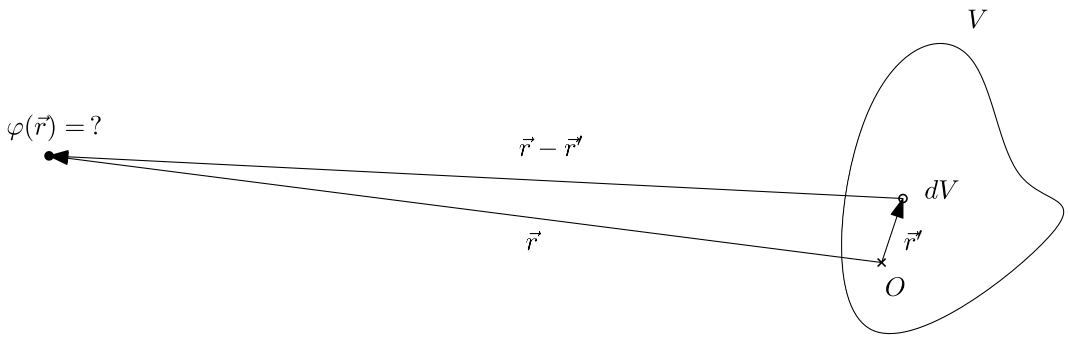
Multipólový rozvoj elektrostatického potenciálu

Máme-li nabité těleso popsané nábojovou hustotou $\rho(x,y,z)$, získáme elektrostatický potenciál generovaný tímto tělesem jako

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV.$$

Je-li těleso konečně veliké (tzn. je uzavřené v nějakém konečném objemu) a zajímáme-li se o potenciál ve velké dálce od tělesa, tak platí, že $|\vec{r}'| \ll |\vec{r}|$.



Upravujme nyní výraz

$$|\vec{r}-\vec{r}'|^2 = \sum_{i=1}^{3}(r_i - r_i')^2 = \sum_{i=1}^{3} r_i^2 + r_i'^2 - 2r_i r_i' = r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}' = r^2\left(1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right),$$

kde jsme označili $r = |\vec{r}|$ a $r' = |\vec{r}'|$. Výraz pod integrálem (bez nábojové hustoty) má pak tvar

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r}\left(1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right)^{-1/2}.$$

Převedli jsme tedy výraz na tvar

$$\frac{1}{r}(1+x)^{-1/2}, \quad \text{kde} \quad x = \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}.$$

x je ovšem malé díky $|\vec{r}'| \ll |\vec{r}|$ (a také díky Schwarzově nerovnosti $\vec{a}\cdot\vec{b} \le |\vec{a}||\vec{b}|$). Odmocninu tedy můžeme rozvinout do Taylorova polynomu se středem v bodě 0. Platí

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots$$

a v našem konkrétním případě

$$\frac{1}{r}(1+x)^{-1/2} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots\right) = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right)^2 + \cdots\right).$$

Po roznásobení a uspořadání členů podle mocniny podílu r'/r získáme výraz

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2} + \frac{1}{2}\left(3\frac{(\vec{r}\cdot\vec{r}')^2}{r^4} - \frac{r'^2}{r^2}\right) + \cdots\right),$$

přicemž členy, které byly uměrné $(r'/r)^3$ a výše jsme nevypisovali. Po dosazení tohoto rozvoje zpět do integrálního vyjádření potenciálu máme

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\int_V \rho(\vec{r}')dV + \frac{1}{r^2}\vec{r}\cdot\int_V \rho(\vec{r}')\vec{r}'dV + \frac{1}{2r^4}\int_V \rho(\vec{r}')\left(3(\vec{r}\cdot\vec{r}')^2 - r^2r'^2\right)dV\right).$$

Upravíme nyní výraz v posledním integrálu

$$3(\vec{r}\cdot\vec{r}')^2 - r^2r'^2 = \sum_{i,j=1}^{3} 3r_ir_i'r_jr_j' - \sum_{i,j=1}^{3} r_ir_ir_j'r_j' = \sum_{i,k=1}^{3} 3r_ir_kr_i'r_k' - \sum_{i,j,k=1}^{3} r_ir_k\delta_{ik}r_j'r_j' = \sum_{i,k=1}^{3} r_ir_k\left(3r_i'r_k' - \delta_{ik}r'^2\right).$$

Nyní můžeme označit výrazy

$$\begin{aligned} Q &= \int_V \rho(\vec{r}')dV, \\ \vec{p} &= \int_V \rho(\vec{r}')\vec{r}'dV, \\ Q_{ij} &= \int_V \rho(\vec{r}')\left(3r_i'r_j' - \delta_{ij}r'^2\right)dV, \end{aligned}$$

po řadě nazvané **celkový náboj**, **dipólový moment** a **kvadrupólový moment**. Tyto veličiny jsou charakteristikou nabitého tělesa! Jejich hodnoty tedy záleží pouze na rozložení nábojů v tělese a nikoliv na místě, kde měříme výsledný elektrostatický potenciál. Výsledný výraz pro potenciál nabývá podoby

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} + \frac{1}{2}\frac{\sum_{i,j=1}^{3} r_ir_jQ_{ij}}{r^5} + \cdots\right).$$

0.1 Jiná cesta

Výraz

$$\left(1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right)^{-1/2}$$

můžeme také rozvinout do Taylorovy řady jinak. Zavedeme-li nyní označení $x = \frac{r'}{r}$ a přepíšeme-li skalární součin $\vec{r}'\cdot\vec{r}$ jako $rr'\cos\alpha$ (kde α je úhel mezi vektory $\vec{r}$ a $\vec{r}'$) dostaneme výraz

$$f(x) = \left(1 + x^2 - 2x\cos\alpha\right)^{-1/2}.$$

Tuto funkci f rozvineme do Taylorovy řady se středem v bodě 0. x je malé díky $r' \ll r$ a úhel α si můžeme pro pevně zvolené $\vec{r}$ a $\vec{r}'$ představit fixní (zároveň $\cos\alpha \in \langle -1, 1\rangle$ a tedy řád $x\cos\alpha$ můžeme považovat stejný jako samotného x). Výsledkem Taylora je (řadu nejlépe napočíst v nějakém matematickém softwaru...)

$$f(x) = 1 + x\cos\alpha + \frac{1}{2}\left(3\cos^2\alpha - 1\right)x^2 + \ldots,$$

kde po zpětném dosazení $x = \frac{r'}{r}$ a $\cos\alpha = \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{rr'}$ dostaneme stejný výraz jako v předchozím textu.