tři rovnice. První Kirchhoffův zákon pro uzly A a B dává

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0, \quad -I_1 - I_2 + I_3 = 0. \quad (3.87)$$

Zde triviálně vyšly závislé rovnice, jednu z nich tedy zahodíme. Z druhého Kirchhoffova zákona pro smyčky dostaneme pro levou a pravou smyčku

$$U_1 = R_1 I_1 - R_2 I_2, \quad -U_3 = R_2 I_2 + R_3 I_3. \quad (3.88)$$

⁵Pozor! Tyto konvence samozřejmě platí jen pro druhý Kirchhoffův zákon tvaru (3.86), tzn. ve tvaru, kdy zdroje jsou na jedné straně rovnice a úbytky na druhé!

Pokud bychom napsali třetí rovnici pro „obvodovou smyčku“ vedoucí přes zdroje U_1 a U_3 a rezistory R_1 a R_3 (kde bychom zvolili opět směr obíhání po směru hodinových ručiček jako v ostatních smyčkách):

$$U_1 - U_3 = R_1 I_1 + R_3 I_3, \quad (3.89)$$

vidíme, že je tvaru součtu rovnic pro levou a pravou smyčku, není tedy nezávislá (a zahodíme ji).

Řešením rovnic (3.87) a (3.88) dostaneme

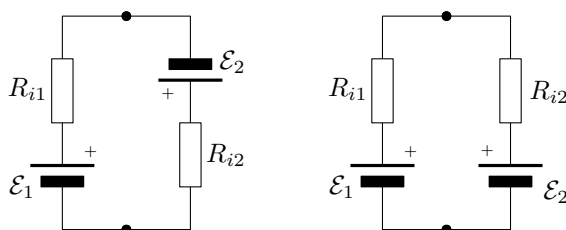
$$I_2 = -\frac{R_3 U_1 + R_1 U_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}, \quad (3.90)$$

tedy proud ve skutečnosti poteče z bodu A do bodu B . Po dosazení konkrétních hodnot v zadání $R_1 = 50 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$, $R_3 = 80 \Omega$, $U_1 = 3 V$ a $U_3 = 2 V$ dostaneme

$$I_2 = -20 \text{ mA}. \quad (3.91)$$

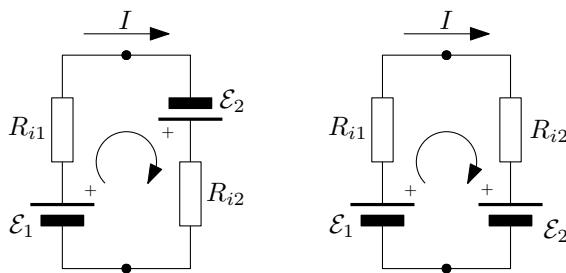
3.6.2 3.17 Blbec zapojující baterie

Dva olověné akumulátory mají $\mathcal{E}_1 = 12 V$, $R_{i1} = 0,04 \Omega$, $\mathcal{E}_2 = 6 V$, $R_{i2} = 0,02 \Omega$. Nějaký blbec je zapojil omylem vedle sebe. Jaký poteče akumulátory proud a jaké napětí bude na jejich svorkách?



Obrázek 3.37: Nějaký blbec zapojil baterie omylem vedle sebe. Jedním nebo druhým způsobem. Tak či tak je to blbec.

Řešení: Zavedme kladný směr proudu a obíhání jako na obrázku 3.38.



Obrázek 3.38: Kladné směry proudu a napětí (směr obíhání).

Pak podle druhého Kirchhoffova zákona máme pro levé zapojení (baterie zapojené „souhlasně“):

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = (R_{i1} + R_{i2})I \quad \longrightarrow \quad I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R_{i1} + R_{i2}} = 300 \text{ A}. \quad (3.92)$$

A pro pravé zapojení (baterie zapojené „nesouhlasně“):

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = (R_{i1} + R_{i2})I \quad \longrightarrow \quad I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_{i1} + R_{i2}} = 100 \text{ A}. \quad (3.93)$$

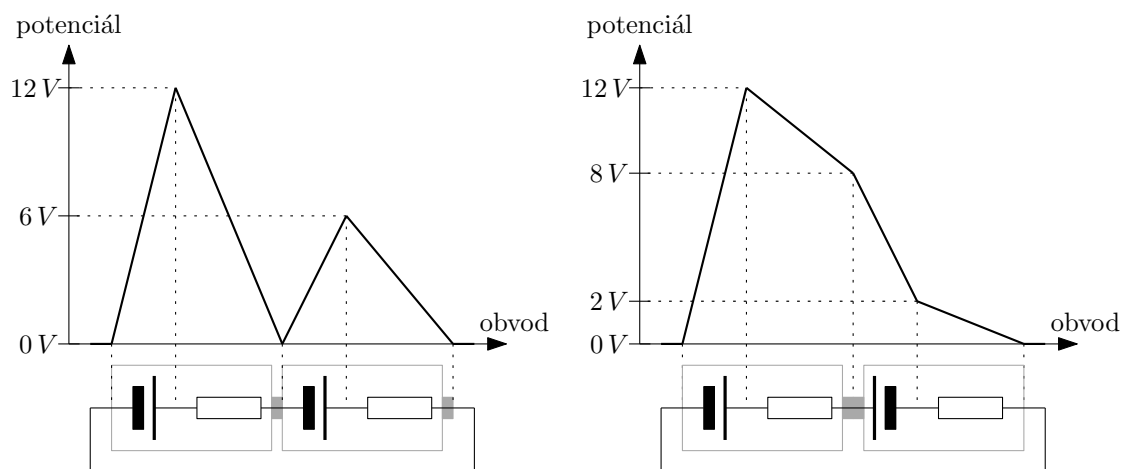
Pro získání svorkových napětí na bateriích U_1 a U_2 jen vhodně přearanžujeme členy v rovnicích (3.92) a (3.93) – dáme k sobě vždy elektromotorické napětí a úbytek napětí na vnitřním odporu. Pak pro levé zapojení máme:

$$\underbrace{\mathcal{E}_1 - R_{i1}I}_{U_1} = -\underbrace{(\mathcal{E}_2 - R_{i2}I)}_{U_2} = 0 \text{ V.} \quad (3.94)$$

Pro pravé zapojení:

$$\underbrace{\mathcal{E}_1 - R_{i1}I}_{U_1} = -\underbrace{(-\mathcal{E}_2 - R_{i2}I)}_{U_2} = 8 \text{ V.} \quad (3.95)$$

Na obrázku 3.39 jsou zakreslené průběhy potenciálů v obvodech zapojených baterií. Potenciál se při průchodu rezistorem (po směru proudu) vždy zmenšuje, baterie v závislosti na orientaci způsobuje buď růst nebo pokles potenciálu.



(a) Baterie zapojené „souhlasně“. Na svorkách baterií je nulové napětí.

(b) Baterie zapojené „nesouhlasně“. Na svorkách baterií je napětí 8 V.

Obrázek 3.39: Průběh potenciálu v obvodu s různě zapojenými bateriemi. Napětí na bateriích je dáno rozdílem potenciálu na jejich svorkách.

3.7 Definice proudu

3.7.1 3.19 Rychlost elektronů v drátu

Vodičem o průřezu $S = 10 \text{ mm}^2$ teče proud $I = 1 \text{ A}$. Koncentrace elektronů je $n = 2,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$. Určete proudovou hustotu a střední uspořádanou rychlost elektronů.

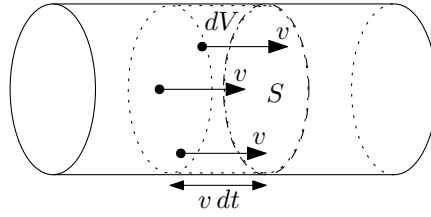
Řešení: Elektrický proud je definován jako náboj proteklý danou plochou za jednotku času:

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (3.96)$$

Množství náboje proteklé plochou S za malý čas dt je dáno jako

$$dQ = \rho dV, \quad (3.97)$$

kde ρ je objemová nábojová hustota elektronů ve vodiči a dV je objem vodiče, ze kterého elektrony za čas dt projdou daným myšleným průřezem, viz obrázek 3.40.



Obrázek 3.40: Pouze náboje v objemu dV projdou za čas dt skrze plochu S .

Pouze náboje ve vzdálenosti menší než $ds = v dt$ projdou plochou S , pak tedy objem je $dV = S v dt$. Pro nábojovou hustotu platí $\rho = ne$, kde e je elementární elektrický náboj. Náboj dQ pak vychází

$$dQ = \rho dV = ne S v dt, \quad (3.98)$$

a proud I je

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{ne S v dt}{dt} = ne S v. \quad (3.99)$$

Vyjádřením rychlosti v získáme výsledek:

$$v = \frac{I}{neS} = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ m.s}^{-1}. \quad (3.100)$$

Proudová hustota je definována jako proud na jednotkovou plochu, tedy

$$j = \frac{I}{S} = 10^5 \text{ A.m}^{-2}. \quad (3.101)$$

3.7.2 3.20 Elektrony v urychlovači

V elektronovém synchrotronu elektrony obíhají po kruhové dráze délky $o = 240 \text{ m}$. Na dráze se nachází celkem $N = 10^{11}$ elektronů, jejichž rychlost se prakticky rovná rychlosti světla. Jaký proud protéká urychlovací drahou?

Řešení: Elektrický proud je definován jako náboj proteklý daným místem za jednotku času:

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (3.102)$$

Spočteme náboj dQ prošlý daným místem urychlovače za malý čas dt :

$$dQ = \tau dl = \tau c dt, \quad (3.103)$$

kde jsme označili τ délkovou nábojovou hustotu elektronů v urychlovači a $dl = c dt$ je vzdálenost, ze které elektrony stihnou projít daným místem urychlovače během času dt (c označuje rychlost světla, tzn. rychlost elektronů). Nábojová hustota τ je

$$\tau = ne = \frac{N}{o} e, \quad (3.104)$$

kde $n = \frac{N}{o}$ označuje (početní) délkovou hustotu elektronů v urychlovači a e je elementární elektrický náboj. Po dosazení je

$$dQ = \frac{N}{o} e c dt \quad (3.105)$$

a proud z definice

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{N}{o} e c \doteq 20 \text{ mA}, \quad (3.106)$$

kde jsme použili hodnotu rychlosti světla $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ a elementárního elektrického náboje $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

3.7.3 3.21 Van der Graaffův proud

Ve van der Graaffově urychlovači se pohybuje pás široký $s = 20 \text{ cm}$ rychlostí $v = 15 \text{ m/s}$. Povrchový náboj pásu vyvolává po obou stranách pole o intenzitě $E = 12 \text{ kV.cm}^{-1}$. Jaký je proud přenášený pásem?

Řešení: Elektrické pole v okolí nabitě roviny je dáno následujícím vztahem (jehož odvození lze nalézt v příkladu 2.26 v sekci 2.7.1):

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \longrightarrow \quad \sigma = 2\varepsilon_0 E, \quad (3.107)$$

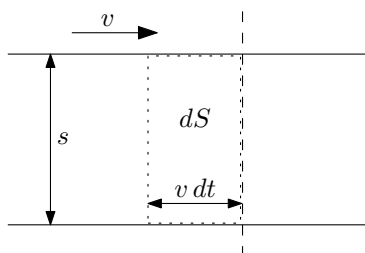
kde σ je plošná hustota náboje a ε_0 je permitivita vakua. Elektrický proud je definován jako náboj proteklý daným místem za jednotku času:

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (3.108)$$

Náboj dQ , který přeneše pás za malý čas dt skrze dané místo, je

$$dQ = \sigma dS = \sigma sv dt = 2\varepsilon_0 E sv dt, \quad (3.109)$$

kde $dS = s v dt$ označuje plochu pásu, která za čas dt projde oním místem, viz obrázek 3.41.



Obrázek 3.41: Pohybující se nabitý pás a plocha dS , která za čas dt projde daným místem.

Proud je pak z definice

$$I = \frac{dQ}{dt} = 2\varepsilon_0 Esv \doteq 63,7 \mu\text{A}, \quad (3.110)$$

kde jsme použili hodnotu permitivity vakua $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.

Kapitola 4

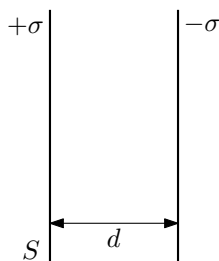
Stacionární magnetické pole

4.1 Relativita

4.1.1 4.1 Letící kondenzátor

Jak se změní napětí U_0 mezi deskami nabitého kondenzátoru měřené v laboratorní soustavě, začne-li se kondenzátor pohybovat rychlostí $V = 0,8c$ ve směru a) kolmém na desky, b) rovnoběžném s deskami.

Řešení: Kondenzátor ve své klidové soustavě (S) má plochu desek S ve vzájemné vzdálenosti d a jsou nabitý na celkový náboj Q , resp. $-Q$ – tedy plošná nábojová hustota na deskách je $\sigma = \pm Q/S$.



Obrázek 4.1: Stojící kondenzátor.

Elektrické pole mezi deskami kondenzátoru je

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad (4.1)$$

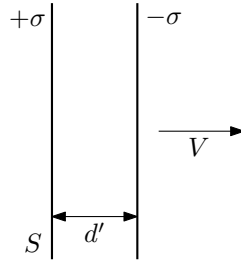
tento výraz se určí pomocí Gaussova zákona – viz dodatek v sekci 2.7.1 – tento zákon platí pro jakýkoliv pohybový stav nábojů, takže výraz (4.1) zůstává v platnosti i pro letící kondenzátory s patřičně změněnou nábojovou hustotou σ , viz dále.

Napětí mezi deskami je pak z definice

$$U = \frac{1}{q} \int_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_l E dl = Ed, \quad (4.2)$$

podrobněji opět viz dodatek v sekci 2.7.1.

Pokud se kondenzátor v soustavě (S') pohybuje rychlostí V kolmo na své desky (viz obrázek 4.2),



Obrázek 4.2: Letící kondenzátor ve směru kolmém na desky.

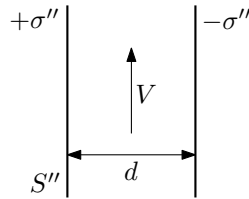
dojde vlivem Lorentzovy kontrakce délek k přiblížení desek na novou vzdálenost

$$d' = \frac{d}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} d. \quad (4.3)$$

Plocha desek zůstává stejná, $S' = S$. Náboj jako relativistický invariant zůstává také stejný $Q' = Q$ a tedy i nábojová hustota $\sigma' = Q'/S' = Q/S = \sigma$. Elektrické pole je tedy také stejné $E' = \sigma'/\epsilon_0 = \sigma/\epsilon_0 = E$ a napětí se změní vlivem změny vzdálenosti mezi deskami kondenzátoru:

$$U' = E' d' = E \frac{d}{\gamma} = \frac{U}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} U. \quad (4.4)$$

Při pohybu kondenzátoru rovnoběžně s deskami rychlostí V (v soustavě (S'')) dojde ke zkrácení desek vlivem kontrakce délek.



Obrázek 4.3: Letící kondenzátor ve směru rovnoběžném na desky.

Tudíž se změní jejich plocha $S'' = a''b''$ z původní $S = ab$, kde a, b jsou původní rozměry desek kondenzátoru a a'', b'' jsou rozměry desek pohybujícího se kondenzátoru. Vlivem kontrakce délek platí $a'' = a/\gamma$ (rozměr ve směru pohybu) a $b'' = b$ (rozměr kolmo na směr pohybu). Pro plochu S'' dostáváme:

$$S'' = a''b'' = \frac{a}{\gamma} b = \frac{S}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} S. \quad (4.5)$$

Důsledkem toho se změní nábojová hustota σ'' a tedy i intenzita elektrického pole mezi deskami E'' :

$$\sigma'' = \frac{Q}{S''} = \frac{Q}{S} \gamma = \sigma \gamma = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad E'' = \frac{\sigma''}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \gamma = E \gamma = \frac{E}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (4.6)$$

Výsledné napětí na kondenzátoru je

$$U'' = E'' d'' = E d \gamma = U \gamma = \frac{U}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (4.7)$$

4.1.2 4.2 Hustota proudu

V urychlovači letí náboje o vlastní hustotě $\rho' = 10^{-4} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}$ rychlostí $v = 0,8c$ ve směru osy x . Jakou hustotu proudu naměříme v laboratorní soustavě?

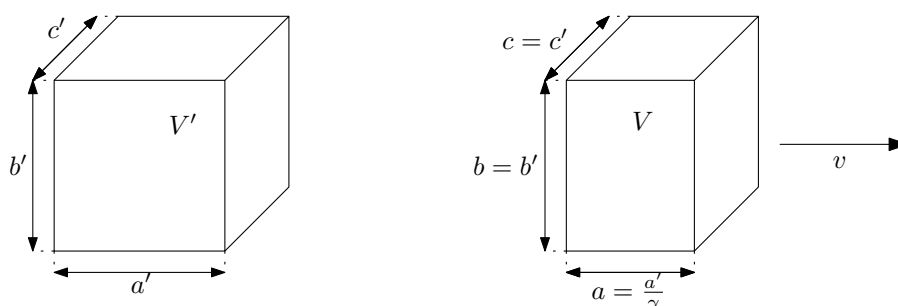
Řešení: Nábojová hustota ρ je dána množstvím náboje Q v daném objemu V :

$$\rho = \frac{Q}{V}. \quad (4.8)$$

Náboj je relativistický invariant, při přechodu mezi soustavami se zachovává, $Q' = Q$. Naproti tomu objem se vlivem Lorentzovy kontrakce délek transformuje jako

$$V = \frac{V'}{\gamma} = V' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (4.9)$$

kde V' je vlastní objem (v klidové soustavě) a V je objem v laboratorní soustavě. Tento transformační plyne z toho, že rozměr ve směru pohybu podléhá kontrakci, viz následující obrázek 4.4.



Obrázek 4.4: Objem a pohybující se objem.

Nábojová hustota v laboratorní soustavě ρ je tedy

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q'}{V'} \gamma = \rho' \gamma = \frac{\rho'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (4.10)$$

Proudová hustota je $\vec{j} = \rho \vec{v}$, případně její velikost $j = \rho v$. Po dosazení z (4.10) máme

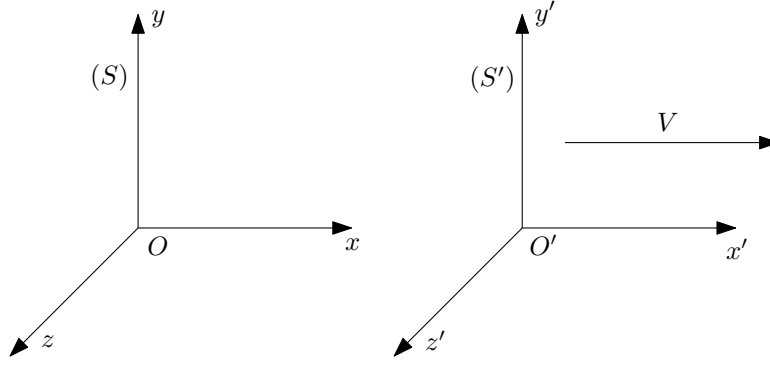
$$j = \rho v = \rho' \gamma v = \frac{\rho' v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 10^4 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}. \quad (4.11)$$

4.1.3 4.4 a 4.5 Transformace elektrického a magnetického pole

V prostoru je dáno elektrické a magnetické pole jako $E_x = E_y = E_z = 3 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, $B_x = 0$, $B_y = -B_z = 5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$. Najděte souřadnou soustavu, v níž $B = 0$.

Přímým vodičem protéká proud $I = 100 \text{ A}$. Určete elektrické a magnetické pole \vec{E} , \vec{B} , jak se jeví ve vzdálenosti $r = 10 \text{ cm}$ od vodiče v souřadné soustavě pohybující se rovnoběžně s vodičem rychlostí $V = 0,8c$.

Řešení: Mějme inerciální vztažnou soustavu (S) a necht' se vůči ní pohybuje vztažná soustava (S') rovnoměrně přímočaře rychlostí V ve směru osy x . Souřadné osy necht' jsou stejně orientované – nejsou vůči sobě pootočené.



Obrázek 4.5: Inerciální vztažné soustavy (S) a (S') .

Označme intenzitu elektrického pole a magnetickou indukci v (S) jako $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ a $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ a v soustavě (S') jako $\vec{E}' = (E'_x, E'_y, E'_z)$ a $\vec{B}' = (B'_x, B'_y, B'_z)$. Vztahy pro transformaci složek vektorů \vec{E} , \vec{B} a \vec{E}' , \vec{B}' pak jsou:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma(E_y - \beta c B_z), & E'_z &= \gamma(E_z + \beta c B_y), \\ B'_x &= B_x, & B'_y &= \gamma\left(B_y + \frac{\beta}{c} E_z\right), & B'_z &= \gamma\left(B_z - \frac{\beta}{c} E_y\right), \end{aligned} \quad (4.12)$$

kde

$$\beta = \frac{V}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = (1 - \beta^2)^{-1/2}. \quad (4.13)$$

V **prvním příkladu** máme $\vec{E} = (E, E, E)$, kde jsme označili $E = E_x = E_y = E_z$ (pozor, zde E není velikost vektoru \vec{E} , ta je $|\vec{E}| = \sqrt{3}E$), a $\vec{B} = (0, B, -B)$, kde jsme označili $B = B_y = -B_z$ (opět, B není velikost vektoru \vec{B} ale $|\vec{B}| = \sqrt{2}B$). Po dosazení do transformačních vzorců pro magnetickou indukci \vec{B}' (4.12) dostaneme

$$B'_x = 0, \quad B'_y = \gamma\left(B + \frac{\beta}{c} E\right), \quad B'_z = \gamma\left(-B - \frac{\beta}{c} E\right). \quad (4.14)$$

Rovnice $B'_y = B'_z = 0$ vedou na shodnou podmínku na rychlost V , resp. β :

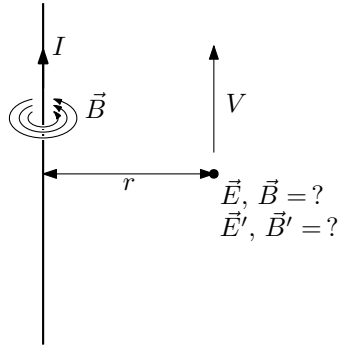
$$\beta = -\frac{B}{E} c \doteq -0,5, \quad V = -\frac{B}{E} c^2 \doteq -0,5 c \doteq 1,5 \cdot 10^8 m.s^{-1}, \quad (4.15)$$

kde jsme za rychlost světla použili přibližnou hodnotu $c = 3 \cdot 10^8 m.s^{-1}$.

Ve **druhém příkladu** máme (neutrální) nekonečný vodič s proudem I , který kolem sebe generuje magnetické pole o velikosti

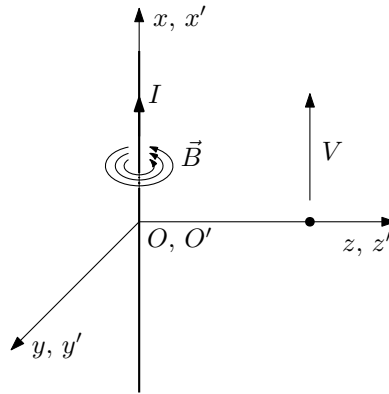
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (4.16)$$

kde r je kolmá vzdálenost od vodiče. Směr magnetické indukce \vec{B} je dán pravidlem pravé ruky. Vektory magnetické indukce jsou tečné na soustředné kružnice okolo vodiče a pokud palec ukazuje směr proudu ve vodiči, prsty ukazují směr vektoru magnetické indukce.



