GEOMETRICKÉ METODY FYZIKY 2

Heinrich der Vogler

14. května 2021

Předmluva

Vážení studenti a jiní čtenáři. Do rukou se vám dostaly poznámky z předmětu Geometrické Metody Fyziky 2 v podobě vyučované počínaje letním semestrem akademického roku 2016/2017. Nejedná se o oficiální skripta k předmětu. V textu se s pravděpodobností hraničící s jistotou nalézá velké množství chyb a překlepů. Autor tohoto textu bude vděčný za každého pozorného čtenáře, neváhejte se ozvat. Šíření tohoto textu provádějte s rozmyslem, jedná se pouze o učební pomůcku, nikoliv o oficiální publikaci vyhovující běžným akademickým standardům.

Přednáška je z velké části inspirovaná přístupem ve skvělé knize Mariána Fecka [1], kapitoly 13, 16, 19-21. V důkazech se občas používají podrobnější vlastnosti hladkých zobrazení (pod)variet. Velmi pěkná (včetně moderního značení) kniha na toto téma je [3]. V poslední kapitole jsme použili konstrukci asociativního fibrovaného prostoru, která se v téměř identické podobě nachází v třetí kapitole knihy [4]. Alternativním zdrojem pro nauku o hlavních fibrovaných prostorech je [5]. Standardním textem (pro mírně pokročilé čtenáře) je i klasická kniha [2]. Do jejího čtení se pouštějte jen s dostatkem volného času a odvahy.

Příjemné čtení vám přeje Heinrich der Vogler, vévoda saský a král východofranský.

Obsah

Kapitola 1

Lokální kalibrační invariance

1.1 Maxwellovy rovnice

Standardní diferenciální tvar Maxwellových rovnic je následující. Nechť $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ jsou vektory intenzity elektrického pole a magnetické indukce. Maxwellovy rovnice jsou:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \qquad \text{(homogenní rovnice)} \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \rho, \quad \operatorname{rot}\mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{j}. \qquad \text{(nehomogenní rovnice)} \tag{1.2}$$

Používáme soustavu kde $c = 1$, abychom si ušetřili práci. Primárním cílem této části je ukázat, že $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ mohou být zakódovány do 2-formy $F \in \Omega^2(E^{1,3})$ na varietě Minkowského prostoru $E^{1,3} \equiv (\mathbb{R}^4, g)$, kde g je Minkowského metrika. F se nazývá **tenzor elektromagnetického pole**. Maxwellovy rovnice získají extrémně jednoduchý tvar:

$$dF = 0 \text{ (homogenní rovnice)}\ , \quad \delta F = -j \text{ (nehomogenní rovnice)}\ , \tag{1.3}$$

kde $j \in \Omega^1(E^{1,3})$ je **1-forma proudu**. V následujícím si vysvětlíme význam všech přítomných písmenek. d je obyčejná vnější derivace $d : \Omega^2(E^{1,3}) \to \Omega^3(E^{1,3})$.

1.1.1 Hodgeova dualita

Nechť (M, g, o) je libovolná orientovaná varieta vybavená metrikou.

Připomeňme si, že na orientované varietě má každá lokální soustava souřadnic $(x^1, \ldots, x^n)$ orientaci $o(x^1, \ldots, x^n) = \pm 1$, přičemž Jakobián přechodové funkce mezi shodně orientovanými soustavami musí být vždy kladný.

Na (M, g, o) je vždy význačná všude nenulová n-forma, tzv. **metrická forma objemu** ω_g:

$$\omega_g = o(x^1, \ldots, x^n)\sqrt{|g|} \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n, \tag{1.4}$$

kde $|g| = |\det g_{ij}|$ a $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$. Orientovanost variety M zaručí, že definice ω_g nezáleží na volbě souřadnic. Existuje obvyklý trik jak pracovat s ω_g. Na okolí libovolného bodu $m \in M$ lze vždy pracovat v pravotočivém ortonormálním poli repérů:

Definice 1.1.1. Nechť U je okolí bodu $m \in M$. Potom $(e_1, \dots, e_n)$ nazýváme **polem repérů** (angl. local frame), pokud $e_i \in \mathfrak{X}(U)$ a $(e_1|_p, \dots, e_n|_p)$ tvoří bázi T_pM.

Řekneme, že $(e_1, \dots, e_n)$ je **ortonormální** pokud $g(e_i, e_j) = \pm\delta_{ij}$, a **pravotočivý**, pokud $(e_1|_p, \dots, e_n|_p)$ tvoří pravotočivou bázi T_pM. Tj. jsou-li $(x^1, \dots, x^n)$ pravotočivé souřadnice na okolí p, a máme $e_i|_p = \mathbf{A}_i^j \cdot \partial_j|_p$, je $\det \mathbf{A} = +1$.

Duálním polem repérů $(e^1, \dots, e^n)$ nazýváme 1-formy $e^i \in \Omega^1(U)$ splňující $e^i(e_j) = \delta^i_j$, tj. v každém bodě tvoří duální bázi k $(e_1|_p, \dots, e_n|_p)$.

Tvrzení 1.1.2. *Nechť $(e_1, \dots, e_n)$ je pravotočivé ortonormální pole repérů. Potom*

$$\omega_g = e^1 \wedge \ldots \wedge e^n. \tag{1.5}$$

Jinými slovy, komponentní funkce $(\omega_g)_{i_1 \dots i_n} = \epsilon_{i_1 \dots i_n}$, kde $\epsilon_{i_1 \dots i_n}$ je přímočaré zobecnění Levi-Civitova symbolu ($+1$ na sudé permutace $(1, \dots, n)$, -1 na liché a 0 v jiných případech).

Příklad 1.1.3. V $E^{1,3}$ máme globální souřadnice. Vyhlásíme $o(t, x, y, z) = +1$, tím zavedeme orientaci. Je-li g Minkowského metrika, máme $\sqrt{|g|} = 1$ a forma objemu má tvar

$$\omega_g = dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz. \tag{1.6}$$

Definice 1.1.4. Nechť (M, g, o) je orientovaná varieta s metrikou. **Hodgeova dualita** je lineární zobrazení $*_{g,o} : \Omega^p(M) \to \Omega^{n-p}(M)$ definované jako

$$(*_{g,o}\alpha)_{i_1 \dots i_{n-p}} = \frac{1}{p!} \alpha^{k_1 \dots k_p} (\omega_g)_{k_1 \dots k_p i_1 \dots i_{n-p}}, \tag{1.7}$$

kde $\alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{j_1 \dots j_p} e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_p}$ je p-forma napsaná v bázi libovolného pole repérů, a $\alpha^{k_1 \dots k_k} = g^{k_1 j_1} \dots g^{k_p j_p} \cdot \alpha_{j_1 \dots j_p}$ jsou komponenty zdvižené metrikou.

V následujícím budeme psát $* \equiv *_{g,o}$.

Tvrzení 1.1.5 (Vlastnosti Hodgeovy duality)**.**

1. *$* : \Omega^p(M) \to \Omega^{n-p}(M)$ je lineární isomorfismus vektorových prostorů, přičemž*

$$*^{-1} = sgn(g) * \hat{\eta}^{n+1}, \tag{1.8}$$

   kde $sgn(g) = sgn(\det g_{ij})$ a $\hat{\eta}(\alpha) = (-1)^p \alpha$ pro $\alpha \in \Omega^p(M)$ „měří stupeň formy“.

2. *Pracujeme-li v pravotočivém ortogonálním poli repérů, máme*

$$(*\alpha)_{i_1 \dots i_{n-p}} = \frac{1}{p!} \eta^{k_1 j_1} \dots \eta^{k_p j_p} \cdot \alpha_{j_1 \dots j_p} \cdot \epsilon_{k_1 \dots k_p i_1 \dots i_{n-p}}. \tag{1.9}$$

3. *Ve speciálních případech $p = 0$ a $p = n$ dostáváme*

$$*(1) = \omega_g, \quad *(\omega_g) = sgn(g). \tag{1.10}$$

Cvičení 1.1.6. *Dokažte předchozí tvrzení.*

Vidíme, že metrická orientovaná varieta poskytuje kanonický isomorfismus prostoru svých diferenciálních forem. Obecně lze z dimenzionálních důvodů, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, nalézt pouze lokálně. Vnější derivace je lineární operátor na vnější algebře zvyšující stupeň formy. Hodgeova dualita umožní sestrojit operátor *snižující stupeň formy.*

Definice 1.1.7. Nechť (M, g, o) je orientovaná varieta s metrikou. **Kodiferenciál** $\delta : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M)$ je lineární zobrazení definované jako

$$\delta = *^{-1} d * \hat{\eta}. \tag{1.11}$$

Kodiferenciál splňuje $\delta^2 = 0$. Pomocí kodiferenciálu můžeme definovat **Laplaceův - de Rhamův operátor** $\Delta = -(\delta d + d\delta)$.

1.1.2 Vektorová analýza v E^3

Místo obecných souřadnicových vyjádření prozkoumáme Hodgeovu dualitu, kodiferenciál a Laplaceův-de Rhamův operátor pro eukleidovský prostor $E^3 = (\mathbb{R}^3, g)$ se standardní metrikou a orientaci $o(x, y, z) = +1$.

Metrika nám umožňuje jednoduše ztotožnit vektorová pole a 1-formy. Máme tedy zobrazení

$$\sharp : \Omega^1(E^3) \to \mathfrak{X}(E^3) \text{ (zdvihání indexů) }, \ \flat : \mathfrak{X}(E^3) \to \Omega^1(E^3) \text{ (snižování indexů) }. \tag{1.12}$$

V souřadnicích (x^1, x^2, x^3) máme $\sharp(\alpha_i dx^i) = g^{ij}\alpha_j\partial_i$ a $\flat(X^i\partial_i) = g_{ij}X^j dx^i$. Na druhou stranu jsme právě objevili, že Hodgeova dualita nám umožní ztotožnit (kanonicky) prostory $\Omega^1(E^3)$ a $\Omega^{3-1}(E^3) = \Omega^2(E^3)$. Podobně máme ztotožnění $C^\infty(E^3) \equiv \Omega^0(E^3)$ s prostorem $\Omega^3(E^3)$.

Pojďme si spočítat Hodgeovu dualitu explicitně. Upozornění: (x^1, x^2, x^3) nemusí být kartézské souřadnice! Můžou to být například sférické (lokální) souřadnice (r, ϑ, φ). Potom tedy $g_{ij} \neq \delta_{ij}$. Předpokládáme $o(x^1, x^2, x^3) = +1$. Zavedeme si následující (standardní) označení:

$$dV := \omega_g = \frac{1}{3!}\omega_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k, \text{ (element objemu)} \tag{1.13}$$

$$dS_i := \frac{1}{2}\omega_{ijk} dx^j \wedge dx^k. \text{ (element plochy)} \tag{1.14}$$

Víme, že explicitně $\omega_{ijk} = \sqrt{|g|}\epsilon_{ijk}$. Už jsme ukázali, že $*(1) = \omega_g \equiv dV$. Následně

$$(*(dx^i))_{jk} = \frac{1}{1!}(dx^i)^m \omega_{mjk} = g^{mn}(dx^i)_n \omega_{mjk} = g^{mn}\delta^i_n \omega_{mjk} = g^{im}\omega_{mjk}. \tag{1.15}$$

Celá 2-forma $*(dx^i)$ má tedy souřadnicové vyjádření

$$*(dx^i) = \frac{1}{2}(*(dx^i))_{jk} dx^j \wedge dx^k = g^{im}(\frac{1}{2}\omega_{mjk} dx^j \wedge dx^k) = g^{im} dS_m. \tag{1.16}$$

Mimo jiné vidíme, že (dS_1, dS_2, dS_3) tvoří v každém bodě bázi $\Omega^2(E^3)$. To nás přivede na následující značení:

1. Každou 1-formu můžeme psát jako $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \equiv A_i dx^i = A^i g_{ij} dx^j$.
2. Každou 2-formu můžeme psát jako $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \equiv B^i dS_i$.
3. Každou 3-formu můžeme psát jako $h\, dV$, kde $h \in C^\infty(E^3)$.

Důvod pro značení je následující. Ukážeme si, že $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ skutečně tvoří vektorová pole na E^3. Důvodem je samozřejmě Hodgeova dualita:

Tvrzení 1.1.8. *S použitím výše zavedené notace má operátor Hodgeovy duality tvar*

$$*(f) = f\,dV, \quad *(h\,dV) = h, \tag{1.17}$$
$$*(\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}) = \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}, \quad *(\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}) = \mathbf{B}\cdot d\mathbf{r} \tag{1.18}$$

Nechť $\mathbf{A} = A^i\partial_i$ *a* $\mathbf{B} = B^i\partial_i$. *Potom* $\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \flat(\mathbf{A})$ *a* $\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = *\flat(\mathbf{B})$.

Důkaz. Pro $(M, g, o) = E^3$ platí $*^{-1} = sgn(g) * \hat{\eta}^4 = *$. Stačí tedy spočítat první (levou) polovičku rovnic. První plyne z $*(1) = dV$ a druhá z již odvozeného:

$$*\,(\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}) = *(A^j g_{ji} dx^i) = A^j g_{ji} * (dx^i) = A^j g_{ji} g^{im} dS_m = A^j dS_j = \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}. \tag{1.19}$$

Zbývající tvrzení již triviálně plynou. ■

Tento formalismus nám nyní umožňuje velmi snadno zavést (stále v obecných pravotočivých souřadnicích v $\mathbb{R}^3$) všechny známé vektorové operace na E^3. *Definujeme je* pomocí následujícího komutativního diagramu:

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^0(E^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(E^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(E^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(E^3) \\ \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle \sharp} & & \downarrow{\scriptstyle \sharp *} & & \downarrow{\scriptstyle *} \\ C^\infty(E^3) & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathfrak{X}(E^3) & \xrightarrow{\text{rot}} & \mathfrak{X}(E^3) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(E^3) \end{array} \tag{1.20}$$

Explicitně tedy dostáváme následující výrazy:

$$\text{grad} = \sharp\ d, \quad \text{rot} = \sharp * d\,\flat, \quad \text{div} = *\ d\ *\flat = -\delta\cdot\flat. \tag{1.21}$$

V parametrizaci zavedené nahoře potom můžeme vnější derivaci přepsat pomocí vektorových operací. Dostáváme následující tvrzení:

$$df = \text{grad}\, f\cdot d\mathbf{r}, \quad d(\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}) = (\text{rot}\,\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}, \quad d(\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}) = \text{div}\,\mathbf{B}\,dV, \quad d(h\,dV) = 0. \tag{1.22}$$

Cvičení 1.1.9. *Ukažte, že v kartézských souřadnicích dostáváme standardní operace. Nalezněte* grad, rot *a* div *ve sférických souřadnicích.*

Cvičení 1.1.10. *Co plyne z identity* $d^2 = 0$*?*

Protože platí $\delta = *d * \hat{\eta}$, dá se pohotově odvodit i podobný diagram kde vystupuje kodiferenciál. Dostaneme vyjádření δ pomocí vektorových operací:

$$\delta f = 0, \quad \delta(\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}) = -\,\text{div}\,\mathbf{A}, \quad \delta(\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}) = (\text{rot}\,\mathbf{B})\cdot d\mathbf{r}, \quad \delta(h\,dV) = -(\text{grad}\,h)\cdot d\mathbf{S}. \tag{1.23}$$

1.1.3 Modifikace pro $E^{1,3}$

Nyní bychom chtěli odvodit obdobné výrazy pro Minkowského prostor $E^{1,3} = (\mathbb{R}^4, g)$. Místo libovolných souřadnic nyní budeme pracovat ve standardních kartézských souřadnicích $(t, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$, přičemž $o(t, x, y, z) = +1$. Naším cílem je vyjádřit diferenciál a kodiferenciál libovolné 2-formy. Užitečným nástrojem je následující jednoduché lemma:

Lemma 1.1.11. *Nechť* $\alpha \in \Omega^p(E^{1,3})$. *Potom existují jednoznačné formy* $\hat{r} \in \Omega^p(E^{1,3})$ *a* $\hat{s} \in \Omega^{p-1}(E^{1,3})$, *tak že* $i_{\partial_t}(\hat{r}) = i_{\partial_t}(\hat{s}) = 0$ *a*

$$\alpha = dt \wedge \hat{s} + \hat{r}. \tag{1.24}$$

Jinými slovy, rozklady forem $\hat{r}$ *a* $\hat{s}$ *do souřadnicové báze neobsahují* 1*-formu* dt.

Důkaz. Nechť $\alpha = \frac{1}{p!}\alpha_{i_1\dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$. Protože je produkt bazických 1-forem totálně antisymetrický, buď obsahuje dt právě jednou nebo vůbec. Máme tedy

$$\alpha = dt \wedge \{\frac{1}{(p-1)!}\alpha_{0j_1\dots j_{p-1}} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_{p-1}}\} + \frac{1}{p!}\alpha_{j_1\dots j_p} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}, \tag{1.25}$$

kde všechny sčítací indexy probíhají jen množinu $\{1, 2, 3\}$. ■

Všimněme si, že formálně tedy vypadají $\hat{r}$ a $\hat{s}$ jako formy na podprostoru E^3. Jejich komponenty ale můžou záviset i na zbývající souřadnici t. Řekneme, že forma α je **prostorová**, pokud $\hat{s} = 0$. Můžeme tedy používat podobnou parametrizaci jako na E^3:

$$\begin{aligned}
&\text{0-formy: } \alpha = f && (\hat{s}, \hat{r}) = (0, f), && (1.26)\\
&\text{1-formy: } \alpha = f dt + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} && (\hat{s}, \hat{r}) = (f, \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}), && (1.27)\\
&\text{2-formy: } \alpha = dt \wedge (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}) + \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} && (\hat{s}, \hat{r}) = (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}, \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S}), && (1.28)\\
&\text{3-formy: } \alpha = dt \wedge (\mathbf{b} \cdot d\mathbf{S}) + h\, dV && (\hat{s}, \hat{r}) = (\mathbf{b} \cdot d\mathbf{S}, h\, dV), && (1.29)\\
&\text{4-formy: } \alpha = dt \wedge (h\, dV) && (\hat{s}, \hat{r}) = (h\, dV, 0). && (1.30)
\end{aligned}$$

Důrazné upozornění: $f = f(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t, \mathbf{r})$ atd. Vyzbrojeni tímto rozkladem, je jasné, kam směřuje následující počítání. Jelikož umíme vnější derivaci na formy na E^3, chtěli bychom nějak chytře rozložit i vnější derivaci na $\alpha = dt \wedge \hat{s} + \hat{r}$. Jelikož chceme i formulku pro kodiferenciál, odvodíme i pravidlo pro Hodgeovu dualitu.

Použijeme následující značení: $\hat{d}$ a $\hat{*}$ jsou vnější diferenciál a Hodgeova dualita působící formách v E^3 odpovídající Eukleidovské metrice a orientaci $o(x, y, z) = +1$ tamtéž. Můžeme jimi působit i na *prostorové formy* v $E^{1,3}$, v kterých vystupuje t jen jako „parametr". Zavedeme symbol $\partial_t(\alpha) \equiv \mathcal{L}_{\partial_t}(\alpha)$. Pro prostorové formy jde opravdu jen o parciální derivaci komponent podle času t.

Tvrzení 1.1.12. *Nechť* $\alpha = dt \wedge \hat{s} + \hat{r}$. *Potom platí následující pravidla:*

$$d\alpha = dt \wedge (\partial_t \hat{r} - \hat{d}\hat{s}) + \hat{d}\hat{r}, \tag{1.31}$$

$$*\alpha = dt \wedge \hat{*}\hat{r} + \hat{*}\hat{\eta}\hat{s}, \tag{1.32}$$

$$\delta\alpha = dt \wedge \hat{\delta}\hat{s} + (-\partial_t \hat{s} - \hat{\delta}\hat{r}) \tag{1.33}$$

Cvičení 1.1.13. *Dokažte tvrzení.*

Nyní už můžeme velice snadno zkombinovat všechna tvrzení a odhalit následující formulky pro vnější derivaci a kodiferenciál v $E^{1,3}$. Dostáváme:

$$df = (\partial_t f)dt + (\operatorname{grad} f) \cdot d\mathbf{r}, \tag{1.34}$$

$$d(f dt + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}) = dt \wedge (\partial_t \mathbf{a} - \operatorname{grad} f) \cdot d\mathbf{r} + (\operatorname{rot} \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S}, \tag{1.35}$$

$$d\{dt \wedge (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}) + \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S}\} = dt \wedge (\partial_t \mathbf{b} - \operatorname{rot} \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} + (\operatorname{div} \mathbf{b})\, dV, \tag{1.36}$$

$$d\{dt \wedge (\mathbf{b} \cdot d\mathbf{S}) + h\, dV)\} = dt \wedge (\partial_t h - \operatorname{div} \mathbf{b})\, dV. \tag{1.37}$$

Výsledky pro kodiferenciál jsou podobné:

$$\delta(f dt + \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}) = -\partial_t f + \operatorname{div}\mathbf{a}, \tag{1.38}$$

$$\delta(dt\wedge(\mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}) + \mathbf{b}\cdot d\mathbf{S}) = -(\operatorname{div}\mathbf{a})dt - (\partial_t\mathbf{a} + \operatorname{rot}\mathbf{b})\cdot d\mathbf{r}, \tag{1.39}$$

$$\delta(dt\wedge(\mathbf{b}\cdot d\mathbf{S}) + h\, dV) = dt\wedge(\operatorname{rot}\mathbf{b})\cdot d\mathbf{r} + (-\partial_t\mathbf{b} + \operatorname{grad} h)\cdot d\mathbf{S}, \tag{1.40}$$

$$\delta(dt\wedge(h\, dV)) = dt\wedge(-\operatorname{grad} h\cdot d\mathbf{S}) - (\partial_t h)\, dV. \tag{1.41}$$

Cvičení 1.1.14. *Pomocí vzorečků pro diferenciál d a kodiferenciál δ odvoďte vzorečky pro Laplace-de Rhamův operátor $\Delta = -(d\delta + \delta d)$. Zejména ukažte že na 0-formách dostáváme*

$$\Delta(f) = \partial_t^2(f) - \operatorname{div}\operatorname{grad} f, \tag{1.42}$$

a tedy na funkcích $\Delta = \Box$.

1.1.4 Maxwellovy rovnice pomocí forem

Definujme 1-formu proudu jako $j = \rho\, dt - \mathbf{j}\cdot d\mathbf{r}$. Z výrazu (1.28) vidím, že nejobecnější 2-forma na $E^{1,3}$ je jednoznačně parametrizována dvojicí *časově závislých* vektorových polí na E^3. Uvažujme tedy obecnou 2-formu $F \in \Omega^2(E^{1,3})$ kterou parametrizujeme jako

$$F = dt\wedge(\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}) - \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}. \tag{1.43}$$

Protože F je kovariantní antisymetrický tenzor 2. řádu, lze jej psát jako matici 4×4 odpovídající komponentní matici $F_{\mu\nu}$. Lze snadno spočítat, že je to přesně známý EM tenzor.

Cvičení 1.1.15. *Ukažte, že tomu tak opravdu je.*

S výše vyrobenými nástroji lze snadno spočítat dF a δF. Dostáváme

$$dF = dt\wedge(-\partial_t\mathbf{B} - \operatorname{rot}\mathbf{E})\cdot d\mathbf{S} - (\operatorname{div}\mathbf{B})dV, \tag{1.44}$$

$$\delta F = -(\operatorname{div}\mathbf{E})dt - (\partial_t\mathbf{E} - \operatorname{rot}\mathbf{B})\cdot d\mathbf{r}. \tag{1.45}$$

Protože obě formy $\hat{r}$ and $\hat{s}$ jednoznačně určují formu v $E^{1,3}$, jejich porovnáním dostáváme ekvivalenci rovnic $dF = 0$ a $\delta F = -j$ s oběma sadami Maxwellových rovnic.

Věta 1.1.16. *Maxwellovy rovnice jsou ekvivalentní soustavě rovnice $dF = 0$ a $\delta F = -j$.*

Rovnice $\delta F = -j$ bývá často zapisována jako $d(*F) = -*j$, kterou dostaneme zapůsobením bijekce $*$ na obě strany rovnice. **Duální elektromagnetický tenzor** $*F \in \Omega^2(M)$ je (ve 4 dimenzích) opět antisymetrický tenzor, jehož explicitní podoba je

$$*F = *(dt\wedge\mathbf{E} - \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}) = dt\wedge(-\mathbf{B}\cdot d\mathbf{r}) - \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}. \tag{1.46}$$

Dostane se tedy z F záměnou $(\mathbf{E},\mathbf{B})$ za $(-\mathbf{B},\mathbf{E})$. 3-forma $J = *j$ má tvar $J = \rho\, dV - dt\wedge\mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}$.

Tento elegantní popis umožní velmi rychle a logicky odvodit základní tvrzení v kovariantní teorii elektromagnetického pole. Například, forma F je uzavřená v $\mathbb{R}^4$. Pokud nepředpokládáme žádná další topologická omezení na $\mathbb{R}^4$, automaticky existuje $A \in \Omega^1(M)$, taková, že $dA = F$. Opět si můžeme A parametrizovat prostorovou 0 a 1-formou jako

$$A = \varphi\, dt - \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}. \tag{1.47}$$

Potom $dA = dt \wedge (-\partial_t \mathbf{A} - grad(\varphi)) \cdot d\mathbf{r} - (\mathrm{rot}\,\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$. Porovnáním s definicí F dostaneme

$$\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \mathrm{grad}\,\varphi, \quad \mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}. \tag{1.48}$$

Uzavřenost 2-formy F a Poincarého lemma tedy společně implikují existenci elektromagnetického 4-potenciálu. Forma A není určená jednoznačně, můžu k ní zjevně přičíst libovolnou uzavřenou 1-formu. Ta je však vždy (Poincarého lemma) alespoň lokálně exaktní. Stačí tedy uvažovat $A' = A + d\chi$ pro $\chi \in C^\infty(E^{1,3})$. Z výrazů pro d nahoře snadno spočtu, že

$$A' = (\varphi + \partial_t \chi)\, dt - (\mathbf{A} - \mathrm{grad}\,\chi) \cdot d\mathbf{r}. \tag{1.49}$$

Vidím tedy, že dostávám přesně standardní kalibrační transformace v elektřině a magnetismu.

1.2 Elektřina, magnetismus a akce

Další užitečná aplikace Hodgeovy duality číhá při snaze zapsat Maxwellovy rovnice pomocí variace akčního funkcionálu. Výsledek (a výpočet) jsou s užitím správných geometrických nástrojů otázkou chvilky.

Nechť (M, g, o) je obecná orientovaná varieta s metrikou. Pro libovolné $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$ máme $\alpha \wedge *\beta \in \Omega^n(M)$. Jako každá n-forma, je i tato násobkem formy objemu ω_g. Můžeme tedy definovat funkci $(\alpha, \beta)_g \in C^\infty(M)$ vztahem

$$\alpha \wedge *\beta =: (\alpha, \beta)_g \cdot \omega_g. \tag{1.50}$$

Na první pohled není vidět, že je $(\alpha, \beta)_g$ je symetrická v (α, β). S troškou kombinatoriky ale

$$(\alpha, \beta)_g = \frac{1}{p!} \alpha_{i_1 \dots i_p} \beta^{i_1 \dots i_p}. \tag{1.51}$$

Je-li $(\alpha, \beta)_g = 0$ pro všechny $\beta \in \Omega^p(M)$, je nutně $\alpha = 0$. Důležité je, že d a δ tvoří „téměř“ samosdružené operátory:

Tvrzení 1.2.1. *Pro libovolnou (M, g, o) a dvojici forem $\alpha \in \Omega^p(M)$ a $\beta \in \Omega^{p+1}(M)$ platí identita*

$$\{(d\alpha, \beta)_g - (\alpha, \delta\beta)_g\} \cdot \omega_g = d(\alpha \wedge *\beta) \tag{1.52}$$

S použitím Stokesovy věty pak dostáváme integrální identitu

$$\int_M (d\alpha, \beta)_g \cdot \omega_g = \int_M (\alpha, \delta\beta)_g \cdot \omega_g + \int_{\partial M} \alpha \wedge *\beta. \tag{1.53}$$

Předpokládá se, že integrály mají smysl. Pokud je $\partial M = 0$ a nebo je libovolná z forem α nebo β na hranici rovna nule, dostáváme

$$\int_M (d\alpha, \beta)_g \cdot \omega_g = \int_M (\alpha, \delta\beta)_g \cdot \omega_g. \tag{1.54}$$

Důkaz. Pustíme d na $\alpha \wedge *\beta$ a budeme používat definice:

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge *\beta)) &= d\alpha \wedge *\beta + (-1)^p \alpha \wedge d * \beta = (d\alpha, \beta)_g \cdot \omega_g - \alpha \wedge (d * \hat{\eta})(\beta) \\ &= (d\alpha, \beta)_g \cdot \omega_g - \alpha \wedge *(*^{-1} d * \hat{\eta})(\beta) \\ &= \{(d\alpha, \beta) g - (\alpha, \delta\beta)_g\} \cdot \omega_g. \end{aligned}$$

Zbytek tvrzení je jednoduchou aplikací Stokesovy věty. ■

Pokud má integrování smysl, definuje se skalární součin (opravdický) jako integrál

$$\langle\alpha,\beta\rangle_g = \int_M (\alpha,\beta)_g \cdot \omega_g. \tag{1.55}$$

Nyní už snadno můžeme vyslovit a dokázat následující tvrzení.

Věta 1.2.2. *Nechť $A \in \Omega^1(M)$ a $j \in \Omega^1(M)$ jsou libovolné 1-formy. Potom funkcionál*

$$S[A] = -\frac{1}{2}\langle dA, dA\rangle_g - \langle A, j\rangle_g \tag{1.56}$$

je extremální pro $F = dA$ splňující nehomogenní Maxwellovy rovnice. Funkcionál je kalibračně invariantní pokud j splňuje rovnici kontinuity $\delta j = 0$.

Důkaz. Nechť $A' = A + \epsilon\alpha$ pro $\alpha \in \Omega^1(M)$ s vlastností $\alpha|_{\partial M} = 0$ (podmínka pevných konců). Funkcionál je extremální pro A pokud $S[A'] = S[A] + o(\epsilon^2)$. Dostaneme

$$S[A'] = -\frac{1}{2}\langle dA', dA'\rangle_g - \langle A', j\rangle_g = S[A] - \epsilon\{\langle dA, d\alpha\rangle_g + \langle\alpha, j\rangle_g\} + o(\epsilon^2) \tag{1.57}$$

Dostáváme tedy podmínku $\langle dA, d\alpha\rangle_g + \langle\alpha, j\rangle_g = 0$ pro všechny α nulové na hranici. S použitím předchozího tvrzení tedy $\langle\alpha, \delta F + j\rangle_g = 0$. Z nedegenerovanosti plyne $\delta F = -j$.

Funkcionál je kalibračně invariantní pokud $\langle A + d\chi, j\rangle_g = \langle A, j\rangle_{\mathfrak{g}}$ pro všechny $\chi \in C^\infty(M)$, a tedy $\langle d\chi, j\rangle_g = 0$. Za rozumných předpokladů (například kalibrační transformace nulové na hranici ∂M) můžeme použít předchozí tvrzení a dostáváme $\langle d\chi, j\rangle_g = \langle\chi, \delta j\rangle = 0$. ∎

1.3 Komplexní skalární pole

Uvažujme nyní (opět libovolnou) varietu (M, g, o) a uvažujme teorii komplexního skalárního pole. Geometricky máme tedy $\phi \in \Omega^0(M) \otimes \mathbb{C}$, což můžeme interpretovat jako hladkou komplexní funkci reálné proměnné $x \in M$. $\phi(x) \in \mathbb{C}$.

Obecně, uvažujme $\alpha \in \Omega^p(M) \otimes \mathbb{C}$. Můžeme psát $\alpha = \alpha_0 + i\alpha_1$, kde $\alpha_i \in \Omega^p(M)$ jsou obyčejné p-formy na M. Definujeme skalární (komplexní) skalární součin $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ jako kombinaci standardního skalárního součinu v $\mathbb{C}$ a součinu $(\cdot,\cdot)_g$ na diferenciálních formách:

$$\langle\!\langle\alpha,\beta\rangle\!\rangle = \int_M (\bar{\alpha},\beta)_g \cdot \omega_g, \tag{1.58}$$

kde $\bar{\alpha} = \alpha_0 - i\alpha_1$ označuje komplexní sdružení. Součin není symetrický, ale symetrický s komplexním sdružením, tj. $\langle\!\langle\beta,\alpha\rangle\!\rangle = \overline{\langle\!\langle\alpha,\beta\rangle\!\rangle}$. Pro dvě stejné formy je reálný a

$$\langle\!\langle\alpha,\alpha\rangle\!\rangle = \langle\alpha_0,\alpha_0\rangle_g + \langle\alpha_1,\alpha_1\rangle_g \in \mathbb{R}. \tag{1.59}$$

Všechny operace z předchozích sekcí se (po složkách) dají rozšířit na $\Omega^p(M) \otimes \mathbb{C}$. Nechť $m \geq 0$ je reálné nezáporné číslo. Funkcionál komplexního skalárního pole má tvar

$$S_0[\phi] = \langle\!\langle d\phi, d\phi\rangle\!\rangle - m^2\langle\!\langle\phi,\phi\rangle\!\rangle. \tag{1.60}$$

V obvyklém značení na $E^{1,3}$ máme $d\phi = \partial_\mu\phi \cdot dx^\mu$ a funkcionál má obvyklý tvar

$$S_0[\phi] = \int_M \{\partial^\mu\bar{\phi} \cdot \partial_\mu\phi - m^2\bar{\phi} \cdot \phi\} dx^4 \tag{1.61}$$

V tomto případě musí být člověk trošku opatrnější, protože skalární součin dvou různých forem není obecně reálné číslo, místo toho dostaneme podmínku

$$\langle\!\langle \Delta\phi + m^2\phi, \beta \rangle\!\rangle + \overline{\langle\!\langle \Delta\phi + m^2\phi, \beta \rangle\!\rangle} = 0. \tag{1.62}$$

Volbou reálného nebo ryze imaginárního β dostaneme podmínky

$$\Re(\Delta\phi + m^2\phi) = 0, \;\; \Im(\Delta\phi + m^2\phi) = 0, \tag{1.63}$$

a tedy jednu komplexní rovnici $\Delta\phi + m^2\phi = 0$. Tento drobný problém s variací reálných funkcionálů poskládaných z komplexních čísel se často řeší považováním ϕ a $\bar{\phi}$ za nezávislé proměnné a následnou (nezávislou) variací podle obou. V (1.42) jsme ukázali, že na funkce je v $M = \mathbb{R}^{1,3}$ působí Δ jako D'Alembertův operátor $\Box$. Výsledná rovnice je tedy komplexní **Klein-Gordonova** rovnice.

Funkcionál S_0 i pohybové rovnice jsou evidentně invariantní vůči transformacím ve tvaru $\phi'(x) = e^{-i\alpha}\phi(x)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta. Takové transformaci se říká **globální kalibrační transformace**. Uvažujme třídu transformací ve tvaru $\phi'_\epsilon(x) = e^{-i\epsilon\alpha(x)}\phi(x)$, kde $\alpha \in C^\infty(M)$ jsou funkce které jsou nulové na hranici, tedy $\alpha|_{\partial M} = 0$. Vůči takové transformaci S_0 *není invariantní*. Říká se jí **lokální kalibrační transformace**.

Tuto neinvarianci můžeme s výhodou využít pro odhalení zachovávajících se veličin teorie komplexního skalárního pole. Dosazením ϕ'_ϵ dostáváme

$$\begin{aligned} S_0[\phi'_\epsilon] &= \langle\!\langle d(e^{-i\epsilon\alpha}\phi), d(e^{-i\epsilon\alpha}\phi) \rangle\!\rangle - m^2 \langle\!\langle e^{-i\epsilon\alpha}\phi, e^{-i\epsilon\alpha}\phi \rangle\!\rangle \\ &= \langle\!\langle e^{-i\epsilon\alpha} d\phi, e^{-i\epsilon\alpha} d\phi \rangle\!\rangle - m^2 \langle\!\langle e^{-i\epsilon\alpha}\phi, e^{-i\epsilon\alpha}\phi \rangle\!\rangle \\ &\quad + \langle\!\langle -i\epsilon e^{-i\epsilon\alpha}\phi d\alpha, e^{-i\epsilon\alpha} d\phi \rangle\!\rangle + \langle\!\langle e^{-i\epsilon\alpha} d\phi, -i\epsilon e^{-i\epsilon\alpha}\phi d\alpha \rangle\!\rangle + o(\epsilon^2) \\ &= S_0[\phi] + \epsilon \langle\!\langle d\alpha, i(\bar{\phi} d\phi - \phi d\bar{\phi}) \rangle\!\rangle + o(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{1.64}$$

Nyní předpokládejme, že ϕ řeší pohybové rovnice. Jelikož $\phi'_0 = \phi$, musí platit $S_0[\phi'_\epsilon] = S_0[\phi] + o(\epsilon^2)$. Odtud tedy dostáváme, že pro řešení pohybových rovnic musí platit

$$\langle\!\langle d\alpha, i(\bar{\phi} d\phi - \phi d\bar{\phi}) \rangle\!\rangle = 0 \tag{1.65}$$

Protože α je nulové na hranici, jsou d a δ v tomto případě sdružené. Nechť $j = i(\bar{\phi} d\phi - \phi d\bar{\phi})$. Pak nutně $\delta j = 0$. Pro $M = E^{1,3}$ není $\delta j = 0$ nic jiného než rovnice kontinuity. Označme $J = *j$. Rovnice kontinuity je ekvivalentní rovnici $dJ = 0$. J je 3-forma, můžeme ji proto integrovat přes 3-rozměrné podvariety $\{t\} \times E^3$. V notaci podsekce 1.1.3 máme

$$j = i\{\bar{\phi}\, \partial_t \phi - \phi\, \partial_t \bar{\phi}\}\, dt + i\{\bar{\phi} \operatorname{grad} \phi - \phi \operatorname{grad} \bar{\phi}\} \cdot d\mathbf{r}. \tag{1.66}$$

Potom pro $J = *j$ dostaneme

$$J = i\{\bar{\phi} \operatorname{grad} \phi - \phi \operatorname{grad} \bar{\phi}\} \cdot dt \wedge d\mathbf{S} + i\{\bar{\phi}\, \partial_t \phi - \phi\, \partial_t \bar{\phi}\} \cdot dV. \tag{1.67}$$

Nyní definujeme **náboj** Q jako integrál z J přes „plátky“ $\{t\} \times E^3$:

$$Q(t) = \int_{\{t\}\times E^3} J = \int_{E^3} i\{\bar{\phi}\, \partial_t \phi - \phi\, \partial_t \bar{\phi}\}(t) \cdot dV = \int_{\mathbb{R}^3} i\{\bar{\phi}\, \partial_t \phi - \phi\, \partial_t \bar{\phi}\}(t, x, y, z) d\vec{r}. \tag{1.68}$$

Pomocí Stokesovy věty se dá ukázat, že $\dot{Q}(t) = 0$ a tedy jde o integrál pohybu.

1.4 Minimální interakce

Přece jenom by se nám líbilo mít Lagrangián pro komplexní skalární pole, který *je lokálně kalibračně invariantní*, tedy invariantní vůči transformacím $\phi'(x) = e^{-i\alpha(x)}\phi(x)$, kde $\alpha(x)$ je libovolná funkce na M. Problém vznikl v členu s vnější derivací, která se vůči kalibračním transformacím chovala nehezky. Nápad je tedy nahradit operátor d operátorem $\mathcal{D}$ **kovariantní derivace** (jehož podoba ale bude záviset na volbě kalibrace) tak, že bude platit pravidlo

$$\mathcal{D}'\phi'(x) = e^{-i\alpha(x)}\mathcal{D}\phi(x). \tag{1.69}$$

První inteligentní nápad je vzít $\mathcal{D}\phi = d\phi + \mathcal{A}\cdot\phi$, kde $\mathcal{A} \in \Omega^1(M)\otimes\mathbb{C}$, kde $\mathcal{A}'$ musí jít vyjádřit pomocí $\mathcal{A}$ a funkce α. Protože problematické členy jsou ryze imaginární, též musí být $\mathcal{A}$. Píšeme proto $\mathcal{A}' = iA'$ pro $A' \in \Omega^1(M)$. Potom

$$\mathcal{D}'\phi' = e^{-i\alpha}(d\phi + i(A' - d\alpha)\cdot\phi)). \tag{1.70}$$

Porovnáním s pravou stranou tedy dostáváme transformační pravidlo $A' = A + d\alpha$. Ale to je přesně kalibrační transformace pro elektromagnetický potenciál A! Stačí tedy přidat interakci s novým polem A a situace je zachráněná! Vyrobili jsme tedy akci

$$S_0'[\phi] = \langle\!\langle \mathcal{D}\phi, \mathcal{D}\phi\rangle\!\rangle - m^2\langle\!\langle\phi,\phi\rangle\!\rangle. \tag{1.71}$$

Jenže my umíme přidat další kalibračně invariantní člen do akce. Zatím je A pouze „pozadí“, ale není problém ho povýšit na dynamické pole a definovat:

$$S[\phi, A] = -\frac{1}{2}\langle dA, dA\rangle_g + \langle\!\langle \mathcal{D}\phi, \mathcal{D}\phi\rangle\!\rangle - m^2\langle\!\langle\phi,\phi\rangle\!\rangle. \tag{1.72}$$

Výsledné akci se říká **minimální lokálně kalibračně invariantní model**, přičemž interakční členy (obsahující ϕ i A současně) se nazývají minimální interakcí. Zdánlivě chybí člen obsahující proudy j. Ale my můžeme rozepsat člen obsahující $\mathcal{D}$:

$$\langle\!\langle \mathcal{D}\phi, \mathcal{D}\phi\rangle\!\rangle = \langle\!\langle d\phi, d\phi\rangle\!\rangle - \langle A, i(\bar{\phi}d\phi - \phi d\bar{\phi})\rangle_g + \langle\!\langle A\cdot\phi, A\cdot\phi\rangle\!\rangle \tag{1.73}$$

Je přímočaré spočítat pohybovou rovnici, a dostáváme

$$\delta F = -i(\bar{\phi}d\phi - \phi d\bar{\phi}) + 2\bar{\phi}\phi A = -i(\bar{\phi}\mathcal{D}\phi - \phi\overline{\mathcal{D}\phi}). \tag{1.74}$$

Vidíme, že na pravé straně na místě proudu stojí „vylepšený“ proud z předchozí podsekce. V prvé řadě je lokálně kalibračně invariantní. Za povšimnutí stojí, že A vystupuje (schované v $\mathcal{D}$) i na pravé straně „Maxwellových rovnic“.

Hlavním cílem tohoto předmětu je osvětlit geometrický význam všech objektů vyskytujících se v tomto jednoduchém, ale důležitém příkladu.

Kapitola 2

Hlavní fibrovaný prostor

2.1 Akce Lieových grup

Lieova grupa dle definice = abstraktní hladká varieta spolu s hladkou operací násobení a inverze. Jakákoliv jejich aplikace ve fyzice = máme prostor(očas) a nějakou třídu jeho transformací, které se uzavírají do grupy. Toto zodpovídá nějaké abstraktní Lieově grupě *působící akcí* na varietě.

Definice 2.1.1. Nechť G je Lieova grupa. M je hladká varieta. Řekneme, že zobrazení $\theta : G \times M \to M$ je **levá akce Lieovy grupy** G **na varietě** M, pokud je hladké a zobrazení $\theta_g : M \to M$ definované jako $\theta_g(m) \equiv \theta(g, m)$ splňuje:

1. $\theta_e = 1_M$, kde $e \in G$ je jednotka grupy. *Jednotka grupy působí triviálně.*
2. $\theta_g \circ \theta_{g'} = \theta_{gg'}$, pro všechny $g, g' \in G$. *Akce respektuje grupovou strukturu.*

Je-li jasné o které akci mluvíme, používá se značení $\theta_g(m) = g \cdot m$. Axiomy potom mají tvar:

$$e \cdot m = m, \quad g \cdot (g' \cdot m) = (gg') \cdot m. \tag{2.1}$$

Někdy je výhodné pracovat s **pravou akcí grupy** $\theta' : M \times G \to M$, kde je skládání v druhém axiomu naopak, tedy $\theta'_g \circ \theta'_{g'} = \theta'_{g'g}$. V tomto případě se používá označení $\theta'_g(m) = m \cdot g$ a druhý axiom (pro pravou akci) lze psát jako $(m \cdot g) \cdot g' = m \cdot (gg')$.

Tvrzení 2.1.2. *Pro každé $g \in G$, zobrazení $\theta_g : M \to M$ tvoří difeomorfismus M.*

Cvičení 2.1.3. *Dokažte předchozí tvrzení.*

Cvičení 2.1.4. *Ukažte, že pro libovolnou levou akci θ, zobrazení $\theta' : M \times G \to M$ definované jako $\theta'(m, g) = \theta(g^{-1}, m)$ tvoří pravou akci grupy a naopak. Množiny levých a pravých akcí grupy G na varietě M jsou tedy izomorfní.*

Definice 2.1.5. Je-li $M = V$ pro vektorový prostor V, a pro každé $g \in G$ máme $\theta_g \in \mathrm{GL}(V)$, tedy G působí pomocí lineárních zobrazení, používá se značení $\rho(g) = \theta_g$, a zobrazení $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ se nazývá **reprezentace Lieovy algebry** G **na vektorovém prostoru** V.

Příklad 2.1.6. Nechť $M = \mathbb{R}^n$. Nechť $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Pro $(\mathbf{A}, x) \in G \times \mathbb{R}^n$ definujeme $\theta(\mathbf{A}, x) = \mathbf{A}.x$. Je snadné ukázat, že θ je levou akcí grupy $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ na varietě $\mathbb{R}^n$. Navíc $\rho(\mathbf{A}) = \theta_{\mathbf{A}}$ je reprezentace.

Příklad 2.1.7. Nechť G je libovolná Lieova grupa a $M = G$. Potom **levá translace** kde $\theta_g(h) = L_g(h) = gh$ tvoří levou akci, přičemž **pravá translace** kde $\theta'_g(h) = R_g(h) = hg$ tvoří pravou akci. Konečně, **konjugace** kde $\theta_g(h) = ghg^{-1}$ tvoří levou akci G na G.

Příklad 2.1.8. Nechť $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Nechť V je konečně-rozměrný reálný vektorový prostor. Označme si množinu všech bází prostoru V jako $\mathcal{E}(V)$.

Nechť $e = (e_1, \ldots, e_n)$ je element $\mathcal{E}(V)$ a $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Definujeme novou bázi $e \cdot \mathbf{A}$ prostoru V vztahem $(e \cdot \mathbf{A})_i = \mathbf{A}_i^k e_k$, kde horní index matice označuje řádky a dolní sloupečky. Potom

$$(e \cdot (\mathbf{A}.\mathbf{B}))_i = (\mathbf{A}.\mathbf{B})_i^k e_k = \mathbf{A}_j^k \mathbf{B}_i^j e_k = \mathbf{B}_i^j (\mathbf{A}_j^k e_k) = \mathbf{B}_i^j (e \cdot \mathbf{A})_j = ((e \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B})_i \tag{2.2}$$

Zřejmě $e \cdot \mathbf{1} = e$. Definovali jsme tedy *pravou akci* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ na množině $\mathcal{E}(V)$. Je tahle akce hladká? Zatím jsme neřekli, jaká je hladká struktura na $\mathcal{E}(V)$. Zvolím si fixní bázi e^0 prostoru V. Každá báze $e \in \mathcal{E}(V)$ lze tedy napsat jako $e = e^0 \cdot \mathbf{A}(e)$. Zobrazení $\varphi(e) := \mathbf{A}(e) \in GL(n, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n,n}$ definuje globální souřadnicovou mapu pro $\mathcal{E}(V)$. Je snadné si nyní rozmyslet, proč je pravá akce hladká v takto zavedených souřadnicích.

Definice 2.1.9. Nechť $\theta : G \times M \to M$ je akce G na M. Nechť $m \in M$ je libovolný fixní bod. **Orbitové zobrazení** $\theta^{(m)} : G \to M$ příslušné bodu m definujeme jako $\theta^{(m)}(g) = \theta(g, m)$.

Jeho obrazem $\theta^{(m)}(G)$ je **orbita bodu** m označovaná jako $G \cdot m \subseteq M$. Množinově

$$G \cdot m = \{m' \in M \mid m' = g \cdot m \text{ pro nějaké } g \in G\}, \tag{2.3}$$

a orbitu bodu m si lze tedy představovat jako množinu všech bodů v M kam z bodu m reálně **dosáhneme akcí grupy** G.

Tvrzení 2.1.10. *Nechť θ je akce grupy G na M. Definujeme následující relaci na varietě M:*

$$m \approx m' \Leftrightarrow \textit{body } m \textit{ a } m' \textit{ leží oba v jedné orbitě nějakého bodu} \tag{2.4}$$

Potom relace $\approx$ je ekvivalence. Příslušné třídy ekvivalence jsou orbity akce θ a celá varieta M lze tedy napsat jako disjunktní sjednocení orbit akce.

Důkaz. Musíme ukázat, že $\approx$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Zjevně $m \approx m$, protože $m \in G \cdot m$. Relace je symetrická z definice.

Abychom dokázali tranzitivitu, stačí si uvědomit, že pokud dvě orbity $G \cdot p$ a $G \cdot p'$ mají nějaký společný bod, jsou stejné: $G \cdot p = G \cdot p'$. Vskutku, je li $m \in (G \cdot p) \cap (G \cdot p')$, mám $m = g \cdot p = g' \cdot p'$. Odtud $p' = (g'^{-1} g) \cdot p$. Je-li $h \cdot p' \in G \cdot p'$, pak $h \cdot p' = (hg'^{-1} g) \cdot p \in G \cdot p$, a tedy $G \cdot p' \subseteq G \cdot p$. Opačná inkluze se dokáže stejně.

Tranzitivita je nyní triviální záležitostí. Je-li $m \approx m'$ a $m' \approx m''$, vím, že jsou orbity $G \cdot p$ a $G \cdot p'$, že $m, m' \in G \cdot p$ a $m', m'' \in G \cdot p'$. Potom ale mají obě orbity společný bod m', jsou stejné a rozhodně tedy $m \approx m'$.