Obrázek 4.6: Elektrické a magnetické pole v okolí (pohybujícího se) vodiče s proudem.

Zavedeme nyní vztažné soustavy (S) a (S') a příslušné kartézské souřadnice (x, y, z) a (x', y', z') tak, abychom mohli použít vzorce pro transformaci elektrického a magnetického pole (4.12). Soustava (S') se bude pohybovat rychlostí V ve směru osy x soustavy (S) . Osy x a x' položíme do vodiče a osy z a z' namíříme k místu, kde chceme znát elektrické a magnetické pole \vec{E} a \vec{B} v soustavě (S') . Viz obrázek 4.7 (případně také obrázek 4.6).



Obrázek 4.7: Zavedení vztažných soustav (S) a (S') .

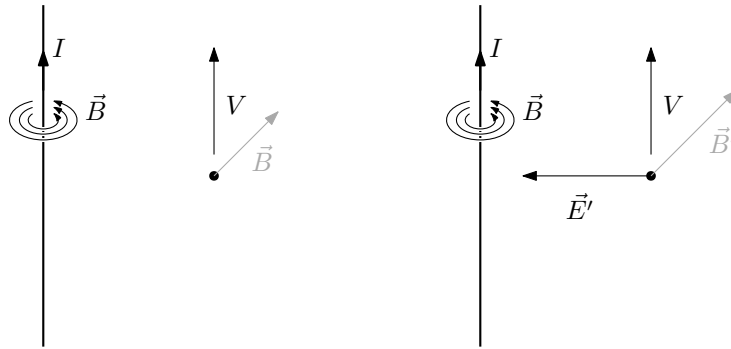
V takto zavedené vztažné soustavě (S) máme následující složkové vyjádření elektrické intenzity \vec{E} a magnetické indukce \vec{B} :

$$\vec{E} = 0, \quad \vec{B} = (0, -B, 0) = \left(0, -\frac{\mu_0 I}{2\pi r}, 0\right). \quad (4.17)$$

Tyto jednoduše dosadíme do vzorců (4.12):

$$\begin{aligned} E'_x &= 0, & E'_y &= 0, & E'_z &= \gamma\beta c B_y = -\gamma\beta c \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \\ B'_x &= 0, & B'_y &= \gamma B_y = -\gamma \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & B'_z &= 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Výsledkem je, že v pohybující se soustavě (S') naměříme kromě silnějšího magnetického pole o velikosti $B' = \gamma \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ ($\vec{B}' = \gamma \vec{B}$) ještě nenulové elektrické pole $E' = \gamma\beta c \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ směřující radiálně k vodiči (nebo od vodiče, pro $I < 0$). Viz obrázek 4.8. Po dosazení zadaných číselných hodnot (rychlost světla uvažujeme $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) obdržíme $B' = 3.33 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ a $E' = 8 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

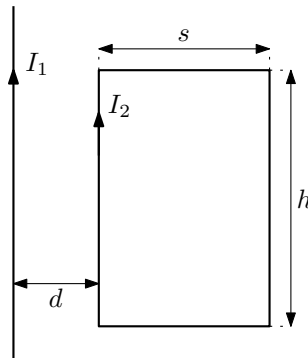


Obrázek 4.8: Elektrické a magnetické pole v soustavách (S) , resp. (S') – \vec{E} , \vec{B} , resp. \vec{E}' , \vec{B}' .

4.2 Síla na vodič s proudem

4.2.1 4.3 Obdélníková smyčka v magnetickém poli

Určete celkovou sílu, kterou bude dlouhý přímý vodič protékaný proudem $I_1 = 10 \text{ A}$ působit na obdélníkovou smyčku podle obrázku 4.9, již protéká proud $I_2 = 5 \text{ A}$.

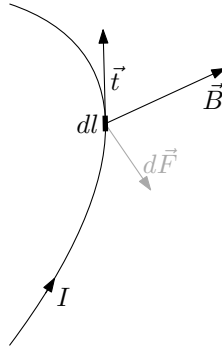


Obrázek 4.9: Jakou silou působí nekonečný vodič na obdélníkovou smyčku?

Řešení: Příspěvek síly $d\vec{F}$ působící na malý úsek dl vodiče s proudem I , který leží v magnetickém poli \vec{B} , je dán Ampérovým vzorcem

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}, \quad (4.19)$$

kde $d\vec{l} = \vec{t} dl$ a \vec{t} je jednotkový tečný vektor k vodiči v místě délkového elementu dl . Viz obrázek 4.10.

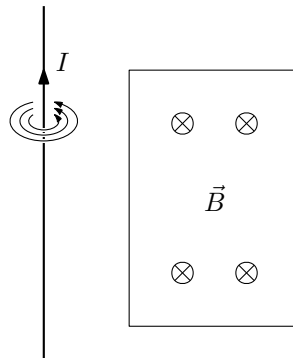


Obrázek 4.10: Příspěvek síly $d\vec{F}$ dle Ampérova vzorce je $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$.

Magnetické pole \vec{B} od nekonečně dlouhého přímého vodiče s proudem I má velikost

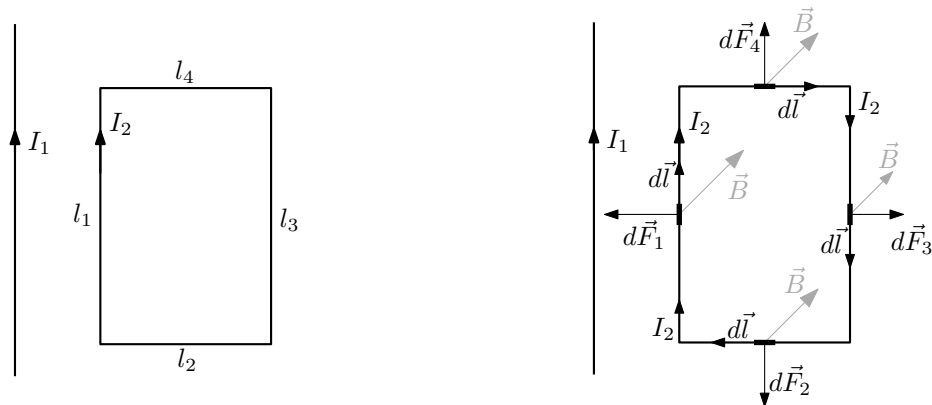
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (4.20)$$

kde r je vzdálenost od vodiče. Směr vektorů magnetické indukce \vec{B} udává pravidlo pravé ruky – palec ukazuje směr proudu, prsty ukazují směr magnetického pole. V našem případě magnetické pole míří kolmo na obdélníkovou smyčku a míří do papíru, viz obrázek 4.11.



Obrázek 4.11: Magnetické pole od nekonečného přímého vodiče s proudem.

Obdélníkovou smyčku si rozdělíme na jednotlivé strany, po řadě označené l_1 , l_2 , l_3 a l_4 – viz obrázek 4.12 (a) – v každé jednotlivé straně míří tečný vektor \vec{t} stále stejným směrem, což se nám bude hodit pro zjednodušení integrace elementů síly $d\vec{F}$ (4.19).



(a) Rozdělení obdélníkové smyčky na čtyři úsečky l_1, \dots, l_4 . (b) Směry příspěvků sil $d\vec{F}_i$ v jednotlivých úsecích obdélníkové smyčky.

Obrázek 4.12: Rozdělení obdélníkové smyčky na jednotlivé úsečky l_i a výsledné směry příspěvků sil $d\vec{F}_i$.

V obrázku 4.12 (b) jsou znázorněny směry elementů délky $d\vec{l}$ (resp. tečných vektorů \vec{t} , $d\vec{l} = \vec{t} dl$), vektorů magnetické indukce \vec{B} a výsledné směry elementů síly $d\vec{F}$ dle Ampérova vzorce (4.19) v jednotlivých částech obdélníkové smyčky.

Rozdělení smyčky na její jednotlivé části zajistilo, že v každé z nich míří příspěvky sil $d\vec{F}$ stále stejným směrem a pro zjištění celkové velikosti síly nám stačí naintegrovat velikosti těchto příspěvků, tzn.

$$F_i = \int_{l_i} dF_i, \quad (4.21)$$

kde F_i označuje celkové velikosti sil působící na jednotlivé části smyčky¹.

Nyní přistupme k vlastnímu výpočtu sil F_i . Velikost příspěvku síly dF_i je z Ampérova vzorce a kolmosti vektorů $d\vec{l}$ a \vec{B} rovna

$$dF_i = I_2 B dl. \quad (4.22)$$

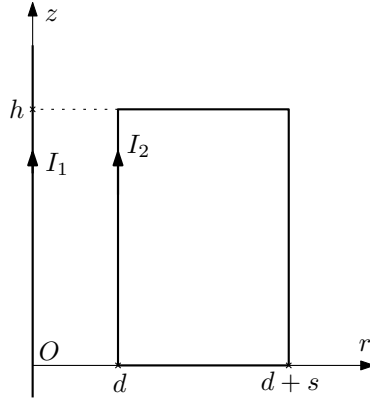
Dále zavedeme kartézské souřadnice r a z dle obrázku 4.13. Počátek souřadnice r volíme s ohledem na tvar magnetického pole (4.20).

¹Pozor, obecně není pravda, že

$$\vec{F} = \int_l d\vec{F} \Rightarrow F = \int_l dF.$$

Takto je možné celkovou velikost vektoru \vec{F} počítat pouze, pokud všechny příspěvky $d\vec{F}$ míří stejným směrem (což je v tomto případě splněno). V obecném případě se vektorovému integrálu nedá vyhnout a platí

$$F = \left| \int_l d\vec{F} \right|.$$



Obrázek 4.13: Zavedení kartézských souřadnic z a r a souřadnicové polohy obdélníkové smyčky.

V takto zavedených souřadnicích jsou jednotlivé úsečky l_i popsány následovně:

$$\begin{aligned}
 l_1 &\leftrightarrow r = d, & z \in \langle 0, h \rangle, \\
 l_2 &\leftrightarrow r \in \langle d, d + s \rangle, & z = 0, \\
 l_3 &\leftrightarrow r = d + s, & z \in \langle 0, h \rangle, \\
 l_4 &\leftrightarrow r \in \langle d, d + s \rangle, & z = h,
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Všechny výše zmíněné ingredience použijeme k sestavení konkrétních tvarů integrálů (4.21) s následujícím výsledkem:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \int_0^h I_2 B dz = I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \int_0^h dz = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} h, \\
 F_2 &= F_4 = \int_d^{d+s} I_2 B dr = I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \int_d^{d+s} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{d+s}{d}, \\
 F_3 &= \int_0^h I_2 B dz = I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+s)} \int_0^h dz = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(d+s)} h.
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Směry sil \vec{F}_i jsou patrné z obrázku 4.12 (b). Vidíme, že síly \vec{F}_2 a \vec{F}_4 se vyruší a celková síla působící na smyčku bude mít velikost $F = F_1 - F_3$ ve směru k drátu s proudem I_1 (neboť $F_1 > F_3$).

4.3 Biot-Savartův zákon

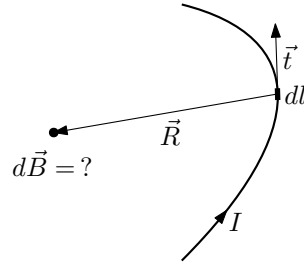
4.3.1 4.7 Magnetické pole kruhové a polygonální smyčky

Určete magnetickou indukci ve středu smyčky protékané proudem I ve tvaru kružnice, rovnostranného trojúhelníka, čtverce, obdélníka, šestiúhelníka.

Řešení: Magnetické pole \vec{B} od vodiče s proudem I určíme pomocí Biot-Savartova zákona:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}, \tag{4.25}$$

kde $d\vec{l} = \vec{t} dl$ je element délky spolu s jednotkovým tečným vektorem \vec{t} mířícím ve směru proudu I a \vec{R} je vektor mířící od elementu vodiče dl k místu, kde se ptáme na magnetické pole \vec{B} ; také viz obrázek 4.14.

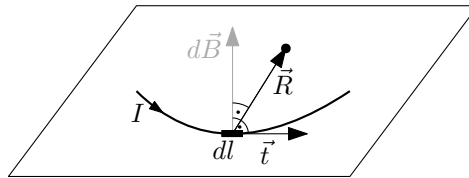


Obrázek 4.14: Vektory $d\vec{l} = \vec{t} dl$ a \vec{R} v Biot-Savartově zákoně udávající magnetickou indukci \vec{B} od vodiče s proudem I .

Můžeme si představit, že každý úsek vodiče dl přispívá k celkovému magnetickému poli \vec{B} malým příspěvkem $d\vec{B}$ tvaru

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}. \quad (4.26)$$

Směr tohoto příspěvku je dán směrem vektorového součinu $d\vec{l} \times \vec{R}$ – tento je kolmý na rovinu vytvářenou vektory $d\vec{l}$ a \vec{R} . Pokud je náš problém rovinný, tzn. pokud celá proudová smyčka a místo, kde počítám magnetickou indukci \vec{B} , leží v jedné rovině, pak budou všechny příspěvky $d\vec{B}$ směřovat stejným směrem (a to kolmo na tuto společnou rovinu)² – viz obrázek 4.16.



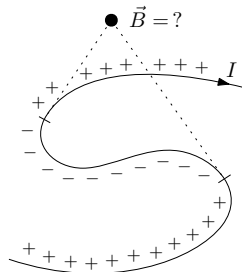
Obrázek 4.16: Rovinný problém.

To nám umožní počítat velikost celkové magnetické indukce B jako integrál z velikostí jednotlivých příspěvků dB :

$$B = \int_l dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{|d\vec{l} \times \vec{R}|}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{\sin \alpha dl}{R^2}, \quad (4.27)$$

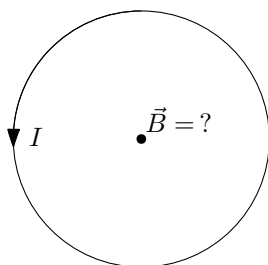
kde α je (obecně proměnný) úhel mezi vektory $d\vec{l}$ a \vec{R} .

²Zároveň nesmí dojít ke změně „smyslu obtáčení“ vodiče s proudem okolo místa výpočtu magnetické indukce \vec{B} . Pak se totiž změní směr příspěvku $d\vec{B}$ na opačný. Potom je nutné proudovou smyčku rozdělit na úseky se stejným smyslem obtáčení a výsledná dílčí magnetická pole příslušně odečítat, viz schematický obrázek 4.15. Případně je možno počítat rovnou „plný“ vektorový integrál (4.25).



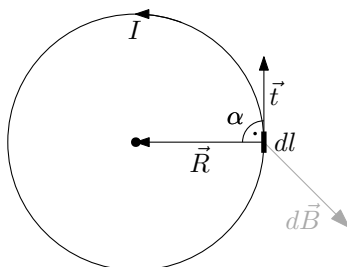
Obrázek 4.15: Při změně smyslu obtáčení dochází ke změně znaménka příspěvku dB k celkové magnetické indukci B (respektive k otočení směru vektorového příspěvku $d\vec{B}$).

Použijme nyní vzorec (4.27) k výpočtu velikosti magnetické indukce B ve středu kruhové smyčky s proudem I .



Obrázek 4.17: Magnetická indukce \vec{B} uprostřed kruhové smyčky.

Vektory \vec{R} , $d\vec{l} = \vec{t} dl$ a úhel α mezi nimi (a také výsledný vektor $d\vec{B}$) jsou vyznačeny na obrázku 4.18. Úhel $\alpha = \frac{\pi}{2}$ je konstantní. Velikost vektoru \vec{R} je taktéž konstantní a rovna poloměru kružnice $R = r$.



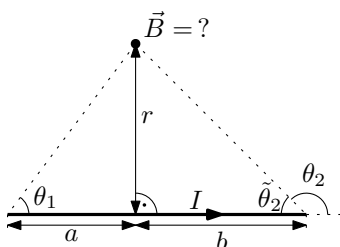
Obrázek 4.18: Vektory \vec{R} , $d\vec{l} = \vec{t} dl$ (a úhel α mezi nimi) a $d\vec{B}$.

Dosazení těchto hodnot do vzorce (4.27) dává

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{\sin \alpha dl}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^2} \int_l dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^2} 2\pi r = \frac{\mu_0 I}{2r}, \quad (4.28)$$

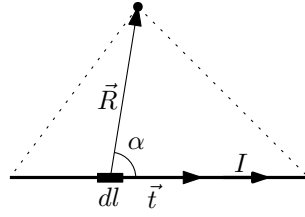
kde jsme použili vztah pro obvod kružnice $\int_l 1 dl = 2\pi r$.

Pro výpočet magnetické indukce \vec{B} uvnitř všelijakých mnohoúhelníku nejprve určíme magnetické pole generované kouskem rovného vodiče (tento je pak nutné připojit do uzavřeného obvodu aby mohl téci konstantní proud I) – viz obrázek 4.19 se znázorněnou situací a rozměry.



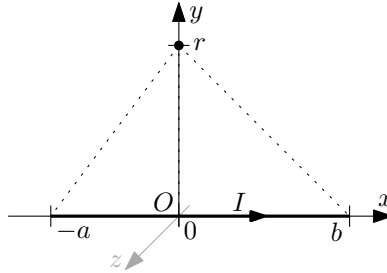
Obrázek 4.19: Magnetická indukce \vec{B} od konečného přímého vodiče.

Problém je opět rovinný, můžeme tedy použít vzorec (4.27). Tentokrát bude lepší přímo napsat vektorová vyjádření pro $d\vec{l}$ a \vec{R} a z nich spočítat velikost vektorového součinu $|d\vec{l} \times \vec{R}|$ – nebudeme tedy pracovat s úhlem α . Vektory $d\vec{l} = \vec{t} dl$ a \vec{R} (ale i úhel α) jsou pro proudovou úsečku znázorněné na obrázku 4.20.



Obrázek 4.20: Vektory \vec{R} a $d\vec{l} = \vec{t} dl$ v Biot-Savartově zákoně pro konečný přímý vodič.

Zavedeme kartézské souřadnice jako na obrázku 4.21 – osu x umístíme do vodiče, místo určování magnetické indukce bude ležet na ose y a osa z je zvolena tak, abychom dostali pravočivou soustavu souřadnic.



Obrázek 4.21: Zavedení kartézských souřadnic u proudové úsečky.

V těchto souřadnicích zjevně máme $\vec{t} = (1, 0, 0)$, $dl = dx$, $\vec{R} = (-x, r, 0)$. Vektorový součin $d\vec{l} \times \vec{R}$ a jeho velikost je

$$d\vec{l} \times \vec{R} = \vec{t} \times \vec{R} dx = (0, 0, r) dx \quad \rightarrow \quad |d\vec{l} \times \vec{R}| = r dx. \quad (4.29)$$

Velikost R je $|\vec{R}| = \sqrt{x^2 + r^2}$ a rozsah souřadnic pro integraci přes proudovou úsečku je $x \in \langle -a, b \rangle$. Biot-Savartův zákon pak v tomto konkrétním případě má tvar

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^b \frac{|d\vec{l} \times \vec{R}|}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^b \frac{r dx}{(r^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (4.30)$$

Nyní použijeme známý vzorec³

$$\int \frac{dx}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{r^2 \sqrt{r^2 + x^2}} \quad (4.31)$$

ve vztahu (4.30) a dospějeme k výsledku:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{x}{r \sqrt{r^2 + x^2}} \right]_{-a}^b = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left(\frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}} + \frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right). \quad (4.32)$$

Ještě můžeme zavést úhly θ_1 a θ_2 (resp. $\tilde{\theta}_2$) jako na obrázku 4.19 a napsat tak vzorec pro magnetickou indukci B pomocí těchto úhlů:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \theta_1 + \cos \tilde{\theta}_2). \quad (4.33)$$

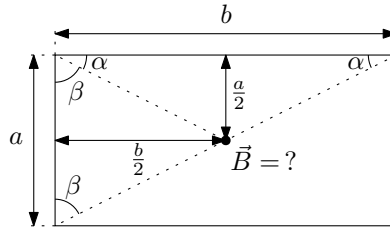
Z tohoto vzorce již snadno spočteme všemožné proudové útvary:

³Tento integrál lze spočítat řadou způsobů. Jedním z nich je použít substituci $\cos \alpha = -\frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}}$ – tedy vlastně přejít k proměnné úhlu α z obrázku 4.20. Poté máme (po úpravě) $\sin \alpha d\alpha = \frac{r^2}{(r^2 + x^2)^{3/2}} dx$ a po dosazení do integrálu: $\int \frac{1}{r^2} \sin \alpha d\alpha = -\frac{1}{r^2} \cos \alpha = \frac{x}{r^2 \sqrt{r^2 + x^2}}$. A teď je již známý.

- **Nekonečně dlouhý vodič:** Limitně platí $\theta_1 = \tilde{\theta}_2 = 0$, dosazením do (4.33) pak velikost magnetické indukce ve vzdálenosti r od vodiče je $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.
- **Polonekonečný vodič:** Zde jsou úhly $\theta_1 = 0$, $\tilde{\theta}_2 = \theta_2 = \pi/2$ a tedy $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}$.

Magnetickou indukci od následujících n -úhelníkové smyček spočteme tak, že vždy určíme magnetickou indukci od jedné strany a vynásobíme počtem stran (s výjimkou obdélníka, kde jsou dva neekvivalentní typy stran):

- **Obdélník:**

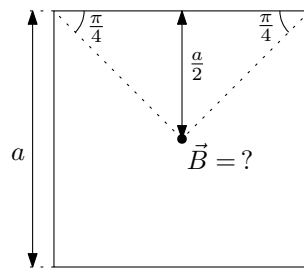


Obrázek 4.22: Magnetická indukce \vec{B} ve středu obdélníka.

Kosiny úhlů v obdélníku vyjádříme pomocí délek stran jako $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ a $\cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$:

$$\begin{aligned}
 B_{\text{obdélník}} &= 2B_a + 2B_b = 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{2}{a} 2 (\cos \alpha) + \frac{2}{b} 2 (\cos \beta) \right] \\
 &= \frac{2\mu_0 I}{\pi} \left[\frac{1}{a} \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{b} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right] = \frac{2\mu_0 I \sqrt{a^2+b^2}}{\pi ab}. \quad (4.34)
 \end{aligned}$$

- **Čtverec:**

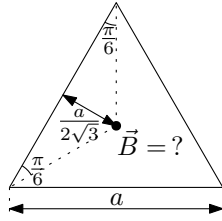


Obrázek 4.23: Magnetická indukce \vec{B} ve středu čtverce.

Buďto uvažujeme čtverec jako speciální případ obdélníka, $b = a$, anebo snadno z obrázku 4.23 určíme potřebné vzdálenosti:

$$B_{\text{čtverec}} = 4B_1 = 4 \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2}{a} \left(\cos \frac{\pi}{4} \right) = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}. \quad (4.35)$$

- **Rovnostranný trojúhelník:**

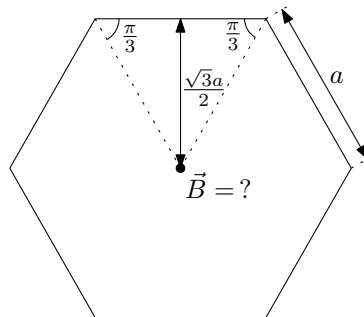


Obrázek 4.24: Magnetická indukce \vec{B} ve středu trojúhelníku.

Je třeba určit hlavně vzdálenost středu trojúhelníka od jeho strany – jde o jednu třetinu výšky, $r = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

$$B_{\text{trojúhelník}} = 3B_1 = 3 \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\sqrt{3}}{a} 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \right) = \frac{9\mu_0 I}{2\pi a}. \quad (4.36)$$

• **Šestiúhelník:**



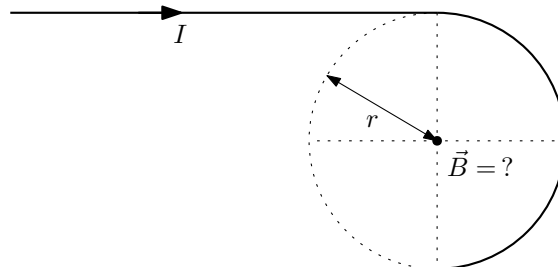
Obrázek 4.25: Magnetická indukce \vec{B} ve středu šestiúhelníku.

V šestiúhelníku je vzdálenost r rovna právě výšce jednoho z trojúhelníků tvořících šestiúhelník, $r = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

$$B_{\text{šestiúhelník}} = 6B_1 = 6 \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2}{\sqrt{3}a} 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{\pi a}. \quad (4.37)$$

4.3.2 4.11 Ohnutý drát

Nekonečný drát je ohnut podle obrázku 4.26. Určete magnetickou indukci ve středu půlkruhu.



Obrázek 4.26: Ohnutý drát s proudem.

Řešení: Magnetické pole ve středu půlkružnice s proudem bude poloviční oproti magnetickému poli celé kružnice (viz první polovina příkladu 4.7 (sekce 4.3.1)):

$$B_{\text{půlkružnice}} = \frac{1}{2} B_{\text{kružnice}} = \frac{\mu_0 I}{4r}. \quad (4.38)$$

Magnetické pole ve vzdálenosti r „na kraji“ polonekonečného vodiče je poloviční oproti magnetickému poli celého nekonečného drátu (viz druhá polovina příkladu 4.7 (sekce 4.3.1)):

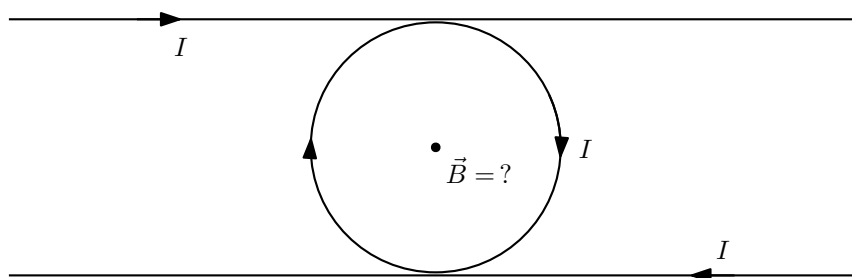
$$B_{\text{půldrát}} = \frac{1}{2} B_{\text{drát}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}. \quad (4.39)$$

Celý problém je rovinný a tedy všechny příspěvky k magnetickému poli budou směřovat stejným směrem a to kolmo k rovině drátu. Pro celkovou velikost magnetické indukce B pak platí

$$B = 2B_{\text{půldrát}} + B_{\text{půlkružnice}} = 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi r} + \frac{\mu_0 I}{4r} = \frac{\mu_0 I}{4r} \left(\frac{2}{\pi} + 1 \right). \quad (4.40)$$

Směr magnetického pole určíme z pravidla pravé ruky (palec ukazuje směr proudu, prsty pak ukazují „směr obtáčení“ magnetických siločar okolo vodiče). Pro zde nakreslený směr proudu směřuje magnetické pole do papíru.

Dodatek: Příklad lze také řešit „trikem“, kdy přes sebe položíme dva stejně tvarované dráty tak, aby efektivně vytvořili celou kružnici s proudem a dva (celo)nekonečné vodiče s proudem. Viz následující obrázek 4.27.



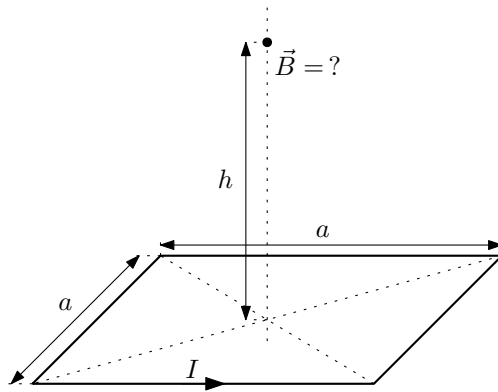
Obrázek 4.27: Zdvojený ohnutý drát tvořící dva nekonečné přímé vodiče a kružnici s proudem.

Výsledné magnetické pole je pak dvojnásobkem původního a stačí nám znát výrazy pro celou kružnici a nekonečný drát:

$$B = \frac{1}{2} (2B_{\text{drát}} + B_{\text{kružnice}}) = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2r} \right) = \frac{\mu_0 I}{4r} \left(\frac{2}{\pi} + 1 \right). \quad (4.41)$$

4.3.3 4.10 Magnetické pole na ose čtvercové smyčky

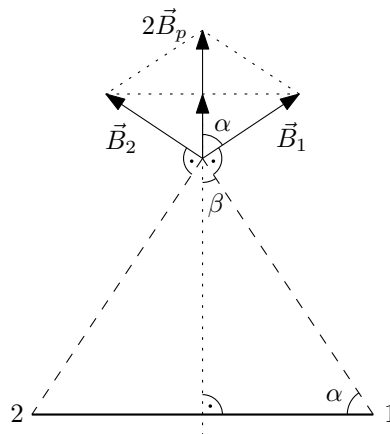
Čtvercovou smyčkou o straně $a = 6 \text{ m}$ teče proud $I = 10 \text{ A}$. Určete magnetickou indukci v bodě na ose smyčky ve výšce $h = 4 \text{ m}$ nad rovinou smyčky.



Obrázek 4.28: Magnetické pole na ose čtvercové smyčky s proudem.

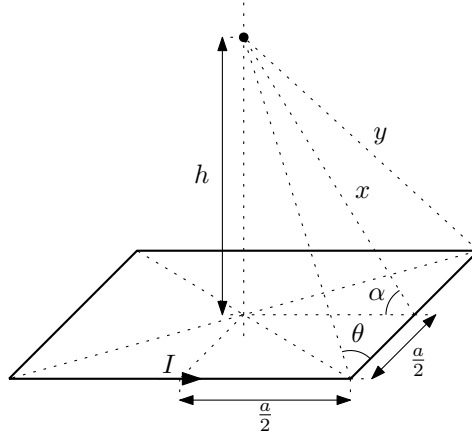
Řešení: V tomto případě nemáme rovinný problém – proudová smyčka a bod určování magnetického pole \vec{B} neleží v jedné rovině. Můžeme ovšem určit dílčí magnetická pole od jednotlivých stran čtvercové smyčky a ty pak složit.

Ze symetrie úlohy (rotační symetrie okolo osy čtverce o násobky úhlu $\frac{\pi}{2}$) víme, že výsledné magnetické pole \vec{B} bude mířit ve směru osy čtvercové smyčky. Budeme tedy chtít spočítat průměty magnetického pole od jednotlivých stran čtverce do směru jeho osy. Symetrie zároveň říká, že tyto průměty jsou pro každou ze stran čtverce stejné. Magnetická pole, jejich průměty a příslušné úhly jsou znázorněné na obrázku 4.29.



Obrázek 4.29: Pohled z boku na čtvercovou smyčku s proudem. Jsou zde znázorněná magnetická pole od protilehlých stran čtverce \vec{B}_1 a \vec{B}_2 a jejich průměty do směru osy smyčky \vec{B}_p . Příslušné strany čtverce jsou označené čísly (jedná se tedy o strany, které jsou v tomto obrázku kolmé na papír). Stranou jedna teče proud směrem do papíru, stranou dva z papíru. Magnetická pole \vec{B}_1 a \vec{B}_2 jsou kolmá na roviny tvořené stranami a bodem na ose čtverce. Konkrétní směr je dán pravidlem pravé ruky. Úhel $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Velikost celkového magnetické pole B tedy bude $B = 4B_p$, kde B_p je velikost průmětu příspěvku magnetického pole od jedné strany čtverce. Nyní zavedeme označení důležitých vzdáleností a úhlů: x , y , θ a α . Na obrázku 4.30 jsou tyto vyznačené. Dále určíme jejich vyjádření pomocí zadaných vzdáleností a a h . V průběhu následného výpočtu celkové magnetické indukce \vec{B} postupně uvidíme, kde jsou tyto veličiny potřeba.



Obrázek 4.30: Vyznačené důležité vzdálenosti x a y a úhly θ a α .

Z Pythagorovy věty snadno určíme

$$x = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}, \quad y = \sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{h^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}. \quad (4.42)$$

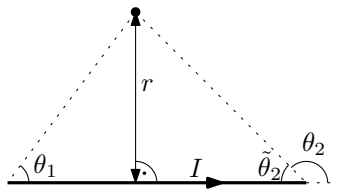
Úhly θ a α vyjádříme z příslušných trojúhelníků jako

$$\cos \theta = \frac{\frac{a}{2}}{y} = \frac{a}{2\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}}, \quad \cos \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{x} = \frac{a}{2\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}}. \quad (4.43)$$

Pro výpočet magnetického pole od jedné strany čtverce B_1 použijeme vzorec odvozený v příkladu 4.7 (sekce 4.3.1) pro magnetické pole „proudové úsečky“:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \theta_1 + \cos \tilde{\theta}_2), \quad (4.44)$$

kde r je kolmá vzdálenost od úsečky a pro zavedení úhlů θ_1 a θ_2 (resp. $\tilde{\theta}_2$) viz obrázek 4.31.



Obrázek 4.31: Vzdálenost r a úhly θ_1 a θ_2 (resp. $\tilde{\theta}_2$) pro určení magnetické indukce od proudové úsečky.

Zde platí $r = x$, $\theta_1 = \tilde{\theta}_2 = \theta$, po dosazení (z (4.42) a (4.43)):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2}{x} \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}} \cdot \frac{a}{2\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}}.$$

Velikost průmětu je $B_p = B_1 \cos \alpha$ (viz obrázek 4.29). Výraz pro úhel α viz (4.43). Nyní dáme všechny výše uvedené informace dohromady:

$$B = 4B_p = 4B_1 \frac{a}{2\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}} = 4 \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}} \cdot \frac{a}{2\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}} \cdot \frac{a}{2\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}}. \quad (4.45)$$

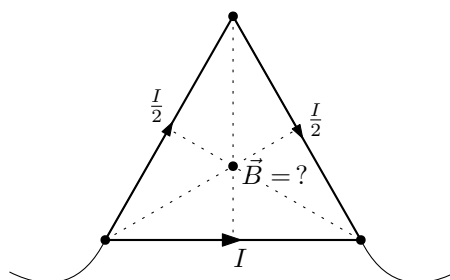
Po úpravě dostaneme výsledek

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{a^2}{\left(h^2 + \frac{a^2}{4}\right) \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{2\sqrt{2} a^2}{(4h^2 + a^2) \sqrt{2h^2 + a^2}}. \quad (4.46)$$

Po dosazení číselných hodnot máme $B = 4,94 \cdot 10^{-7} T$.

4.3.4 4.8 Trojúhelník z drátu

Rovnostranný trojúhelník je sletován z homogenního drátu. Ke dvěma vrcholům trojúhelníka je přiloženo elektromotorické napětí. Jaká bude magnetická indukce ve středu trojúhelníka?



Obrázek 4.32: Magnetické pole ve středu trojúhelníka.

Řešení: Proud tekoucí jednotlivými úseky trojúhelníka je vyznačen již na obrázku 4.32. Proud tekoucí dvěma stranami trojúhelníka musí být poloviční oproti proudu tekoucímu skrze jednu stranu kvůli dvojnásobné délce a tedy i dvojnásobnému odporu.

Magnetické pole ve středu trojúhelníka bychom mohli zjistit tak, že bychom příspěvky od jednotlivých stran přesně vypočetli pomocí Biot-Savartova zákona a tyto následně sečetli. Ostatně konkrétní výraz pro magnetickou indukci od jedné strany trojúhelníka již známe z příkladu 4.7 (sekce 4.3.1). Pojďme se ale na výpočet podívat trochu obecněji. Biot-Savartův zákon

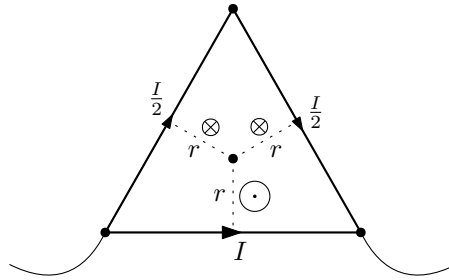
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} \quad (4.47)$$

můžeme přepsat do velmi jednoduché podoby:

$$\vec{B} = I \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} \right) = I \vec{B}(\text{geometrie}). \quad (4.48)$$

Výsledná magnetická indukce je vždy lineárně závislá na protékajícím proudu I a dále je již dána jen geometrií úlohy – pozicí a tvarem vodiče s proudem a místem určování magnetické indukce. Výsledkem konkrétní geometrie je konstantní koeficient \vec{B} , který udává hodnotu magnetického pole na jednotkový proud.

Zde je geometrie každé ze stran trojúhelníka zcela stejná – tedy i koeficient \vec{B} – pokud uvažujeme proud tekoucí ve stále stejném smyslu. Skutečný směr magnetické indukce si určíme dle pravidla pravé ruky – viz obrázek 4.33, tento směr vyjádříme volbou příslušného znaménka u hodnoty proudu.



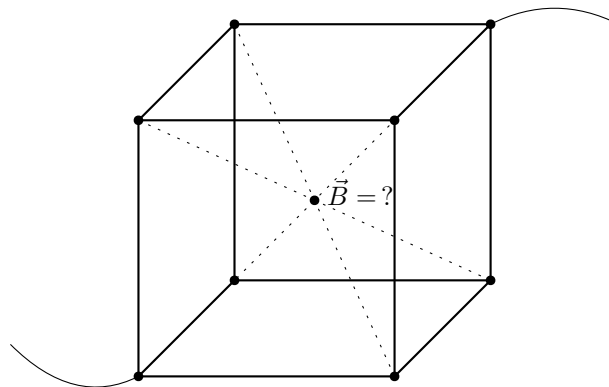
Obrázek 4.33: Znázorněné směry a velikosti magnetické indukce od jednotlivých stran trojúhelníku.

Nyní jen jednotlivé příspěvky sečteme (ještě jednou zopakujeme, že opačný směr magnetické indukce vyjádříme pomocí znaménka u proudu):

$$\vec{B} = \left(I - \frac{I}{2} - \frac{I}{2} \right) \vec{B} = 0. \quad (4.49)$$

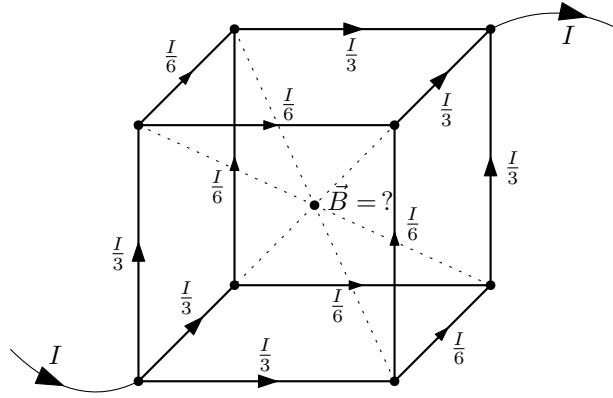
4.3.5 4.9 Krychle z drátu

Krychle je sletována ze stejných úseků drátů. Ke dvěma protilehlým vrcholům krychle připojíme elektromotorické napětí. Jaká bude magnetická indukce ve středu krychle?



Obrázek 4.34: Magnetické pole ve středu krychle.

Řešení: Tento příklad je v zásadě třírozměrnou obdobou předchozího příkladu 4.8. Postup bude velmi obdobný. Proudů tekoucí jednotlivými hranami krychle určíme ze symetrie – proudy se v uzlech rozdělují na třetiny, resp. poloviny (a pak se zase spojují); podrobněji viz příklad 3.6 (sekce 3.4.1). Výsledné hodnoty proudů jsou znázorněné na obrázku 4.35.



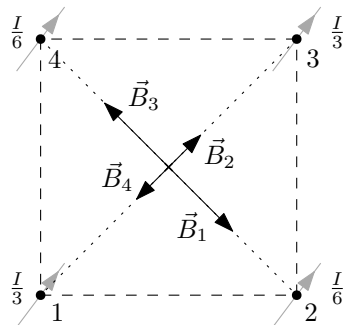
Obrázek 4.35: Proudy tekoucí jednotlivými hranami krychle – $\frac{I}{3}$ a $\frac{I}{6}$.

Vezměme čtyři rovnoběžné hrany, příspěvky k magnetickému poli od těchto hran pak leží v jedné rovině – situace je znázorněná na obrázku 4.36. Směry příspěvků určíme z pravidla pravé ruky – směr magnetické indukce je kolmý na rovinu tvořenou hranou a středem krychle a ukazuje-li palec směr proudu, pak prsty ukazují směr magnetické indukce.

Velikost magnetické indukce bychom konkrétně určili z Biot-Savartova zákona, nám opět bude stačit pouze informace o tom, že magnetická indukce je lineárně závislá na proudu:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} = I \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} \right) = I\vec{B}(\text{geometrie}) \rightarrow B = IB, \quad (4.50)$$

kde koeficient \vec{B} udává hodnotu magnetické indukce na jednotkový proud a je daný čistě geometrií vodiče a místa určování magnetického pole. Pro všechny hrany krychle je geometrie ekvivalentní v tom smyslu, že koeficient B je pro všechny stejný (jen jeho velikost, směry příspěvků jsou různé a museli jsme si je předem určit).

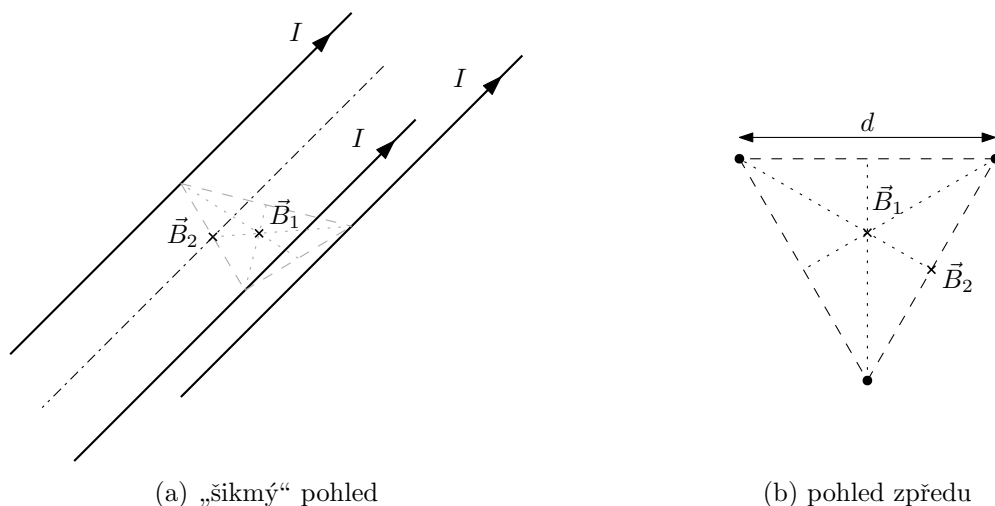


Obrázek 4.36: Magnetické indukce od čtyřech hran krychle. Zobrazen řez kolmo na zvolené hrany procházející středem krychle. Proudy hranami tečou „do papíru“. Jednotlivé hrany jsou očíslovány a k nim přísluší vektory \vec{B}_i .

Zde konkrétně jsou velikosti příspěvků magnetické indukce B_i od hran s proudem $\frac{I}{3}$ stejné, $B_1 = B_3$, a stejně tak jsou stejné velikosti příspěvků od hran s proudem $\frac{I}{6}$, $B_2 = B_4$, (opět viz obrázek 4.36). Vlivem opačných směrů se pak příspěvky vzájemně vruší. Celková magnetická indukce od rovnoběžných hran je tedy nulová a i magnetická indukce od všech hran (tvořené třemi sadami rovnoběžných hran) ve středu krychle je nulová.

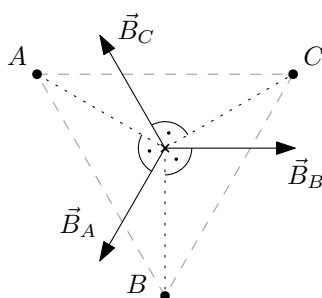
4.3.6 4.14 Tři dráty

Tři rovnoběžné přímé vodiče tvoří hrany trojbokého rovnostranného hranolu, jsou navzájem vzdáleny $d = 10\text{ cm}$ a každým teče proud $I = 20\text{ A}$ stejným směrem. Určete směr a velikost magnetické indukce na ose hranolu a na ose jedné ze stěn hranolu.



Obrázek 4.37: Magnetické pole od tří rovnoběžných drátů.

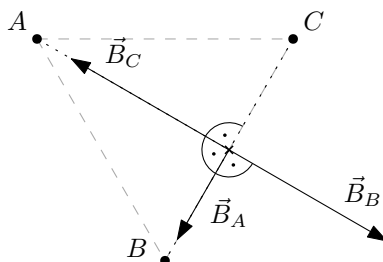
Řešení: Situace na ose hranolu je jednoduchá. Hranol má diskretní rotační symetrii o násobky $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ – při otočení o tyto úhly se nezmění fyzikální situace (poloha vodičů a proudy v nich) a nesmí se tedy ani změnit generované magnetické pole. Nekonečné přímé vodiče vytvářejí magnetické pole ležící v rovinách kolmých na vodič, výslednice magnetických indukcí od tří vodičů tvořící hranol musí opět ležet v rovině kolmé na vodiče. Ovšem jediný vektor, kolmý na osu hranolu, který se nezmění při rotaci o násobky 120° je nulový vektor. Magnetická indukce na ose hranolu je tedy nulová. Na obrázku 4.38 máme znázorněné příspěvky k magnetické indukci od jednotlivých vodičů, ale pro výše použitý argument symetrie bylo potřeba pouze to, že vektory \vec{B}_A , \vec{B}_B , \vec{B}_C leží v rovině kolmé na osu hranolu a nikoliv jejich konkrétní směr a velikost.



Obrázek 4.38: Magnetické indukce na ose hranolu od jednotlivých vodičů v rovině kolmé na vodiče s proudem (zde označené A , B a C a k nim příslušné magnetické indukce \vec{B}_A , \vec{B}_B a \vec{B}_C). Směry magnetické indukce odpovídají proudu tekoucímu vodiči směrem „do papíru“.

Situace na ose stěny hranolu je složitější, viz obrázek 4.39. Příspěvky od vodičů označených jako B a C se vyruší. Jejich velikost je stejná, jelikož osa stěny leží ve stejné vzdálenosti od vodičů tvořících tuto stěnu. Jejich směr je opačný z pravidla pravé ruky – jestliže palec ukazuje

směr proudu tekoucí vodičem, pak prsty ukazují směr magnetické indukce. Zbývá nám tedy určit příspěvek od vodiče A .