Dokázali jsme tedy, že $\approx$ je relace ekvivalence. Zbytek jsou vlastnosti relace ekvivalence. ∎

Poznámka 2.1.11. Zatím jsme mluvili o orbitách jako o podmnožinách M. Dá se ukázat, že každá orbita je *vnořená podvarieta* M. Nejsou to tedy obecně vložené podvariety s podprostorovou topologií z M.

Příklad 2.1.12. Nechť $G = \mathrm{SO}(2)$ a $M = \mathbb{R}^2$. Uvažujme standardní akci grupy rotací na $\mathbb{R}^2$. Potom orbita každého bodu $x \neq 0 \in \mathbb{R}^2$ je kružnice $\mathbb{S}^1_{\|x\|} \subseteq \mathbb{R}^2$, tj. $\mathrm{SO}(2) \cdot x = \mathbb{S}^1_{\|x\|}$, a pro $x = 0$ je orbitou počátek $\mathrm{SO}(2) \cdot 0 = \{0\}$. V tomto případě jsou to vložené podvariety $\mathbb{R}^2$.

Definice 2.1.13. Nechť $\theta : G \times M \to M$ je akce. Nechť $m \in M$ je libovolný fixní bod. Potom **stabilizátor bodu** m je podmnožina $G_m \subseteq G$ definovaná jako

$$G_m = \{g \in G \mid g \cdot m = m\}, \tag{2.5}$$

lze ji tedy chápat jako množina prvků G co **nepohnou bodem** m. G_m se také nazývá **grupou izotropie bodu** m.

Tvrzení 2.1.14. *$G_m \subseteq G$ tvoří podgrupu. Tato podgrupa je uzavřená množina v G a tedy tvoří vloženou Lieovu podgrupu G.*

Důkaz. Je-li $g, g' \in G_m$, mám $(gg') \cdot m = g(g' \cdot m) = g \cdot m = m$. Podobně $g^{-1} \cdot m = g^{-1} \cdot (g \cdot m) = (gg^{-1}) \cdot m = e \cdot m = m$. A tedy $G_m \subseteq G$ je podgrupa. Je to uzavřená množina, protože můžu psát $G_m = (\theta^{(m)})^{-1}(\{m\})$, kde $\theta^{(m)}$ je (spojité) orbitové zobrazení příslušné bodu m.

Zbytek je netriviální (velmi) důkaz z teorie Lieových grup. ■

Grupové akce můžou mít různé vlastnosti, které lze zformulovat přímo i pomocí orbit a stabilizátorů. Shrňme si několik takových vlastností:

Definice 2.1.15. Nechť $\theta : G \times M \to M$ je akce Lieovy grupy G na M. Potom

1. Akce je **tranzitivní**, pokud každé dva body $m, m' \in M$ lze spojit akcí *nějakého prvku* grupy, tj. existuje $g \in G$, takové, že $g \cdot m = m'$.

   Ekvivalentně, akce je tranzitivní, pokud má právě jednu orbitu.

2. Akce je **volná**, pokud pro libovolný bod $m \in M$ rovnost $g \cdot m = g' \cdot m$ implikuje $g = g'$. Ekvivalentně, rovnost $g \cdot m = m$ implikuje $g = e$.

   Akce je volná právě tehdy když je pro každé m příslušný stabilizátor G_m triviální podgrupou G, tj. $G_m = \{e\}$.

3. Akce je **efektivní**, pokud pro každý bod $g \in G$ takový, že $g \neq e$ existuje $m \in M$, takové, že $g \cdot m \neq m$. Tj. každý netriviální element G s nějakým bodem na M pohne.

   Ekvivalentně, průnik všech stabilizátorů je triviální podgrupa G.

Cvičení 2.1.16. *Argumentujte, že každá volná akce je efektivní. Nalezněte příklad akce která je efektivní, ale není volná. Opačné tvrzení tedy neplatí.*

Příklad 2.1.17. Nechť θ je akce z příkladu 2.1.6. Tato akce má dvě orbity $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cdot 0 = \{0\}$ a $GL(n, \mathbb{R}) \cdot x = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ pro $x \neq 0$. Není tedy tranzitivní. Zároveň $G_0 = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ a akce není volná. Kdyby $\mathbf{A}.x = x$ pro všechny $x \in \mathbb{R}^n$, znamenalo by to, že $\mathbb{R}^n$ je vlastní podprostor $\mathbf{A}$ s vlastním číslem 1, což ale znamená $\mathbf{A} = \mathbf{1}$. Vidíme, že akce je efektivní. Obecně pro $x \neq 0$, G_x je množina matic pro něž je x vlastním vektorem s vlastním číslem 1.

Příklad 2.1.18. Uvažujme akce z příkladu (2.1.7). Levá translace $\theta_g = L_g$ je tranzitivní, protože rovnice $L_g(h) = h'$ má řešení pro každou dvojici (h, h'). Pokud $L_g(h) = h$, máme $gh = h$ a tedy $g = e$. Levá translace je volná a tedy efektivní.

Nechť $\theta_g(h) = I_g(h) = ghg^{-1}$ je konjugace. Akce není tranzitivní, protože orbitou jednotky je jen jeden bod, tj. $G \cdot e = \{e\}$. To také ukazuje, že akce není ani volná protože $G_e = G$. Tato akce není ani efektivní, protože **centrum grupy** je definované jako množina

$$\mathcal{Z}(G) = \{g \in G \mid gh = hg \text{ pro všechny } h \in G\}. \tag{2.6}$$

Konjugace je tedy efektivní právě tehdy když $\mathcal{Z}(G) = \{e\}$. To rozhodně nesplňuje každá grupa. Pro Abelovskou (komutativní) je $\mathcal{Z}(G) = G$, nebo například $\mathcal{Z}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})) = \{\lambda \cdot \mathbf{1} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Příklad 2.1.19 (Hopfova fibrace I)**.** Uvažujme grupu $G = \mathrm{SU}(2)$. Připomeňme, že

$$\mathrm{SU}(2) = \{\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2,2} \mid \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \mathbf{1} \text{ a } \det(\mathbf{A}) = 1\}. \tag{2.7}$$

Snadno se ukáže, že $\mathrm{SU}(2) \doteq \mathbb{S}^3$. Vskutku, parametrizujeme-li obecnou komplexní matici,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \lambda \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

podmínky na $\mathbf{A} \in \mathrm{U}(2)$ okamžitě dávají $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^\dagger$. Zároveň víme, že $|\det \mathbf{A}| = 1$ a tedy $\det \mathbf{A} = e^{i\kappa}$ pro nějaké $\kappa \in \mathbb{R}$. Odtud

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\lambda} & \bar{\delta} \end{pmatrix} = e^{-i\kappa} \begin{pmatrix} \delta & -\lambda \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

To nám určí $\delta = e^{i\kappa}\bar{\alpha}$ a $\gamma = -e^{i\kappa}\bar{\lambda}$. Je praktické přejít k parametrizaci $\alpha = e^{i\kappa/2}\alpha'$ a $\lambda = e^{i\kappa/2}\lambda'$. Zapomeneme na apostrofy a můžeme psát

$$\mathbf{A} = e^{i\kappa/2} \begin{pmatrix} \alpha & \lambda \\ -\bar{\lambda} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Ještě nesmíme zapomenout na $\det \mathbf{A} = e^{i\kappa}$. Ale to nám dává podmínku $|\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1$. A tedy

$$\mathrm{U}(2) = \{e^{i\kappa/2} \begin{pmatrix} \alpha & \lambda \\ -\bar{\lambda} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid |\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1,\ \kappa \in \mathbb{R}\} \doteq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3. \tag{2.11}$$

Pro $\mathrm{SU}(2)$ je $\kappa = 0$, takže vidíme, že $\mathrm{SU}(2) \doteq \mathbb{S}^3$, navíc dostáváme rozklad $\mathrm{U}(2) \doteq U(1) \times \mathrm{SU}(2)$. Ve skutečnosti jsou všechny množinové bijekce i difeomorfismy a kartézský součin je přímý součin Lieových grup. Taky je vidět, že $\mathrm{SU}(2)$ je jednoduše souvislá a $\mathrm{U}(2)$ není.

Uvažujme nyní varietu $M = H_0(2, \mathbb{C})$ hermitovských matic 2×2 s nulovou stopou. Tato množina tvoří vektorový prostor ze kterého zdědí hladkou strukturu. Vskutku:

$$H_0(2, \mathbb{C}) = \{\begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \mid x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\}. \tag{2.12}$$

Lineární izomorfismus $\mathbb{R}^3 \to H_2(2, \mathbb{C})$ lze psát jako $\Psi(x) = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3$, kde σ_i jsou standardní Pauliho matice:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Je snadné vidět, že $\det(\Psi(x)) = -\|x\|^2$, kde $\|x\|$ je standardní eukleidovská norma v $\mathbb{R}^3$. Nyní definujeme akci $\mathrm{SU}(2)$ na prostoru $H_0(2, \mathbb{C})$ následovně:

$$\theta_{\mathbf{A}}(\mathbf{H}) = \mathbf{A}\mathbf{H}\mathbf{A}^\dagger \text{ pro všechny } \mathbf{H} \in H_0(2, \mathbf{C}). \tag{2.14}$$

Snadno se ověří, že $\theta_{\mathbf{A}}(\mathbf{H})$ je hermitovská a bezestopá. Můžeme tedy použít tuto akci abychom definovali akci $\hat{\theta} : \mathrm{SU}(2) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vztahem $\hat{\theta}_{\mathbf{A}}(x) = \Psi^{-1}(\theta_{\mathbf{A}}(\Psi(x)))$. Platí pravidlo

$$\|\hat{\theta}_{\mathbf{A}}(x)\|^2 = -\det(\theta_{\mathbf{A}}(\Psi(x))) = -\det(\mathbf{A}\Psi(x)\mathbf{A}^\dagger) = -\det(\Psi(x)) = \|x\|^2. \tag{2.15}$$

Vidíme tedy, že $\hat{\theta}_{\mathbf{A}}$ definuje ortogonální lineární transformace, a tedy elementy grupy $\mathrm{O}(3)$. Můžeme se na $\hat{\theta}$ dívat jako na zobrazení $\hat{\theta} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{O}(3)$. Ve skutečnosti má $\hat{\theta}$ hodnoty v grupě vlastních ortogonálních transformací a tedy v $\mathrm{SO}(3)$. Jak se to ukáže?

Platí (bez důkazu), že libovolná matice v SU(2) lze psát jako maticová exponenciála ve tvaru

$$\mathbf{A} = \exp(-\frac{i}{2}\alpha \mathbf{n} \cdot \sigma) = \cos(\frac{\alpha}{2})\mathbf{1} - i \sin(\frac{\alpha}{2})(\mathbf{n} \cdot \sigma), \tag{2.16}$$

kde $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ je směrový vektor a $\alpha \in \mathbb{R}$. Nechť (e_1, e_2, e_3) je standardní báze v $\mathbb{R}^3$. Máme $\Psi(e_i) = \sigma_i$. Je-li $\mathbf{H} = H^i \sigma_i$ obecná matice v $H_0(2, \mathbb{C})$, můžeme psát $H^i = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\sigma_i \mathbf{H})$. Vskutku:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\sigma_i H^k \sigma_k) = H^k \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\sigma_i \sigma_k) = H^k \frac{1}{4} \operatorname{Tr}(\{\sigma_i, \sigma_k\}) = H^k \frac{1}{4} \operatorname{Tr}(2\delta_{ik}\mathbf{1}) = H^k \delta_{ik} = H^i. \tag{2.17}$$

Chceme-li tedy spočítat jak vypadá matice zobrazení $\hat{\theta}_{\mathbf{A}}$ ve standardní bázi, máme

$$\hat{\theta}_{\mathbf{A}}(e_b) = \Psi^{-1}(\theta_{\mathbf{A}}(\sigma_b)) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\sigma_a \mathbf{A} \sigma_b \mathbf{A}^\dagger) \Psi^{-1}(\sigma_a) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\sigma_a \mathbf{A} \sigma_b \mathbf{A}^\dagger) \cdot e_a. \tag{2.18}$$

Nyní je potřeba dosadit matici $\mathbf{A}$ v celé své kráse (2.16). To se dá velmi snadno (byť za delší čas) vypočítat s použitím formulek pro stopy součinů Pauliho matic.

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(\sigma_1) &= 0, & \operatorname{Tr}(\sigma_a \sigma_b) &= 2\delta_{ab}, \\ \operatorname{Tr}(\sigma_a \sigma_b \sigma_c) &= 2i\epsilon_{abc}, & \operatorname{Tr}(\sigma_a \sigma_b \sigma_c \sigma_d) &= 2(\delta_{ab}\delta_{cd} - \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{cb}) \end{aligned} \tag{2.19}$$

Výsledek je po delším počítáním následující. Pokud $R_{ab} = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\sigma_a \mathbf{A} \sigma_b \mathbf{A}^\dagger)$, máme

$$R_{ab} = \delta_{ab} \cos(\alpha) + (1 - \cos(\alpha)) n_a n_b - \epsilon_{abc} n_c \sin(\alpha) \tag{2.20}$$

Toto jsou ovšem komponenty nejobecnější matice rotace $\mathbf{R}(\alpha, \mathbf{n})$ o úhel $\alpha \in \mathbb{R}$ okolo osy zadané směrovým vektorem $\mathbf{n}$. Dostáváme tedy grupový homomorfismus $\hat{\theta} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$, který je surjektivní. Z vyjádření matice $R_{ab} = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\sigma_a \mathbf{A} \sigma_b \mathbf{A}^\perp)$ vidíme, že je to zobrazení hladké. Dokonce platí, že jde o takzvané hladké *ponoření* (angl. submersion).

Sekci zakončíme následující užitečnou definicí:

Definice 2.1.20. Nechť θ a θ' jsou akce Lieovy grupy G na dvou hladkých varietách M a M'. Nechť $\varphi : M \to M'$ je hladké zobrazení. Řekneme, že φ je G-**ekvivariantní**, pokud

$$\varphi(\theta(g, m)) = \theta'(g, \varphi(m)). \tag{2.21}$$

Pomocí „tečkové“ notace zapíšeme přehledněji jako $\varphi(g \cdot m) = g \cdot \varphi(m)$.

2.2 Fibrované prostory

Tato sekce slouží pouze k rychlému připomenutí hlavních pojmů a notace. Stručně řečeno, (hladké) fibrované prostory jsou hladké variety co lokálně v jistém smyslu vypadají jako kartézský součin kousku tzv. bazické variety a tzv. vlákna. Báze a vlákno vystupují v definici nesymetricky.

Definice 2.2.1. Nechť $\pi : E \to M$ je hladké surjektivní zobrazení dvou hladkých variet E a M, nazývaných **totální prostor** E a **bazická varieta** M. Zobrazení π se nazývá **projekce**.

Nechť $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je otevřené pokrytí variety M a $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je kolekce hladkých difeomorfismů $\phi_\alpha : U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)$, kde F je hladká varieta nazvaná **typické vlákno**, taková, že platí

$$\pi \circ \phi_\alpha = \pi_1, \text{ kde } \pi_1 : U_\alpha \times F \to U_\alpha \text{ je projekce.} \tag{2.22}$$

Potom se $\phi \equiv \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ nazývá **lokální trivializace**.

Řekneme, že trojice (E, M, π) se nazývá **fibrovaný prostor**, pokud existuje *nějaká* lokální trivializace. Často píšeme jen $\pi : E \to M$.

Vláknem fibrace nad $m \in M$ rozumíme množinu $E_m \equiv \pi^{-1}(m)$. Základním poznatkem je, že každé vlákno E_m je vložená podvarieta E difeomorfní typickému vláknu F. Každé m je totiž v U_α pro nějaké α a $\phi_\alpha(m,\cdot) : F \to E_m$ je hledaný difeomorfismus. Může se ale stát, že bod m je obsažen ve více okolích z pokrytí daného lokální trivializací. Potom přijdou na přetřes takzvaná **přechodová zobrazení** definovaná pro $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ jako

$$(g_{\alpha\beta}(m))(f) = \pi_2 \circ \phi_\alpha^{-1}(\phi_\beta(m, f)), \tag{2.23}$$

kde $\pi_2 : U_\alpha \times F \to F$ je projekce. Z konstrukce je zobrazení $g_{\alpha\beta}(m)$ pro každé m hladkým zobrazením z F do F. Je to hladký difeomorfismus, protože $g_{\alpha\beta}(m)^{-1} = g_{\beta\alpha}(m)$. Přechodová zobrazení tedy můžeme brát jako $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Diff}(F)$. Řekneme, že $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Diff}(F)$ jsou hladká, pokud pro fixní f, zobrazení $m \mapsto (g_{\alpha\beta}(m))(f) \in F$ je hladké zobrazení.

Pro každé $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ musí tedy $g_{\alpha\beta}$ splňovat podmínky

$$g_{\alpha\alpha}(m) = 1_F, \;\; g_{\beta\alpha}(m) = (g_{\alpha\beta}(m))^{-1}. \tag{2.24}$$

Může se stát, že $m \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Potom se snadno odvodí tzv. **kocyklová podmínka**:

$$g_{\alpha\beta}(m) \circ g_{\beta\gamma}(m) = g_{\alpha\gamma}(m). \tag{2.25}$$

Často nastane situace, kdy člověk začne s typickým vláknem F, bazickou varietou M a se surjektivní projekcí $\pi : E \to M$ z totálního prostoru, který apriori není hladká varieta. Potom je užitečné následující tvrzení:

Tvrzení 2.2.2. *Nechť $\pi : E \to M$ je zobrazení z množiny E do hladké variety M. Nechť F je hladká varieta. Mějme zadána bijektivní zobrazení $\phi_\alpha : U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ taková, že $\pi \circ \phi_\alpha = \pi_1$ a $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ je otevřené pokrytí M.*

Pokud jsou všechna přechodová zobrazení $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Diff}(F)$ hladká, existuje unikátní topologie a hladká struktura na E, že $\pi : E \to M$ je hladké a $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ tvoří lokální trivializaci pro fibrovaný prostor $\pi : E \to M$ s typickým vláknem F.

Toto tvrzení se aplikuje velmi často, například u konstrukce tečného a kotečného vektorového bundlu. Ve skutečnosti platí ještě silnější tvrzení. Dokonce nepotřebujeme ani zobrazení ϕ_α ani prostor E. Následující věta ukáže, že jediným zajímavým objektem jsou přechodová zobrazení.

Věta 2.2.3. *Nechť M a F jsou hladké variety. Nechť $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ je otevřené pokrytí M a pro každý neprázdný průnik $U_\alpha \cap U_\beta$ existuje hladká funkce $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Diff}(F)$ splňující podmínky (2.24), taková, že pro všechny neprázdné průniky $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ platí kocyklová podmínka (2.25).*

Potom existuje fibrovaný prostor $\pi : E \to M$ s typickým vláknem F a lokální trivializací $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ takovou, že $g_{\alpha\beta}$ jsou její přechodová zobrazení. Takový fibrovaný prostor je unikátní až na izomorfismus.

Aplikace tohoto tvrzení už není tak častá při konstrukci užitečných fibrovaných prostorů, často se však hodí v existenčních důkazech. Často nastává situace, kdy F není obecná varieta, ale varieta s dodatečnou strukturou. Velmi užitečným příkladem je ten následující:

Definice 2.2.4. Nechť $\pi : E \to M$ je fibrovaný prostor, kde $F = V$ je vektorový prostor. Řekneme, že E je **vektorový fibrovaný prostor**, nebo též **vektorový bandl**, pokud přechodová zobrazení $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Diff}(V)$ mají hodnotu v konečně-rozměrné podgrupě $\mathrm{GL}(V) \subseteq \mathrm{Diff}(V)$, neboli pro každé $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ je $g_{\alpha\beta}(m)$ lineární isomorfismus prostoru V.

Každé vlákno E_m vektorového bandlu má unikátní strukturu vektorového prostoru, takovou že $\phi_\alpha(m,\cdot) : V \to E_m$ je lineární isomorfismus.

Často je lineární struktura na vláknech dopředu zadaná, viz. konstrukce TM. Potom stačí ověřit, že je trivializační zobrazení $\phi_\alpha(m, \cdot)$ lineární. Potom je automaticky lineární isomorfismus a přechodové funkce jsou lineární isomorfismy.

Dalším důležitým konceptem jsou lokální řezy fibrovaného prostoru. Kromě jejich přímočaré geometrické interpretace (např. lokální vektorová pole) často můžou posloužit ke konstrukce lokální trivializace (viz. následující sekce).

Definice 2.2.5. Nechť $\pi : E \to M$ je fibrovaný prostor. Řekneme, že hladké zobrazení $\sigma : U \to E$ je **lokální řez fibrace** π pokud $\pi \circ \sigma = 1_U$. Prostor lokálních řezů na okolí U se označuje jako $\Gamma_U(E)$. Pokud $U = M$, říkáme, že σ je **globální řez** a píšeme $\Gamma(E)$ pro jejich množinu.

2.3 Principální fibrace

Centrálním objektem této přednášky bude další speciální případ fibrovaného prostoru. Uvažujme nyní případ, kdy $F = G$, kde G je Lieova grupa. Jak omezit přechodová zobrazení nyní?

Stačí si uvědomit, že G samotná tvoří podgrupu $\mathrm{Diff}(G)$. Vskutku, každému $g \in G$ můžeme přiřadit unikátní levou translaci $L_g \in \mathrm{Diff}(G)$. Přiřazení $g \mapsto L_g$ je grupový monomorfismus, protože $L_{gg'} = L_g \circ L_{g'}$, $L_e = 1_G$, a $L_g = 1_G$ implikuje $g = e$. Budeme se nyní zabývat právě fibrovanými prostory, jejichž přechodová zobrazení leží v této podgrupě.

Definice 2.3.1. Nechť $\pi : P \to M$ je fibrovaný prostor s typickým vláknem G, kde G je Lieova grupa. Nechť $R : P \times G \to P$ je *pravá akce* Lieovy grupy G na P. Předpokládáme následující vlastnosti všech zúčastněných:

1. Akce R je volná a působí podél vláken, tj. $\pi \circ R_g = \pi$ pro všechny $g \in G$.
2. Zúžení akce R na každé vlákno je tranzitivní, tj. pro každé $p, p' \in P_m$ existuje (unikátní) $g \in G$, takové že $p' = p \cdot g$.
3. Existuje lokální trivializace $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$, jejíž zobrazení jsou ekvivariantní, tj. pro každé $m \in U_\alpha$ a $g, h \in G$ platí
$$\phi_\alpha(m, gh) = \phi_\alpha(m, g) \cdot h. \tag{2.26}$$
   Takovou lokální trivializaci budeme nazývat **principální**.

Potom se fibrovaný prostor (P, M, π, R) nazývá **hlavní fibrovaný prostor** nebo též **principální G-bandl**, principální fibrovaný prostor atd. Anglicky nejčastěji **principal G-bundle**.

Poznámka 2.3.2. Všimněte si, že akce R nemůže být pro $M \neq \{m\}$ tranzitivní. Dokonce snadno určíme orbity, jsou jimi přesně vlákna fibrace P_m difeomorfní grupě G. Zároveň, až na příklad triviálního principálního bundlu, P_m nemá dobře definovanou strukturu Lieovy grupy - obecně nelze jednoznačně určit jednotku grupy.

Tvrzení 2.3.3. *Nechť (P, M, π, R) je hlavní fibrovaný prostor. Potom přechodová zobrazení principální trivializace mají hodnoty v podgrupě $G \subseteq \mathrm{Diff}(G)$.*

Důkaz. Nechť $m \in U_\alpha \cap U_\beta$. Pro prvek $h \in G$ můžeme psát
$$(g_{\alpha\beta}(m))(h) = (\pi_2 \circ \phi_\alpha^{-1})(\phi_\beta(m, h)) = (\pi_2 \circ \phi_\alpha^{-1})(\phi_\beta(m, e) \cdot h) = (\pi_2 \circ \phi_\alpha^{-1}(\phi_\beta(m, e))) \cdot h. \tag{2.27}$$

Označíme-li $\hat{g}_{\alpha\beta}(m) = \pi_2 \circ \phi_\alpha^{-1}\phi_\beta(m, e))$, můžeme psát

$$(g_{\alpha\beta}(m))(h) = \hat{g}_{\alpha\beta}(m) \cdot h \equiv L_{\hat{g}_{\alpha\beta}(m)}(h). \tag{2.28}$$

Vidíme tedy, že přechodová zobrazení skutečně působí jako levá translace grupou G, a tedy mají hodnoty ve výše zmíněné podgrupě Diff (G) ■

Poznámka 2.3.4. Podobně jako v případě obecné fibrace platí opačné tvrzení. Pokud máme fibrovaný prostor P s typickým vláknem G, v němž přechodová zobrazení působí levou translací, můžeme totální P vybavit unikátní pravou akcí grupy G volnou a tranzitivní podél vláken, která z dané lokální trivializace udělá principální a tedy z P hlavní fibrovaný prostor.

Příklad 2.3.5. Nechť $P = M \times G$ je triviální fibrovaný prostor, $\pi : M \times G \to M$ projekce. Definujeme $R_g(m, h) = (m, h \cdot g)$. Potom identické zobrazení $\phi : M \times G \to M \times G$ je principální lokální (zde globální) trivializace a $\pi : M \times G \to M$ je hlavní fibrovaný prostor.

Hlavní fibrovaný prostor má následující užitečnou vlastnost, kde pokrytí lokálními řezy vždy definuje principální lokální trivializaci.