Obrázek 4.39: Magnetické indukce na ose stěny od jednotlivých vodičů v rovině kolmé na vodiče s proudem (zde označené A , B a C a k nim příslušné magnetické indukce \vec{B}_A , \vec{B}_B a \vec{B}_C). Směry magnetické indukce odpovídají proudům tekoucím vodiči směrem „do papíru“.

Směr tohoto příspěvku je opět dán pravidlem pravé ruky. Velikost je dána vzorcem pro magnetické pole od nekonečně dlouhého přímého vodiče:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (4.51)$$

kde r je vzdálenost od vodiče. V našem případě platí $r = \sqrt{d^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}d$ a tedy

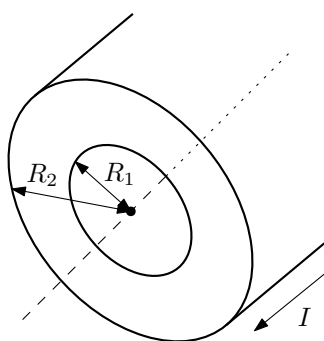
$$B = \frac{\mu_0 I}{\sqrt{3} \pi d}. \quad (4.52)$$

Po dosazení konkrétních hodnot máme $B = 4,62 \cdot 10^{-5} \text{ T}$.

4.4 Ampérův zákon

4.4.1 4.13 Trubka s proudem

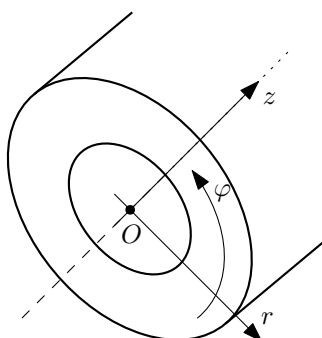
Elektrický proud I protéká stěnami duté kovové trubky o vnitřním a vnějším poloměru R_1 a R_2 . Jaký bude průběh magnetické indukce ve stěnách trubky?



Obrázek 4.40: Nekonečně dlouhá trubka s proudem.

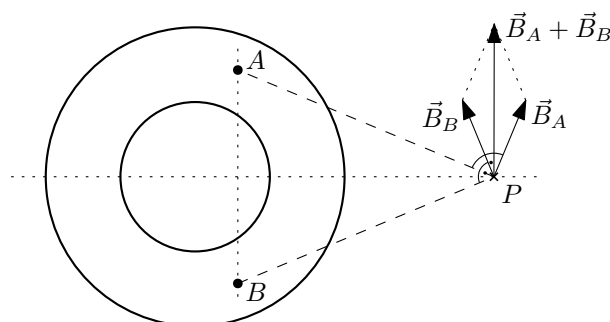
Řešení: Podívejme se nejprve, jaká omezení kladou symetrie úlohy na tvar magnetické indukce generované proudem v trubce. Jedná se primárně o rotační symetrii okolo osy trubky a o translační symetrii ve směru trubky. Zavedeme válcové souřadnice (r, φ, z) tak, že osa z prochází osou trubky, viz obrázek 4.41. Vlivem rotační symetrie pak velikost magnetické indukce

B nesmí záviset na souřadnici φ . Vlivem translační symetrie její velikost nezávisí na souřadnici z . Máme tedy $B = B(r)$.



Obrázek 4.41: Válcové souřadnice (r, φ, z) v trubce.

Jaký bude směr magnetické indukce \vec{B} ? Představme si trubku s proudem jako složení nekonečně mnoha nekonečně dlouhých nekonečně tenkých vodičů. Magnetická indukce generovaná jednotlivě těmito vodiči je známá – vektory magnetického pole směřují vždy tangenciálně a velikost závisí nepřímou úměrou na vzdálenosti ($B \propto \frac{1}{r}$). Uvažujme pevný ale libovolný bod P v prostoru. Tento bod jednoznačně určuje rovinu půlíci trubku podélně a procházející bodem P . Nyní můžeme brát vždy dva vodiče v trubce tak, že jsou protilehlé vůči této rovině – viz obrázek 4.42 – vodiče označené jako A a B . Pro libovolně zvolené protilehlé dvojice vodičů dostaneme výsledný příspěvek k celkové magnetické indukci vždy v tangenciálním směru. I celková magnetická indukce v libovolném bodě P je tedy tangenciální.

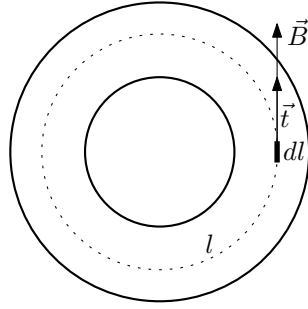


Obrázek 4.42: Výsledný směr příspěvku $\vec{B}_A + \vec{B}_B$ v bodě P k celkové magnetické indukci \vec{B} od protilehlých částí trubky (vodiče A a B a jejich magnetická pole \vec{B}_A a \vec{B}_B) je tangenciální.

Nyní již víme, že magnetická indukce závisí pouze na vzdálenosti r od osy trubky, $\vec{B} = \vec{B}(r)$, a směr této indukce je čistě tangenciální. Pro výpočet konkrétního tvaru velikosti magnetické indukce $B(r)$ použijeme Ampérův zákon:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{in}, \quad (4.53)$$

který vztahuje cirkulaci magnetické indukce \vec{B} podél uzavřené křivky l s celkovým proudem I_{in} uzavřeným v této křivce. Křivku l volíme jako kružnici o obecném poloměru r koncentrickou s osou trubky (osou z). Vektorový element délky $d\vec{l} = \vec{t} dl$, kde \vec{t} je jednotkový tečný vektor na křivku l , směřuje ve směru magnetické indukce \vec{B} , viz obrázek 4.43.



Obrázek 4.43: Křivka l pro Ampérův zákon. Element délky $d\vec{l}$ míří ve směru magnetického pole \vec{B} .

Pro levou stranu Ampérova zákona dostáváme:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_l B dl = B(r) \oint_l dl = 2\pi r B(r), \quad (4.54)$$

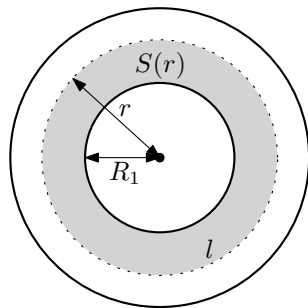
kde jsme využili následující fakta: Pro kolineární vektory \vec{B} a $d\vec{l}$ platí $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl$. Kružnice má konstantní vzdálenost r od osy trubky a tedy magnetické pole $B(r)$ je podél křivky integrace konstantní a můžeme ho vytknout z integrálu. A na závěr jsme použili vztah pro délku křivky (zde obvod kružnice) $\int_l 1 dl = 2\pi r$.

Pravá strana Ampérova zákona vyžaduje výpočet proudu I_{in} uzavřeného uvnitř křivky l . Rozlišíme tři případy. Pro $r \leq R_1$ křivka leží uvnitř trubky a neuzavírá tedy žádný proud, $I_{in} = 0$. Pro $r \geq R_2$ leží celá trubka uvnitř křivky a obepnutý proud je $I_{in} = I$. Na závěr vezmeme případ $R_1 < r < R_2$. Spočteme proudovou hustotu j v trubce ze vztahu $I = jS$, kde S je průřez vodiče:

$$j = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}. \quad (4.55)$$

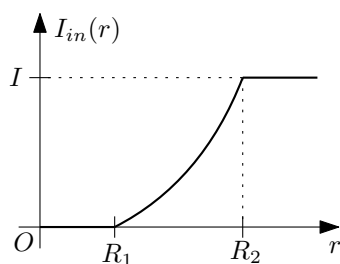
Proud I_{in} uzavřený ve smyčce získáme vynásobením výše spočtené proudové hustoty j průřezem vodiče ve smyčce l : $S(r) = \pi(r^2 - R_1^2)$, viz obrázek 4.44, tzn.

$$I_{in}(r) = jS(r) = I \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}. \quad (4.56)$$



Obrázek 4.44: Průřez vodiče $S(r)$ uzavřený v křivce l – kružnici o poloměru r .

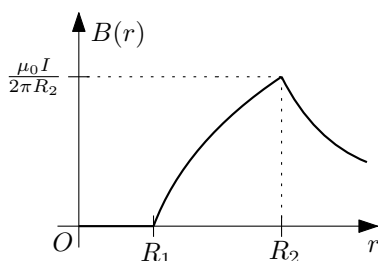
Průběh proudu $I_{in}(r)$ je znázorněn na obrázku 4.45.



Obrázek 4.45: Průběh velikosti proudu $I_{in}(r)$ uzavřeného v kružnici l o poloměru r .

Porovnáním levé a pravé strany Ampérova zákona (4.54) a (4.56) (a „triviálních“ případů I_{in} pro $r < R_1$ a $r > R_2$) získáme výsledek (graficky znázorněn na obrázku 4.46):

$$B(r) = \begin{cases} 0 & r \leq R_1, \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} & R_1 \leq r \leq R_2, \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & R_2 \leq r. \end{cases} \quad (4.57)$$



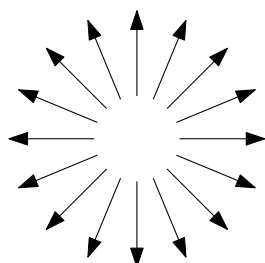
Obrázek 4.46: Průběh velikost magnetické indukce $B(r)$ v závislosti na vzdálenosti r od osy trubky.

Dodatek: Pro magnetickou indukci plného vodiče o poloměru R stačí položit $R_1 = 0$ a $R_2 = R$ a dostaneme výsledek

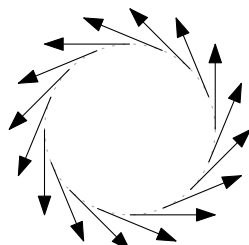
$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R^2} & r \leq R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & r \geq R \end{cases}. \quad (4.58)$$

Ten se nám bude hodit v příkladu 4.12 (viz následující sekce 4.4.2).

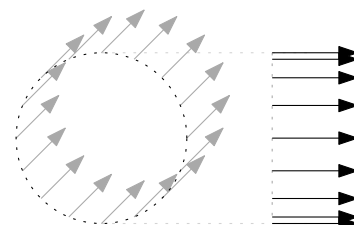
Dodatek: Časem zde bude ještě jiné zdůvodnění směru magnetického pole v trubce čistě pomocí symetrií a studia toho, jaký typ pole symetrie úlohy vůbec připouští. Pole, která jsou rotačně symetrická zobrazuje obrázek 4.47 (rotačně symetrické jsou i všechny lineární kombinace těchto polí).



(a) Radiální vektorové pole.



(b) Tangenciální vektorové pole.

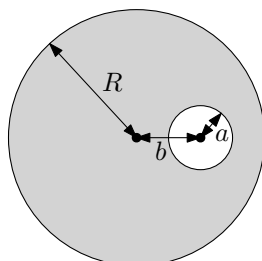


(c) Longitudinální vektorové pole.

Obrázek 4.47: Vektorová pole respektující rotační symetrii okolo osy z .

4.4.2 4.12 Vyvrtaná díra

Uvnitř dlouhého vodiče kruhového průřezu poloměru $R = 5 \text{ mm}$ je vyvrtána válcová dutina o poloměru $a = 0,5 \text{ mm}$, jejíž osa prochází rovnoběžně s osou vodiče ve vzdálenosti $b = 3 \text{ mm}$. Vodičem teče proud $I = 1 \text{ A}$. Jaká bude magnetická indukce v dutině?

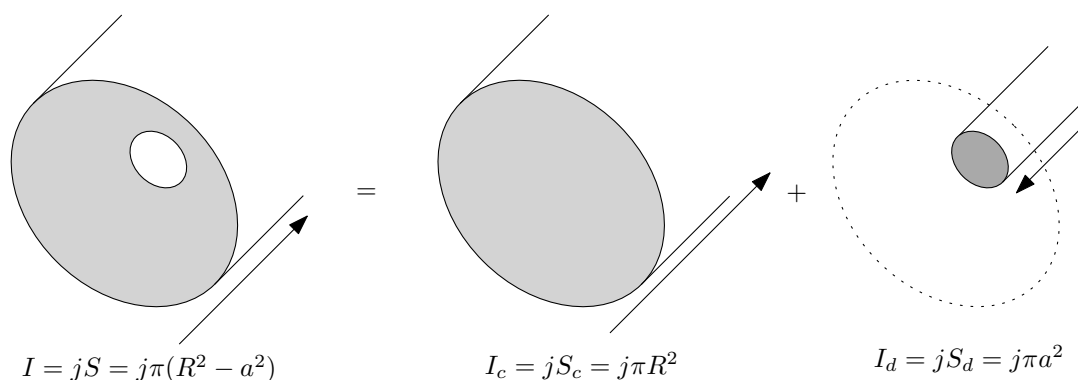


Obrázek 4.48: Vodič s vyvrtanou dírou.

Řešení: Nejprve využijeme princip superpozice. Ve vodiči s vyvrtanou dírou je proudová hustota rovna

$$j = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi(R^2 - a^2)}, \quad (4.59)$$

kde $S = \pi(R^2 - a^2)$ je průřez vodiče. Tuto situaci rozložíme na následující dvě „proudové konfigurace“. První z nich je plný vodič bez vyvrtané díry s celkovým proudem $I_c = jS_c = j\pi R^2$. Druhou z nich je proud tekoucí **opačným směrem** pouze vyvrtanou dírou o velikosti $I_d = jS_d = j\pi a^2$. Proudové hustoty v obou případech uvažujeme shodné s (4.59). Pokud tyto dvě situace „proložíme“ (superponujeme), dostaneme původní proudovou konfiguraci vodiče s proudem, kde vyvrtanou dírou proud neteče. Viz obrázek 4.49.



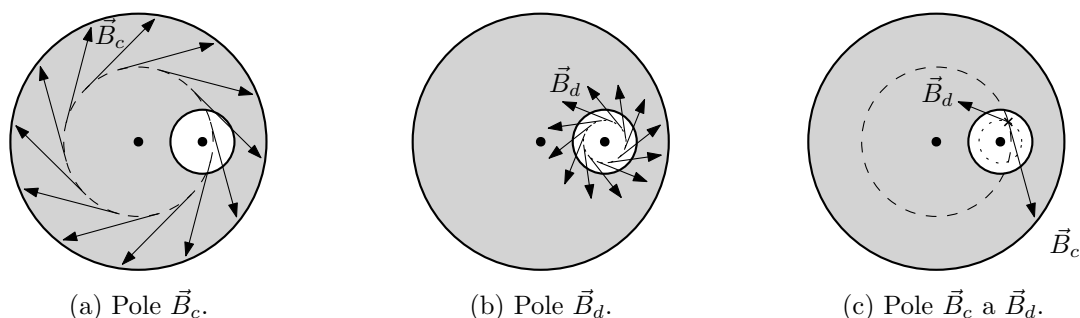
Obrázek 4.49: Vodič s vyvrtanou dírou si lze představit jako superpozici plného vodiče a vodiče na místě vyvrtané díry s proudem tekoucím opačným směrem. Celkové proudy jednotlivými útvary I , I_c a I_d jsou dané součinem konstantní proudové hustoty j a průřezy příslušných útvarů S , S_c a S_d .

Teď určíme magnetická pole od těchto dvou konfigurací, \vec{B}_c a \vec{B}_d , a jejich hodnoty sečteme k získání výsledného magnetického pole od původní konfigurace, $\vec{B} = \vec{B}_c + \vec{B}_d$. Využijeme výsledku (4.58) v dodatku příkladu 4.13 (viz sekce 4.4.1), kde je uveden výsledek pro magnetickou indukci uvnitř válcového vodiče:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R^2}, \quad (4.60)$$

kde I je celkový proud tekoucí vodičem, R je jeho poloměr a r je vzdálenost od jeho osy ($r < R$, uvažujeme pouze body uvnitř vodiče). My ovšem potřebujeme „plný“ vektorový výraz

$\vec{B}(r)$, jelikož příspěvky \vec{B}_c a \vec{B}_d od jednotlivých proudových konfigurací obecně nemíří stejným směrem, viz obrázek 4.50 (c).



Obrázek 4.50: Příspěvky k celkové magnetické indukci od plného vodiče \vec{B}_c (vlevo) a od „vyvrtné díry s opačným proudem“ \vec{B}_d (uprostřed). Vpravo součet $\vec{B}_c + \vec{B}_d$ v jednom místě.

Víme, že vektory magnetické indukce \vec{B} od plného vodiče jsou tangenciální (viz příklad 4.13 v sekci 4.4.1), tedy ležící v rovině kolmé na trubku a tečné k myšleným kružnicím se středem na ose trubky (ilustrováno na levém a prostředním obrázku 4.50). Plný vektorový výraz pro velikost a směr magnetické indukce pak lze napsat následujícím způsobem:

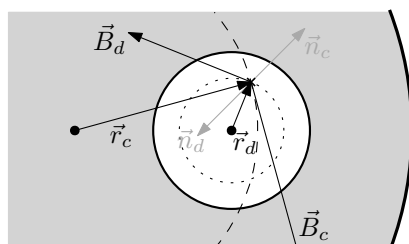
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\vec{n} \times \vec{r}}{R^2}, \quad (4.61)$$

kde \vec{n} je jednotkový vektor mířící ve směru proudu a \vec{r} je vektor spojující osu daného vodiče s místem určování magnetické indukce (ověřte si, že velikost $|\vec{B}|$ je shodná s (4.60) a vektorový součin dle pravidla pravé ruky dává správný směr).

Vektory \vec{B}_c a \vec{B}_d tedy mají vyjádření

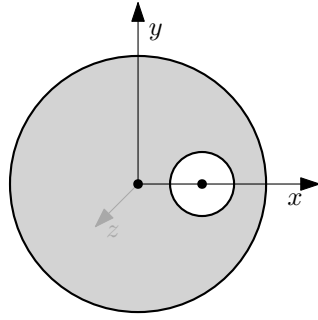
$$\vec{B}_c = \frac{\mu_0 j \pi R^2}{2\pi} \frac{\vec{n}_c \times \vec{r}_c}{R^2} = \frac{\mu_0 j}{2} \vec{n}_c \times \vec{r}_c, \quad \vec{B}_d = \frac{\mu_0 j \pi a^2}{2\pi} \frac{\vec{n}_d \times \vec{r}_d}{a^2} = \frac{\mu_0 j}{2} \vec{n}_d \times \vec{r}_d, \quad (4.62)$$

kde jsme dosadily konkrétní hodnoty proudů I_c a I_d pomocí proudové hustoty j . Dále vektory \vec{n}_c a \vec{n}_d udávají směry proudů, tedy například platí $\vec{n}_c = -\vec{n}_d$. Konečně vektor \vec{r}_c spojuje osu plného vodiče a vektor \vec{r}_d osu „vyvrtného vodiče“ s místem určování magnetického pole, viz obrázek 4.51.



Obrázek 4.51: Znázorněné vektory \vec{r}_c , \vec{r}_d , \vec{n}_c a \vec{n}_d kvůli určení vektorů magnetické indukce \vec{B}_c a \vec{B}_d . Vektor \vec{n}_c míří směrem „do papíru“, vektor \vec{n}_d „z papíru“.

Zavedeme nyní kartézské souřadnice jako na obrázku 4.52.



Obrázek 4.52: Kartézské souřadnice (x, y, z) ve vodiči s dírou. Osa z směřuje směrem „z papíru“.

V těchto souřadnicích zapíšeme vektory \vec{n}_c , \vec{n}_d , \vec{r}_c a \vec{r}_d . Směr proudu I_c je do záporného směru osy z a tedy $\vec{n}_c = (0, 0, -1)$. Směr proudu I_d je opačný, takže $\vec{n}_d = (0, 0, 1)$. Dále uvažujme libovolný bod uvnitř vyvrtané díry o polohovém vektoru $\vec{r} = (x, y, z)$. Pak platí $\vec{r}_c = \vec{r} = (x, y, z)$ a $\vec{r}_d = (x - b, y, z)$. Dosazením těchto vyjádření do (4.62) získáme:

$$\vec{B}_c = \frac{\mu_0 j}{2}(y, -x, 0), \quad \vec{B}_d = \frac{\mu_0 j}{2}(-y, x - b, 0). \quad (4.63)$$

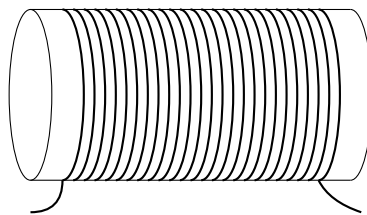
Jejich sečtením dostaneme výsledek:

$$\vec{B} = \vec{B}_c + \vec{B}_d = \frac{\mu_0 j}{2}(0, -b, 0) = \frac{\mu_0 j b}{2}(0, -1, 0). \quad (4.64)$$

Magnetické pole v celém prostoru dutiny je tedy konstantní! Jeho velikost je $B = \frac{\mu_0 j b}{2}$, kde bychom mohli ještě dosadit za proudovou hustotu $j = \frac{I}{\pi(R^2 - a^2)}$. Po dosazení konkrétních hodnot máme $B = 2,42 \cdot 10^{-5} T$.

4.4.3 4.15 Solenoid

Solenoid má délku $L = 30 \text{ cm}$ a průměr $d = 6 \text{ cm}$. Na 1 cm je navinuto 5 závitů ($n = 5 \text{ z./cm}$), drát má odpor $\Omega_m = 0,01 \Omega \cdot \text{m}^{-1}$ a je připojen k $\mathcal{E} = 24 \text{ V}$. Jaká bude magnetická indukce uvnitř solenoidu, tlak na boční stěnu a spotřebovávaný výkon?



Obrázek 4.53: Solenoid.

Řešení: Pokud známe vzorec pro velikost magnetické indukce uvnitř nekonečně dlouhého solenoidu, $B = \mu_0 n I$ (n je hustota závitů, I proud tekoucí solenoidem), je příklad triviální. Celkový odpor drátu bude zřejmě $R = \Omega_m \pi d n L$, kde $l = (\pi d) N$ je celková délka drátu a $N = n L$ je počet závitů cívky. Proud tekoucí solenoidem je z Ohmova zákona $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$. Magnetická indukce je tedy

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 n \frac{\mathcal{E}}{\Omega_m \pi d n L} = \frac{\mu_0 \mathcal{E}}{\Omega_m \pi d L} = 5,33 \cdot 10^{-2} T. \quad (4.65)$$

Spotřebovávaný výkon je daný Jouleovým teplem $P = RI^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R}$:

$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{\Omega_m \pi d n L} = 2037 \text{ W}. \quad (4.66)$$

Tlak na boční stěnu je dán vztahem pro tlak na proudovou plochu, kde magnetické indukce z jedné a druhé strany jsou B_1 a B_2 :

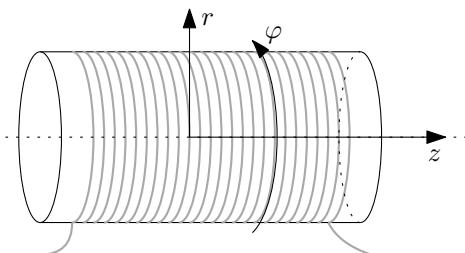
$$p = \frac{1}{2\mu_0} (B_1^2 - B_2^2). \quad (4.67)$$

V solenoidu máme $B_1 = B$ uvnitř a $B_2 = 0$ vně. Výsledkem tedy je:

$$p = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 \mathcal{E}}{\Omega_m \pi d L} \right)^2 = \frac{\mu_0 \mathcal{E}^2}{2(\Omega_m \pi d L)^2} = 1132 \text{ Pa}. \quad (4.68)$$

Dá se ukázat, že tlak působí zevnitř solenoidu – má tedy tendenci cívku roztahovat, například pomocí Ampérova vzorce pro sílu na vodič s proudem $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$.