Tvrzení 2.3.6. *Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor. Nechť $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ je otevřené pokrytí M a $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in I}$ je kolekce hladkých lokálních řezů $\sigma_\alpha \in \Gamma_{U_\alpha}(P)$. Potom $\phi'_\alpha : U_\alpha \times G \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ definovaná jako $\phi'_\alpha(m, g) = \sigma_\alpha(m) \cdot g$ definují principální lokální trivializaci P.*

Důkaz. Protože $\pi \circ \sigma_\alpha = 1_{U_\alpha}$ a $\pi(p \cdot g) = p$, dostáváme $\pi(\phi'_\alpha(m, g)) = \pi(\sigma_\alpha(m)) = m = \pi_1(m)$. Zobrazení jsou ekvivariantní, zřejmě $\phi'_\alpha(m, gh) = \sigma_\alpha(m) \cdot (gh) = (\sigma_\alpha(m) \cdot g) \cdot h = \phi'_\alpha(m, g) \cdot h$. Pro dokončení důkazu musíme ukázat, že $\phi'_\alpha : U_\alpha \times G \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ je difeomorfismus.

ϕ'_α můžeme psát jako složení hladkých zobrazení $\phi'_\alpha = R \circ (\sigma_\alpha \times 1_G)$, kde $R : P \times G \to P$ je pravá akce na P. Máme tedy ϕ'_α hladké. Nechť $p \in \pi^{-1}(U_\alpha)$. Protože bod $\sigma_\alpha(\pi(p))$ leží ve stejném vlákně, existuje unikátní $g_\alpha(p) \in G$, takový že

$$p = \sigma_\alpha(\pi(p)) \cdot g_\alpha(p). \tag{2.29}$$

Definujeme inverzní zobrazení jako $\phi'^{-1}_\alpha(p) = (\pi(p), g_\alpha(p))$. Snadno se ověří, že opravdu $\phi'_\alpha \circ \phi'^{-1}_\alpha = 1$ and $\phi'^{-1}_\alpha \circ \phi'_\alpha = 1$. Víme tedy, že ϕ'_α je hladká bijekce. Abychom ukázali, že jde o difeomorfismus, stačí ukázat, že ϕ'_α je vnoření, tedy jeho tečné zobrazení je v každém vodě injektivní. Potřebné prostředky (fundamentální vektorová pole) budeme mít až v další sekci. ■

Důsledek 2.3.7. *Hlavní fibrovaný prostor je trivializovatelný, právě tehdy když existuje nějaký globální hladký řez.*

Příklad 2.3.8. Nechť M je libovolná varieta s pravou a *volnou* akcí R grupy G. Nechť M/G je množina všech orbit akce R nazývaná **prostor orbit**. Definujeme zobrazení $\pi : M \to M/G$ jako $\pi(m) = G \cdot m$, tj. každému bodu přiřadí jeho orbitu. Jelikož každá orbita je orbitou nějakého bodu, je π surjektivní. Pro každé $\mathcal{O} \in M/G$ je $\pi^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{O} \subseteq M$ viděna jako podmnožina M.

M/G vždycky topologický prostor, kde $U \subseteq M/G$ je otevřená právě tehdy když $\pi^{-1}(U)$ je otevřená v M. Je to nejhrubší (nejméně otevřených množin) topologie v které je π spojité. Za ideálních okolností existuje (ne vždy!) hladká struktura, taková že $\pi : M \to M/G$ je surjektivní hladké ponoření (surjective submersion).

Za takových podmínek vždy existuje pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ variety M/G a kolekce hladkých řezů $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in I}$, kde $\sigma_\alpha : U_\alpha \to M$ splňuje $\pi \circ \sigma_\alpha = 1_{U_\alpha}$. Modifikací důkazu předchozího tvrzení se dá ukázat, že přesně stejným způsobem se na $\pi : M \to M/G$ dá definovat struktura hlavního fibrovaného prostoru.

V dalším příkladu se podrobně podíváme na fyzikálně extrémně důležitý příklad hlavního fibrovaného prostoru. Je jím tzv. Hopfova fibrace $\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$, kde $G = U(1) \doteq \mathbb{S}^1$.

Příklad 2.3.9 (Hopfova fibrace II)**.** Uvažujme nyní grupu $\mathrm{SU}(2)$ a její působení na dvou různých prostorech. Z definice (je to podgrupa maticové grupy $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$) působí na vektorovém prostoru $\mathbb{C}^2$, tj. pro $\chi \in \mathbb{C}^2$ a $\mathbf{A} \in \mathrm{SU}(2)$ působí jako $\mathbf{A}.\chi \equiv L_{\mathbf{A}}(\chi)$.

Ujasněme si nejprve, jak přesně vypadají orbity této akce. V $\mathbb{C}^2$ máme normu definovanou jako $\|\chi\|^2 = \chi^\dagger\chi$. Podobně jako při důkazu $\mathrm{SU}(2) \doteq \mathbb{S}^3$ vidíme, že pro $r \geq 0$ můžeme psát

$$\mathbb{S}^3_r \doteq \{\chi \in \mathbb{C}^2 \mid \chi^\dagger\chi = r^2\} = \{\chi \in \mathbb{C}^2 \mid \|\chi\| = r\}. \tag{2.30}$$

Tvrdíme, že orbity $\mathrm{SU}(2)$ jsou přesně tyto třírozměrné sféry pro $r \geq 0$. Všimněte si, že máme $\mathbb{C}^2/\mathrm{SU}(2) = [0, +\infty)$, prostor jenž není nikdy hladkou varietou.

Protože akce $\mathrm{SU}(2)$ zachovává normu, tj. $\|\mathbf{A}\chi\| = \|\chi\|$ pro všechny $\mathbf{A} \in \mathrm{SU}(2)$, každá z orbit musí být obsažena v nějaké z $\mathbb{S}^3_r$. Nechť $\chi \in \mathbb{S}^3_r$ je libovolné. Sestrojíme $\mathbf{A}$, že $\chi = \mathbf{A}.\chi_0$, kde $\chi_0 = (r, 0)^T$ je jeden z „pólů“ $\mathbb{S}^3_r$. Nechť $\chi = (\alpha, \lambda)^T$. Dosazením snadno zjistíme, že

$$\mathbf{A} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\lambda} \\ \lambda & \bar{\alpha} \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

Protože $\|\chi\| = r$, snadno se ukáže, že opravdu $\mathbf{A} \in \mathrm{SU}(2)$. Viz také (2.11). Jelikož každé dva body na $\mathbb{S}^3_r$ spojíme sekvencí dvou akcí $\mathrm{SU}(2)$, musí být celá $\mathbb{S}^3_r$ v jedné orbitě.

Definujeme nyní zobrazení $\pi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^3$ vztahem

$$\pi(\chi)_i = \chi^\dagger\sigma_i\chi. \tag{2.32}$$

Nyní ověříme několik vlastností tohoto zobrazení.

Bod 1: π skoro zachovává normu: Pro libovolný $\chi \in \mathbb{C}^2$ je $\chi\chi^\dagger$ hermitovská komplexní matice 2×2. Lze ji unikátně zapsat pomocí normy $\|\chi\|$ a zobrazení π jako

$$\chi\chi^\dagger = \frac{1}{2}(\|\chi\|^2 \cdot \mathbf{1} + \pi(\chi)_i \cdot \sigma_i) \tag{2.33}$$

Snadno se ukáže, že $(\mathbf{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ tvoří bázi prostoru $H(2,\mathbb{C})$ hermitovských matic. Vzpomeňte $H_0(2,\mathbb{C})$ z příkladu 2.1.19, což je podprostor $H(2,\mathbb{C})$ tvořený lineárním obalem báze $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Koeficienty v této bázi se získají pomocí stop, tj.

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(\mathbf{H}) \cdot \mathbf{1} + \mathrm{Tr}(\sigma_i.\mathbf{H}) \cdot \sigma_i) \tag{2.34}$$

Pro $\mathbf{H} = \chi\chi^\dagger$ pomocí záměn „pod stopou“ snadno dostáváme výsledek. Užitím této formulky snadno zjistíme eukleidovskou normu obrazu $\pi(\chi)$ v závislosti na normě $\|\chi\|$. Máme

$$\begin{aligned}
\|\pi(\chi)\|^2 &= \pi(\chi)_i\pi(\chi)_i = \chi^\dagger\sigma_i\chi\chi^\dagger\sigma_i\chi = \mathrm{Tr}(\chi^\dagger\sigma_i\chi\chi^\dagger\sigma_i\chi) = \mathrm{Tr}(\chi\chi^\dagger\sigma_i\chi\chi^\dagger\sigma_i) \\
&= \frac{1}{4}(\|\chi\|^4\,\mathrm{Tr}(\sigma_i\sigma_i) + \pi(\chi)_j\pi(\chi)_k\,\mathrm{Tr}(\sigma_j\sigma_i\sigma_k\sigma_i)) \\
&= \frac{1}{4}(\|\chi\|^4 2\delta_{ii} + 2\pi(\chi)_j\pi(\chi)_k(\delta_{ij}\delta_{ki} - \delta_{jk}\delta_{ii} + \delta_{ji}\delta_{ik})) \\
&= \frac{1}{4}(6\|\chi\|^4 - 2\|\pi(\chi)\|^2).
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Odtud $\|\pi(\chi)\|^2 = \|\chi\|^4$, a tedy π definuje zobrazení $\pi : \mathbb{S}^3_{\sqrt{r}} \to \mathbb{S}^2_r$. Zobrazení je hladké protože původní zobrazení je jen polynom v komponentách χ.

Bod 2: π je ekvivariantní zobrazení: Připomeňme, že máme grupový homomorfismus $\hat{\theta} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ a tedy i akci $\hat{\theta}_{\mathbf{A}}$ grupy SU(2). Tvrdíme, že

$$\pi(L_{\mathbf{A}}(\chi)) = \hat{\theta}_{\mathbf{A}}(\pi(\chi)). \tag{2.36}$$

To ale ve skutečnosti přímo plyne z definice akce $\hat{\theta}$. Vskutku, máme

$$\begin{aligned} \pi(L_{\mathbf{A}}(\chi))_i &= \chi^\dagger(\mathbf{A}^\dagger\sigma_i\mathbf{A})\chi = \mathrm{Tr}(\sigma_i\mathbf{A}\chi\chi^\dagger\mathbf{A}^\dagger) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\sigma_i\mathbf{A}(\|\chi\|^2\cdot\mathbf{1} + \pi(\chi)_k\sigma_k)\mathbf{A}^\dagger) \\ &= \pi(\chi)_k\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\sigma_i\mathbf{A}\sigma_k\mathbf{A}^\dagger) = R_{ik}\cdot\pi(\chi)_k. \end{aligned} \tag{2.37}$$

To je ale přesně vyjádření (2.36). Vidíme, že π je ekvivariantní.

Bod 3: $\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ je surjektivní zobrazení: Nechť $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ je vektor normovaný na 1. Nechť $\zeta \in \mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{C}^2$ je libovolný normovaný vektor, $\zeta^\dagger\zeta = 1$. Označme $\mathbf{n}' = \pi(\zeta)$ normovaný obraz v $\mathbb{C}^2$. Protože $\mathbb{S}^2$ je orbita grupy rotací, určitě existuje $\mathbf{B} \in \mathrm{SO}(3)$, že $\mathbf{n} = \mathbf{B}.\mathbf{n}'$. Ale protože nakrytí $\hat{\theta} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ je surjektivní, existuje $\mathbf{A} \in \mathrm{SU}(2)$, takové že $\mathbf{B} = \hat{\theta}_{\mathbf{A}}$. Potom

$$\pi(L_{\mathbf{A}}(\zeta)) = \hat{\theta}_{\mathbf{A}}(\pi(\zeta)) = \mathbf{B}.\mathbf{n}' = \mathbf{n}. \tag{2.38}$$

A tedy π je surjektivní. Ve skutečnosti jde o surjektivní ponoření, protože každé ekvivariantní zobrazení má konstantní hodnost podél celé orbity, v tomto případě tedy podél celé $\mathbb{S}^3$. A hladké surjektivní zobrazení s konstantní hodností je vždycky ponoření (to není triviální tvrzení).

Bod 4: Podél vláken π volně a tranzitivně působí grupa $\mathbf{U}(1)$. Připomeňme, že grupu $\mathrm{U}(1) \subseteq \mathrm{GL}(\mathbb{C}, 1) = \mathbb{C}$ vybavujeme hladkou strukturou podvariety $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$, přičemž

$$\mathrm{U}(1) = \{\exp(i\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathbb{S}^1. \tag{2.39}$$

Tj. α je „polární“ souřadnice na $\mathbb{S}^1$. U(1) má pravou (a tedy i levou) akci na $\mathbb{C}^2$ definovanou jako násobení odpovídajícím komplexním číslem: $\chi \cdot e^{i\alpha} = e^{i\alpha}\chi$. Zřejmě $\|\chi \cdot e^{i\alpha}\| = \|\chi\|$ a akci tedy můžeme zúžit na $\mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{C}^2$. Označme $R_{e^{i\alpha}}(\zeta) \equiv \zeta \cdot e^{i\alpha}$. Chceme ukázat, že $\pi \circ R_{e^{i\alpha}} = \pi$:

$$\pi(e^{i\alpha}\zeta)_i = (e^{i\alpha}\zeta)^\dagger\sigma_i(e^{i\alpha}\zeta) = e^{-i\alpha}(\zeta^\dagger\sigma_i\zeta)e^{i\alpha} = \pi(\zeta)_i. \tag{2.40}$$

Dál chceme ukázat, že akce působí volně. Nechť $e^{i\alpha}\zeta = \zeta$. Stačí rovnici vynásobit $\zeta^\dagger$ zleva a dostáváme $e^{i\alpha}\zeta^\dagger\zeta = \zeta^\dagger\zeta$. Odtud $e^{i\alpha} = 1 \equiv e_{\mathrm{U}(1)}$.

Konečně, musíme ukázat, že je akce tranzitivní. Nechť $\zeta \in \mathbb{S}^3$, takové, že $\pi(\zeta) = \mathbf{n}$. Definujme komplexní matici $\Sigma = \mathbf{n}\cdot\sigma$. Podle předpokladu $\zeta\zeta^\dagger = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{n}\cdot\sigma)$. Odtud tedy

$$\Sigma(\zeta) = (2\zeta\zeta^\dagger - \mathbf{1})\zeta = 2\zeta\zeta^\dagger\zeta - \zeta = \zeta. \tag{2.41}$$

Odtud vidíme, že každý bod vlákna $\pi^{-1}(\mathbf{n})$ je vlastním vektorem operátoru Σ s vlastním číslem 1. Opačné tvrzení je také pravdivé. Nechť $\Sigma(\zeta) = \zeta$. Máme $\pi(\zeta)_i = \zeta^\dagger\sigma_i\zeta$. Vynásobením n_i a sečtením přes i dostáváme $\pi(\zeta)_i \cdot n_i = 1$, tj. $\pi(\zeta)\cdot\mathbf{n} = 1$. Ale $\pi(\zeta)$ i $\mathbf{n}$ jsou směrové vektory, odkud plyne $\pi(\zeta) = \mathbf{n}$. Vlákna π mají tedy jednoduchou interpretaci:

$$\pi^{-1}(\mathbf{n}) = \{\zeta \in \mathbb{C}^2 \mid \zeta \text{ je normovaným vlastním vektorem } \mathbf{n}\cdot\sigma \text{ s vlastním číslem } 1\}. \tag{2.42}$$

Každý absolvent kvantové mechaniky ví, že $\mathbf{n} \cdot \sigma$ má vlastní čísla $\{-1, 1\}$ a příslušné vlastní prostory jsou jednorozměrné. Je-li tedy χ' libovolný jiný normovaný vlastní vektor, je $\chi' = e^{i\alpha}\chi$ pro nějaké $e^{i\alpha} \in \mathrm{U}(1)$. To ukazuje tranzitivitu.

Bod 5: Dostáváme netriviální hlavní fibraci se strukturní grupou $U(1)$: Ukázali jsme, že $\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ je hladká surjektivní submerze. Definovali jsme hladkou volnou akci působící tranzitivně podél vláken. Abychom ukázali, že jde o hlavní fibraci, musí se definovat lokální trivializace. Protože π je submerze, vždycky existuje kolekce $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in I}$ hladkých řezů π, jejichž definiční obory pokrývají $\mathbb{S}^2$. Úplně stejně jako v důkazu tvrzení 2.3.6 se pomocí nich definuje principální lokální trivializace $\mathbb{S}^3$.

Výsledný hlavní fibrovaný prostor se nazývá **Hopfova fibrace**. Výsledek není triviální fibrovaný prostor, protože $\mathbb{S}^3 \not\cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ a topologický prostor $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ není jednoduše souvislý.

Další příklad hlavního fibrovaného prostoru je jedním z těch úplně nejdůležitějších. Ukazuje, že kolekce všech bází všech tečných prostorů tvoří fibrovaný prostor s přirozenou akcí grupy $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Je důležité mu porozumět, protože *naprostá většina formálních definic v teorii hlavních fibrovaných prostorů pochází ze studia tohoto speciálního případu*!

Příklad 2.3.10 (Hlavní fibrace repérů (angl. Frame bundle))**.** Připomeňme příklad 2.1.8. Pro každý n-rozměrný vektorový prostor V jsme definovali varietu $\mathcal{E}(V)$ všech bází prostoru V.

Nechť M je libovolná n-rozměrná hladká varieta. Definujeme totální prostor $F(M)$ jako

$$F(M) = \bigsqcup_{m \in M} \mathcal{E}(T_m M), \tag{2.43}$$

tj. $F(M)$ je množina všech bází všech tečných prostorů k varietě M. Nechť $e \in \mathcal{E}(T_m M)$. Potom $\pi : F(M) \to M$ definujeme jako $\pi(e) = m$, tj. každé bázi přiřadíme bod variety M, kde se dotýká tečný prostor jehož je e bází. Jelikož $\mathcal{E}(T_m M) \neq \emptyset$, je π surjektivní.

Typickým vláknem $\pi : F(M) \to M$ bude Lieova grupa $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Nechť $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je souřadnicový atlas variety M. Označme příslušné souřadnicové funkce $x^i_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$. Pro každý bod $m \in U_\alpha$ tedy dostáváme prvek $\partial^{(\alpha)}|_m \in \mathcal{E}(T_m M)$, kde

$$\partial^{(\alpha)}|_m = (\left.\frac{\partial}{\partial x^i_\alpha}\right|_m, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n_\alpha}\right|_m). \tag{2.44}$$

Nyní definujeme lokální trivializaci $\phi_\alpha : U_\alpha \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \pi^{-1}(U_\alpha)$. Připomeňme, že $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ působí přirozeně zprava na $\mathcal{E}(V)$ pro libovolný n-rozměrný prostor. Potom

$$\phi_\alpha(m, \mathbf{A}) := \partial^{(\alpha)}|_m \cdot \mathbf{A}, \tag{2.45}$$

pro každé $m \in U_\alpha$ a $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. V duchu tvrzení 2.2.2 musíme ukázat, že jsme právě definovali bijekci, takovou že $\pi \circ \phi_\alpha = \pi_1$. Ale protože $\partial^{(\alpha)}|_m$ je báze v $T_m M$, je i výsledek působení $\mathbf{A}$ (z definice). A tedy $\pi(\phi_\alpha(m, \mathbf{A})) = m$. Zjevně je to bijekce, protože pro každé $e \in \mathcal{E}(T_m M)$ existuje právě jedno $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, že $e = \partial^{(\alpha)}|_m \cdot \mathbf{A}$. Abychom mohli využít služeb tvrzení 2.2.2, musíme ukázat, že přechodová zobrazení jsou hladká.

Nechť tedy $m \in U_\alpha \cap U_\beta$. Ale potom $\partial^{(\beta)}|_m = \partial^{(\alpha)}|_m \cdot \mathbf{J}(m)$, kde $\mathbf{J}$ je Jacobiho matice transformace přechodového zobrazení $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$. Potom přechodové zobrazení trivializace je

$$\begin{aligned} [g_{\alpha\beta}(m)](\mathbf{A}) &= \pi_2 \phi_\alpha^{-1}(\phi_\beta(m, \mathbf{A})) = \pi_2 \phi_\alpha^{-1}(\partial^{(\beta)}|_m \cdot \mathbf{A}) \\ &= \pi_2 \phi_\alpha^{-1}(\partial^{(\alpha)}|_m \cdot \mathbf{J}(m) \cdot \mathbf{A}) \\ &= \mathbf{J}(m) \cdot \mathbf{A}. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Vidíme tedy, že přechodová zobrazení působí levou translací prvkem $\mathbf{J}(m)$, který (jako každá Jacobiho matice v atlasu) hladce závisí na m. Z tvrzení 2.2.2 tedy plyne, že existuje unikátní hladká struktura na $F(M)$, která z $\pi : F(M) \to M$ udělá fibrovaný prostor.

Musíme ještě definovat vhodnou akci $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ na $F(M)$. Existuje jediná logická možnost, a tedy $R_{\mathbf{A}}(e) = e \cdot \mathbf{A}$ pro každé $e \in F(M)$ a $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. V každém vlákně tedy definuje pravou akci z příkladu 2.1.8, o které jsme již ukázali, že je tam volná a tranzitivní.

Nakonec najednou ukážeme, že akce je hladká a lokální trivializace $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ je ekvivariantní a tedy tzv. principální. Pro každé $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ a $m \in U_\alpha$ máme

$$R_{\mathbf{A}}(\phi_\alpha(m, \mathbf{B})) = \phi_\alpha(m, \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} = ((\partial^\alpha|_m) \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} = \phi_\alpha(m, \mathbf{B}.\mathbf{A}). \tag{2.47}$$

To ukazuje ekvivarianci. Zároveň je pravá strana hladká v $(m, \mathbf{B}, \mathbf{A})$, a tedy $R : \pi^{-1}(U_\alpha) \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ je hladké zobrazení pro každé $\alpha \in I$. $\pi : F(M) \to M$ se nazývá **hlavní fibrace repérů**, nebo známěji v angličtině **frame bundle**.

Cvičení 2.3.11. *Ujasněte si, že lokální řezy $\pi : F(M) \to M$ odpovídají (lokálně definovaným) polím repérů. Dle důsledku 2.3.7 je tedy $F(M)$ trivializovatelný právě tehdy když existuje* globálně definované pole repérů. *Takové varietě se říká **paralelizovatelná**. To nastane například pokud $M = G$ je Lieova grupa.*

2.4 Fundamentální vektorová pole, vertikální podprostor

Následující odstavce fungují pro libovolnou hladkou varietu P s libovolnou pravou akcí $R : P \times G \to P$ Lieovy grupy G. Připomeňme, že **Lieova algebra** $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ Lieovy grupy G je vektorový prostor který ztotožňujeme s tečným prostorem v $e \in G$, tj. $\mathfrak{g} = T_e G$.

$\mathfrak{g}$ je izomorfní podprostoru $\mathfrak{X}_L(G)$ nekonečně-rozměrné Lieovy algebry $\mathfrak{X}(G)$ tvořenému levo-invariantními vektorovými poli. Izomorfismus přiřadí každému $x \in \mathfrak{g}$ příslušné levo-invariantní vektorové pole x^L definované jako

$$x^L|_g = L_{g*}(x) \equiv [T_e(L_g)](x). \tag{2.48}$$

Platí $x^L|_e = x$. Jelikož x^L je vektorové pole jako každé jiné, existují i jeho **integrální křivky**. Jeho integrální křivka $\gamma : \mathbb{R} \to G$ startující v $t = 0$ z bodu e se označuje jako $\gamma(t) \equiv \exp(tx)$, tj.

$$\exp(0 \cdot x) = e, \quad \frac{d}{dt} \exp(tx) = x^L|_{\exp(tx)}. \tag{2.49}$$

Zejména platí, že x je tečné k $\exp(tx)$ v $t = 0$, tj. $x = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \exp(tx)$.

Intuitivně je následující myšlenka velmi jednoduchá. Zvolím si libovolný bod $m \in P$ a libovolný element $x \in \mathfrak{g}$. Ten je tečný ke křivce $\exp(tx)$. Pro každé t se podívám, jak prvek $\exp(tx)$ zapůsobí na bod m, tedy na bod $m \cdot \exp(tx)$. To mi ale definuje novou křivku $t \mapsto m \cdot \exp(tx)$, tentokrát „namalovanou“ ve varietě P. A já se podívám na její tečnu v bodě m, tj. pro $t = 0$. Tím definuji tečný vektor v $T_m P$:

$$\#x|_m := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} m \cdot \exp(tx). \tag{2.50}$$

Tento postup zopakuji pro každý bod $m \in M$ a dostanu tedy vektorové pole $\#x$. Je to hladké vektorové pole, protože zobrazení $\phi^{\#x} : \mathbb{R} \times M \to M$ definované jako $\phi^{\#x}(t, m) = m \cdot \exp(tx)$ je hladké v m a splňuje všechny vlastnosti toku vektorového pole. Je jasné, že $\phi^{\#x}$ je tokem $\#x$.

Definice 2.4.1. Pro každé $x \in \mathfrak{g}$, $\#x$ se nazývá **fundamentální vektorové pole** prvku x.

Přiřazení fundamentálního vektorového pole $x \mapsto \#x$ můžeme interpretovat jako zobrazení $\# : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$. Často se nazývá **infinitesimální generátor akce** R. Nyní ukážeme, že toto zobrazení má několik zásadních vlastností.

Tvrzení 2.4.2. *Zobrazení* $\# : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$ *je lineární. Pro každé* m *definuje lineární zobrazení* $\#_m : \mathfrak{g} \to T_m P$. *Vlastnosti tohoto zobrazení odráží lokální vlastnosti akce* R*:*

(i) Je-li $G_m = \{e\}$, *je* $\#_m$ *monomorfismus.*

(ii) Existuje-li otevřené okolí bodu m, *kde je akce* R *tranzitivní, je* $\#_m$ *epimorfismus.*

Důkaz. Připomeňme si orbitové zobrazení $R^{(m)} : G \to P$ definované jako $R^{(m)}(g) = R(m, g) = m \cdot g$. Potom můžeme psát

$$\#_m(x) = \#x|_m = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} m \cdot \exp(tx) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} R^{(m)}(\exp(tx)) = R_*^{(m)}(x) \equiv (T_e R^{(m)})(x). \tag{2.51}$$

Ale $R_*^{(m)} : \mathfrak{g} \equiv T_e G \to T_m P$ je jako každý push-forward lineární zobrazení. Tedy $\#|_m$ je lineární.

Nyní ad (i): Za těchto předpokladů je zobrazení $R^{(m)}$ injektivní. Nechť $\#_m(x) = 0$. S využitím toho, že $R^{(m)}(gh) = R^{(m)}(g) \cdot h$ dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R^{(m)}(\exp(tx)) &= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} R^{(m)}(\exp((s+t)x)) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} R^{(m)}(\exp(sx) \cdot \exp(tx)) \\ &= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} R_{\exp(tx)}(m \cdot \exp(sx)) = R_{\exp(tx)*}(\#_m(x)) = 0. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Odtud vidím, že $R^{(m)}(\exp(tx)) = R^{(m)}(e)$ pro každé $t \in \mathbb{R}$. Z injektivity $\exp(tx) = e$ pro všechny $t \in \mathbb{R}$. Odtud ale $x = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \exp(tx) = 0$. A tedy $\#_m$ je injektivní.

Ad (ii): Nechť R je tranzitivní na okolí $V \ni m$. Potom $H = (R^{(m)})^{-1}(V)$ je otevřená množina splňující, že $R^{(m)}(H) = V$, a tedy $R^{(m)} : H \to V$ je tedy surjektivní hladké zobrazení. Protože $R^{(m)}$ je ekvivariantní, jeho tečné zobrazení $T_h R^{(m)}$ má stejnou hodnost pro každé $h \in H$. Ze surjektivity ale už (netriviálně) plyne, že $T_h R^{(m)}$ má maximální hodnost, tedy je surjektivní pro každé $h \in H$. To platí zejména pro $\#_m \equiv T_e R^{(m)}$. ■

Důsledek 2.4.3. *Nechť* $\pi : P \to M$ *je hlavní fibrovaný prostor s pravou akcí* R. *Potom je pro každé* $p \in P$ *zobrazení* $\#_p : \mathfrak{g} \to T_p P$ *monomorfní.*

Orbity akce R *jsou vložené podvariety vláken* $\pi^{-1}(m)$. *Potom pro každé* $p \in P$ *a* $m = \pi(p)$, $\#_p : \mathfrak{g} \to T_p(\pi^{-1}(m))$ *je lineární izomorfismus, tj. tečné prostory k vláknům jsou kanonicky izomorfní* $\mathfrak{g}$.

Důkaz. První tvrzení je zřejmé, protože akce R je volná a zbytek plyne z (i). Protože vlákna jsou vložené podvariety a orbity akce R, můžeme akci zúžit na ně. Tam je akce volná a navíc i tranzitivní. Fundamentální vektorová pole jsou tedy tečná k vláknům a jelikož je podél nich akce tranzitivní, z tvrzení (ii) vyplývá, že je $\#|_p : \mathfrak{g} \to T_p(\pi^{-1}(m)) \subseteq T_p P$ je surjektivní. ■

Jelikož jak $\mathfrak{g}$ tak $\mathfrak{X}(P)$ mají přirozenou strukturu Lieovy algebry, můžeme se ptát, jak moc $\#$ respektuje tuto přidanou strukturu. Nejprve si ale musíme připomenou následující pojem.

Definice 2.4.4. Nechť M a N jsou libovolné hladké variety, $\varphi : M \to N$. Nechť $X \in \mathfrak{X}(M)$ a $Y \in \mathfrak{X}(N)$ jsou hladká vektorová pole. Řekneme, že X a Y jsou **φ-vztažená**[1], pokud

$$\varphi_*(X|_m) = Y|_{\varphi(m)}. \tag{2.53}$$

Píšeme $X \sim_\varphi Y$.

Analýzou odpovídajících lokálních toků lze snadno odvodit následující tvrzení:

Lemma 2.4.5. *Nechť $\varphi : M \to N$ jako v předchozí definici. Nechť $X \sim_\varphi Y$ a $X' \sim_\varphi Y'$. Potom*

$$[X, X'] \sim_\varphi [Y, Y']. \tag{2.54}$$

Explicitně řečeno, pro každé $m \in M$ platí $\varphi_*([X, X']|_m) = [Y, Y']|_{\varphi(m)}$.

S využitím tohoto pozorování je jednoduché dokázat následující důležité tvrzení:

Tvrzení 2.4.6 (Infinitesimální generátor je homomorfismus)**.** *Nechť $R : P \times G \to P$ je pravá akce Lieovy grupy G na varietě P. Potom zobrazení $\# : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$ je homomorfismus Lieových algeber, tj. pro každé $x, y \in \mathfrak{g}$ platí rovnost*

$$[\#x, \#y] = \#[x, y]_{\mathfrak{g}}. \tag{2.55}$$

Důkaz. Důkaz je přímou aplikací lemmatu 2.4.5. Nechť $m \in P$ je fixní bod, a nechť $R^{(m)} : G \to M$ je orbitové zobrazení příslušné akci R. Nechť $x \in \mathfrak{g}$ a $x^L \in \mathfrak{X}(G)$. Potom $x^L \sim_{R^{(m)}} \#x$:

$$\begin{aligned} R^{(m)}_*(x^L|_g) = {} & \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} R^{(m)}(g \exp(tx)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} m \cdot (g \exp(tx)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (m \cdot g) \cdot \exp(tx) \\ = {} & \#x|_{m \cdot g} = \#x|_{R^{(m)}(g)}. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Pro libovolné $x, y \in \mathfrak{g}$, $m \in P$ a $g \in G$ tedy dostáváme relaci

$$R^{(m)}_*([x^L, y^L]|_g) = [\#x, \#y]|_{m \cdot g}. \tag{2.57}$$

Dosazením $g = e$ poté uvidíme přesně rovnost (2.55). ∎

Z definice fundamentálních vektorových polí lze očekávat zajímavé chování vůči translacím příslušné akce. Připomeňme si definici **adjungované reprezentace**. Pro každé $g \in G$ máme příslušnou konjugaci $I_g : G \to G$. Platí $I_g(e) = e$. Jelikož $\mathfrak{g} = T_e G$, příslušné tečné zobrazení I_{g*} definuje lineární izomorfismus Lieovy algebry $\mathfrak{g}$. Definujeme $Ad_g(x) := I_{g*}(x)$. Platí

$$Ad_g(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} I_g(\exp(tx)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g \exp(tx) g^{-1}. \tag{2.58}$$

Zároveň ale platí (jako pro každý element $\mathfrak{g}$) rovnice $Ad_g(x) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \exp(tAd_g(x))$. Z jednoznačnosti maximálních integrálních křivek vektorových polí potom plyne následující lemma:

Lemma 2.4.7. *Pro všechny $g \in G$, $x \in \mathfrak{g}$ a $t \in \mathbb{R}$ platí rovnost*

$$\exp(tAd_g(x)) = g \exp(tx) g^{-1}. \tag{2.59}$$

[1] Někdy též φ-příbuzná.

S využitím tohoto pozorování je již snadné dokázat následující (klíčové) tvrzení:

Tvrzení 2.4.8. *Nechť $R : P \times G \to P$ je pravá akce Lieovy grup G na P a $\# : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$ je příslušný infinitesimální generátor. Potom pro každé $g \in G$ a $x \in \mathfrak{g}$ platí*

$$R_{g*}(\#x) = \#(Ad_{g^{-1}}(x)). \tag{2.60}$$

Důkaz. Nejprve si zapišme (2.60) v každém bodě $m \in P$. Máme ukázat, že

$$R_{g*}(\#x|_m) = \#(Ad_{g^{-1}}(x))|_{m\cdot g}. \tag{2.61}$$

Začněme přímočarým výpočtem z levé strany.

$$\begin{aligned} R_{g*}(\#x|_m) = {} & \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} R_g(m\cdot \exp(tx)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (m\cdot\exp(tx))\cdot g \\ = {} & \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (m\cdot g)\cdot(g^{-1}\exp(tx)g) \\ = {} & \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (m\cdot g)\cdot(Ad_{g^{-1}}(x)) = \#(Ad_{g^{-1}}(x))|_{m\cdot g}. \end{aligned} \tag{2.62}$$

A je to dokázáno, a je to hotovo. ■

Cvičení 2.4.9. *Nalezněte modifikaci tvrzení 2.4.6 a 2.4.8 pro* levé akce Lieových grup.

Příklad 2.4.10 (Fundamentální vektorová pole na hlavní fibraci repérů)**.** Nechť $P = F(M)$ a $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Zavedeme si nejprve lokální souřadnice na totálním prostoru $F(M)$.

Připomeňme, že lokální trivializaci jsme zavedli s pomocí souřadnic $(U, (x^1, \dots, x^n))$, přičemž trivializační zobrazení $\phi : U \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \pi^{-1}(U)$ jsme zavedli jako $\phi(m, \mathbf{A}) = \partial|_m \cdot \mathbf{A}$, kde $\partial|_m = (\partial_1|_m, \dots, \partial_n|_m) \in \mathcal{E}(T_mM)$ je báze souřadnicových tečných vektorů. Každý bod (bázi nějakého tečného prostoru) $e \in \pi^{-1}(U)$ tedy můžeme jednoznačně popsat pomocí bodu m a matice $\mathbf{A}$, že $e = \partial|_m \cdot \mathbf{A}$.

Standardní báze $\{E^b_a\}^n_{a,b=1}$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^{n,n}$ matic $n \times n$ se zavede vztahem

$$(E^a_b)^i_j = \delta^a_j \delta^i_b, \tag{2.63}$$

tj. E^a_b je matice co má nuly všude kromě jedničky v průsečíku b-tého řádku a a-tého sloupečku. Potom matici $\mathbf{A}$ můžeme napsat jako $\mathbf{A} = \mathbf{A}^b_a E^a_b$. Vskutku, máme $\mathbf{A}^i_j = \mathbf{A}^b_a (E^a_b)^i_j$. Pro prvek $e = \partial|_m \cdot \mathbf{A}$ definujeme souřadnicové funkce $x^i : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ a $y^a_b : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ jako

$$x^i(e) := x^i(m), \quad y^a_b(e) := \mathbf{A}^a_b. \tag{2.64}$$

Souřadnicové funkce $x^i : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ a $x^i : U \to \mathbb{R}$ se standardně označují stejným symbolem, přestože jde o funkce na *jiných varietách*. Často budeme psát $y(e) \equiv y^a_b(e) E^b_e$. Snadno se ověří, že $(x^1, \dots, x^n, y^1_1, \dots, y^n_n)$ tvoří lokální souřadnice na $\pi^{-1}(U)$.

Pojďme si spočítat fundamentální vektorová pole pravé akce $R : F(M) \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to F(M)$. Připomeňme, že $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \doteq \mathbb{R}^{n,n}$. Každý element $x \in \mathfrak{g}$ lze tedy zapsat jako $x = x^a_b E^b_a$. Jelikož $\#$ je lineární, stačí spočítat $\#E^a_b$. Nechť $e \in F(M)$ je libovolný bod. Potom

$$\#E^a_b|_e = V^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_e + W^c_d \left.\frac{\partial}{\partial y^d_c}\right|_e , \tag{2.65}$$

kde V^i a W^c_d se vypočítají (z definice) jako

$$V^i = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} x^i(e \cdot \exp(tE^a_b)), \;\; W^c_d = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} y^c_d(e \cdot \exp(tE^a_b)). \tag{2.66}$$

Jelikož akce působí podél vláken, nemění bod ve kterém se báze nachází. A tedy $V^i = 0$. Pro výpočet druhé komponenty, výraz v závorkách můžeme přepsat jako

$$e \cdot \exp(tE^a_b) = \partial|_m \cdot y(e) \cdot \exp(tE^a_v) = \partial|_m \cdot (\{y(e) \cdot \exp(tE^a_b)\}^k_l E^l_k). \tag{2.67}$$

Z definice souřadnicových funkcí tedy dostáváme výraz

$$y^c_d(e \cdot \exp(tE^a_b)) = \{y(e) \cdot \exp(tE^a_b)\}^c_d \tag{2.68}$$

Derivací v $t = 0$ a s využitím toho, že $\exp(tE^a_b)$ je opravdická maticová exponenciála, dostáváme

$$W^c_d = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \{y(e) \cdot \exp(tE^a_b)\}^c_d = \{y(e) \cdot E^a_b\}^c_d = y^c_k(e)(E^a_b)^k_d = \delta^a_d y^c_b(e). \tag{2.69}$$

Nyní jen zbývá dosadit tyto koeficienty a dostaneme

$$\#E^a_b|_e = (\delta^a_d y^c_b(e)) \cdot \frac{\partial}{\partial y^c_d}\bigg|_e = y^c_b(e) \cdot \frac{\partial}{\partial y^a_c}\bigg|_e. \tag{2.70}$$

Pro zpřehlednění znační budeme používat označení $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ a $\partial^a_b = \frac{\partial}{\partial y^b_a}$. Pečlivě si všímejte polohy indexů v druhé definici. Potom lze psát $\#E^a_b$ (bez indikace konkrétního bodu) jako

$$\#E^a_b = y^c_b \cdot \partial^a_c, \text{ a tedy pro } x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \text{ obecně jako } \#x = x^b_a \#E^a_b = x^b_a\, y^c_b \cdot \partial^a_c. \tag{2.71}$$

Cvičení 2.4.11. *Ověřte explicitním výpočtem, že pro fundamentální pole $\#x$ z předchozího příkladu platí tvrzení 2.4.6 a 2.4.8.*

Pro obecnou akci Lieovy grupy poskytují fundamentální vektorová pole důležité informace o samotné akci. Pro topologicky dostatečně hezké Lieovy grupy G (souvislé a jednoduše souvislé) dokonce kódují celou akci, z pouhé znalosti zobrazení $\#$ lze rekonstruovat celou akci R. Pro naše účely, tj. pro studium hlavních fibrovaných prostorů však plní další užitečnou funkci. V každém bodě totiž generují následující význačný podprostor tečného prostoru totálního prostoru P.

Definice 2.4.12. Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor se strukturní grupou G. Pro každé $p \in P$ definujeme **vertikální tečný podprostor**, jehož elementy nazýváme **vertikální vektory**, jako jádro tečného zobrazení k projekci, tj.

$$\mathrm{Ver}_p(P) = \{X \in T_pP \mid \pi_*(X) = 0\} \equiv \ker(T_p\pi). \tag{2.72}$$

Jelikož π je vždy hladká submerze, máme $\dim(\mathrm{Ver}_p(P)) = \dim P - \dim M$.

Jelikož jednotlivá vlákna $P_m \equiv \pi^{-1}(m)$ jsou vložené podvariety P definované jako vzory jednotlivých bodů báze M (tvz. „level sets“), dá se snadno nahlédnout, že pro každé $p \in P_m$ platí $T_p(P_m) = \ker(T_p\pi) = \mathrm{Ver}_p(P)$. Geometricky je tedy $\mathrm{Ver}_p(P)$ tvořen tečnými vektory, které jsou v daném bodě *p tečné k vláknu fibrace*. V kombinaci s důsledkem 2.4.3 dostáváme následující důležité tvrzení.

Tvrzení 2.4.13. *Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor s akcí R. Nechť $\#$ je infinitesimální generátor R. Potom pro každé $p \in P$, zobrazení $\#_p : \mathfrak{g} \to \mathrm{Ver}_p(P)$ je lineární izomorfismus.*

Definice 2.4.14. Nechť $X \in \mathfrak{X}(P)$ je hladké vektorové pole. Řekneme, že X je **vertikální**, je-li $X|_p \in \mathrm{Ver}_p(P)$ pro všechny $p \in P$.

Upozornění: není pravda, že obecně $X = \#x$ pro nějaké $x \in \mathfrak{g}$. Existují ale unikátní hladké funkce $X^\mu \in C^\infty(P)$, že $X = X^\mu \cdot \#t_\mu$, kde $\{t_\mu\}_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ je libovolná báze $\mathfrak{g}$.

Vertikální podprostor má další význačnou vlastnost. Tečné zobrazení k pravé akci zobrazuje vertikální vektory na vertikální, všechny vertikální podprostory podél jednoho vlákna jsou kanonicky izomorfní. Toto je tvrzením následujícího lemmatu:

Lemma 2.4.15. *Pro libovolné $p \in P$ a $g \in G$ platí $R_{g*}(\mathrm{Ver}_p(P)) = \mathrm{Ver}_{p\cdot g}(P)$.*

Důkaz. Tvrzení snadno plyne z vlastnosti $\pi \circ R_g = \pi$. Potom pro $X \in \mathrm{Ver}_p(P)$ platí

$$\pi_*(R_{g*}(X)) = (\pi \circ R_g)_*(X) = \pi_*(X) = 0. \tag{2.73}$$

Odtud plyne inkluze $R_{g*}(\mathrm{Ver}_p(P)) \subseteq \mathrm{Ver}_{p\cdot g}(P)$. Opačná inkluze se ukáže podobně snadno. Pro $Y \in \mathrm{Ver}_{p\cdot g}(P)$ můžeme psát $Y = R_{g*}(R_{g^{-1}*}(Y))$, kde $R_{g^{-1}*}(Y)) \in \mathrm{Ver}_p(P)$ podle již dokázané inkluze. ■

Kapitola 3

Forma konexe

3.1 Formy s hodnotami ve vektorovém prostoru

Při práci s hlavními fibrovanými prostory často narazíme na diferenciální formy, jejichž hodnoty na vektorová pole nejsou hladké funkce do reálných čísel, ale hladké funkce s hodnotami v konečně-rozměrném vektorovém prostoru. Některé ze standardních operací na obyčejných diferenciálních formách lze snadno rozšířit na tuto větší třídu, některé ne.

Definice 3.1.1. Nechť M je hladká varieta. Je-li V libovolný konečně-rozměrný vektorový prostor, řekneme, že ω je **diferenciální p-forma s hodnotami ve V**, je-li

$$\omega : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{p \text{ krát}} \to C^\infty(M, V) \tag{3.1}$$

totálně antisymetrické zobrazení, které je $C^\infty(M)$-lineární v každém vstupu. $C^\infty(M, V)$ označuje modul hladkých funkcí z M do V. Označme prostor takových forem jako $\Omega^p(M, V)$.

Poznámka 3.1.2. Pro $V = \mathbb{R}$ dostaneme prostor obyčejných diferenciálních forem na M.

Podobně jako v případě obyčejných forem můžeme formu „vyčíslit“ v každém bodě $m \in M$. V tomto případě dostáváme p-lineární totálně antisymetrické zobrazení: $\omega|_m : (T_m M)^p \to V$. Ve skutečnosti má prostor $\Omega^p(M, V)$ velmi jednoduchou strukturu. Nechť $\{E_\mu\}_{\mu=1}^{\dim V}$ je libovolná báze vektorového prostoru V. Potom můžeme psát

$$\omega(X_1, \ldots, X_p) = \omega^\mu(X_1, \ldots, X_p) E_\mu. \tag{3.2}$$

Snadno se ověří, že $\omega^\mu \in \Omega^p(M, \mathbb{R}) \equiv \Omega^p(M)$ jsou obyčejné tzv. **komponentní p-formy**. Každou formu $\omega \in \Omega^p(M, V)$ tedy můžeme psát (pro danou bázi jednoznačně) jako $\omega = \omega^\mu E_\mu$.

Tento zápis můžeme používat k zobecnění známých operací na diferenciálních formách:

Definice 3.1.3. Vnější derivace, vnitřní součin a Lieova derivace se definují jako:

$$d\omega = (d\omega^\mu) E_\mu, \quad i_V \omega = (i_V \omega^\mu) E_\mu, \quad \mathcal{L}_V \omega = (\mathcal{L}_V \omega^\mu) E_\mu \tag{3.3}$$

Nechť $A \in \mathrm{End}(V)$ Potom můžeme definovat působení A na $\Omega^p(M, V)$ jako

$$A(\omega) = \omega^\mu A(E_\mu). \tag{3.4}$$

Cvičení 3.1.4. *Ujasněte si, že výše zmíněné definice nezávisí na výběru báze $\{E_\mu\}$ a definují tedy kanonické operace na prostoru forem s hodnotami ve V.*

Pro obecný prostor V neexistuje jednoduchý způsob, jak definovat analog vnějšího součinu. Obecně totiž neumíme z dvojice vektorů ve V vyrobit jeden, a to „bilineárním způsobem“. Pochopitelně existuje situace, kdy to umíme.

Definice 3.1.5. Nechť je V je zároveň algebra, tj. existuje bilineární zobrazení $\cdot : V \times V \to V$. Potom na $\Omega^p(M, V)$ můžeme definovat **vnější součin** předpisem

$$\omega \mathbin{\dot\wedge} \tau = \omega^\mu \wedge \tau^\nu (E_\mu \cdot E_\nu) \tag{3.5}$$

Cvičení 3.1.6. *Ověřte, že definice je nezávislá od výběru báze. Ujasněte si, že pro obecnou algebru není $\dot\wedge$ ani asociativní ani gradovaně antisymetrický.*

Příklad 3.1.7. Ukažme si dva typické příklady kde lze říct něco víc o součinu $\dot\wedge$.

(i) Součin $\cdot$ je asociativní. Potom i $\dot\wedge$ je asociativní. Není-li pochyb o algebře použité ve V, vynecháváme tečku.

Není však gradovaně antisymetrický. To platí pouze pro případ, kdy je $\cdot$ komutativní součin. To je důvod proč vše funguje pro $V = \mathbb{R}$, kde máme komutativní asociativní součin.

(ii) $V = \mathfrak{g}$ je Lieova algebra se závorkou $[\cdot, \cdot]_\mathfrak{g}$. V tomto případě se používá značení

$$[\omega \wedge \tau]_\mathfrak{g} \equiv \omega^\mu \wedge \tau^\nu [E_\mu, E_\nu]_\mathfrak{g} \tag{3.6}$$

Součin $[\cdot \wedge \cdot]_\mathfrak{g}$ není asociativní, ale můžeme říct něco o výsledku prohození obou vstupujících forem. Pro $\omega \in \Omega^p(M, \mathfrak{g})$ a $\tau \in \Omega^q(M, \mathfrak{g})$ dostáváme

$$\begin{aligned}[\omega \wedge \tau]_\mathfrak{g} &= \omega^\mu \wedge \tau^\nu [E_\mu, E_\nu]_\mathfrak{g} = (-1)^{pq} \tau^\nu \wedge \omega^\mu [E_\mu, E_\nu]_\mathfrak{g} = (-1)^{pq+1} \tau^\nu \wedge \omega^\mu [E_\nu, E_\mu]_\mathfrak{g} \\ &= (-1)^{pq+1} [\tau \wedge \omega]_\mathfrak{g}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Vidíme, že platí jistá forma gradované antisymetrie, která se ale liší o celkové znaménko! Na rozdíl od běžných forem například pro $\omega \in \Omega^{2k+1}(M, \mathfrak{g})$ obecně neplatí $[\omega \wedge \omega]_\mathfrak{g} = 0$.

Cvičení 3.1.8. *Nalezněte pravidlo pro působení vnější derivace d na vnější součin $\omega \mathbin{\dot\wedge} \tau$.*

3.2 Formy afinní konexe

Nyní si ukážeme, že Christofellovy symboly druhého druhu pro afinní konexe na varietě M lze užitečně interpretovat jako komponenty komponentních forem jistých forem.

Definice 3.2.1. Nechť M je hladká varieta. **Afinní konexí** na M rozumíme $\mathbb{R}$-bilineární zobrazení $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ které pro všechny $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ a $f \in C^\infty(M)$ splňuje

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y, \;\; \nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + (X.f) Y, \tag{3.8}$$

kde $\nabla_X \equiv \nabla(X, \cdot)$ se nazývá **operátor kovariantní derivace ve směru** X.