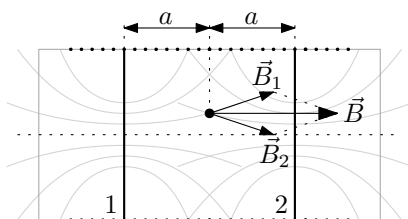
Nyní následuje odvození vzorce $B = \mu_0 n I$. Podívejme se nejprve, jaká omezení klade válcová symetrie úlohy na možné tvary magnetické indukce \vec{B} v okolí solenoidu. Zavedme válcové souřadnice (z, r, φ) tak, že osa z je totožná s osou solenoidu, viz obrázek 4.54.



Obrázek 4.54: Válcové souřadnice (z, r, φ) v solenoidu.

Obecně by velikost magnetické indukce $B(z, r, \varphi)$ mohla záviset na všech prostorových proměnných. Vlivem rotační symetrie okolo osy ale nemůže záviset na souřadnici φ a vlivem translační symetrie podél osy nemůže záviset na z . Zbyla nám tedy pouze radiální závislost, tzn. závislost na vzdálenosti od osy solenoidu, $B(r)$.

Kam bude mířit vektor \vec{B} ? Ukážeme, že magnetické pole je tzv. longitudinální (podélné) – míří ve směru osy solenoidu. Vezměme libovolné místo a zkoumejme příspěvky magnetické indukce od dvou symetricky rozložených závitů, viz obrázek 4.55. Přestože neznáme přesný průběh magnetické indukce od kružnice s proudem, z reflexní symetrie okolo roviny kruhové smyčky plyne, že magnetická pole od jedné a druhé proudové smyčky, \vec{B}_1 a \vec{B}_2 se sečtou na longitudinální (podélný, míří ve směru osy z) vektor.



Obrázek 4.55: Příspěvky \vec{B}_1 a \vec{B}_2 k magnetické indukci od dvou symetricky rozložených závitů. Šedě jsou znázorněny přibližné magnetické siločáry od těchto jednotlivých závitů.

Nyní již můžeme přikročit k vlastnímu určení magnetické indukce okolo solenoidu. K tomu použijeme Ampérův zákon

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{in}, \quad (4.69)$$

který vztahuje cirkulaci magnetické indukce \vec{B} podél uzavřené křivky l s proudem I_{in} touto křivkou obepnutý.

Pro určení magnetického pole solenoidu volíme obdélníkovou smyčku, jejíž dvě stěny jsou kolmé na stěnu solenoidu a dvě stěny jsou rovnoběžné s osou solenoidu. „Šířka“ křivky nechť je s a vzdálenosti dolní a horní strany od osy solenoidu jsou r_1 a r_2 . Viz obrázky 4.56.



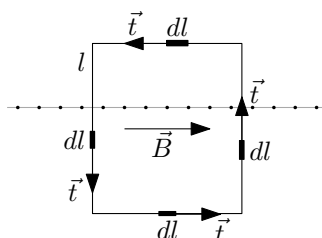
(a) Křivka l v solenoidu pro Ampérův zákon.

(b) Rozměry a umístění křivky l .

Obrázek 4.56: Křivka l v Ampérově zákoně.

Uvnitř křivky l je chyceno $N = ns$ závitů a tedy celkový protékající proud skrze křivku je $I_{in} = Ins$. Integrál přes celou obdélníkovou smyčku si rozdělíme na čtyři integrály přes jednotlivé strany:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{\text{levá}} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{\text{dolní}} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{\text{pravá}} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{\text{horní}} \vec{B} \cdot d\vec{l}. \quad (4.70)$$



Obrázek 4.57: Elementy délky dl a tečné vektory \vec{t} v jednotlivých stranách obdélníkové smyčky l .

Směry jednotkových tečných vektorů \vec{t} od elementů $d\vec{l} = \vec{t} dl$ v jednotlivých částech křivky l jsou znázorněné na obrázku 4.57. Integrály přes levou a pravou stranu jsou nulové vlivem kolmosti vektoru magnetické indukce \vec{B} a tečného vektoru ke křivce \vec{t} , $\vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$, naopak skalární součiny pod integrály přes horní, resp. dolní, stranu dají $\vec{B} \cdot d\vec{l} = -B dl$, resp. $B dl$:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{\text{dolní}} B dl - \int_{\text{horní}} B dl. \quad (4.71)$$

Magnetická indukce je závislá pouze na vzdálenosti od osy solenoidu, $B(r)$. Úsečky horní a dolní stěny leží na konstantních hodnotách souřadnice r . Výrazy pod integrály jsou tedy konstantní a můžeme je vytknout:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r_1) \int_{\text{dolní}} dl - B(r_2) \int_{\text{horní}} dl = [B(r_1) - B(r_2)] s; \quad (4.72)$$

ještě jsme použili vztah $\int dl = s$ (délka horní a dolní úsečky je s). Dosadíme-li spočtené výrazy pro cirkulaci magnetické indukce a proud uzavřený ve smyčce do Ampérova zákona, dostaneme:

$$[B(r_1) - B(r_2)]s = \mu_0 I n s \quad \rightarrow \quad B(r_1) - B(r_2) = \mu_0 I n. \quad (4.73)$$

Z této rovnice plyne, že uvnitř i vně solenoidu je magnetická indukce konstantní a liší se o konstantní hodnotu $\mu_0 n I$. Nejsnáze je tento fakt vidět, pokud (4.73) zderivujeme podle r_1 , tzn. $\frac{\partial}{\partial r_1}$ (4.73), nebo podle r_2 , $\frac{\partial}{\partial r_2}$ (4.73), s výsledkem⁴:

$$\frac{dB(r_1)}{r_1} = 0 \quad \rightarrow \quad B(r_1) = \text{konst.}, \quad \frac{dB(r_2)}{r_2} = 0 \quad \rightarrow \quad B(r_2) = \text{konst.} \quad (4.74)$$

Zavedme nyní označení $B_{\text{uvnitř}} = B(r_1)$ a $B_{\text{vně}} = B(r_2)$. Platí tedy

$$B_{\text{uvnitř}} - B_{\text{vně}} = \mu_0 n I. \quad (4.75)$$

Posledním krokem je ukázat, že $B_{\text{vně}} = 0$. Nechme si toto do dodatku. Pak bude zjevně

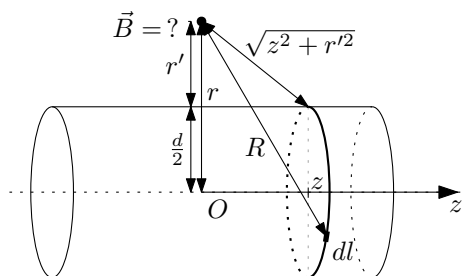
$$B_{\text{uvnitř}} = \mu_0 n I. \quad (4.76)$$

Dodatek: Ukažme, že $B_{\text{vně}} = 0$. Obecná strategie bude následující. Protože přesně spočítat magnetické pole vně solenoidu pomocí Biot-Savartova zákona je velmi obtížné⁵, pokusíme se získat nějaký horní odhad pro velikost tohoto pole, $B_{\text{vně}} \leq B_{\text{odhad}}$. Pokud pro tento odhad bude platit $B_{\text{odhad}} \leq \frac{C}{(r-r_0)^\alpha}$, kde $C > 0$, $\alpha > 0$, r_0 jsou konstanty a r je vzdálenost od osy solenoidu, dostaneme spojením těchto nerovností výsledek, že přesné pole musí ubývat se vzdáleností od osy solenoidu: $B_{\text{vně}} \leq \frac{C}{(r-r_0)^\alpha}$. Jelikož ale již víme, že pole vně solenoidu je konstantní, jediná hodnota tohoto pole konzistentní s ubýváním do nekonečna je nulová hodnota⁶, $B_{\text{vně}} = 0$.

Nalezneme tento odhad. Nejprve odhadneme velikost magnetického pole jednoho závitu, $B_{\text{závit}}$. Vezměme Biot-Savartův zákon a odhadujme:

$$B_{\text{závit}} = \left| \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} \right| \leq \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{|d\vec{l} \times \vec{R}|}{R^3} \leq \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{dl}{R^2}. \quad (4.77)$$

Použili jsme odhady $\left| \int d\vec{B} \right| \leq \int dB$ a $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \alpha \leq |\vec{a}||\vec{b}|$. Dále potřebujeme odhadnout vzdálenost R mezi kousky závitu a místem určování magnetické indukce, viz obrázek 4.58.



Obrázek 4.58: Vzdálenosti potřebné pro odhad magnetického pole od jednoho závitu.

⁴Stejný výsledek lze samozřejmě získat i bez derivací. Hodnoty r_1 a r_2 jsou na sobě zcela nezávislé. Můžeme například r_2 držet fixně, pak $B(r_1) = B(r_2) + \mu_0 n I = \text{konst.}$ a opačně.

⁵Však také proto v tomto příkladě používáme Ampérův zákon.

⁶Pokud by pole vně solenoidu nebylo nulové $B_{\text{vně}} = B_0 \neq 0$, vždy bychom našli vzdálenost r_v , kdy by byl porušen náš odhad $B_{\text{vně}} \leq \frac{C}{(r-r_0)^\alpha}$, konkrétně pro $r_v > r_0 + \left(\frac{C}{B_0}\right)^{1/\alpha}$.

Nechť je závit umístěn na ose z na obecné souřadnici z , pak můžeme vzdálenost odhadnout takto: $R \geq \sqrt{z^2 + (r - \frac{d}{2})^2}$ – tedy že jsme všechny vzdálenosti zmenšili na vzdálenost toho nejbližšího kousku závitu, opět viz obrázek 4.58. Čistě pro jednodušší zápis zavedeme vzdálenost $r' = r - \frac{d}{2}$ jako vzdálenost od stěny solenoidu: $R \geq \sqrt{z^2 + r'^2}$. Dosadme a upravujeme:

$$B_{\text{závit}} \leq \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{dl}{R^2} \leq \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{dl}{z^2 + r'^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{z^2 + r'^2} \int_l dl = \frac{\mu_0 I d}{4} \frac{1}{z^2 + r'^2}, \quad (4.78)$$

kde jsme vytkli všechny konstanty z integrálu a zintegrovali $\int dl = \pi d$. Celkové magnetické pole $B_{\text{vně}}$ získáme integrací přes všechny závity:

$$\vec{B}_{\text{vně}} = \int_{\text{závity}} \vec{B}_{\text{závit}} dN \rightarrow B_{\text{vně}} \leq \int_{\text{závity}} B_{\text{závit}} dN = \int_{-\infty}^{\infty} B_{\text{závit}}(z) n dz, \quad (4.79)$$

kde $dN = n dz$ je počet závitů kousku cívky šířky dz . Opět jsme použili odhad $|\int d\vec{B}| \leq \int dB$. Po dosazení z (4.78):

$$B_{\text{vně}} \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 I n d}{4} \frac{1}{z^2 + r'^2} dz = \frac{\mu_0 I n d}{4} \frac{1}{r'^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{1 + (\frac{z}{r'})^2}. \quad (4.80)$$

Spočtením integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{1 + (\frac{z}{r'})^2} = \left[r' \arctg\left(\frac{z}{r'}\right) \right]_{-\infty}^{\infty} = \pi r' \quad (4.81)$$

dostaneme výsledný odhad:

$$B_{\text{vně}} \leq \frac{\mu_0 \pi I n d}{4} \frac{1}{r'} = \frac{C}{r'} = \frac{C}{r - \frac{d}{2}}, \quad (4.82)$$

kde $C = \frac{\mu_0 \pi I n d}{4}$. Z toho, jak již bylo řečeno na začátku, plyne, že $B_{\text{vně}} = 0$.

4.5 Magnetický dipól

4.5.1 4.16 Zemský magnetický dipól

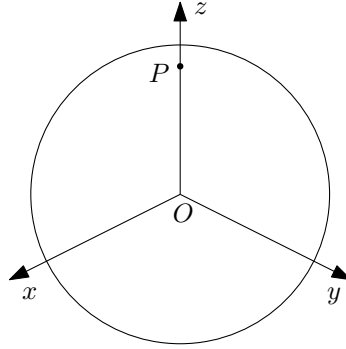
Zemské magnetické pole na severním pólu má indukci o velikosti $B = 6,20 \cdot 10^{-5} T$ a její vektor míří kolmo k zemi. Určete velikost magnetického dipólového momentu Země a proud, který by musel téci po rovníku, aby takový moment vyvolal.

Řešení: Magnetická indukce \vec{B} od magnetického dipólového momentu je dána vztahem

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right). \quad (4.83)$$

Tento vztah popisuje průběh magnetického pole daleko od tekoucích proudů, kde převládá dipólový příspěvek k poli a vyšší multipólové momenty jsou již zanedbatelné. Představujeme si tedy, že magnetické pole Země vzniká kdesi uprostřed v jejím jádru a místo na severním pólu je již dostatečně daleko, aby dipólová aproximace byla dostatečně přesná.

Zavedeme nyní kartézské souřadnice s počátkem ve středu Země a osu z orientujeme ve směru severního pólu P , viz obrázek 4.59. Pól P má tedy polohový vektor $\vec{r}_P = (0, 0, R_Z)$.



Obrázek 4.59: Kartézské souřadnice s počátkem ve středu Země a osou z mířící ve směru severního pólu.

Magnetické pole míří kolmo k Zemi tedy míří proti směru polohového vektoru \vec{r} . Vzorec (4.83) se skládá ze dvou částí – první část míří ve směru vektoru \vec{r} a druhá ve směru \vec{m} . Aby výsledné magnetické pole \vec{B} (které je tvaru $\vec{B} = \alpha\vec{r} + \beta\vec{m}$) mířilo v/proti směru \vec{r} , je třeba podmínka $\vec{m} \parallel \vec{r}$. Pro $\vec{r} = \vec{r}_P$ tedy máme $\vec{m} = (0, 0, m)$. Na pólu je pak magnetická indukce \vec{B} rovna

$$\vec{B}(\vec{r}_P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3mR_Z}{R_Z^5} (0, 0, R_Z) - \frac{1}{R_Z^3} (0, 0, m) \right) = \frac{2\mu_0 m}{4\pi R_Z^3} (0, 0, 1). \quad (4.84)$$

Pro $m > 0$ míří vektor \vec{B} od Země a je tedy třeba uvažovat $\vec{m} = (0, 0, -m)$. Hodnotu magnetického dipólového momentu m získáme vyjádřením z vektorové rovnice (4.84) spočtením velikosti levé a pravé strany:

$$B = \frac{\mu_0 m}{2\pi R_Z^3} \rightarrow m = \frac{2\pi R_Z^3 B}{\mu_0}. \quad (4.85)$$

Dodatečná otázka v zadání, jak velký by musel téct proud I po rovníku, aby vyvolal výše spočtený dipólový moment m , nedává valného smyslu. Pro kružnici s proudem o poloměru R_Z nebude dávat vzorec (4.83) správný výsledek, jelikož velikost oblasti s proudy je řádově srovnatelná se vzdáleností této oblasti k severnímu pólu – dipólová aproximace nebude přesná. Můžeme ale spočítat přesný výsledek pro proud tekoucí po rovníku vyvolávající zadané magnetické pole a porovnat ho s hodnotou pole, které vyjde, pokud stejný proud dosadíme do vzorce pro dipólové pole.

Velikost magnetické indukce na ose kruhové smyčky s proudem I o poloměru r a ve výšce h je

$$B_{\text{kružnice}} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{r^2}{(r^2 + h^2)^{3/2}}; \quad (4.86)$$

(dá se určit z Biot-Savartova zákona). Po dosazení $r = h = R_Z$ máme

$$B_{\text{kružnice}} = \frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}R_Z}. \quad (4.87)$$

A tedy proud pro zadanou magnetickou indukci B je (pro $R_Z = 6378 \text{ km}$)

$$I = \frac{1}{\mu_0} 4\sqrt{2} B R_Z = 1,78 \cdot 10^9 \text{ A}. \quad (4.88)$$

Rovinná smyčka s proudem I vytínající plochu S má magnetický dipólový moment $m = IS$; v našem případě $S = \pi R_Z^2$. Dosadíme-li tento vztah do levého vzorce v (4.85) a proud vypočtený výše, dostaneme pro magnetické pole na pólu v dipólové aproximaci

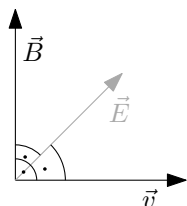
$$B_{\text{dip}} = \frac{\mu_0 I S}{2\pi R_Z^3} = \frac{\mu_0 I}{2R_Z} = 1,75 \cdot 10^{-3} \text{ T}, \quad (4.89)$$

keré je podstatně odlišné od zadaného potvrzující naše podezření, že druhá část zadání nemá valného smyslu.

4.6 Lorentzova síla

4.6.1 4.6 Kolmá pole

Jaká výsledná síla působí na nabitou částici pohybující se rychlostí $v = E/B$ ve vzájemně kolmých elektrickém a magnetickém polích tak, že vektory \vec{E} , \vec{B} a \vec{v} tvoří pravoúhlou pravotočivou soustavu?



Obrázek 4.60: Nabitá částice v navzájem kolmých polích.

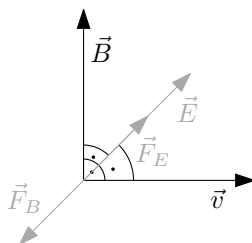
Řešení: Vzorec pro Lorentzovu sílu působící na nabitou částici s nábojem q v elektrickém a magnetickém poli \vec{E} a \vec{B} je následující:

$$\vec{F}_L = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \vec{F}_E + \vec{F}_B. \quad (4.90)$$

Velikosti elektrické a magnetické síly F_E a F_B se rovnají, neboť díky kolmosti vektorů \vec{v} a \vec{B} platí

$$F_B = qvB = q \frac{E}{B} B = qE = F_E. \quad (4.91)$$

Pro $q > 0$ míří síla \vec{F}_E ve směru vektoru \vec{E} . Dle pravidla pravé ruky určíme, že síla $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$ míří proti směru vektoru \vec{E} . Pro $q < 0$ dtto jen obráceně. Výsledná síla působící na nabitou částici je pak nulová, $\vec{F}_L = 0$.



Obrázek 4.61: Směry elektrické a magnetické síly \vec{F}_E a \vec{F}_B pro $q > 0$.

4.6.2 4.21 Kruhový pohyb v magnetickém poli

Deuteron se pohybuje po kružnici o poloměru $r = 40 \text{ cm}$ v magnetickém poli $B = 1,5 \text{ T}$. Určete rychlost, energii a dobu oběhu deuteronu.

Řešení: Máme „na výběr“ spočítat příklad relativisticky či nerelativisticky. Provedme obojí a porovnávejme postup a výsledky. Na částici působí magnetická část Lorentzovy síly

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (4.92)$$

Tato síla vystupuje na pravé straně relativistické, resp. nerelativistické, pohybové rovnice:

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma\vec{v}) = \vec{F}_B, \quad \frac{d}{dt}(m_0\vec{v}) = \vec{F}_B; \quad (4.93)$$

kde faktor $\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$ a pro nerelativistickou rovnici klademe $c \rightarrow +\infty$ (efektivně $\gamma = 1$). Magnetická síla hraje roli dostředivé síly způsobující kruhový pohyb. Jak vypadá tato síla v relativistickém případě? Dostředivé zrychlení je čistě kinematická veličina a její vyjádření se tedy v relativitě nijak nezmění – $a_d = \frac{v^2}{r}$. Síla \vec{F}_B působící v každém okamžiku kolmo na rychlost \vec{v} nemění její velikost, tzn. $v = \text{konst.}$, a tím pádem i $\gamma = \text{konst.}$ a relativistickou pohybovou rovnici můžeme upravit:

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma\vec{v}) = m_0\gamma \frac{d}{dt}\vec{v} = m_0\gamma\vec{a} = \vec{F}. \quad (4.94)$$

Zrychlení v této rovnici je právě dostředivé zrychlení způsobující kruhový pohyb, takže vidíme, že relativistická dostředivá síla je $\vec{F}_d = m_0\gamma\vec{a}_d$. Nyní již můžeme napsat rovnice vztahující magnetickou a dostředivou sílu:

$$qvB = m_0\gamma \frac{v^2}{r} = \frac{m_0v^2}{r\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad qvB = m_0 \frac{v^2}{r}. \quad (4.95)$$

Stačí již jen z těchto rovnic vyjádřit rychlost v , po snadných úpravách získáme

$$v_r = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{m_0^2}{r^2q^2B^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_0c}{qBr}\right)^2}}, \quad v_{nr} = \frac{qBr}{m_0}, \quad (4.96)$$

kde jsme zavedli označení v_r , resp. v_{nr} , pro relativistický, resp. nerelativistický, výsledek. Pro $c \rightarrow +\infty$, tzn. v nerelativistické limitě, přechází výraz pro v_r na v_{nr} . Po dosazení číselných hodnot (hmotnost deuteronu $m_d = 3,343 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, rychlost světla $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$, elementární elektrický náboj $e = 1,607 \cdot 10^{-19} \text{ C}$) dostaneme

$$v_r = 2,871 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}, \quad v_{nr} = 2,884 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}. \quad (4.97)$$

Dostali jsme v podstatě identické výsledky – nerelativistická aproximace je tedy v tomto případě v pořádku (faktor $\beta = \frac{v}{c} < 0,1$ a $\gamma \approx 1$).

Kinetická energie je pak relativisticky, resp. nerelativisticky

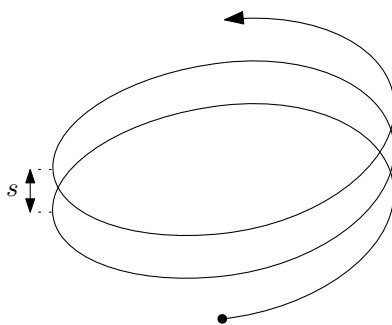
$$E_{Kr} = (\gamma - 1)m_0c^2 = 1,39 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 8,63 \text{ MeV}, \quad E_{Knr} = \frac{1}{2}m_0v_{nr}^2 = 1,39 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 8,65 \text{ MeV}. \quad (4.98)$$

Doba oběhu je z jednoduchého kinematického vztahu

$$T_r = \frac{2\pi r}{v_r} = 8,75 \cdot 10^{-8} \text{ s}, \quad T_{nr} = \frac{2\pi r}{v_{nr}} = 8,71 \cdot 10^{-8} \text{ s}. \quad (4.99)$$

4.6.3 4.20 Pohyb v magnetickém poli po šroubovici

Elektron vletí do homogenního magnetického pole rychlostí $v = 5 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}$ a začne se pohybovat po šroubovici o poloměru $r = 5 \text{ cm}$ a stoupání $s = 30 \text{ cm}$. Určete velikost magnetické indukce.



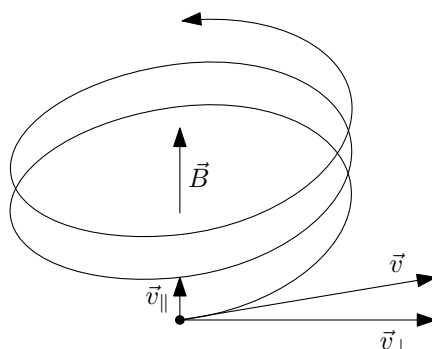
Obrázek 4.62: Pohyb částice v magnetickém poli po šroubovici.

Řešení: Na částici působí magnetická část Lorentzovy síly

$$\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B}. \quad (4.100)$$

Rozložíme-li vektor rychlosti částice \vec{v} na složku kolmou a rovnoběžnou s magnetickým polem, $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$ (viz obrázek 4.63), dostaneme pro sílu \vec{F}_B a její velikost vyjádření

$$\vec{F}_B = q(\vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel) \times \vec{B} = q \vec{v}_\perp \times \vec{B}, \quad F_B = qv_\perp B. \quad (4.101)$$



Obrázek 4.63: Rozklad rychlosti $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$ do směru kolmého a rovnoběžného s magnetickým polem \vec{B} .

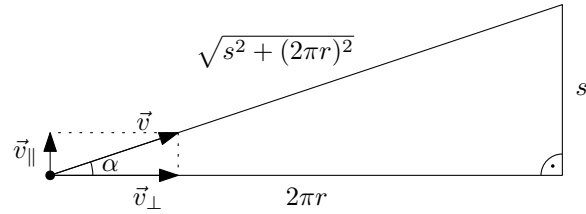
Pohyb po šroubovici můžeme rozložit na kruhový pohyb oběžnou rychlostí v_\perp a stoupavý pohyb rychlostí v_\parallel . Magnetická síla působí vždy kolmo na rychlost \vec{v}_\perp a hraje tedy roli dostředivé síly pro kruhový pohyb – proto platí:

$$qv_\perp B = m \frac{v_\perp^2}{r}. \quad (4.102)$$

Vyjádříme-li z rovnice magnetické pole B dostaneme

$$B = \frac{mv_\perp}{qr}. \quad (4.103)$$

Nyní stačí jen nalézt vztah pro v_\perp v řeči v , s a r (stoupání s představuje vzdálenost, kterou částice urazí v „podélném“ směru při jednom oběhu kruhového pohybu). Vezmeme jednu otáčku šroubovice a „rozvineme ji“ do roviny. Vznikne tak pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami o velikostech s a $2\pi r$, viz obrázek 4.64.



Obrázek 4.64: Pohyb částice v magnetickém poli po šroubovici.

Z podobnosti trojúhelníků získáme

$$\frac{v_{\perp}}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{s^2 + (2\pi r)^2}} \quad \rightarrow \quad v_{\perp} = \frac{v}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{2\pi r}\right)^2}}. \quad (4.104)$$

Dosazením do (4.103) dostaneme výsledek

$$B = \frac{m}{qr} \frac{v}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{2\pi r}\right)^2}} = \frac{mv}{q\sqrt{r^2 + \left(\frac{s}{2\pi}\right)^2}}. \quad (4.105)$$

Pro konkrétní hodnoty (hmotnost elektronu $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, elementární elektrický náboj $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$) máme $B = 4,11 \cdot 10^{-4} \text{ T}$.

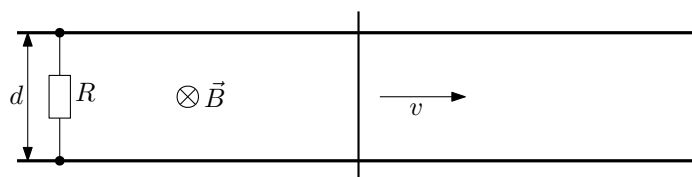
Kapitola 5

Elektromagnetické pole

5.1 Elektromagnetická indukce

5.1.1 5.2 Indukce na kolejích

Dvě dlouhé dokonale vodivé kolejnice jsou od sebe vzdáleny $d = 0,5\text{ m}$ a spojeny odporem $R = 0,2\ \Omega$. Po nich klouže dokonale vodivá tyč rychlostí $v = 4\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Kolmo k rovině kolejnic působí magnetické pole $B = 0,5\text{ T}$. Určete indukované napětí, sílu potřebnou k udržení konstantní rychlosti, mechanický a tepelný výkon v tomto zařízení.



Obrázek 5.1: Indukce na kolejích.

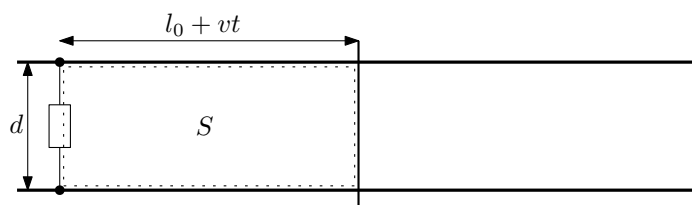
Řešení: Pro určení indukovaného napětí \mathcal{E}_{ind} použijeme Faradayův zákon elektromagnetické indukce:

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (5.1)$$

Je potřeba určit magnetický indukční tok Φ , který je dán vztahem

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (5.2)$$

kde S je plocha ohraničená smyčkou, ve které chceme určit indukované napětí. V našem případě volíme obdélník ohraničený kolejnicemi, tyčí a odporem; viz obrázek 5.2.



Obrázek 5.2: Plocha S pro výpočet magnetického indukčního toku Φ .

Normálový vektor \vec{n} k tomuto obdélníku míří do papíru (do země) a je tedy rovnoběžný se zadaným magnetickým polem \vec{B} . Vzhledem k tomu, že $d\vec{S} = \vec{n} dS$, dostáváme pro skalární součin $\vec{B} \cdot d\vec{S} = BdS$. Navíc magnetické pole \vec{B} je všude v prostoru konstantní a lze ho z integrálu (5.2) vytknout. Výpočet toku Φ je tedy

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B dS = B \int_S dS = BS, \quad (5.3)$$

kde S na pravé straně značí obsah obdélníka z obrázku 5.2. Zřejmě $S = S(t) = (l_0 + vt)d$, kde l_0 značí vzdálenost tyče od odporu v čase $t = 0$ s. Tok Φ nyní zderivujeme podle času dle (5.1) a získáme indukované napětí:

$$|\mathcal{E}_{ind}| = \frac{d\Phi}{dt} = B \frac{dS}{dt} = Bvd. \quad (5.4)$$

Po dosazení zadaných číselných hodnot máme $\mathcal{E}_{ind} = 1$ V.

Tepelný výkon P_{tep} je dán vztahem

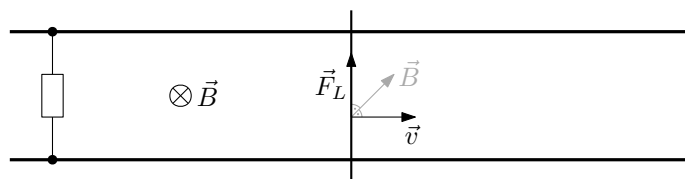
$$P_{tep} = \frac{\mathcal{E}_{ind}^2}{R} = \frac{(Bvd)^2}{R} = 5 \text{ W}. \quad (5.5)$$

Tento se ze zákona zachování energie musí rovnat mechanickému výkonu P_{mech} dodávanému do „zařízení“. Tedy $P_{mech} = P_{tep} = 5$ W. Tento mechanický výkon je způsoben silou působící na tyč, které je potřeba k udržení konstantní rychlosti tyče. Platí $P_{mech} = Fv$, a tedy $F = \frac{(Bd)^2 v}{R} = 1,25$ N.

Dodatek: Indukované napětí a sílu potřebnou k udržení konstantní rychlost lze zde také spočítat pomocí Lorentzovy síly (tento postup nelze použít, pokud je magnetické pole proměnné v čase)

$$\vec{F}_L = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \stackrel{\vec{E}=0}{=} q \vec{v} \times \vec{B}. \quad (5.6)$$

Volné náboje v tyči jsou nuceny se pohybovat rychlostí \vec{v} . Dle pravidla pravé ruky určíme směr Lorentzovy síly \vec{F}_L působící na náboje v tyči (uvažujeme, že kladné náboje $q > 0$ tvoří vodivost tyče, abychom diskuzi nekomplikovali dodatečnými znaménky):

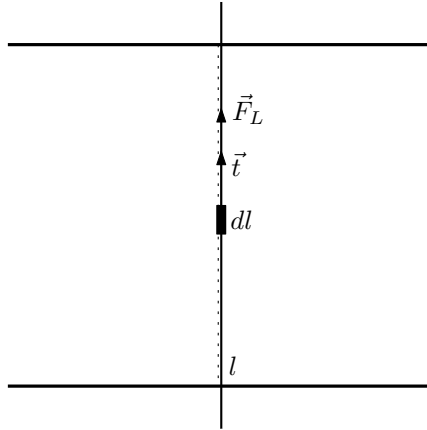


Obrázek 5.3: Lorentzova síla působící na náboje v tyči pohybující se rychlostí \vec{v} .

Nyní využijeme definici napětí

$$U = \frac{1}{q} \int_l \vec{F} \cdot d\vec{l}. \quad (5.7)$$

Napětí U v obvodu je zde generované právě vlivem Lorentzovy síly \vec{F}_L působící na náboje v pohybující se tyči. Budeme tedy integrovat podél tyče od jedné kolejnice ke druhé. Lorentzova síla \vec{F}_L míří ve směru tečného vektoru \vec{t} k tyči (viz obrázek 5.4), tedy \vec{F}_L má směr shodný s $d\vec{l} = \vec{t} dl$ a platí $\vec{F}_L \cdot d\vec{l} = F_L dl$.

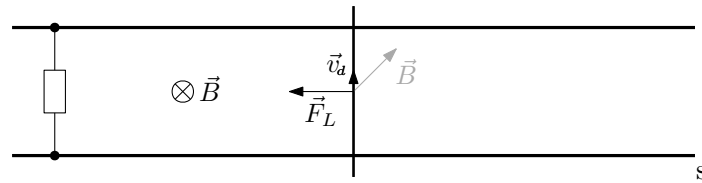


Obrázek 5.4: Křivka integrace l pro určení napětí U s vyznačenými vektory \vec{F}_L a \vec{t} .

Jelikož síla $F_L = qvB$ (z (5.6) a směrů vektorů \vec{v} a \vec{B} na obrázku 5.3) je podél tyče konstantní, dostaneme

$$U = \frac{1}{q} \int_l \vec{F}_L \cdot d\vec{l} = \frac{1}{q} \int_l F_L dl = \frac{1}{q} F_L \int_l dl = \frac{1}{q} F_L d = Bvd. \quad (5.8)$$

Vlivem indukovaného napětí U začne obvodem protékat proud I , který způsobuje dodatečný pohyb nábojů v tyči. Náboje se tedy navíc pohybují rychlostí \vec{v}_d ve směru tyče, což vyvolává dodatečnou Lorentzovu sílu působící proti směru pohybu tyče – dle pravidla pravé ruky, viz obrázek 5.5



Obrázek 5.5: Dodatečná Lorentzova síla způsobená proudem I zpomalující tyč.

Velikost této síly se získá pomocí Ampérova vzorce

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}, \quad (5.9)$$

kde $d\vec{F}$ označuje sílu na malý element tyče dl . Vzorec (5.9) se odvodí ze vzorce pro Lorentzovu sílu, směr síly je tedy stejný jako na obrázku výše – roli $d\vec{l}$ hraje rychlost \vec{v}_d . Podél celé tyče mezi kolejkami je příspěvek k celkové síle $d\vec{F}$ konstantní – $d\vec{l}$ a \vec{B} mají stále stejný směr a stejnou velikost. Velikost tohoto příspěvku je $dF = IBdl$ (z kolmosti vektorů $d\vec{l}$ a \vec{B} a vzorce (5.9)). Celková velikost síly F je pak

$$F = \int_l dF = \int_l IBdl = IB \int_l dl = IBd = \frac{U}{R} Bd = \frac{(Bd)^2 v}{R}. \quad (5.10)$$

Silou stejně velkou ale opačně orientovanou je pak nutno působit na tyč, aby nezpomalovala.

Pozor, obecně není pravda, že

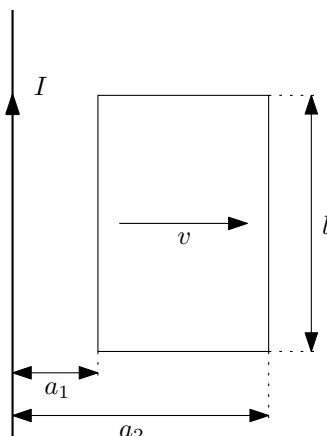
$$F = \int dF. \quad (5.11)$$

Takto je možné celkovou velikost vektoru \vec{F} počítat pouze, pokud všechny příspěvky $d\vec{F}$ míří stejným směrem (což je v našem případě splněno). V obecném případě se vektorovému integrálu nedá vyhnout a platí

$$F = \left| \int d\vec{F} \right|. \quad (5.12)$$

5.1.2 5.1 Pohybující se smyčka

Dlouhým přímým vodičem teče proud I . Určete magnetický indukční tok obdélníkovou smyčkou umístěnou podle obrázku. Vzdaluje-li se smyčka od vodiče rychlostí v určete indukované napětí.



Obrázek 5.6: Obdélníková smyčka pohybující se v magnetickém poli.

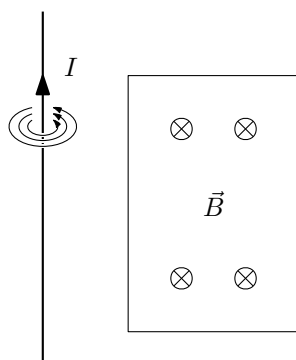
Řešení: Magnetický indukční tok je dán vztahem

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (5.13)$$

Magnetické pole \vec{B} v tomto příkladu je generované (nekonečně) dlouhým přímým vodičem s proudem I a jeho velikost je

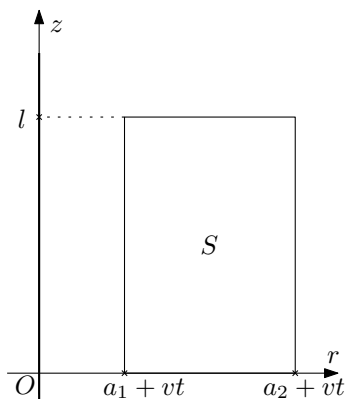
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (5.14)$$

kde r je vzdálenost od vodiče (tento vztah lze získat z integrálního Ampérova zákona, případně pomocí Biot-Savartova zákona). Směr vektorů magnetické indukce \vec{B} určíme z pravidla pravé ruky – palec ukazuje směr proudu, prsty ukazují směr magnetického pole, tzn. \vec{B} je kolmé na papír a míří do něj, viz obrázek 5.7.



Obrázek 5.7: Směr magnetické indukce \vec{B} od nekonečně dlouhého přímého vodiče v rovině smyčky.

Plochu pro integrál (5.13) přirozeně volíme jako obdélník ohraničený obdélníkovou smyčkou. Normálový vektor \vec{n} volíme směrem do papíru. Platí, že vektory \vec{B} a $d\vec{S} = \vec{n} dS$ jsou rovnoběžné, a tedy $\vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS$. Zavedeme kartézské souřadnice r a z dle obrázku 5.8.



Obrázek 5.8: Zavedení souřadnic r a z .

Vidíme, že obdélníková smyčka je parametrizovaná těmito rozsahy souřadnic: $r \in \langle a_1 + vt, a_2 + vt \rangle$ (smyčka se pohybuje doprava rychlostí v) a $z \in \langle 0, h \rangle$. Element plochy v kartézských souřadnicích je jednoduše $dS = dr dz$. Počátek souřadnic a jméno souřadnice r jsme zavedli tak, že velikost magnetického pole vyjádřená v souřadnicích (r, z) má stejnou podobu jako v (5.14). Nyní již můžeme sestavit daný plošný integrál a spočítat ho:

$$\Phi(t) = \int_S B dS = \int_{a_1+vt}^{a_2+vt} \int_0^l \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dz dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{a_1+vt}^{a_2+vt} \frac{dr}{r} \int_0^l dz = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{a_2 + vt}{a_1 + vt} \right) l \quad (5.15)$$

Tok Φ v čase $t = 0$ s získáme prostým dosazením:

$$\Phi(t = 0) = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{a_2}{a_1}. \quad (5.16)$$

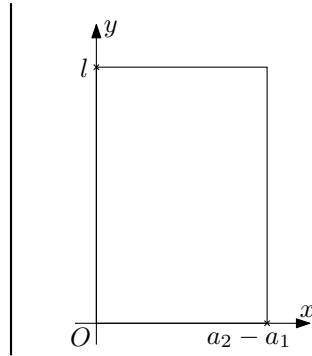
Indukované napětí \mathcal{E}_{ind} spočteme z Faradayova zákona elektromagnetické indukce jako časovou derivaci magnetického indukčního toku Φ :

$$\mathcal{E}_{ind}(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I l}{2\pi} \cdot \frac{a_1 + vt}{a_2 + vt} \cdot \frac{v(a_1 + vt) - (a_2 + vt)v}{(a_1 + vt)^2} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \frac{v(a_2 - a_1)}{(a_1 + vt)(a_2 + vt)}. \quad (5.17)$$

A napětí \mathcal{E}_{ind} v čase nula:

$$\mathcal{E}_{ind}(t = 0) = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \frac{v(a_2 - a_1)}{a_1 a_2}. \quad (5.18)$$

Dodatek: Velmi dodatečně spočteme tok v čase $t = 0$ s pro počátek souřadnic umístěný nikoliv na drátu ale v levém dolním rohu smyčky:



Obrázek 5.9: Zavedení souřadnic x a y s počátkem v levém dolním rohu smyčky v čase $t = 0$ s.

V tomto případě je obdélník vytnutý smyčkou na souřadnicích $x \in \langle 0, a_2 - a_1 \rangle$ a $y \in \langle 0, l \rangle$. Vzdálenost od drátu je $r = a_1 + x$. Integrál pro tok Φ pak vypadá následovně:

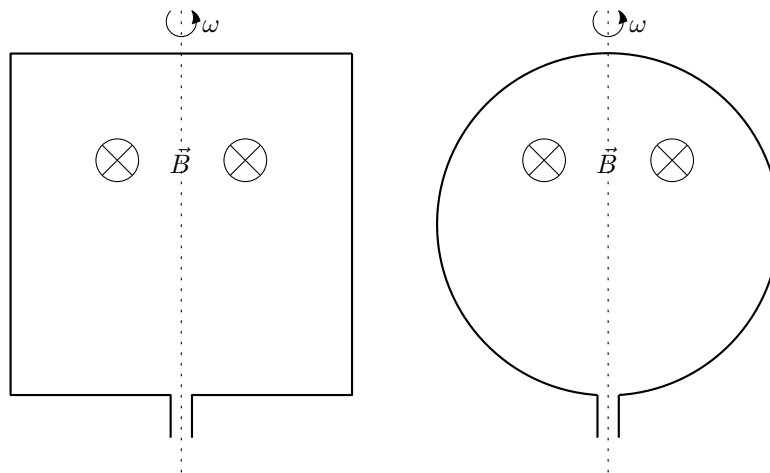
$$\Phi(t = 0) = \int_S B dS = \int_0^{a_2 - a_1} \int_0^l \frac{\mu_0 I}{2\pi(a_1 + x)} dx dy. \quad (5.19)$$

Výsledek je samozřejmě stejný jako v předchozích souřadnicích (substituce $r = a_1 + x$). Tok Φ v libovolném čase bychom spočetli změnou mezí: $x \in \langle vt, a_2 - a_1 + vt \rangle$.

5.1.3 5.7 a 5.8 Rotující cívky

Čtvercová smyčka o straně $a = 10$ cm rotuje v homogenním magnetickém poli $B = 0,2$ T kolem osy rovnoběžné s rovinou čtverce a kolmé k poli s frekvencí 50 Hz. V okamžiku $t = 0$ leží smyčka v rovině kolmé k poli. Určete závislost indukovaného napětí na čase.

Jaké maximální napětí se může indukovat v cívce s $N = 4000$ závitů o středním poloměru $R = 12$ cm rotující s frekvencí $f = 30$ Hz v zemském magnetickém poli o indukci $B = 5 \cdot 10^{-5}$ T?



Obrázek 5.10: Rotující čtvercová smyčka a kruhová cívka.

Řešení: Tyto příklady jsou téměř identické a budeme je řešit najednou. Nejprve spočteme napětí indukované na smyčce, jak se situace změní pro N závitů uvedeme později.

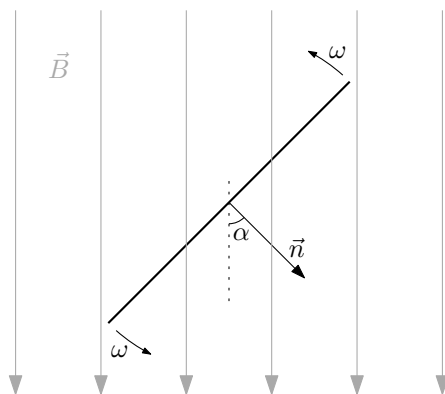
Využijeme Faradayův zákon elektromagnetické indukce

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (5.20)$$

Potřebujeme tedy počítat magnetický indukční tok:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (5.21)$$

Podívejme se nyní na situaci s otáčející se smyčkou shora na obrázek 5.11.



Obrázek 5.11: Pohled shora na otáčející se smyčku.

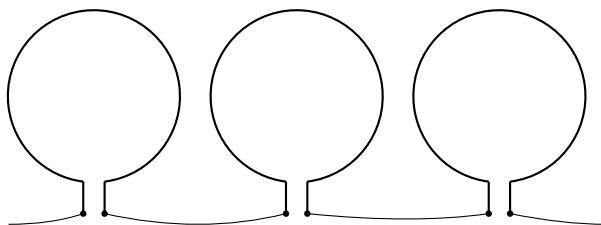
Plochu S pro integraci volíme jako čtverec, resp. kruh, jehož hranicí je čtverec, resp. kružnice, smyčky. Normálový vektor se pak otáčí spolu se smyčkou a s magnetickým polem svírá časově proměnný úhel $\alpha(t) = \alpha_0 + \omega t$ (pro $t = 0$ máme $\alpha = \alpha_0$ a tedy požadavek kolmosti roviny cívky k směru magnetického pole v zadání vede na $\alpha_0 = 0$). Skalární součin pod integrálem nabývá tvaru $\vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B} \cdot \vec{n} dS = B \cos \alpha dS = B \cos \omega t dS$. Magnetické pole je všude konstantní a můžeme ho vytknout z integrálu. Stejně tak úhel α je všude na ploše integrace konstantní. Výpočet toku je tedy:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B \cos \omega t dS = B \cos \omega t \int_S dS = BS \cos \omega t. \quad (5.22)$$

Indukované napětí \mathcal{E}_{ind} získáme derivací:

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = BS \omega \sin \omega t. \quad (5.23)$$

V případě čtvercové smyčky $S = a^2$, pro kruhovou smyčku $S = \pi R^2$. Jak se výsledek změní v případě, že cívka se skládá z N závitů? Jednotlivé závity jsou navinutím sériově spojeny, viz ilustrační obrázek 5.12.



Obrázek 5.12: Závity navinuté na cívce jsou vlastně sériově spojené.