Nechť $(e_1, \ldots, e_n)$ je libovolné pole repérů definované lokálně na okolí $U \subseteq M$. Připomeňme si, že $e \in \Gamma_U(F(M))$ lze interpretovat jako lokální řez hlavní fibrace repérů. Potom **Christoffelovy symboly druhého druhu** vzhledem k repérovému poli $(e_1, \ldots, e_n)$ jsou hladké funkce na U definované vztahem

$$\nabla_{e_a}(e_b) = \Gamma^c_{ba} e_c \tag{3.9}$$

Nejprve je třeba si uvědomit, že Γ^c_{ba} netvoří komponenty tenzoru. Vskutku, nechť e' je jiné repérové pole definované na U'. Potom platí $e' = e \cdot \mathbf{A}$ pro $\mathbf{A} : U \cap U' \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Po dosazení a využití axiomů (3.8) snadno dostaneme vztah

$$\Gamma'^c_{ba} = (\mathbf{A}^{-1})^c_k \mathbf{A}^i_b \mathbf{A}^j_a \Gamma^k_{ij} + (\mathbf{A}^{-1})^c_k \mathbf{A}^i_a (e_i . \mathbf{A}^k_b). \tag{3.10}$$

Vidíme, že Γ^c_{ba} jsou tenzorové v a a c. To nás vede k definici **lokálních 1-forem konexe**:

$$\hat{\omega}^c_b(X) := \langle e^c, \nabla_X e_b \rangle, \tag{3.11}$$

pro všechny $X \in \mathfrak{X}(M)$. Protože ∇_X je $C^\infty(M)$-lineární v X, jsou $\hat{\omega}^c_b \in \Omega^1(U)$. Z definice platí

$$\hat{\omega}^c_b = \Gamma^c_{ba} e^a \tag{3.12}$$

Upozornění: součástí definice $\hat{\omega}^c_b$ je vždy i konkrétní lokální repérové pole $(e_1, \ldots, e_n)$. Pokud $\hat{\omega}'^c_b$ jsou lokální 1-formy konexe příslušné repérovému poli $(e'_1, \ldots, e'_n)$, dostáváme vztah

$$\begin{aligned} \hat{\omega}'^c_b &= (\mathbf{A}^{-1})^c_k \, \hat{\omega}^k_i \, \mathbf{A}^i_b + (\mathbf{A}^{-1})^c_k (e_i . \mathbf{A}^k_b) e^i \\ &= (\mathbf{A}^{-1})^c_k \, \hat{\omega}^k_i \, \mathbf{A}^i_b + (\mathbf{A}^{-1})^c_k \, d\mathbf{A}^k_b. \end{aligned} \tag{3.13}$$

platný na průniku $U \cap U'$. Vidíme, že relace připomínají součiny matic. Proč z toho tedy skutečné součiny matic neudělat? Nechť $\{E^b_a\}^n_{a,b=1}$ je standardní báze $\mathbb{R}^{n,n} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Definujeme (jednu) **lokální 1-formu konexe** $\hat{\omega} \in \Omega^1(U, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ vztahem

$$\hat{\omega} = \hat{\omega}^c_b E^c_b. \tag{3.14}$$

Jinými slovy, $\hat{\omega}^c_b$ tvoří komponentní 1-formy $\hat{\omega}$. Samotnou transformační funkci $\mathbf{A} : U \cap U' \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ lze interpretovat jako 0-formu s hodnotami v $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, tj. $\mathbf{A} = \mathbf{A}^c_b E^b_c$, a tedy $\mathbf{A} \in \Omega^0(U \cap U', \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}))$. Potom lze transformační vztah (3.13) přepsat jednoduše jako

$$\hat{\omega}' = \mathbf{A}^{-1} \hat{\omega} \mathbf{A} + \mathbf{A}^{-1} d\mathbf{A}. \tag{3.15}$$

Zatím vypadá přepis globálně definované kovariantní derivace do lokálně definovaných objektů $\hat{\omega}$ jako čistý formalismus, byť umíme přepsat transformační vlastnosti Christoffelových symbolů pomocí elegantní rovnice. To se však změní ze zavedení **lokálních forem křivosti a torze**:

$$\hat{\Omega}^c_d(X, Y) = \langle e^c, R(X, Y) e_d \rangle, \;\; \hat{T}^c(X, Y) = \langle e^c, T(X, Y) \rangle. \tag{3.16}$$

Z kterých opět uděláme formy s hodnotami ve vektorových prostorech. Nechť $\{E_a\}^n_{a=1}$ je standardní báze v $\mathbb{R}^n$. Potom $\hat{\Omega} \in \Omega^2(U, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ a $\hat{T} \in \Omega^2(U, \mathbb{R}^n)$ definujeme vztahem:

$$\hat{\Omega} = \hat{\Omega}^c_d E^d_c, \;\; \hat{T} = \hat{T}^c E_c. \tag{3.17}$$

Jelikož R a T jsou z definice tenzory, snadno se odvodí transformační pravidla

$$\hat{\Omega}' = \mathbf{A}^{-1} \hat{\Omega} \mathbf{A}, \;\; \hat{T}' = \mathbf{A}^{-1} \hat{T}, \tag{3.18}$$

kde na pravé straně matice $\mathbf{A}^{-1}$ působí na sloupečky v $\mathbb{R}^n$, kde má hodnoty forma $\hat{T}$. Vztahy mezi konexí ∇ a jejími tenzory křivosti R a torze T se dají velmi elegantně zapsat pomocí příslušných lokálních forem.

Tvrzení 3.2.2 (Cartanovy strukturní rovnice)**.** *Nechť* $(e_1, \dots, e_n)$ *je pole repérů na* U*, a nechť* $\hat{\omega}$ *jsou odpovídající lokální formy konexe na* U*. Potom platí rovnice*

$$\hat{\Omega}^a_b = d\hat{\omega}^a_b + \hat{\omega}^a_c \wedge \hat{\omega}^c_b \tag{3.19}$$

$$\hat{T}^a = de^a + \hat{\omega}^a_b \wedge e^b, \tag{3.20}$$

kde $\{e^a\}_{a=1}^n \subseteq \Omega^1(U)$ *je odpovídající duální repérové pole. Můžeme definovat* $e^\# \in \Omega^1(U, \mathbb{R}^n)$ *vztahem* $e^\# = e^a E_a$ *a obě rovnice přepsat v řeči forem s hodnotami ve vektorovém prostoru:*

$$\hat{\Omega} = d\hat{\omega} + \hat{\omega} \wedge \hat{\omega}, \tag{3.21}$$

$$\hat{T} = de^\# + \hat{\omega} \wedge e^\#. \tag{3.22}$$

Důkaz. Dokážeme si jen druhou z rovnic, první rovnici lze ukázat úplně analogicky s pomocí definice operátoru křivosti R. Abychom dokázali rovnici číslo dvě, použijeme standardní formulku pro vnější derivaci a vyjdeme z pravé strany:

$$\begin{aligned} de^a(X,Y) &= X.e^a(Y) - Y.e^a(X) - e^a([X,Y]) \\ &= \langle \nabla_X e^a, Y \rangle - \langle \nabla_Y e^a, X \rangle \\ &\quad + e^a(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]), \end{aligned} \tag{3.23}$$

kde jsme použili definici kovariantní derivace 1-formy: $\langle \nabla_X \alpha, Y \rangle = X.\langle \alpha, Y \rangle - \alpha(\nabla_X Y)$. Nyní si stačí uvědomit, že kovariantní derivace e^a lze vyjádřit pomocí lokálních forem konexe jako

$$\nabla_X e^a = -\hat{\omega}^a_b(X) e^b. \tag{3.24}$$

To lze snadno uvidět třeba z vyjádření kovariantní derivace 1-formy pomocí Christoffelových symbolů. Po dosazení tedy dostáváme

$$de^a(X,Y) = -\hat{\omega}^a_b(X) e^b(Y) + \hat{\omega}^a_b(Y) e^b(X) + \hat{T}^a(X,Y). \tag{3.25}$$

Toto je ale přesně kýžená Cartanova strukturní rovnice. ∎

Proč jsou tyto rovnice užitečné? Okamžitě vidím, že musí existovat nějaké důsledky těchto rovnic, protože $d^2 = 0$. Jejich odvození je triviální, přesto mají zásadní důsledky pro obecnou teorii relativity.

Důsledek 3.2.3 (Bianchiho identity)**.** *Pro libovolnou konexi* ∇ *platí* ***Bianchiho identity:***

$$d\hat{\Omega} + \hat{\omega} \wedge \hat{\Omega} - \hat{\Omega} \wedge \hat{\omega} = 0 \tag{3.26}$$

$$\hat{\Omega} \wedge e^\# - \hat{\omega} \wedge \hat{T} = d\hat{T}. \tag{3.27}$$

Důkaz. Ukážeme si jen první z rovnic, druhá je analogická. Z první z Cartanových strukturních rovnic dostáváme zapůsobením d a využitím $d^2 = 0$ rovnici

$$\begin{aligned} d\hat{\Omega} &= d(\hat{\omega} \wedge \hat{\omega}) = d\hat{\omega} \wedge \hat{\omega} - \hat{\omega} \wedge d\hat{\omega} = (\hat{\Omega} - \hat{\omega} \wedge \hat{\omega}) \wedge \hat{\omega} - \hat{\omega} \wedge (\hat{\Omega} - \hat{\omega} \wedge \hat{\omega}) \\ &= \hat{\Omega} \wedge \hat{\omega} - \hat{\omega} \wedge \hat{\Omega}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

To je ale přesně první z rovnic nahoře. ∎

Na první pohled nepřipomínají nic známého, ale název napovídá, že odpovídají známým identitám pro Riemannovy tenzory křivostí. První z nich platí pro libovolnou konexi:

$$R_{ab[cd;e]} = 0. \tag{3.29}$$

Druhá se zjednoduší pro konexe s nulovou torzí a dává $R_{a[bcd]} = 0$.

3.3 Forma konexe na hlavním fibrovaném prostoru

V této sekci si definujeme fundamentální objekt teorie hlavních fibrovaných prostorů, tzv. formu konexe. Jelikož její definice může na první pohled vypadat neprůhledně, budeme si její vlastnosti v první řadě demonstrovat na příkladu $P = F(M)$.

Nechť $(f_1, \ldots, f_n) \in \Gamma_U(F(M))$ je pole repérů na okolí U. Nechť $\pi : F(M) \to M$ je hlavní fibrace repérů. Na $\pi^{-1}(U) \subseteq F(M)$ můžeme zavést funkce $y^a_b : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ podobně jsme zaváděli lokální souřadnice (označené stejně), tj. každý bod $e \in \pi^{-1}(U)$ odpovídající bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ v tečném prostoru $T_m M$ pro $m = \pi(e)$ lze nakombinovat jako

$$e_a = y^b_a(e) \cdot (f_b)|_m. \tag{3.30}$$

Snadno se ověří, že $y^a_b : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ jsou hladké funkce, můžeme je používat jako lokální souřadnice na $F(M)$ společně se souřadnicemi na okolí v U v bázové varietě $(x^1, \ldots, x^n)$.

Nechť ∇ je afinní konexe na M a $\hat{\omega} \in \Omega^1(U, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ je lokální forma konexe příslušná poli repérů $(f_1, \ldots, f_n)$. Definujeme si nyní lokální 1-formu ω nahoře, tj. na $\pi^{-1}(U) \subseteq F(M)$ jako

$$\omega^a_b|_e = (y^{-1})^a_c(e) \cdot \pi^*(\hat{\omega}^c_d)|_e \cdot y^d_b(e) + (y^{-1})^a_c(e) \cdot dy^c_b|_e, \tag{3.31}$$

kde y^a_b jsou funkce definované pomocí (3.30). Klíčové je nyní následující pozorování.

Tvrzení 3.3.1. *Nechť $(f'_1, \ldots, f'_n)$ je libovolné jiné pole repérů na okolí U', a nechť $\hat{\omega}'$ je příslušná lokální forma konexe. Je-li $\omega' \in \pi^{-1}(U')$ definovaná jako (3.31). Potom na $\pi^{-1}(U \cap U')$ platí*

$$\omega' = \omega. \tag{3.32}$$

Zejména nezávisí na konkrétním výběru pole repérů při konstrukci ω. Jelikož definičními obory lokálních řezů můžeme pokrýt M, dostáváme $\omega \in \Omega^1(F(M), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$, tzv. ***globální formu afinní konexe*** *.*

Důkaz. Na $U \cap U'$ dostáváme $\mathbf{A} : U \cap U' \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, že $f'|_m = f|_m \cdot \mathbf{A}(m)$ pro všechny $m \in U \cap U'$. Potom dostáváme vztah

$$e = f|_m \cdot y(e) = f'|_m \cdot y'(e) = f|_m \cdot \mathbf{A}(m) \cdot y'(e). \tag{3.33}$$

Odtud tedy $y(e) = \mathbf{A}(\pi(e)) \cdot y'(e)$ pro všechny $e \in \pi^{-1}(U \cap U')$. Nyní už můžeme dosadit:

$$\begin{aligned}
\omega|_e &\equiv y^{-1}(e) \cdot \pi^*(\hat{\omega}|_{\pi(e)}) \cdot y(e) + y^{-1}(e) \cdot dy|_e \\
&= y'^{-1}(e) \cdot \pi^*((\mathbf{A}^{-1}\hat{\omega}\mathbf{A})|_{\pi(e)}) \cdot y'(e) \\
&\quad + y'^{-1}(e) \cdot \mathbf{A}^{-1}(\pi(e)) \cdot d(\mathbf{A}(\pi(e)) \cdot y'(e)) \\
&= y'^{-1}(e) \cdot \pi^*(\{\mathbf{A}^{-1}\hat{\omega}\mathbf{A} + \mathbf{A}^{-1}d\mathbf{A}\}|_{\pi(e)}) \cdot y'(e) \\
&\quad + y'^{-1}(e) \cdot dy'|_e \\
&= y'^{-1}(e) \cdot \pi^*(\hat{\omega}'|_{\pi(e)}) \cdot y'(e) + y'^{-1}(e) \cdot dy'|_e \equiv \omega'|_e.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Toto dokazuje naše tvrzení. Je jasné, že můžeme M pokrýt definičními obory lokálních řezů - uvažujme třeba souřadnicová repérová pole. ∎

Není překvapivé, že globálnímu objektu (afinní konexe ∇) nakonec odpovídá globální objekt (místo M na $F(M)$). Můžeme se ptát, jestli jsme neztratili výrobou globálního objektu ω nějaké informace obsažené v $\hat{\omega}$, tj. zdali umíme vyrobit nazpět konexi ∇ z ω. Částečnou odpověď dává následující lemma:

Lemma 3.3.2. *Je-li $f = (f_1, \dots, f_n)$ libovolné lokální pole repérů na okolí $U \subseteq M$, můžeme f interpretovat jako hladký lokální řez $\sigma \in \Gamma_U(F(M))$, tj. $\sigma : U \to F(E)$ s vlastností $\pi \circ \sigma = 1_U$. Zde $\sigma(m) = (f_1|_m, \dots, f_n|_m) \in F_m(M)$. Nechť $\omega \in \Omega^1(F(M), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ je globální forma afinní konexe ∇. Potom $\hat{\omega}$ definované vztahem*

$$\hat{\omega} = \sigma^*(\omega) \tag{3.35}$$

definuje právě lokální formu konexe $\hat{\omega}$ příslušnou repérovému poli $(f_1, \dots, f_n)$.

Důkaz. Jelikož definice ω byla nezávislá od výběru repérového pole, můžeme si vybrat právě to naše odpovídající σ, tj. $\omega|_e = y^{-1}(e) \cdot \pi^*(\hat{\omega}) \cdot y(e) + y^{-1}(e) \cdot dy|_e$, kde $\hat{\omega}$ je lokální forma konexe odpovídající $(f_1, \dots, f_n)$ a $y : \pi^{-1}(U) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ jsou definované (3.30). K výpočtu budeme potřebovat znát zejména hodnotu $y(\sigma(m))$ pro $m \in U$. Ale $y(\sigma(m))$ řeší rovnici

$$f|_m \equiv \sigma(m) = f|_m \cdot y(\sigma(m)). \tag{3.36}$$

Odtud $y(\sigma(m)) = \mathbf{1}$. Zejména tedy $\sigma^*(dy|_{\sigma(m)}) = d(y \circ \sigma)|_m = 0$. Potom dostáváme

$$\sigma^*(\omega|_{\sigma(m)}) = y^{-1}(\sigma(m)) \cdot \sigma^*(\pi^*(\hat{\omega}|_m)) \cdot y(\sigma(m)) = \hat{\omega}|_m. \tag{3.37}$$

Což bylo dokázati pro každý bod $m \in U$. ■

Vidíme tedy, že z formy ω *velice snadno* dostaneme lokální formy konexe v libovolném poli repérů, máme na to přímou formulku. Lokální formy konexe $\equiv$ Christoffelovy symboly v daném poli repérů. Ne každá forma $\omega \in \Omega^1(F(M), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ ovšem odpovídá formě afinní konexe ∇ na M. Nyní si ukážeme dvě její charakteristické vlastnosti, které o tom rozhodují.

Tvrzení 3.3.3 (Charakteristické vlastnosti formy konexe)**.** *Nechť $\omega \in \Omega^1(F(M), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ je (globální) forma afinní konexe sestrojená pomocí (3.31). Potom platí následující:*

(i) Nechť $\#x \in \mathfrak{X}(F(M))$ je fundamentální vektorové pole příslušné $x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ Potom

$$\omega(\#x) = x, \text{ neboli } \omega^a_b(\#x) = x^a_b, \tag{3.38}$$

kde $x = x^a_b E^b_a$ je rozklad do standardní báze.

(ii) Nechť $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, a symbol $R_{\mathbf{A}}(e) = e \cdot \mathbf{A}$ nechť označuje pravou akci. Potom

$$R^*_{\mathbf{A}}(\omega) = \mathbf{A}^{-1} \omega \mathbf{A} \equiv Ad_{\mathbf{A}^{-1}}(\omega). \tag{3.39}$$

Důkaz. Ad (i): Ukázali jsme, že generátor $\#x$ má pro $F(M)$ explicitní tvar

$$\#x|_e = x^a_b \# E^b_a = \#x|_e = x^a_b y^c_a(e) \cdot \partial^b_c|_e. \tag{3.40}$$

Navíc už víme, že generátory generují vertikální podprostor $\mathrm{Ver}_e(F(M))$, tj. $\pi_*(\#x|_e) = 0$. Odtud dostáváme vyjádření

$$\begin{aligned} \omega^a_b(\#x) &= y^a_c \langle \pi^*(\hat{\omega}^c_d), \#x \rangle y^d_b + (y^{-1})^a_c \langle dy^c_b, x^k_l y^m_k \partial^l_m \rangle \\ &= 0 + (y^{-1})^a_c x^k_l y^m_k \delta^c_m \delta^l_b = (y^{-1})^a_c y^c_k x^k_b = x^a_b. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Což je přesně komponentní vyjádření tvrzení (i).

Ad (ii): Tady si stačí uvědomit, že funkce $y : U \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ použité v definici ω jsou ekvivariantní, tj. $y(R_{\mathbf{A}}(e)) = y(e) \cdot \mathbf{A}$ pro každé $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ a $e \in \pi^{-1}(U)$. Pozor - zde $\mathbf{A}$ nejsou funkce, ale fixní invertibilní matice! Potom

$$\begin{aligned} R^*_{\mathbf{A}}(\omega|_{e\cdot\mathbf{A}}) &= y(e \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot R^*_{\mathbf{A}}(\pi^*(\hat{\omega}|_{\pi(e\cdot\mathbf{A})})) \cdot y(e \cdot \mathbf{A}) + y(e \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot R^*_{\mathbf{A}}(dy|_{e\cdot\mathbf{A}}) \\ &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \{y(e)^{-1}\pi^*(\hat{\omega}|_{\pi(e)}) \cdot y(e) \cdot \mathbf{A} + y(e)^{-1} \cdot d(y \circ R_{\mathbf{A}})|_e\}, \end{aligned} \tag{3.42}$$

kde jsme použili $\pi \circ R_{\mathbf{A}} = \pi$. Lze si snadno rozmyslet, že $d(y \circ R_{\mathbf{A}})|_e = dy|_e \cdot \mathbf{A}$. Po dosazení

$$\begin{aligned} R^*_{\mathbf{A}}(\omega|_{e\cdot\mathbf{A}}) &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \{y(e)^{-1} \cdot \pi^*(\hat{\omega}|_{\pi(e)}) \cdot y(e) + y^{-1} \cdot dy|_e\} \cdot \mathbf{A} \\ &= \mathbf{A}^{-1}\omega|_e\mathbf{A} = Ad_{\mathbf{A}^{-1}}(\omega|_e). \end{aligned} \tag{3.43}$$

A máme to dokázané! Hurá. ■

Nyní si bez důkazu vyslovíme tvrzení, které dokážeme později v mnohem obecnější podobě.

Tvrzení 3.3.4. *Nechť $\omega \in \Omega^1(F(M), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ je libovolná 1-forma splňující (3.38) a (3.39).*

Potom ω definuje unikátní afinní konexi na M, kde příslušné lokální formy konexe (a tedy Christoffelovy symboly v bázi libovolných polích repérů) získáváme formulí (3.35).

Nyní se můžeme bez obav vrátit k obecnému hlavnímu fibrovanému prostoru $\pi : P \to M$ se strukturní grupou G a její příslušnou Lieovou algebrou $\mathfrak{g} = Lie(G)$. Vidíme, že vlastnosti (3.38, 3.39) mají stále perfektní smysl. To nás přivádí k následující definici (a terminologii):

Definice 3.3.5. Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný G-prostor a $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. Potom 1-formu $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ nazýváme **formou konexe na hlavním fibrovaném prostoru**, pokud splňuje následující podmínky:

(i) $A(\#x) = x$ pro každé $x \in \mathfrak{g}$, kde $\# : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$ je infinitesimální generátor akce G na P.

(ii) Je to tzv. Ad-ekvivariantní forma, tj. pro každé $g \in G$ musí platit

$$R^*_g(A) = Ad_{g^{-1}}(A). \tag{3.44}$$

Že nejde o prázdný pojem lze snadno ukázat pomocí geometrické interpretace v následující kapitole. Zatím se spokojíme s tím, že lze ukázat, že na každém hlavním fibrovaném prostoru existuje alespoň jedna forma konexe. Pro budoucí účely si ukažme jeden snadný důsledek definice.

Lemma 3.3.6. *Nechť $\{t_\mu\}_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ je libovolná báze $\mathfrak{g}$. Nechť $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ je forma konexe. Nechť $A^\mu \in \Omega^1(P)$ jsou komponentní 1-formy A, tj. $A = A^\mu t_\mu$. Potom $(A^1_p, \dots, A^{\dim \mathfrak{g}}_p)$ tvoří lineárně nezávislý soubor forem v $T^*_p P$ pro každé $p \in P$.*

Důkaz. Nechť $\{\lambda_\mu\}_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ jsou konstanty, že $\lambda_\mu A^\mu_p = 0$. Z definice konexe dostáváme vztah $A^\mu(\#x) = t^\mu(x)$. Máme tedy

$$0 = (\lambda_\mu A^\mu_p)(\#_p(t_\nu)) = \lambda_\mu t^\mu(t_\nu) = \lambda_\nu. \tag{3.45}$$

To dokazuje lineární nezávislost souboru. ■

Záhy uvidíme, že tento technický detail je klíčový pro geometrickou interpretace formy konexe.

Kapitola 4

Horizontální distribuce a zdvih

4.1 Hladké distribuce a jejich integrabilita

Nechť M je hladká varieta. V každém bodě $m \in M$ můžeme vybrat nějaký k-rozměrný podprostor $D_m \subseteq T_m M$. Potom D se nazývá **k-rozměrná distribuce** v M. Pochopitelně nás zajímají takové distribuce, kde závislost D_m na bodu m je v nějakém smyslu hladká.

Definice 4.1.1. Nechť D je k-rozměrná distribuce v M. Řekneme, že D je **hladká**, pokud pro každý bod $m \in M$ existuje okolí $U \ni m$ a k-tice vektorových polí $(V_1, \ldots, V_k)$ definovaných na okolí U, takových, že $D_n = \mathbb{R}\{V_1|_n, \ldots, V_k|_n\}$ pro všechny $n \in U$. Říkáme, že $(V_1, \ldots, V_k)$ lokálně generuje D.

Příklad 4.1.2. Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor. Potom $D_p = \mathrm{Ver}_p(P)$ je k-rozměrná distribuce v P, kde $k = \dim \mathfrak{g}$. Stačí si zvolit bázi $\{t_\mu\}_{\mu=1}^k$. Potom $(V_1, \ldots, V_k) = (\#t_1, \ldots, \#t_k)$ lokálně generuje D. $\mathrm{Ver}(P)$ se nazývá **vertikální distribuce v** P.

Jedním z nejčastějších způsobů zadání podprostoru vektorového prostoru je jako množina řešení soustavy homogenních lineárních rovnic. Nejinak je tomu v případě hladkých distribucí.

Tvrzení 4.1.3. *Nechť $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ je soubor q 1-forem na varietě M lineárně nezávislých v $m \in M$, tj. $\alpha_i \in \Omega^1(M)$ a rovnice $\lambda^i \alpha_i|_m = 0$ implikuje $\lambda_1 = \cdots = \lambda_q = 0$. Definujeme*

$$D_m = \bigcap_{i=1}^{q} \ker(\alpha_i|_m) \subseteq T_m M. \tag{4.1}$$

Potom D je hladká $(n-q)$-rozměrná distribuce na M.