Napětí indukovaná na každém ze závitů, $\mathcal{E}_{ind}^{(i)} = -d\Phi^{(i)}/dt$ (kde $\Phi^{(i)}$ je tok i -tým závitem), se tak sčítají:

$$\mathcal{E}_{ind}^{(celk)} = \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_{ind}^{(i)} = -\sum_{i=1}^N \frac{d\Phi^{(i)}}{dt}. \quad (5.24)$$

Ovšem závity jsou naskládány jeden na druhém, sdílejí tedy ten samý indukční tok,

$$\Phi^{(1)} = \Phi^{(2)} = \dots = \Phi^{(N)} = \Phi. \quad (5.25)$$

Celkové napětí je pak N -násobek napětí na jednom závitě:

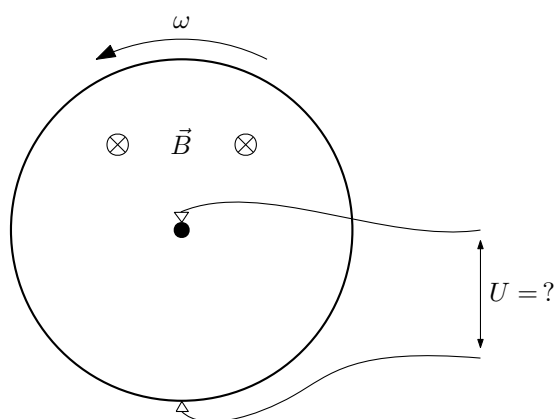
$$\mathcal{E}_{ind}^{(celk)} = N\mathcal{E}_{ind}^{(1)} = NBS\omega \sin \omega t. \quad (5.26)$$

Indukované napětí má harmonický průběh a jeho maximální hodnota je daná amplitudou tohoto kmitavého pohybu:

$$\mathcal{E}_{ind}^{(max)} = NBS\omega. \quad (5.27)$$

5.1.4 5.6 Homopolární generátor

Kovový kotouč poloměru $R = 10 \text{ cm}$ rotuje s frekvencí $f = 60 \text{ Hz}$ kolem své osy v homogenním magnetickém poli $B = 0,2 \text{ T}$ kolmém k rovině kotouče. Najděte potenciální rozdíl mezi středem a okrajem kotouče. Jaký bude tento rozdíl bez magnetického pole?



Obrázek 5.13: Homopolární generátor.

Řešení: V tomto případě **nelze využít** Faradayův zákon elektromagnetické indukce. Tento zákon, přestože je velmi univerzální a zahrnuje řadu principů indukování napětí, lze využít pouze pro obvody, které se skládají z tzv. tenkých vodičů (nemusí být fyzicky tenké, jen jejich délkový rozměr musí převažovat nad ostatními rozměry). Je totiž nutné mít jasně definovanou hranici (tvořenou obvodem) plochy, skrze kterou počítáme indukční tok. V našem případě je část obvodu tvořena kovovým kotoučem, kde není jednoznačně dáno, kudy vést hranici plochy. V každém případě, ať už bychom ji vedli kudykoliv, Faradayův zákon by zde dal chybný výsledek 0 V .

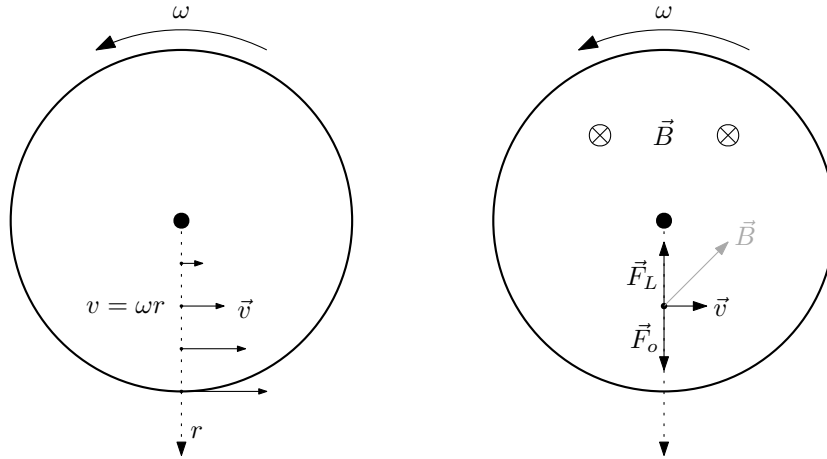
My musíme vyjít přímo z definice napětí

$$U = \frac{1}{q} \int_l \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (5.28)$$

a naintegrovat síly působící na náboje v rotujícím kotouči. Ty jsou dvojí – odstředivá síla a magnetická Lorentzova síla:

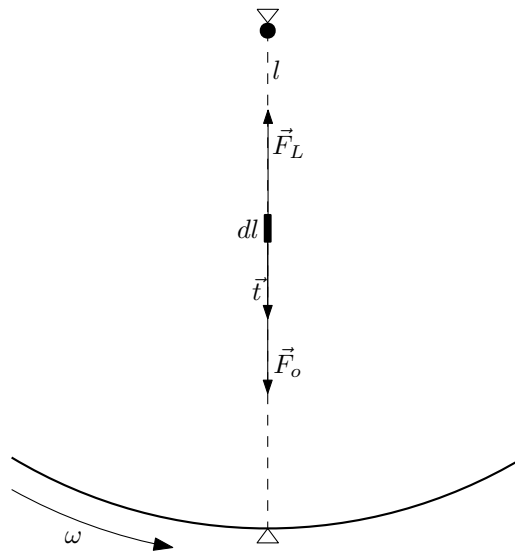
$$|\vec{F}_o| = m\omega^2 r, \quad \vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (5.29)$$

Rychlosti nábojů a směry sil (magnetická síla pro $q > 0$) jsou znázorněny na obrázku 5.14:



Obrázek 5.14: Vlevo rychlost nábojů v rotujícím kotouči. Vpravo směry sil působící na náboje.

Za křivku integrace volíme co nejjednodušší s jedním koncem ve středu kotouče a s druhým na kraji kotouče v místě přívodního drátu. Přirozeně se nabízí vzít radiální úsečku ze středu na kraj kotouče. Zavedeme radiální souřadnici r – vzdálenost od středu kotouče, pak křivka je charakterizována rozsahem souřadnic $r \in \langle 0, R \rangle$ a elementu délky je $dl = dr$. Elementu délky přiřadíme směr \vec{t} mířící radiálně od středu, tedy $d\vec{l} = \vec{t} dl$. Situace viz obrázek 5.15.



Obrázek 5.15: Křivka integrace l s vyznačeným elementem délky $d\vec{l}$ a směry sil \vec{F}_L a \vec{F}_o .

Pak skalární součin je $\vec{F} \cdot d\vec{l} = \pm F dl$ – kladné znaménko pro odstředivou sílu a záporné znaménko pro dostředivou magnetickou sílu. Napětí tedy spočteme následovně

$$U = \frac{1}{q} \int_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = \pm \frac{1}{q} \int_l F dl = \pm \frac{1}{q} \int_0^R F(r) dr \quad (5.30)$$

a pro konkrétní síly dostáváme konkrétní výrazy:

$$U_o = \frac{1}{q} \int_0^R m\omega^2 r dr = \frac{m\omega^2 R^2}{q} \frac{1}{2}, \quad U_L = -\frac{1}{q} \int_0^R q\omega B r dr = -\omega B \frac{R^2}{2}. \quad (5.31)$$

Pro námi zvolený směr magnetického pole \vec{B} tedy napětí vyvolané odstředivou a magnetickou silou působí proti sobě. Po dosazení zadaných číselných hodnot a hmotnosti a náboje elektronu

m_e a e za m a q máme

$$|U_o| = 4,04 \cdot 10^{-9} \text{ V}, \quad |U_L| = 0,377 \text{ V}. \quad (5.32)$$

Dodatek: Napětí mezi středem a vnějškem kotouče nezávisí na dráze, po které integrujeme. Ukážeme to nalezením potenciálů pro odstředivé a magnetické silové pole v kotouči. Tyto síly závisí pouze na vzdálenosti od středu, tedy $F(r)$, a proto i potenciál bude funkcí pouze r , $\mathcal{U}(r)$ (písmeno \mathcal{U} pro potenciál používáme pro odlišení od napětí U). Kladný směr síly zvolíme jako mířící od středu kotouče. Z podmínky $F = -\frac{d\mathcal{U}}{dr}$ snadno najdeme výsledné potenciály:

$$\mathcal{U}_o = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2, \quad \mathcal{U}_L = \frac{1}{2}q\omega Br^2. \quad (5.33)$$

Jelikož napětí je definováno jako práce na jednotkový náboj a práce je dána rozdílem potenciálů v počátečním a koncovém bodě, máme

$$U_o = \frac{1}{q} (\mathcal{U}_o(0) - \mathcal{U}_o(R)), \quad U_L = \frac{1}{q} (\mathcal{U}_L(0) - \mathcal{U}_L(R)); \quad (5.34)$$

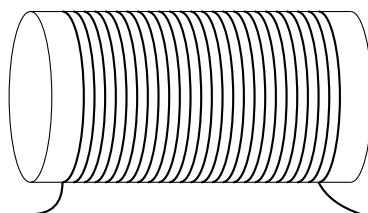
tyto vedou na již spočtené hodnoty napětí.

5.2 Vlastní a vzájemná indukčnost

5.2.1 5.3 a 5.4 Vlastní indukčnost válcové cívky

Určete vlastní indukčnost a magnetickou energii solenoidu o poloměru $R = 1 \text{ cm}$ a délce $l = 50 \text{ cm}$ s $n = 6$ závitů na 1 cm délky, protéká-li závity proud $I = 1 \text{ A}$.

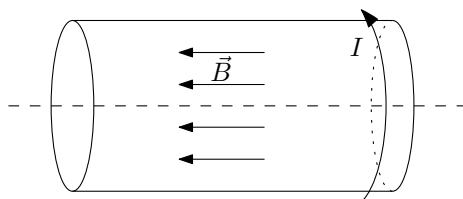
Určete vlastní indukčnost toroidální cívky malého průřezu $S = 1 \text{ cm}^2$ o poloměru středové kružnice $r = 5 \text{ cm}$, s celkovým počtem závitů $N = 100$.



Obrázek 5.16: Válcová cívka.

Řešení:

Magnetická indukce uvnitř (nekonečně) dlouhé solenoidální cívky je $B = \mu_0 n I$, kde n je hustota závitů, $n = N/l$. Vektor magnetické indukce míří ve směru osy cívky dle pravidla pravé ruky – palec ukazuje směr proudu tekoucí po válci, prsty pak ukážou směr magnetické indukce (viz příklad 4.15 – sekce (4.4.3)).

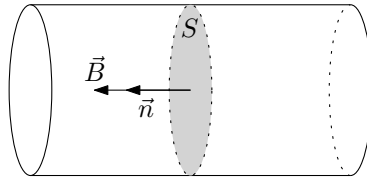


Obrázek 5.17: Směr magnetické indukce je dán pravidlem pravé ruky dle směru proudu I .

Magnetický indukční tok Φ jedním závitem cívky je

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B dS = B \int_S dS = BS = \mu_0 n I S, \quad (5.35)$$

kde S je disk s hranicí vybraného závitu a kde jsme využili toho, že magnetické pole \vec{B} uvnitř cívky míří kolmo na plochu závitu (tzn. je rovnoběžné s normálovým vektorem \vec{n} k ploše S : $\vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B} \cdot \vec{n} dS = B dS$) a zároveň je homogenní, takže je možné ho vytknout z integrálu. Také viz obrázek 5.18.



Obrázek 5.18: Plocha integrace S , normálový vektor \vec{n} a vektor magnetické indukce \vec{B} .

Indukčnost je pak z definice $N\Phi = LI^1$:

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \mu_0 n N S = \mu_0 n^2 (lS) = \mu_0 n^2 V; \quad (5.36)$$

ve výsledku jsme použili objem cívky $V = lS$.

U toroidální cívky malého průřezu provedeme aproximaci, že magnetické pole uvnitř cívky je homogenní (v následujícím příkladě spočteme pole uvnitř toroidální cívky přesně) a že její objem je přibližně $V = 2\pi r S$.

5.2.2 5.5 Vlastní indukčnost toroidální cívky

Určete vlastní indukčnost toroidu obdélníkového průřezu o vnitřním poloměru $R_1 = 10 \text{ cm}$, vnějším poloměru $R_2 = 20 \text{ cm}$ a výšce $h = 5 \text{ cm}$, je-li na něm navinuto $N = 1000$ závitů.

¹Tento vztah se nazývá statická definice indukčnosti. Snadno plyne z dynamické definice indukčnosti – vzta-hující změnu proudu cívkou k indukovanému napětí v ní:

$$\mathcal{E} = L\dot{I}.$$

Celkové indukované napětí \mathcal{E} je dáno součtem indukovaných napětí v jednotlivých závitěch

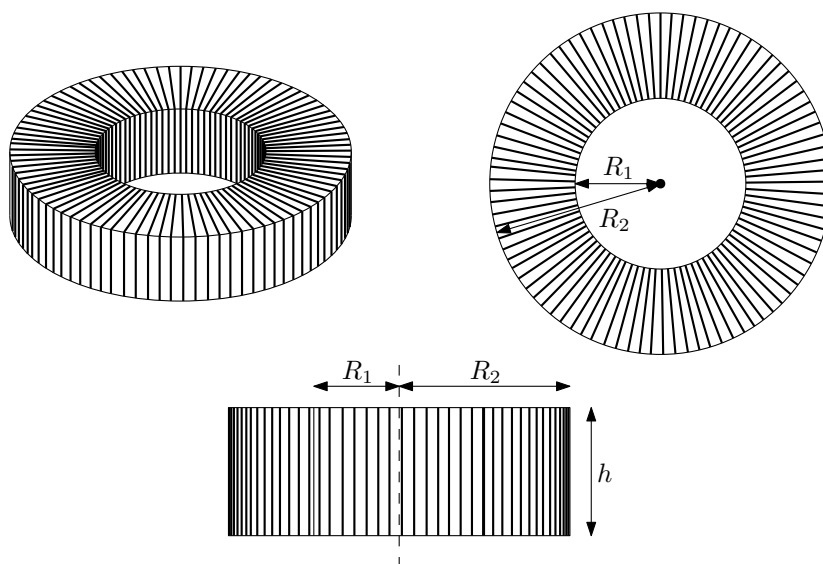
$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i = \sum_{i=1}^N \frac{d\Phi^{(i)}}{dt},$$

kde jsme vynechali znaménko u Faradayova zákona, které je stejně dané pouze volbou kladných směrů. Pokud jsou magnetické indukční toky jednotlivými závitěmi shodné, $\Phi^{(i)} = \Phi$, dostaneme dynamickou definici indukčnosti ve tvaru

$$N \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{dI}{dt}.$$

Zintegrováním podle času přijdeme ke statické definici indukčnosti

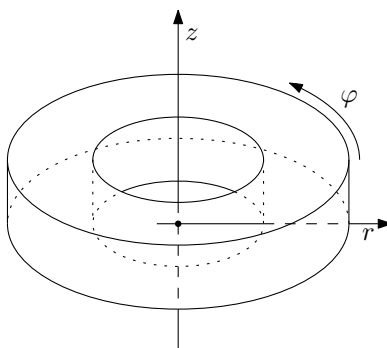
$$N\Phi = LI.$$



Obrázek 5.19: Toroidální cívka obdélníkového průřezu.

Řešení: Výpočet se bude skládat ze tří hlavních částí. Nejprve ze symetrie úlohy určíme možná magnetická pole respektující tuto symetrii, dále určíme magnetickou indukci uvnitř toroidální cívky pomocí Ampérova zákona a nakonec spočteme magnetický indukční tok skrz jeden závit. Z definice indukčnosti, $N\Phi = LI$ (k původu tohoto vztahu viz poznámka pod čarou u minulého příkladu), pak již snadno napíšeme výslednou vlastní indukčnost.

Zaveďme nyní cylindrické souřadnice (r, φ, z) s počátkem uprostřed toroidu a osou z směřující ve směru osy toroidu – viz obrázek 5.20.



Obrázek 5.20: Válcové souřadnice (r, φ, z) v toroidální cívce.

Toroidální cívka má spojitou rotační symetrii kolem osy z – představujeme si, že závity jsou velmi hustě navinuty, a tedy pootočení o libovolný úhel nezmění fyzikální situaci. Nahrazujeme tak proud tekoucí jednotlivými dráty po plášti toroidu rovnoměrně rozloženým plošným proudem.

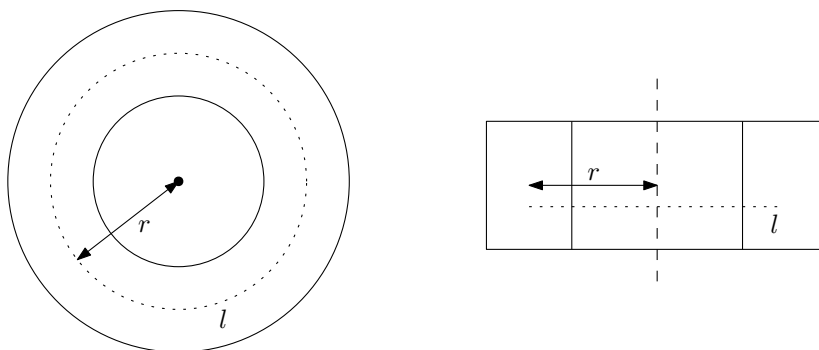
Poznámka: Ve skutečnosti bude mít toroidální cívka pouze diskrétní rotační symetrii o úhel $2\pi/N$ (při rovnoměrném navinutí závity) – a magnetické pole by tedy mělo malé variace při změně souřadnice φ . Používáme tedy „aproximaci“ velmi hustého navinutí závitů. Dále již bude vše bez jakéhokoliv zanedbávání.

Důsledkem rotační symetrie je, že velikost magnetické indukce nezávisí na polárním úhlu φ , tzn. $B = B(r, z)$.

Ampérův zákon (v integrálním tvaru)

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{in} \quad (5.37)$$

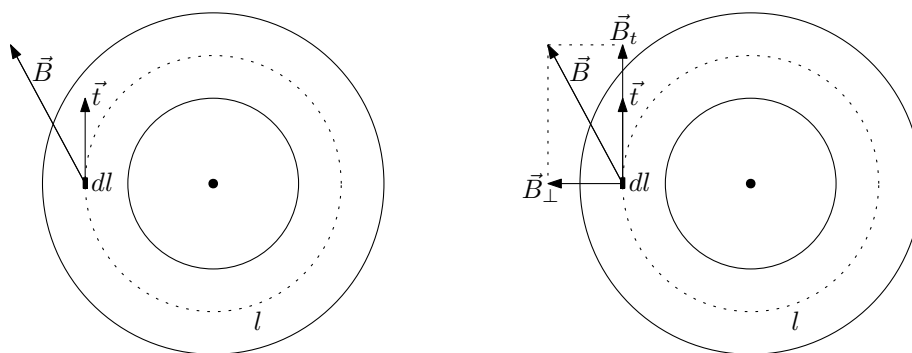
vztahuje cirkulaci magnetické indukce podél uzavřené křivky a celkový proud I_{in} , který je touto smyčkou obepnutý. Je velmi výhodné ho použít v případech, kdy máme symetrickou fyzikální situaci. Křivku pro levou stranu Ampérova zákona volíme jako kružnici o poloměru r jejíž osa je totožná s osou toroidu. Kružnice je umístěna v libovolné výšce z uvnitř toroidu, viz obrázek 5.21:



Obrázek 5.21: Křivka l z Ampérova zákona.

Ampérův zákon nám umožní zjistit pouze tangenciální složku \vec{B}_t celkového magnetického pole, jelikož platí (pro značení \vec{B}_t , \vec{B}_\perp , $d\vec{l}$ a \vec{t} viz obrázek 5.22)

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = (\vec{B}_\perp + \vec{B}_t) \cdot d\vec{l} = \vec{B}_t \cdot d\vec{l} = B_t dl. \quad (5.38)$$



Obrázek 5.22: Vektor magnetické indukce \vec{B} a jeho rozklad do tangenciálního a normálového směru. Element délky $d\vec{l} = \vec{t} dl$, kde \vec{t} je jednotkový tečný vektor ke křivce l .

Poznámka: Ve skutečnosti je pole v toroidu čistě tangenciální, tzn. $\vec{B}_\perp = 0$, pomocí Ampérova zákona tedy určíme celkové magnetické pole uvnitř toroidu $\vec{B} = \vec{B}_t$ – proč je pole pouze tangenciální naleznete v dodatku. Zároveň nás ale normálová složka magnetického pole \vec{B}_\perp pro výpočet magnetického indukčního toku nezajímá, jak bude vidět v následujícím textu.

Levá strana Ampérova zákona dává:

$$\int_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_l B_t dl = B_t \int_l dl = 2\pi r B_t, \quad (5.39)$$

neboť vlivem rotační symetrie je magnetické pole v konstantní vzdálenosti r od osy cívky a v konstantní výšce z konstantní. Smyčka l obepíná všechny závity toroidu, celkový proud v ní uzavřený je tím pádem $I_{in} = NI$. Výsledkem je vyjádření tangenciální složky magnetického pole v závislosti na poloze v toroidu:

$$2\pi r B_t = \mu_0 NI \quad \rightarrow \quad B_t = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \quad (5.40)$$

Magnetické pole závisí pouze na vzdálenosti od osy toroidu (na souřadnici r) a nezávisí na vertikální pozici v toroidu (na souřadnici z).

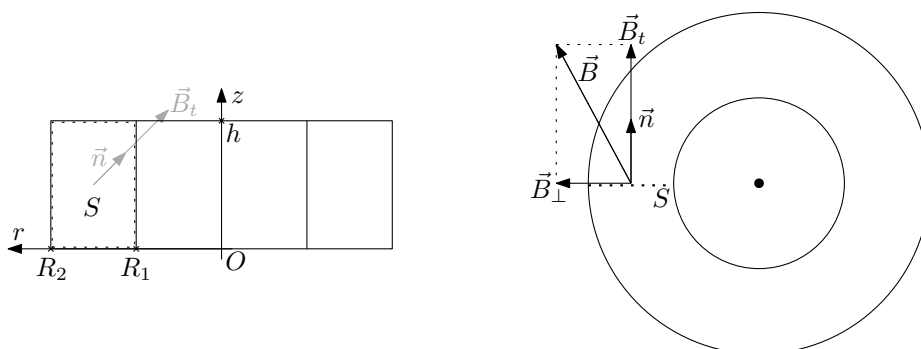
Nyní spočteme magnetický indukční tok Φ skrze jeden závit cívky

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (5.41)$$

Plocha integrace S je obdélník tvořící průřez cívky. Skalární součin $\vec{B} \cdot d\vec{S}$, kde $d\vec{S} = \vec{n} dS$, \vec{n} je jednotkový normálový vektor k plošce dS , upravíme podobně jako u Ampérova zákona, tj. magnetické pole znovu rozložíme do kolmých směrů $\vec{B} = \vec{B}_t + \vec{B}_\perp$, a dostaneme

$$\vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B} \cdot \vec{n} dS = (\vec{B}_t + \vec{B}_\perp) \cdot \vec{n} dS = \vec{B}_t \cdot \vec{n} dS = B_t dS \quad (5.42)$$

(zachováváme značení \vec{B}_\perp a \vec{B}_t dle obrázku 5.22, tzn. vektor \vec{B}_t je rovnoběžný s normálovým vektorem \vec{n} . Vztahy mezi plochou integrace S , normálovým vektorem \vec{n} a rozkladem $\vec{B} = \vec{B}_t + \vec{B}_\perp$ viz obrázek 5.23).