Důkaz. Protože $(\alpha_1|_m, \ldots, \alpha_q|_m)$ jsou lineárně nezávislé v každém bodě, lokálně lze na nějakém okolí U najít lokální korepérové pole $(e^1, \ldots, e^n)$, že $e^i|_m = \alpha_i|_m$ pro $1 \le i \le q$ a všechny $m \in U$. Nechť $(e_1, \ldots, e_n)$ je příslušné duální pole repérů. Potom zřejmě $D_m = \mathbb{R}\{e_{q+1}|_m, \ldots, e_n|_m\}$ pro všechny $m \in U$. Vidíme, že soubor $(e_{q+1}, \ldots, e_n)$ lokálně generuje D a tedy D je hladká distribuce. ■

Poznámka 4.1.4. Často tvoří $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ komponentní 1-formy pro $\alpha \in \Omega^1(M, V)$, kde V je q-rozměrný prostor s bází $\{E^\mu\}_{\mu=1}^q$ a $\alpha = \alpha_\mu E^\mu$. Potom můžeme psát $D_m = \ker(\alpha|_m)$, tj.

$$D_m = \{X \in T_m M \mid \alpha|_m(X) = 0\}. \tag{4.2}$$

Připomeňme si, že je-li $N \subseteq M$ libovolná vnořená k-rozměrná podvarieta M, identifikujeme pro každé $n \in N$ tečný prostor T_nN s k-rozměrným podprostorem tečného prostoru T_nM. Můžeme se ptát, jestli pro zadanou k-rozměrnou hladkou distribuci D náhodou nevznikne podprostor $D_m \subseteq T_mM$ právě tímto způsobem.

Definice 4.1.5. Nechť D je hladká k-rozměrná distribuce. Řekneme, že vnořená podvarieta $N \subseteq M$ je **integrální podvarieta distribuce** D, pokud pro všechny $n \in N$ platí $T_nN = D_n$. Řekneme, že distribuce D je integrabilní, pokud každý bod $m \in M$ je obsažen v nějaké integrální podvarietě D.

Příklad 4.1.6. Uvažujme vertikální distribuci $\mathrm{Ver}(P)$. Vlákna $P_m = \pi^{-1}(m)$ tvoří integrální podvariety, protože jsme ukázali, že pro $p \in P_m$ platí $\mathrm{Ver}_p(P) = T_p(P_m)$. Jelikož každý bod $p \in P$ je v nějakém vlákně, vertikální distribuce je integrabilní.

Ověřovat integrabilitu z definice by bylo velmi nepohodlné. Naštěstí se ukazuje, že existuje snadné ověření přímým výpočtem.

Definice 4.1.7. Nechť D je hladká k-rozměrná distribuce. Řekneme, že vektorové pole $X \in \mathfrak{X}(U)$ pro $U \subseteq M$ je **lokální řez distribuce** D, pokud pro všechny $m \in U$ platí $X|_m \in D_m$. Řekneme, že D je **involutivní distribuce**, pokud pro každé dva její lokální řezy $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ je i komutátor $[X,Y]$ lokální řez D. Tj. $[X,Y]|_m \in D_m$ pro každé $m \in U$.

Ověřit involutivitu distribuce bývá většinou snadné díky následujícímu tvrzení.

Tvrzení 4.1.8. *Nechť D je k-rozměrná hladká distribuce. Potom D je involutivní právě tehdy když pro každý bod existuje soubor $(V_1, \dots, V_k)$ lokálně generující D na okolí U tohoto bodu, splňující podmínku $[V_i, V_j]|_m \in D_m$ pro každý bod $m \in U$ a dvojici indexů $i, j \in \{1, \dots, k\}$.*

Cvičení 4.1.9. *Rozmyslete si důkaz předchozího tvrzení. Návod: Leibnizovo pravidlo.*

Jakákoliv integrabilní distribuce je příkladem involutivní distribuce.

Tvrzení 4.1.10. *Každá hladká integrabilní k-rozměrná distribuce je involutivní.*

Důkaz. Nechť $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ jsou libovolné dva lokální řezy integrabilní distribuce D. Nechť $m \in U$ je libovolný bod. Potom existuje integrální podvarieta $N \subseteq M$, že $m \in N$ a $D_n = T_nN$. Zejména tedy $X|_n, Y|_n \in T_nN$ pro všechny $n \in N \cap U$. Nechť $i : N \to M$ je příslušné vnoření. S troškou diferenciální geometrie se dá ukázat, že existují hladká vektorová pole $X', Y' \in \mathfrak{X}(N \cap i^{-1}(U))$, taková, že $X' \sim_i X$ a $Y' \sim_i Y$ jsou i-vztažená. Potom dle Lemma 2.4.5 platí relace $[X', Y'] \sim_i [X, Y]$, neboli $[X,Y]|_{i(n)} = i_*([X',Y']|_n)$. V původní „podmnožinové“ notaci ale identifikujeme n s jeho obrazem $i(n) \in M$ a tečný podprostor T_nN s jeho obrazem $i_*(T_nN) \subseteq T_{i(n)}M$. Předchozí rovnost tedy říká $[X,Y]|_n \in T_nN = D_n$ pro všechny $n \in N \cap U$. Speciálně pro $n = m$ a D je tedy involutivní. ∎

Můžeme se tedy ptát, jestli náhodou existují hladké distribuce, které jsou involutivní, ale nikoliv integrabilní. Odpovědí je jednoznačné ne! Důkaz je zcela nad rámec této přednášky :)

Věta 4.1.11 (Frobenius)**.** *Každá hladká involutivní k-rozměrná distribuce je integrabilní.*

Je zajímavé, že důkaz dává konstruktivní návod na konstrukci integrálních podvariet.

Příklad 4.1.12. Lze snadno ukázat, že Ver(P) je involutivní distribuce. Ukázali jsme, že za její lokální generátory můžeme vzít soubor $(\#t_1, \dots \#t_k)$. Protože platí

$$[\#t_\mu, \#t_\nu] = \#\{[t_\mu, t_\nu]_\mathfrak{g}\} = c^\kappa_{\mu\nu} \#t_\kappa, \tag{4.3}$$

je podle tvrzení 4.1.8 distribuce Ver(P) involutivní.

Předpokládejme, že máme D zadanou pomocí q-tice lineárně nezávislých forem $(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ jako v tvrzení 4.1.3. Konstruovat lokální generátory a ověřovat involutivitu je příliš komplikované. Bylo by tedy mnohem snazší ověřovat přímo vlastnosti forem $\alpha_i \in \Omega^1(M)$. A ono to jde.

Tvrzení 4.1.13. *Nechť D je zadaná jako v tvrzení 4.1.3.*

Potom D je involutivní právě tehdy když $d\alpha_i(X, Y) = 0$ pro každé $1 \leq i \leq q$ a pro každou dvojici lokálních řezů $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ distribuce D.

Důkaz. Nechť $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ jsou libovolná vektorová pole. Potom

$$d\alpha_i(X, Y) = X.\alpha_i(Y) - Y.\alpha_i(X) - \alpha_i([X, Y]). \tag{4.4}$$

Pro dva lokální řezy dostáváme $\alpha_i(X) = \alpha_i(Y) = 0$ a tedy rovnost $d\alpha_i(X, Y) = -\alpha_i([X, Y])$ na okolí U. Z definice snadno vidíme, že involutivita D je ekvivalentní nulovosti pravé, a tedy i levé strany. A máme dokázáno. ■

4.2 Horizontální distribuce

Na konci předchozí kapitoly jsme v zdánlivě nedůležitém lemmatu 3.3.6 ukázali, že pro formu konexe $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ dostáváme q-tici lineárně nezávislých forem $(A^1, \dots, A^q)$, kde $q = \dim \mathfrak{g}$ a $A^\mu \in \Omega^1(P)$ jsou komponentní formy A v bázi $\{t_\mu\}_{\mu=1}^q$ algebry $\mathfrak{g}$, tj. $A = A^\mu t_\mu$. Vzhledem k tvrzení 4.1.3 nás tedy napadne následující definice:

Definice 4.2.1. Nechť $p \in P$ je libovolný bod hlavního fibrovaného prostoru $\pi : P \to M$. Potom

$$\mathrm{Hor}_p(P) = \{X \in T_pP \mid A|_p(X) = 0\} \subseteq T_pP \tag{4.5}$$

nazýváme **horizontální tečný podprostor v bodě** p.

Tvrzení 4.2.2 (Charakteristické vlastnosti horizontální distribuce)**.** *Nechť $\mathrm{Hor}_p(P)$ je horizontální tečný podprostor příslušný dané formě konexe $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$. Potom*

*(i) Přiřazení $D_p = \mathrm{Hor}_p(P)$ definuje hladkou $(n - \dim \mathfrak{g})$-rozměrnou distribuci v P, kterou budeme nazývat **horizontální distribucí příslušnou konexi** A.*

(ii) Horizontální podprostor je komplementární k vertikálnímu podprostoru, tj.

$$T_pP = \mathrm{Ver}_p(P) \oplus \mathrm{Hor}_p(P) \tag{4.6}$$

pro každý bod $p \in P$. Odtud je zřejmý původ názvosloví. Díky tomuto rozkladu máme rovněž jednoznačně určené projektory $\mathrm{ver} : T_pP \to \mathrm{Ver}_p(P)$ a $\mathrm{hor} : T_pP \to \mathrm{Hor}_p(P)$.

(iii) Horizontální podprostor se chová přirozeně vzhledem k pravé akci grupy G, přesněji

$$R_{g*}(\mathrm{Hor}_p(P)) = \mathrm{Hor}_{p \cdot g}(P) \tag{4.7}$$

*pro každé $p \in P$ a $g \in G$. Řekneme, že horizontální distribuce je G-**invariantní.***

Důkaz. Ad (i): Pro libovolnou bázi $\{t_\mu\}_{\mu=1}^q$ můžeme definici $\mathrm{Hor}_p(P)$ přepsat jako $\mathrm{Hor}_p(P) = \bigcap_{\mu=1}^q \ker(A^\mu)$. Zbytek plyne z tvrzení 4.1.3.

Ad (ii): Už víme, že $\mathrm{Ver}_p(P)$ je q-rozměrný podprostor isomorfní algebře $\mathfrak{g}$, zatímco $\mathrm{Hor}_p(P)$ je $(n-q)$-rozměrný podprostor. Stačí tedy ukázat, že $\mathrm{Ver}_p(P) \cap \mathrm{Hor}_p(P) = \{0\}$. Nechť $X \in T_pP$ je z tohoto průniku. Ukázali jsme, že každý vertikální vektor lze v bodě p psát jako $X = \#_p(x)$ pro unikátní $x \in \mathfrak{g}$. Ale protože X je i horizontální, dostáváme $0 = A|_p(X) = A|_p(\#x) = x$.

Ad (iii): Nechť $X \in \mathrm{Hor}_p(P)$. Pro každé $g \in G$ dostáváme

$$A|_{p\cdot g}(R_{g*}(X)) = (R_g^*(A|_{p\cdot g}))(X) = (Ad_{g^{-1}}(A|_p)(X) = Ad_{g^{-1}}(A|_p(X)) = 0. \tag{4.8}$$

Odtud plyne inkluze $R_{g*}(\mathrm{Hor}_p(P)) \subseteq \mathrm{Hor}_{p\cdot g}(P)$. Protože oba mají prostory mají stejnou dimenzi a R_{g*} je lineární izomorfismus, jsme hotoví. ∎

Vidíme, že pro důkaz charakteristických vlastností horizontální distribuce jsme využili právě obě charakteristické vlastnosti A z definice 3.3.5. To nás přivádí na myšlenku, že ve skutečnosti každá distribuce splňující (4.6, 4.7) by mohla pocházet z nějaké formy konexe A. Následují tvrzení ukazuje, že oba pohledy jsou plně ekvivalentní.

Tvrzení 4.2.3 (Konexe jsou horizontální distribuce)**.** *Nechť D je hladká k-rozměrná distribuce v P splňující podmínky*

$$T_pP = \mathrm{Ver}_p(P) \oplus D_p, \ \ R_{g*}(D_p) = D_{p\cdot g}. \tag{4.9}$$

Potom existuje právě jedna forma konexe $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$, že $D_p = \mathrm{Hor}_p(P)$.

Důkaz. Definujeme lineární zobrazení $A|_p : T_pP \to \mathfrak{g}$. a ukážeme, že definuje hladkou 1-formu se správnými vlastnostmi. Jelikož $\mathrm{Ver}_p(P) = \{\#x|_p \mid x \in \mathfrak{g}\}$ a D_p má být horizontální podprostor, máme jedinou možnost jak $A|_p$ definovat, tj.

$$A|_p(\#x|_p) = x, \ \ A|_p(D_p) = 0. \tag{4.10}$$

To definuje $A|_p : T_pP \to \mathfrak{g}$ jednoznačně. Protože je D hladká distribuce, máme pro každý bod $p \in P$ a jeho okolí $U \subseteq P$ a příslušné lokální generátory $(V_1, \ldots, V_k)$, kde $k = n - \dim \mathfrak{g}$. Je-li $\{t_\mu\}_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ libovolná báze, mám lokální generátory vertikální distribuce $(\#t_1, \ldots, \#t_q)$. Dohromady $(\#t_1, \ldots, \#t_q, V_1, \ldots, V_k)$ tvoří pole repérů na U. Je-li $A = A^\mu t_\mu$, dostáváme

$$A^\mu(\#t_\nu) = \delta^\mu_\nu, \ \ A^\mu(V_i) = 0, \tag{4.11}$$

což dokazuje, že A^μ jsou hladké 1-formy na U. Jelikož každý bod je v takovém U, jsou $A^\mu \in \Omega^1(P)$ hladké 1-formy na celém P. Zbývá ukázat, že A splňuje (3.44). Pro $X = \#x|_p$ dostáváme

$$\begin{aligned}(R_g^*A)|_p(\#x|_p) &= A|_{p\cdot g}(R_{g*}(\#x|_p)) = A|_{p\cdot g}(\#Ad_{g^{-1}}(x)|_{p\cdot g}) \\ &= Ad_{g^{-1}}(x) = Ad_{g^{-1}}(A|_p(\#x|_p)) = \{Ad_{g^{-1}}A|_p\}(\#x|_p).\end{aligned} \tag{4.12}$$

Vyčíslená na vertikální vektory tedy rovnost (3.44) platí. Je-li $X \in D_p$, máme dle předpokladu $R_{g*}(X) \in D_{p\cdot g}$. A tedy $(R_g^*A)|_p(X) = A|_{p\cdot g}(R_{g*}(X)) = 0 = Ad_{g^{-1}}(A|_p(X))$. Rovnost tedy platí i vyčíslená na vektory z D_p. Jelikož $T_pP = \mathrm{Ver}_p(P) \oplus D_p$, jsme hotovi. ∎

Poznámka 4.2.4. Odteď tedy budeme volbou konexe rozumět libovolný z obou ekvivalentních pohledů. Konexe se často definuje pomocí volby horizontálního podprostoru. Je to totiž obecnější definice, která má smysl v mnohem širší třídě fibrovaných prostorů, které se říká **Ehresmannova konexe**.

Příklad 4.2.5. Interpretace pomocí horizontálních distribucí nám snadno umožní najít jeden velmi obecný příklad konexe. Nechť $\pi : P \to M$ je libovolná hlavní fibrace. Nechť h je Riemanovská metrika na P, která splňuje $R_g^*(h) = h$ pro všechny $g \in G$. Potom

$$\mathrm{Hor}_p(P) = \mathrm{Ver}_p(P)^{\perp_h} \tag{4.13}$$

je konexe na P. Jelikož takové h vždycky existuje, existuje vždycky i konexe na P.

4.3 Horizontální zdvih, paralelní přenos

Spočítáme-li dimenze, zjistíme, že dimenze horizontální distribuce je stejná jako dimenze M. To značí, že by mohl existovat kanonický izomorfismus $\mathrm{Hor}_p(P)$ a tečného prostoru T_mM v odpovídajícím bodě $m = \pi(p)$. A je tomu tak.

Tvrzení 4.3.1. *Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor s konexí $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$. Potom pro každý tečný vektor $X \in T_mM$ a daný bod $p \in P_m$ ve vlákně nad m existuje právě jeden horizontální tečný vektor $X_p^h \in \mathrm{Hor}_p(P)$ takový, že $\pi_*(X_p^h) = X$. Potom X_p^h se nazývá* ***horizontální zdvih vektoru** X **do bodu** $p \in P$.*

Zobrazení $X \mapsto X_p^h$ je lineární izomorfismus prostorů T_mM a $\mathrm{Hor}_p(P)$.

Důkaz. Nechť $X \in T_mM$ je libovolný vektor. Vezmu si libovolné souřadnice $(x^1, \dots, x^n)$ na okolí U bodu m. Potom můžu psát $X = X^i \partial_i|_m$.

Zavedeme si nyní vhodné souřadnice na P. Můžeme předpokládat (případným zmenšením okolí U), že mám trivializační zobrazení $\phi : U \times G \to \pi^{-1}(U)$. Nechť $p = \phi(m, g_0)$ pro $g_0 \in G$. Potom v G mám souřadnice $(y^1, \dots, y^k)$ na nějakém okolí $V \ni g_0$. Potom si na okolí $\mathcal{U} = \phi(U \times V)$ bodu p ve varietě P můžu zavést lokální souřadnice $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^k)$:

$$x^i(p) := x^i(\pi(p)), \;\; y^\mu(p) := y^\mu(\pi_2 \phi^{-1}(p)), \tag{4.14}$$

kde nalevo jsou souřadnicové funkce na P, zatímco vpravo ty na M, respektive na G. Jsou to zjevně hladké souřadnice, které nyní můžeme použít k nalezení X_p^h. Budeme psát ∂_i a ∂_μ pro příslušná souřadnicová vektorová pole na $\mathcal{U}$. Nejprve si ujasněme následující pravidla:

$$\pi_*(\partial_i|_p) = \partial_i|_m, \;\; \pi_*(\partial_\mu|_p) = 0_m. \tag{4.15}$$

Z definice π_* dostávám

$$\pi_*(\partial_i|_p) = \left.\frac{\partial(x^j \circ \pi)}{\partial x^i}\right|_p \partial_j|_{\pi(p)} = \left.\frac{\partial x^j}{\partial x^i}\right|_p \partial_j|_{\pi(p)} = \partial_i|_{\pi(p)} = \partial_i|_m, \tag{4.16}$$

$$\pi_*(\partial_\mu|_p) = \left.\frac{\partial(x^j \circ \pi)}{\partial y^\mu}\right|_p \partial_j|_{\pi(p)} = \left.\frac{\partial x^j}{\partial y^\mu}\right|_p \partial_j|_{\pi(p)} = 0_{\pi(p)} = 0_m. \tag{4.17}$$

To mimo jiné dokazuje, že $\{\partial_\mu|_p\}_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ tvoří bázi $\mathrm{Ver}_p(P)$. To ale znamená, že pro každý tečný vektor ve tvaru $Y^\mu \partial_\mu|_p$ existuje jednoznačný element $y \in \mathfrak{g}$, že $Y^\mu \partial_\mu|_p = \#y|_p$. Proto můžu psát hledaný vektor X_p^h ve tvaru

$$X_p^h = W^i \partial_i|_p + Y^\mu \partial_\mu|_p = W^i \partial_i|_p + \#y|_p. \tag{4.18}$$

Nejprve vyzkoumáme podmínku $\pi_*(X_p^h) = X$. Z rovnic (4.15) dostávám $\pi_*(X_p^h) = W^i\partial_i|_m$ a tedy nutně $W^i = X^i$. Abychom určili $y \in \mathfrak{g}$, použijeme podmínku horizontality, tedy $A|_p(X_p^h) = 0$:

$$0 = A|_p(X_p^h) = X^i A|_p(\partial_i|_p) + A|_p(\#y|_p) = X^i A|_p(\partial_i|_p) + y. \tag{4.19}$$

Máme $A = A^\mu t_\mu$ pro zvolenou bázi $\{t_\mu\}_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ algebry $\mathfrak{g}$. Potom dostávám $y = -X^i A_i^\mu(p) t_\mu$, kde $A_i^\mu(p) = A^\mu|_p(\partial_i|_p) = \{A^\mu(\partial_i)(p)\}$. Po dosazení zpět tedy nacházíme rovnici

$$X_p^h = X^i\partial_i|_p - X^i A_i^\mu(p)\,\#t_\mu|_p = X^i(\partial_i|_p - A_i^\mu(p)\#t_\mu|_p). \tag{4.20}$$

Tímto jsme ukázali, že horizontální zdvih existuje a je jednoznačný (požadavky jeho vlastnosti nám určily všechny komponenty). Zjevně taky závisí lineárně na X a definuje tedy lineární zobrazení. Jelikož má levou inverzi, $\pi_*(X_p^h) = X$, je to monomorfismus. Z dimenzionálních důvodů je to izomorfismus. V každém bodě $p \in \mathcal{U}$ jsme dostali bázi $\mathrm{Hor}_p(P)$ ve tvaru

$$\partial_i^h|_p := \partial_i|_p - A_i^\mu(p)\#t_\mu|_p. \tag{4.21}$$

A důkaz je hotový. ∎

Jelikož horizontální podprostory v různých bodech jednoho vlákna π jsou propojeny akcí grupy jako v (4.7), lze očekávat nějakou speciální vlastnost od horizontálního zdvihu vektoru.

Lemma 4.3.2. *Pro libovolné body $p \in P$ a $g \in G$ a libovolný $X \in T_mM$, kde $m = \pi(p)$ platí*

$$X_{p\cdot g}^h = R_{g*}(X_p^h). \tag{4.22}$$

Důkaz. Vektor $R_{g*}(X_p^h)$ je podle (4.7) horizontální a díky vlastnosti $\pi \circ R_g = \pi$ se promítá zpátky na X, tj. $\pi_*(R_{g*}(X_p^h)) = \pi_*(X_p^h) = X$. Splňuje tedy obě zákonné povinnosti horizontálního zdvihu X do bodu $p \cdot g$ a z jeho jednoznačnosti tedy plyne dokazovaná rovnost. ∎

Jelikož umíme jednoznačně zdvihat vektor z každého bodu M, dostaneme přirozeně nápad zdvihat celá vektorová pole na M. Následující věta je jednoduchým důsledkem tvrzení 4.3.1.

Tvrzení 4.3.3. *Nechť $X \in \mathfrak{X}(M)$ je hladké vektorové pole. Potom existuje právě jedno hladké vektorové pole $X^h \in \mathfrak{X}(P)$ které je horizontální a π-vztažené s X, tj. $\pi_*(X^h|_p) = X|_{\pi(p)}$. Vektorové pole X^h nazýváme **horizontálním zdvihem vektorového pole** X.*

Důkaz. Jednoznačnost a existence je jasná, protože musíme definovat $X^h|_p = (X|_{\pi(p)})_p^h$. Zbývá ověřit jeho hladkost, ale nahoře jsme ukázali, že na $\pi^{-1}(U) \subseteq P$ lze psát X^h jako

$$X^h = (X^i \circ \pi) \cdot \{\partial_i - A_i^\mu \# t_\mu\}, \tag{4.23}$$

kde $X = X^i\partial_i$ na U. To je zjevně hladké vektorové pole. ∎

Důsledek 4.3.4. *Horizontální zdvih je G-invariantní vektorové pole a platí $[X^h, Y^h] \sim_\pi [X, Y]$.*

Jednou z hlavních aplikací horizontálního zdvihu je možnost definovat jednoznačný zdvih křivek v bázové varietě do bázového prostoru. Ukážeme si, že v případě hlavní fibrace repérů odhalíme jednu z nejdůležitějších aplikací afinních konexí.

Věta 4.3.5 (Paralelní přenos)**.** *Nechť $\gamma : I \to M$ je hladká křivka a $\gamma(0) = m$. Nechť $p \in P_m$ je libovolný bod.*

*Potom existuje právě jedna hladká křivka $\gamma^h : I \to P$, taková že $\pi \circ \gamma^h = \gamma$, $\gamma^h(0) = p$, a pro každé $t \in I$ platí $\dot{\gamma}^h \in \mathrm{Hor}_{\gamma^h(t)}(P)$. γ^h se nazývá **horizontální zdvih křivky** γ a samotný proces konstrukce horizontálního zdvihu se nazývá **paralelní přenos podél křivky** γ.*

Důkaz. Zderivováním vztahu $\pi \circ \gamma^h = \gamma$ podle t dostáváme $\pi_*(\dot{\gamma}^h) = \dot{\gamma}$. Je tedy jasné, že $\dot{\gamma}^h$ musí být horizontálním zdvihem $\dot{\gamma}$ do bodu $\gamma^h(t)$, tj. dostáváme

$$\dot{\gamma}^h = (\dot{\gamma})^h_{\gamma^h(t)}. \tag{4.24}$$

Po dosazení do (4.20) tedy řešíme rovnici

$$\dot{\gamma}^h(t) = \frac{d}{dt} x^i(\gamma(t)) \{\partial_i|_{\gamma^h(t)} - A^\mu_i(\gamma^h(t)) \# t_\mu|_{\gamma^h(t)}\}. \tag{4.25}$$

Po složení se souřadnicovými funkcemi se jedná o soustavu autonomních (napravo nevystupuje derivace $\gamma^h(t)$) obyčejných diferenciálních rovnic pro neznámé zobrazení $\gamma^h(t)$. Máme zadanou počáteční podmínku $\gamma^h(0) = p$. Řešení tedy vždy existuje, je hladké a jednoznačné. ■

Cvičení 4.3.6. *Rozmyslete si, že paralelní přenos nezávisí na reparametrizaci křivky γ ve smyslu: Řekneme, že γ' je reparametrizací γ, pokud $\gamma' = \gamma \circ \sigma$ pro $\sigma : I \to I$ takové, že $\sigma'(t) \neq 0$ pro všechny $t \in I$. Ukažte, že potom $\gamma'^h = \gamma^h \circ \sigma$. Zejména tedy můžeme hovořit o paralelním přenosu „trajektorií", tj. nezávisí na konkrétní parametrizaci.*

Příklad 4.3.7. Ukážeme si paralelní přenos v případě $P = F(M)$. Nejde ani tak o příklad, jako původ názvosloví. Nechť $(x^1, \dots, x^n, y^1_1, \dots, y^n_n)$ jsou souřadnice ne $\pi^{-1}(U)$, kde pro $e \in \pi^{-1}(m)$ definujeme $e = \partial|_m \cdot y(e)$. Označme si $x^i(t) \equiv x^i(\gamma(t))$ a $y^a_b(t) = y^a_b(\gamma^h(t))$.