Obrázek 5.23: Plocha integrace S a k ní kolmé vektory \vec{n} a \vec{B}_t .

Obdélník, jehož hranicí je jeden závit cívky, je dán rozsahy souřadnic $r \in \langle R_1, R_2 \rangle$ a $z \in \langle 0, h \rangle$. Element plochy je v kartézských souřadnicích $dS = dr dz$. Vlastní integrování je po dosazení vyjádření pro B_t získané z Ampérova zákona jednoduše:

$$\Phi = \int_S B_t dS = \int_0^h \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} dr dz = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} \int_0^h dz \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} h \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (5.43)$$

Vlastní indukčnost toroidu je z definice

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (5.44)$$

Dodatek: Směr magnetického pole. Aneb $\vec{B}_\perp = 0$. Již brzy.

5.2.3 5.9 Vzájemná indukčnost I

Dvě cívky jsou indukčně vázány vzájemnou indukčností $L_{vz.} = 5 H$. Jak se musí měnit proud v primární cívce, aby se v sekundární indukovalo konstantní napětí $\mathcal{E} = 1 V$? Může se takto indukovat trvale?

Řešení: Vyjdeme ze vzorců definujících indukčnost a vzájemnou indukčnost vztahující změny proudů jednotlivými cívkami a napětí na nich indukované:

$$\mathcal{E}_1 = L_1 \dot{I}_1 + L_{vz} \dot{I}_2, \quad \mathcal{E}_2 = L_{vz} \dot{I}_1 + L_2 \dot{I}_2. \quad (5.45)$$

Napětí indukované na sekundární cívce je dáno druhou z rovnic, konkrétně napětí indukované vlivem změny proudu v primární cívce je dáno prvním členem pravé strany:

$$\mathcal{E} = L_{vz} \dot{I}_1. \quad (5.46)$$

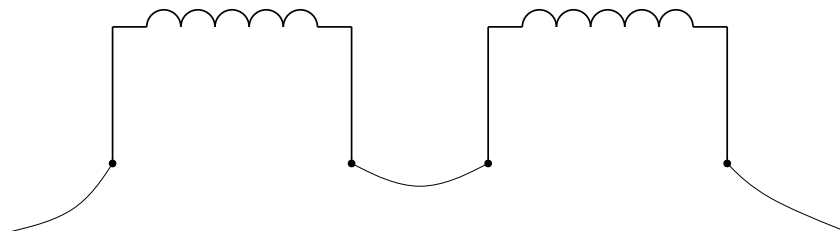
Tuto jednoduchou diferenciální rovnici vyřešíme.

$$\dot{I}_1 = \frac{\mathcal{E}}{L_{vz}} = \text{konst.} \quad \xrightarrow{\int dt} \quad I_1 = \frac{\mathcal{E}}{L_{vz}} t + I_0, \quad (5.47)$$

kde I_0 je integrační konstanta představující proud v čase $t = 0 s$. Proud v cívce bez přestání lineárně roste, takže jistě nemůžeme konstantní napětí \mathcal{E} držet trvale.

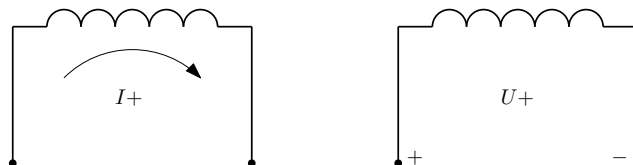
5.2.4 5.10 Vzájemná indukčnost II

Dvě cívky mají indukčnosti $L_1 = 0,2 H$, $L_2 = 0,3 H$ a vzájemnou indukčnost $L_{vz.} = 0,1 H$. Jaká bude výsledná indukčnost při zapojení těchto cívek do série?



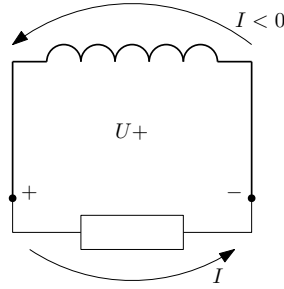
Obrázek 5.24: Sériově spojené cívky.

Řešení: Nejprve zavedeme kladné směry. Proud tekoucí cívkou označíme za kladný, jestliže teče zleva doprava. Napětí indukované v cívce označíme za kladné, jestliže na levém vývodu cívky naměříme kladný pól a na pravém záporný. Viz obrázek 5.25.



Obrázek 5.25: Kladný směr proudu a polarita kladně indukovaného napětí.

Pokud bychom ve chvíli, kdy se na cívce indukuje kladné napětí, zapojili na cívku spotřebič, proud tekoucí cívkou by byl záporný (dle kladně zavedeného směru proudu) – obrázek 5.26.



Obrázek 5.26: Kladně indukované napětí vyvolává v cívce záporný proud.

Při takto zavedených kladných směrech dostáváme dynamickou definici indukčnosti vztahující změnu proudu v cívce s napětím v ní indukovaném ve tvaru

$$\mathcal{E} = L\dot{I}, \quad (5.48)$$

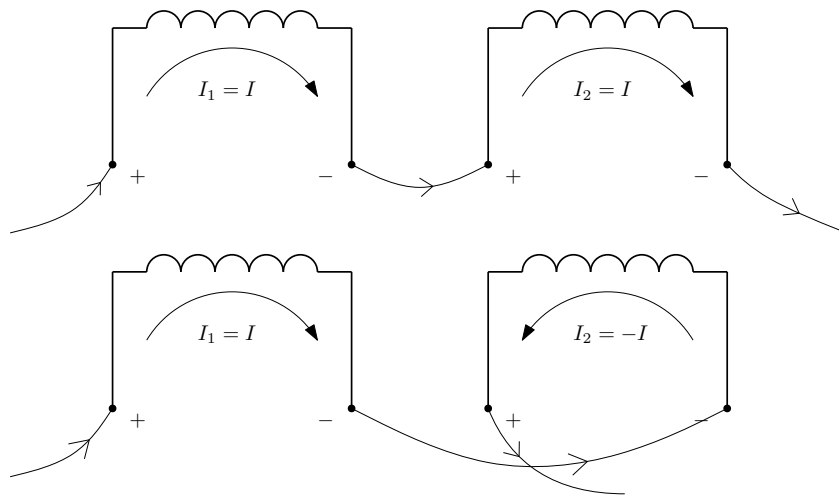
kde kladné znaménko plyne z Lenzova zákona. Ten říká, že indukované napětí působí proti změně, která ho vyvolala. Pokud tedy máme zvětšující se proud tekoucí cívkou, musí se na cívce indukovat kladné napětí, které vyvolává dodatečný proud tekoucí v záporném směru a tedy oslabující zvětšování proudu, které způsobilo indukování napětí.

Pro vzájemnou indukčnost máme vztahy (kladná znaménka zůstávají vlivem předchozí argumentace)

$$\mathcal{E}_1 = L_1\dot{I}_1 + L_{vz}\dot{I}_2, \quad \mathcal{E}_2 = L_{vz}\dot{I}_1 + L_2\dot{I}_2; \quad (5.49)$$

tyto vztahují změny proudů jednotlivými cívkami k napětím indukovaným na jednotlivých cívkách.

Cívky můžeme zapojit dvěma způsoby dle obrázku 5.27. Na něm jsou vyznačeny **skutečné** směry proudů a pouze **kladně** indukovaného napětí (tedy polarity napětí na obrázku slouží jen k vyznačení kladného směru, nikoliv k vyznačení skutečné polarity indukovaného napětí – ta nám vyjde přímo ze vzorců definice vzájemné indukčnosti, kde jsme pečlivě pomocí Lenzova zákona určili správné znaménko). V prvním případě se napětí sčítají, ve druhém odečítají.



Obrázek 5.27: Dva způsoby sériového zapojení cívek.

Spojené cívky se teď chovají jako jedna velká cívka skrz níž protéká proud I . Můžeme tedy určit celkovou indukčnost L_{celk} spojených cívek pomocí vztahu

$$\mathcal{E}_{celk} = L_{celk}\dot{I}. \quad (5.50)$$

V prvním případě platí, že napětí se sčítají $\mathcal{E}_{celk} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ a proudy tečou v souhlasném směru $I_1 = I_2 = I$, ve druhém máme případě máme rozdíl napětí $\mathcal{E}_{celk} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$ a nesouhlasně tekoucí proudy $I_1 = -I_2 = I$, viz předchozí obrázek 5.27. Po dosazení ze vzorců pro vzájemnou indukčnost (5.49) za napětí \mathcal{E}_1 a \mathcal{E}_2 :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{celk}^{(1)} &= \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = (L_1\dot{I} + L_{vz}\dot{I}) + (L_{vz}\dot{I} + L_2\dot{I}) = (L_1 + L_2 + 2L_{vz})\dot{I} = L_{celk}^{(1)}\dot{I}, \\ \mathcal{E}_{celk}^{(2)} &= \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = (L_1\dot{I} - L_{vz}\dot{I}) - (L_{vz}\dot{I} - L_2\dot{I}) = (L_1 + L_2 - 2L_{vz})\dot{I} = L_{celk}^{(2)}\dot{I}.\end{aligned}\quad (5.51)$$

Výsledky pro celkovou indukčnost dle způsobu zapojení pak jsou

$$L_{celk}^{(1)} = L_1 + L_2 + 2L_{vz}, \quad L_{celk}^{(2)} = L_1 + L_2 - 2L_{vz}.\quad (5.52)$$

5.3 LR a RC obvody

5.3.1 5.11 a 5.12 RC obvod

Kondenzátor o kapacitě $C = 0,1 \mu F$ s počátečním napětím $U_0 = 1000 V$ se vybíjí přes odpor $R = 10 \Omega$. Za jakou dobu poklesne velikost náboje na kondenzátoru na úroveň jednoho elementárního náboje?

Kondenzátor o kapacitě $C = 100 \mu F$ je nabit na napětí $U_0 = 10000 V$. Vybíjíme jej přes odpor $R = 1 k\Omega$. Za jak dlouho se můžeme kondenzátoru bez nebezpečí dotýkat?

Řešení: Časové průběhy napětí na kondenzátoru a proudu v RC obvodu jsou následující:

$$U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \quad I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}.\quad (5.53)$$

Velikost náboje na kondenzátoru je z definice kapacity $Q = CU$ a tedy časový průběh je

$$Q(t) = CU_0 e^{-\frac{t}{RC}} (= Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}).\quad (5.54)$$

Vyjádřením času z vztahů pro napětí (5.53) a náboj (5.54) máme

$$t = -RC \ln \frac{U(t)}{U_0} = RC \ln \frac{U_0}{U(t)}, \quad t = -RC \ln \frac{Q(t)}{CU_0} = RC \ln \frac{CU_0}{Q(t)}.\quad (5.55)$$

V prvním příkladě máme $Q(t_e) = e$ a výsledný čas je

$$t_e = RC \ln \frac{CU_0}{e}.\quad (5.56)$$

V druhém příkladě je třeba si zvolit hodnotu (ne)bezpečného napětí U_{smrt} k získání konkrétního výsledku...

$$t_{smrt} = RC \ln \frac{U_0}{U_{smrt}}.\quad (5.57)$$

5.3.2 5.13 Energie kondenzátoru

Dokažte, že energie roptýlená na odporu během vybíjení kondenzátoru je právě rovna energii, která byla v kondenzátoru nahromaděna.

Řešení: Časové průběhy napětí na kondenzátoru a proudu v RC obvodu jsou následující:

$$U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \quad I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}};\quad (5.58)$$

počáteční podmínky jsou $U(0) = U_0$ a $I(0) = I_0$. Tepelný výkon P_{tep} generovaný na rezistoru je dán Jouleovým teplem $P_{tep} = RI^2$. Výkon je změna energie za čas, $P = dE/dt$ a tedy energii získáme naintegrováním výkonu dle času. Vybíjení začne v čase $t = 0$ s a formálně dle vztahů pro napětí a proud nikdy neskončí. Integrujeme tedy pro $t \in \langle 0, +\infty \rangle$:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{+\infty} P_{tep} dt = \int_0^{+\infty} RI(t)^2 dt = RI_0^2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = RI_0^2 \left[-\frac{RC}{2} e^{-\frac{2t}{RC}} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2} C(RI_0)^2 = \frac{1}{2} CU_0^2. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Výsledkem je skutečně energie původně uložená v elektrostatickém poli v kondenzátoru.

5.3.3 5.14 LR obvod

Cívka má odpor $R = 100 \Omega$. Jsou-li přívody cívky zkratovány v době, kdy cívku prochází ustálený proud, klesne proud v cívce na jednu desetinu původní hodnoty za $T = 0,01$ s. Jaká je vlastní indukčnost cívky?

Řešení: Časové průběhy proudu v RL obvodu a napětí indukované na cívce jsou následující:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}, \quad U(t) = U_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (5.60)$$

Z rovnice pro proud vyjádříme L :

$$L = -\frac{Rt}{\ln \frac{I(t)}{I_0}} = \frac{Rt}{\ln \frac{I_0}{I(t)}}. \quad (5.61)$$

Dle zadání $I(T) = \alpha I_0$, kde $\alpha = \frac{1}{10}$. Výsledek tedy je

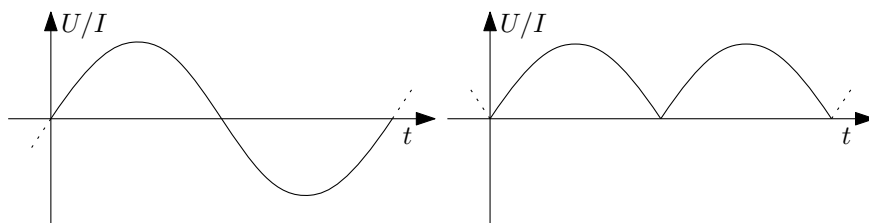
$$L = -\frac{RT}{\ln \alpha}. \quad (5.62)$$

5.4 Obvody se střídavým proudem

5.4.1 5.15 Nabíjení baterie

K nabití akumulátoru je potřeba $Q = 20 Ah$ (ampérhodin) ustáleného proudu. Za jak dlouho se akumulátor nabije střídavým proudem o efektivní hodnotě $I_{ef} = 1 A$, který usměrníme dvoucestným usměrňovačem?

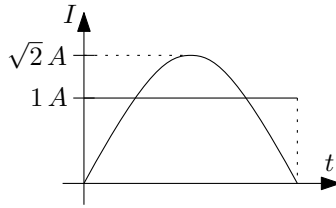
Řešení: Dvoucestně usměrněný střídavý proud získáme překlopením záporných půlvln do kladných hodnot (viz obrázek 5.28).



Obrázek 5.28: Střídavý proud a dvoucestně usměrněný proud (napětí).

Stejnoseměrným proudem o velikosti $I_{DC} = 1 A$ by se akumulátor zjevně nabíjel za $t_{DC} = Q/I_{DC} = 20 h$. Střídavý proud o efektivní hodnotě $I_{ef} = 1 A$ má amplitudu $I_{AC} = \sqrt{2} A$

(vysvětlení viz dodatek). Stačí tedy porovnat velikost plochy (náboje) pod jednou půlvlnou dvoucestně usměrněného proudu s plochou pod stejnosměrným proudem stejné doby trvání (viz obrázek 5.29) a trojčlenkou dopočteme výsledek.



Obrázek 5.29: Plochy pod stejnosměrným proudem $I_{DC} = 1 A$ a střídavým proudem $I_{AC} = \sqrt{2} A$.

Plocha pod jednou půlvlnou sinusovky je

$$\begin{aligned} Q_{AC} &= \int_0^{T/2} I_{AC} \sin \omega t \, dt = I_{AC} \left[-\frac{1}{\omega} \cos \omega t \right]_0^{T/2} = \frac{I_{AC}}{\omega} \left(1 - \cos \frac{\omega T}{2} \right) \\ &= \frac{I_{AC}}{\omega} (1 - \cos \pi) = \frac{2I_{AC}}{\omega}, \end{aligned} \quad (5.63)$$

integrujeme přes jednu půlperiodu, tzn. pro časy $t \in \langle 0, T/2 \rangle$, použitím $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ dostaneme výsledek. Plocha (náboj) pod konstantním proudem za čas $T/2$ je

$$Q_{DC} = I_{DC} \frac{T}{2} = \frac{\pi I_{DC}}{\omega}. \quad (5.64)$$

Platí nepřímá úměra mezi dobou nabíjení a nábojem přeneseným za jednu půlperiodu:

$$\frac{Q_{DC}}{Q_{AC}} = \frac{t_{AC}}{t_{DC}}, \quad (5.65)$$

tzn. po dosazení

$$t_{AC} = \frac{Q_{DC}}{Q_{AC}} t_{DC} = \frac{I_{DC}}{I_{AC}} \frac{\pi}{2} t_{DC}. \quad (5.66)$$

Pro konkrétní hodnoty proudu $I_{DC} = 1 A$ a $I_{AC} = \sqrt{2} A$ (tzn. $I_{ef} = 1 A$) máme

$$t_{AC} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} t_{DC} > t_{DC}. \quad (5.67)$$

Dodatek: Efektivní hodnota napětí a proudu je definována tak, aby se střední hodnota výkonu střídavého napětí a proudu dala spočítat jako prostý součin efektivních hodnot, tzn. $\langle P \rangle = U_{ef} I_{ef}$.

Okamžitý výkon je dán okamžitými hodnotami napětí a proudu na spotřebiči $P(t) = U(t)I(t)$. Časová střední hodnota výkonu je definována jako (pro periodické průběhy napětí a proudu s periodou T)

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) \, dt. \quad (5.68)$$

Pro harmonický průběh napětí a proudu,

$$U(t) = U_0 \cos \omega t, \quad I(t) = I_0 \cos \omega t, \quad (5.69)$$

(U_0 a I_0 jsou amplitudy tohoto napětí a proudu), dostáváme časovou střední hodnotu výkonu $\langle P \rangle$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 \cos^2 \omega t \, dt = \frac{1}{2} U_0 I_0. \quad (5.70)$$

Pokud nyní definujeme efektivní hodnoty napětí a proudu

$$U_{ef} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}, \quad I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad (5.71)$$

můžeme psát $\langle P \rangle = U_{ef} I_{ef} = R I_{ef}^2 = U_{ef}^2 / R$.

Pokud je napětí a proud vůči sobě fázově posunuté, tj. mají například předpisy

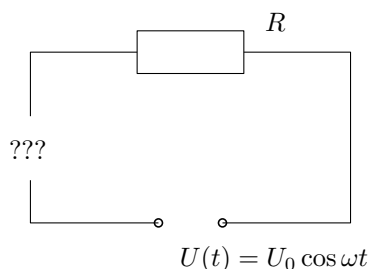
$$U(t) = U_0 \cos \omega t, \quad I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (5.72)$$

pak střední hodnota výkonu vyjde

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi_0) dt = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi_0 = U_{ef} I_{ef} \cos \varphi_0. \quad (5.73)$$

5.4.2 5.20 Spotřebič

Mějme spotřebič o reálné impedanci R , který při efektivním napětí $U_{ef}^{(0)} = 120 \text{ V}$ vyvíjí výkon $P = 60 \text{ W}$. Chceme provozovat tento spotřebič na též výkonu při efektivní hodnotě napětí $U_{ef} = 240 \text{ V}$ v síti $f = 50 \text{ Hz}$. Jakou indukčnost nebo jakou kapacitu bychom museli předřadit?



Obrázek 5.30: Jakou indukčnost nebo kapacitu musíme předřadit?

Řešení: Zde při řešení uplatníme metodu tzv. fázorů. Veličině, která má v čase harmonický průběh $A_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ přiřadíme komplexní číslo (fázor) $\hat{A} = A_0 e^{i\varphi_0}$. V obvodu uvažujeme napětí $U(t) = U_0 \cos \omega t$ a obecně fázově posunutý proud $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ a k nim příslušející fázory $\hat{U} = U_0$ a $\hat{I} = I_0 e^{i\varphi_0}$. Můžeme nyní definovat **impedanci** Z jako komplexní číslo

$$Z = \frac{\hat{U}}{\hat{I}}. \quad (5.74)$$

Pro sériově zapojený rezistor s odporem R , kondenzátor s kapacitou C a cívku s indukčností L platí, že impedance je rovna

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \quad (5.75)$$

(v případě nezapojeného kondenzátoru se člen $\frac{1}{i\omega C}$ vynechá).

Pro okamžitý výkon v čase t máme vztah $P(t) = U(t)I(t)$. Vystředujeme-li tento výkon v čase přes jednu periodu dostáváme vztah pro střední výkon

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi_0 = U_{ef} I_{ef} \cos \varphi_0, \quad (5.76)$$

(viz dodatek u příkladu 5.15 – sekce 5.4.1). Tento výraz můžeme dále upravit v řeči fázorů

$$\langle P \rangle = U_{ef} I_{ef} \cos \varphi_0 = \text{Re}(\hat{U}_{ef} \hat{I}_{ef}) = \text{Re} \frac{U_{ef}^2}{Z} = U_{ef}^2 \text{Re} \frac{1}{Z}, \quad (5.77)$$

kde $\hat{U}_{ef} = U_{ef}$ a $\hat{I}_{ef} = I_{ef}e^{i\varphi_0}$. Potřebujeme tedy spočítat reálnou část převrácené hodnoty impedance (která se také nazývá admittance). V případě sériově předřazeného kondenzátoru máme

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{i\omega C}{i\omega RC + 1} \cdot \frac{1 - i\omega RC}{1 - i\omega RC} = \frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2}(\omega^2 RC^2 + i\omega C), \quad (5.78)$$

výkon na spotřebiči tedy je

$$\langle P \rangle = U_{ef}^2 \frac{\omega^2 RC^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2}. \quad (5.79)$$

Pro sériově předřazenou indukčnost dostáváme

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R + i\omega L} \cdot \frac{R - i\omega L}{R - i\omega L} = \frac{1}{R^2 + \omega^2 L^2}(R - i\omega L) \quad (5.80)$$

a pro výkon máme vztah

$$\langle P \rangle = U_{ef}^2 \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}. \quad (5.81)$$

Pro případ, kdy je v obvodu pouze ohmická zátěž, dostáváme „obyčejný“ výraz pro výkon

$$\langle P \rangle = \frac{U_{ef}^2}{R}. \quad (5.82)$$

Z tohoto výrazu snadno vyjádříme odpor spotřebiče R pomocí původně připojeného efektivního napětí $U_{ef}^{(0)}$:

$$R = \frac{U_{ef}^{(0)2}}{\langle P \rangle}. \quad (5.83)$$

Dosazením tohoto vyjádření pro odpor R do vzorců pro výkon s předřazeným kondenzátorem (5.79), resp. cívkou (5.81), můžeme vyjádřit požadovanou kapacitu, resp. indukčnost. Po chvíli počítání dostaneme výsledky:

$$C = \frac{\langle P \rangle}{\omega} \frac{1}{U_{ef}^{(0)} \sqrt{U_{ef}^2 - U_{ef}^{(0)2}}} = 7,68 \mu F,$$

$$L = \frac{1}{\omega \langle P \rangle} U_{ef}^{(0)} \sqrt{U_{ef}^2 - U_{ef}^{(0)2}} = 1,32 H. \quad (5.84)$$