Uvědomme si, že výsledná křivka γ^h definuje v každém bodě křivky $\gamma(t)$ bázi $(e_1(t), \dots, e_n(t))$:

$$\gamma^h(t) = (e_1(t), \dots, e_n(t)) \in \mathcal{E}(T_{\gamma(t)}M), \tag{4.26}$$

kde $e_a(t) = y^b_a(t) \cdot \partial_b|_{\gamma(t)}$. Nechť $A = \omega$ je forma konexe příslušná afinní konexi ∇. Pro dosazení do (4.25) tedy potřebujeme znát funkce A^μ_i, což v značení na $F(M)$ odpovídá $\omega^a_b(\partial_i)$. Přímým dosazením do (3.31) dostáváme rovnici

$$\omega^a_b(\partial_i) = (y^{-1})^a_k \{(\hat{\omega}^k_l, \partial_i) \circ \pi\} y^l_b = (y^{-1})^a_k \{\Gamma^k_{li} \circ \pi\} y^l_b. \tag{4.27}$$

Výraz na pravé straně (4.25) lze tedy přepsat jako

$$\begin{aligned} -A^\mu_i \# t_\mu = &\ -\omega^a_b(\partial_i) \# E^b_a = -\omega^a_b(\partial_i) y^c_a \partial^b_c = -(y^{-1})^a_k \{\Gamma^k_{li} \circ \pi\} y^l_b y^c_a \partial^b_c \\ = &\ -\{\Gamma^a_{li} \circ \pi\} y^l_b \cdot \partial^b_a \end{aligned} \tag{4.28}$$

Nyní si stačí uvědomit, že levou stranu (4.25) lze přepsat jako

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}^h(t) &= \frac{d}{dt} x^i(\gamma^h(t)) \cdot \partial_i|_{\gamma^h(t)} + \frac{d}{dt} y^a_b(\gamma^h(t)) \cdot \partial^b_a|_{\gamma^h(t)} \\ &= \dot{x}^i(t) \cdot \partial_i|_{\gamma^h(t)} + \dot{y}^a_b(t) \cdot \partial^b_a|_{\gamma^h(t)}, \end{aligned} \tag{4.29}$$

kde jsme využili toho, že $x^i(\gamma^h(t)) = x^i(\gamma(t)) \equiv x^i(t)$. Po dosazení do pravé strany dostáváme

$$\dot{x}^i(t) \cdot \{\partial_i|_{\gamma^h(t)} - \Gamma^a_{li}(t) y^l_b(t) \cdot \partial^b_a|_{\gamma^h(t)}\}, \tag{4.30}$$

kde píšeme $\Gamma^a_{li}(t) \equiv \Gamma^a_{li}(\gamma(t))$. Porovnáním koeficientů u bazických tečných vektorů dostaneme soustavu n^2 diferenciálních rovnic

$$\dot{y}^a_b(t) + \dot{x}^i(t)\Gamma^a_{li}(t)y^l_b(t) = 0. \tag{4.31}$$

Nezapomínejme na počáteční podmínku $y^a_b(0) := e^a_b$. Co jsme právě zjistili? Začneme s křivkou γ a v bodě $m = \gamma(0)$ si zvolíme počáteční podmínku, bázi $(e_1, \dots, e_n) \in \mathcal{E}(T_m M)$, kde $e_b = e^a_b\, \partial_i|_m$. Výsledná křivka $\gamma^h(t)$ odpovídá „roznesení“ $(e_1(t), \dots, e_n(t))$ této báze podél křivky $\gamma(t)$, kde $e_b(t) = y^a_b(t)\partial_a|_{\gamma(t)}$ splňují rovnici (4.31), což je ale **rovnice paralelního přenosu** pro každý z vektorů, tj. paralelně roznášíme $(e_1, \dots, e_n)$ podél $\gamma(t)$. Uzavíráme s tím, že pro $P = F(M)$ paralelní přenos *je paralelní přenos.*

4.4 Veličiny typu ρ a jejich paralelní přenos

Zatím jsme zjistili, že pro hlavní fibraci repérů je horizontální zdvih křivek z bazické variety ekvivalentní paralelnímu roznášení celé báze (tetrády, vielbeinu) podél dané křivky. Zajímá nás, jakým způsobem zformulovat paralelní přenos konkrétních tenzorů, například forem nebo vektorů. K tomu slouží následující velmi obecná definice:

Definice 4.4.1. Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor. Nechť (V, ρ) je konečně-rozměrná reprezentace Lieovy grupy G na prostoru V. Řekneme, že $\alpha \in \Omega^p(P, V)$ je **p-forma typu** ρ když

$$R^*_g(\alpha) = \rho(g^{-1})\alpha \tag{4.32}$$

Jejich prostor označujeme jako $\Omega^p_\rho(P, V)$. Speciálně 0-formy typu ρ nazýváme **veličiny typu** ρ.

Poznámka 4.4.2. $\Omega^p_\rho(P, V) \subseteq \Omega^p(P, V)$ je vektorový podprostor. Netvoří však $C^\infty(P)$-podmodul. Tvoří ale $C^\infty(M)$-modul, kde násobení $f \in C^\infty(M)$ je definované jako

$$f \cdot \alpha := (f \circ \pi)\alpha. \tag{4.33}$$

Musí se ověřit, že $f \cdot \alpha \in \Omega^p_\rho(P, V)$. Pro každé $p \in P$ a $g \in G$ dostáváme

$$R^*_g((f \cdot \alpha)|_{p\cdot g}) = R^*_g(f(\pi(p \cdot g)))\alpha|_{p\cdot g}) = f(\pi(p))\rho(g^{-1})\alpha|_p = \rho(g^{-1})((f \cdot \alpha)|_p). \tag{4.34}$$

Příklad 4.4.3. Forma konexe $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ je 1-forma typu ρ, kde $(V, \rho) = (\mathfrak{g}, Ad)$. Říkáme, že A je 1-forma typu Ad.

Definice 4.4.4. Nechť $\Phi \in \Omega^0(P, V)$ je veličina typu ρ, kde (V, ρ) je libovolná konečně-rozměrná reprezentace G na V. Nechť $\gamma : I \to M$ je libovolná hladká křivka. Řekneme, že Φ je **autoparalelní veličina podél** γ, pokud $\Phi \circ \gamma^h : I \to V$ je konstantní, tj.

$$0 = \frac{d}{dt}(\Phi \circ \gamma^h(t)) = \dot{\gamma}^h(t) \cdot \Phi. \tag{4.35}$$

Zatím není jasné, proč by právě tahle definice měla být tou správnou cestou. Více se vyjasní v následujícím příkladě.

Příklad 4.4.5. Nechť $P = F(M)$ a uvažujme kanonickou reprezentaci $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ na $\mathbb{R}^n$, tj. $\rho(\mathbf{A})x = \mathbf{A}.x$, pro všechny $x \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Ukážeme, že existuje kanonický izomorfismus následujících $C^\infty(M)$-modulů:

$$\Omega^0_\rho(F(M), \mathbb{R}^n) \cong \mathfrak{X}(M), \tag{4.36}$$

tj. veličiny typu ρ jsou v tomto případě vlastně hladká vektorová pole na bázové varietě M.

Nechť $\Phi \in \Omega^0_\rho(F(M), \mathbb{R}^n)$. Pro každé $e \in F(M)$ je tedy $\Phi(e) \in \mathbb{R}^n$, a pro každé $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ platí $\Phi(e \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1}.\Phi(e)$. Nejprve intuice. Každé $e \in F(M)$ je báze v tečném prostoru $T_{\pi(e)}M$. Potom X_Φ bude vektorové pole takové, že komponenty tečného vektoru $X_\Phi|_{\pi(e)}$ v bázi $e = (e_1, \ldots, e_n)$ budou tvořeny právě n-ticí reálných čísel $\Phi(e) \in \mathbb{R}^n$. Chování vzhledem k pravé akci $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ zajistí, že definice dobře funguje při volbě jiné báze e'.

Nechť $\partial = (\partial_1, \ldots, \partial_n)$ je souřadnicové pole repérů příslušné lokálním souřadnicím $(x^1, \ldots, x^n)$ na okolí $U \subseteq M$. Mám tedy $\partial|_m \in \mathcal{E}(T_mM) = F_m(M)$ pro všechny $m \in U$. Definujeme vektorové pole X^U_Φ na U vztahem

$$X^U_\Phi|_m = \Phi(\partial|_m)^i \cdot \partial_i|_m. \tag{4.37}$$

protože přiřazení $m \mapsto \partial|_m$ je hladké zobrazení (je to hladký lokální řez $F(M)$) a Φ je hladké zobrazení do $\mathbb{R}^n$, jsou $\Phi(\partial|_m)^i$ hladké funkce na U. A tedy $X^U_\Phi \in \mathfrak{X}(U)$.

Nechť $(y^1, \ldots, y^n)$ jsou lokální souřadnice na U', a nechť ∂' je příslušné souřadnicové pole repérů na U'. Pro $m \in U \cap U'$ platí transformační vztah $\partial'|_m = \partial|_m \cdot \mathbf{J}(m)$, kde $\mathbf{J} : U \cap U' \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ je Jacobiho matice souřadnicového přechodu. Potom ale pro $m \in U \cap U'$ dostávám

$$\begin{aligned} X^{U'}_\Phi|_m &= \Phi(\partial'|_m)^i \cdot \partial'_i|_m = \Phi(\partial|_m \cdot \mathbf{J}(m))^i \cdot \{\mathbf{J}^k_i(m)\partial_k|_m\} \\ &= \{\mathbf{J}^{-1}(m).\Phi(\partial|_m)\}^i \cdot \{\mathbf{J}^k_i(m)\partial_k|_m\} \\ &= (\mathbf{J}^{-1}(m))^i_q \, \Phi(\partial|_m)^q \, \mathbf{J}^k_i(m) \, \partial_k|_m \\ &= \Phi(\partial|_m)^q \cdot \partial_q|_m = X^U_\Phi|_m. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Tím jsme ukázali, že vztahem $X_\Phi|_U = X^U_\Phi$ definujeme hladké vektorové pole X_Φ na M. Snadno se ukáže, že přiřazení $\Phi \mapsto X_\Phi$ je $C^\infty(M)$-lineární zobrazení vzhledem k násobení z poznámky 4.4.2, a tedy morfismus $C^\infty(M)$-modulů $\Omega^0_\rho(F(M), \mathbb{R}^n)$ a $\mathfrak{X}(M)$.

Zbývá sestrojit inverzní zobrazení. Nechť $X \in \mathfrak{X}(M)$. Pro libovolný bod $e \in F(M)$ máme $e = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathcal{E}(T_{\pi(e)}M)$. Máme $X|_{\pi(e)} = \lambda^i \cdot e_i$. Definujeme $\Phi_X(e) = (\lambda^1, \ldots, \lambda^n)^T \in \mathbb{R}^n$. Z obvyklých transformačních vlastností vektorových polí snadno plyne, že $\Phi_X(e \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1}.\Phi_X(e)$. Je třeba ověřit hladkost $\Phi_X : F(M) \to \mathbb{R}^n$. Stačí ověřit hladkost po složení s každým trivializačním zobrazením $F(M)$, které jsme ale volili ve tvaru $\phi(m, \mathbf{A}) = \partial|_m \cdot \mathbf{A}$. Potom

$$\Phi_X(\phi(m, \mathbf{A})) = \mathbf{A}^{-1}.\Phi_X(\partial|_m) = \mathbf{A}^{-1}.(X^1(m), \ldots, X^n(m))^T, \tag{4.39}$$

kde $X|_m = X^i(m) \cdot \partial_i|_m$. Pravá strana zjevně hladce závisí na m i $\mathbf{A}$. Je zjevné, že zobrazení $X \mapsto \Phi_X$ je oboustranná inverze k zobrazení $\Phi \mapsto X_\Phi$.

Tvrzení 4.4.6. *Předpokládejte značení z předchozího příkladu. Potom $\Phi \in \Omega^0_\rho(F(M), \mathbb{R}^n)$ je autoparalelní podél křivky $\gamma(t)$ podle definice 4.4.4 právě tehdy když příslušné vektorové pole X_Φ je autoparalelní podél $\gamma(t)$ v obvyklém slova smyslu.*

Důkaz. Podle příkladu 4.3.7 definuje horizontální zdvih γ^h křivky γ paralelně roznesenou bázi $\gamma^h(t) = (e_1(t), \ldots, e_n(t)) \in \mathcal{E}(T_{\gamma(t)}M)$ v každém bodě křivky γ. Potom pro každé $t \in I$ odpovídá $\Phi(\gamma^h(t))$ přesně komponentám vektorového pole X_Φ v bázi $(e_1(t), \ldots, e_n(t))$. Ale vektorové pole je autoparalelní podél křivky právě tehdy když má v libovolně paralelně roznesené bázi (tetrádě, vielbeinu) konstantní komponenty, tj. $\Phi \circ \gamma^h$ je konstantní funkce t. ■

Cvičení 4.4.7. *Ukažte, jak lze způsobem podobným příkladu 4.4.5 popisovat* 1*-formy na* M*. Zkuste si rozmyslet, jak uchopit libovolná tenzorová pole na* M*.*

Kapitola 5

Vnější kovariantní derivace, forma křivosti

5.1 Horizontální část forem

Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor vybavený formou konexe $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$. Dostáváme tedy rozklad $T_pP = \mathrm{Ver}_p(P) \oplus \mathrm{Hor}_p(P)$ pro každý bod $p \in P$. Máme tedy dobře definovaný projektor $\mathrm{hor}_p : T_pP \to \mathrm{Hor}_p(P)$. Vzhledem k tomu, že $\mathrm{Hor}(P)$ je hladká distribuce, dá se ukázat, že vše funguje na úrovni vektorových polí, tj. pro každé $X \in \mathfrak{X}(P)$ a $p \in P$ definujeme

$$(\mathrm{hor}\, X)|_p := \mathrm{hor}_p(X|_p), \tag{5.1}$$

a výsledek $\mathrm{hor}\, X \in \mathfrak{X}(P)$ je hladké horizontální vektorové pole na P. Dostáváme tedy $C^\infty(P)$-lineární projektor $\mathrm{hor} : \mathfrak{X}(P) \to \mathfrak{X}(P)$ a $\mathrm{hor}\, X$ nazýváme **horizontální částí vektorového pole** X. Dokažme si nyní drobné technické lemma

Lemma 5.1.1. *Pro horizontální část vektorového pole platí vztah*

$$R_{g*}((\mathrm{hor}\, X)|_p) = (\mathrm{hor}\, R_{g*}(X))|_{p\cdot g}, \tag{5.2}$$

pro všechny $p \in P$ a $g \in G$.

Důkaz. Z vlastnosti (4.7) okamžitě plyne, že $\mathrm{hor}_{p\cdot g} \circ R_{g*} = R_{g*} \circ \mathrm{hor}_p$. Zbytek je definice. ∎

Definice 5.1.2. Nechť $\alpha \in \Omega^p(M, V)$ je p-forma s hodnotami ve V pro libovolný konečněrozměrný reálný vektorový prostor V. **Horizontální část** $\mathrm{hor}\,\alpha$ **formy** α definujeme vztahem

$$\{\mathrm{hor}\,\alpha\}(X_1, \dots, X_p) := \alpha(\mathrm{hor}\, X_1, \dots, \mathrm{hor}\, X_p). \tag{5.3}$$

Řekneme, že α je **horizontální p-forma**, pokud $\mathrm{hor}\,\alpha = \alpha$.

Tvrzení 5.1.3. *Platí následující vlastnosti operátory* hor*:*

(i) $\mathrm{hor} : \Omega^p(P, V) \to \Omega^p_{hor}(P, V)$ *je projektor, kde* $\Omega^p_{\mathrm{hor}}(P, V)$ *je prostor horizontálních p-forem.*

(ii) hor *je ekvivariantní vzhledem k pravé akci grupy G na $\Omega^p(P,V)$, tj.*

$$R_g^*(\operatorname{hor}\alpha) = \operatorname{hor}(R_g^*\alpha), \tag{5.4}$$

pro všechny $\alpha \in \Omega^p(P,V)$ a $g \in G$.

(iii) Operátor hor *zachovává p-formy typu ρ, tj.* $\operatorname{hor}(\Omega^p_\rho(P,V)) \subseteq \Omega^p_\rho(P,V)$.

(iv) Vzhledem k vnějšímu součinu (má-li pro konkrétní V smysl) se hor *chová přirozeně, tj.*

$$\operatorname{hor}(\alpha \mathbin{\dot\wedge} \beta) = \operatorname{hor}(\alpha) \mathbin{\dot\wedge} \operatorname{hor}(\beta), \tag{5.5}$$

pro všechny $\alpha, \beta \in \Omega^p(M,V)$, kde $\dot\wedge$ je definovaný s pomocí nějakého (daného) bilineárního násobení na V.

(v) Forma α je horizontální, právě tehdy když $i_W(\alpha) = 0$ pro všechna vertikální vektorové pole $W \in \mathfrak{X}(P)$. Ekvivalentně $i_{\#x}(\alpha) = 0$ pro všechny $x \in \mathfrak{g}$.

Důkaz. (*i*) je zřejmé, (*ii*) plyne z lemmatu 5.1.1, a přímá aplikace tohoto tvrzení na formu typu ρ dává (*iii*). Vlastnost (*iv*) je okamžitým důsledkem definice tenzorového součinu a jeho antisymetrizace, tj. vnějšího součinu. Ad (v): Že jde o podmínku nutnou je zřejmé. Předpokládejme, že α splňuje $i_W(\alpha) = 0$ pro všechna vertikální vektorová pole. Potom pro libovolné $X \in \mathfrak{X}(P)$:

$$i_X(\operatorname{hor}(\alpha)) = \operatorname{hor}(i_{\operatorname{hor}X}\alpha) = \operatorname{hor}(i_X\alpha). \tag{5.6}$$

Protože $i_W(i_X\alpha) = i_X(i_W\alpha) = 0$ pro všechna vertikální vektorová pole W, můžeme opakováním stejného argumentu dokázat, že platí tvrzení

$$\{\operatorname{hor}(\alpha)\}(X_1,\ldots,X_p) \equiv i_{X_p}\cdots i_{X_1}\operatorname{hor}(\alpha) = \operatorname{hor}(i_{X_p}\ldots i_{X_1}\alpha) = \alpha(X_1,\ldots,X_p), \tag{5.7}$$

kde jsme využili, že na z definice $\operatorname{hor}(\beta) = \beta$ pro všechny $\beta \in \Omega^0(P,V)$. Odtud $\operatorname{hor}(\alpha) = \alpha$ a dokázali jsme, že α je horizontální p-forma. Že je zmíněná podmínka ekvivalentní jednodušší podmínce $i_{\#x}(\alpha) = 0$ plyne z $C^\infty(P)$-linearity původní podmínky a vlastnosti, že každé vertikální vektorové pole W lze psát jako $W = f^\alpha \cdot \#t_\alpha$, kde $f^\alpha \in C^\infty(P)$ jsou unikátní hladké funkce. ■

5.2 Vnější kovariantní derivace

V předchozí sekci jsme záměrně pomlčeli o chování vnějšího diferenciálu d vzhledem k horizontální projekci forem. Důvod je zřejmý - vnější derivace horizontální formy není obecně horizontální. Pokud chceme tuto vlastnost, musíme začít používat jiný diferenciální operátor:

Definice 5.2.1. Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor vybavený konexí $A \in \Omega^1(P,\mathfrak{g})$. Operátor D **vnější kovariantní derivace** definujeme jako

$$D = \operatorname{hor}\circ d. \tag{5.8}$$

Tvrzení 5.2.2 (Vlastnosti vnější kovariantní derivace)**.** *Platí následující:*

(i) $D : \Omega^p(P,V) \to \Omega^{p+1}_{hor}(P,V)$ je $\mathbb{R}$-lineární operátor.

(ii) D je ekvivariantní vzhledem k pravé akci grupy G na $\Omega^p(P,V)$, tj.

$$R_g^* \circ D = D \circ R_g^* \tag{5.9}$$

(iii) D *zachovává formy typu* ρ*, tj.* $D(\Omega^p_\rho(P,V)) \subseteq \Omega^{p+1}_\rho(P,V)$.

(iv) *Na vnějším součinu (má-li pro konkrétní* V *smysl) se* D *chová jako*

$$D(\alpha \dot{\wedge} \beta) = D(\alpha) \dot{\wedge} \operatorname{hor}(\beta) + \hat{\eta}(\operatorname{hor}\alpha) \dot{\wedge} D(\beta). \tag{5.10}$$

pro všechny $\alpha, \beta \in \Omega^\bullet(P,V)$*, kde* $\dot{\wedge}$ *je vnější součin definovaný pomocí libovolné (dané) dodatečné algebraické struktury na* V.

Důkaz. Všechna tvrzení jsou přímočarou aplikací tvrzení 5.1.3 společně s obvyklou vlastností vnější derivace d ve tvaru: $R_g^* \circ d = d \circ R_g^*$. ∎

Ukazuje se, že vnější kovariantní derivace může být výhodná pro popis autoparalelních veličin dle definice 4.4.4. Výsledek shrnuje následující tvrzení:

Tvrzení 5.2.3. *Nechť* $\pi : P \to M$ *je hlavní fibrovaný prostor s konexí* $A \in \Omega^1(P,\mathfrak{g})$*. Nechť* $\Phi \in \Omega^0_\rho(P,V)$ *je veličina typu* ρ*, kde* (V,ρ) *je reprezentace* G *na* V.

Nechť $U \subseteq M$ *je otevřená množina v* M *a* $D\Phi = 0$ *na* $\mathcal{U} = \pi^{-1}(U)$*. Potom* Φ *je autoparalelní veličina podél libovolné křivky* $\gamma : I \to U$.

Důkaz. Nechť $\gamma : I \to U$ je libovolná křivka. Potom

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Phi \circ \gamma^h)(t) &= \dot{\gamma}^h(t).\Phi = \langle (d\Phi)|_{\gamma^h(t)}, \dot{\gamma}^h(t)\rangle = \langle (d\Phi)|_{\gamma^h(t)}, \operatorname{hor}(\dot{\gamma}^h(t))\rangle \\ &= \langle (D\Phi)|_{\gamma^h(t)}, \dot{\gamma}^h(t)\rangle = 0. \end{aligned} \tag{5.11}$$

To dokazuje, že Φ je autoparalelní podél $\gamma(t)$. ∎

5.3 Forma křivosti

Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor a $A \in \Omega^1(P,\mathfrak{g})$ je konexe na P. Ukázali jsme, že vertikální distribuce $\operatorname{Ver}(P)$ tvoří standardní příklad integrabilní distribuce. Je tedy přirozené prozkoumat rovněž integrabilitu horizontální distribuce odpovídající konexi A. Podle tvrzení 4.1.13 musíme prozkoumat $dA(X,Y)$ na dva lokální řezy horizontální distribuce. Definujeme

$$\Omega(X,Y) := dA(\operatorname{hor} X, \operatorname{hor} Y) \equiv DA(X,Y). \tag{5.12}$$

Potom $\Omega = DA \in \Omega^2(P,\mathfrak{g})$ se nazývá **forma křivosti konexe** A. Dostáváme následující:

Tvrzení 5.3.1 (Integrabilita horizontální distribuce)**.** *Horizontální distribuce* $\operatorname{Hor}(P)$ *je integrabilní, právě tehdy když má nulovou formu křivosti, tj.* $\Omega = 0$*. Také říkáme, že konexe* A *je **plochá**.*

Tvrzení 5.3.2 (Vlastnosti formy křivosti)**.** *Nechť* $\Omega = DA$ *je forma křivosti konexe* A*. Potom*

(i) Ω *je 2-forma s hodnotami v* $\mathfrak{g}$ *typu* Ad*, tj.* $\forall g \in G$ *platí*

$$R_g^*\Omega = Ad_{g^{-1}}\Omega. \tag{5.13}$$

(ii) Ω *je horizontální forma, tj.* $\operatorname{hor}\Omega = \Omega$.

Výpočet Ω vypadá na první pohled nepříjemně - pro danou formu konexe musíme nejprve vypočítat horizontální projektor hor : $\mathfrak{X}(P) \to \mathfrak{X}(P)$. Naštěstí se ukazuje, že existuje jednoduchá explicitní formulka pro výpočet Ω. Nejprve si vyslovíme dvě technická lemmata.

Lemma 5.3.3. *Nechť $\alpha \in \Omega^p_\rho(P,V)$ je p-forma typu ρ, kde (V,ρ) je konečně-rozměrná reprezentace Lieovy grupy G na prostoru V. Nechť $\rho' : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ je přidružená reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$, tj. $\rho'(x)(v) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \rho(\exp(tx))(v)$ pro všechny $x \in \mathfrak{g}$ a $v \in V$. Potom platí*

$$\mathcal{L}_{\#x}\alpha = -\rho'(x)\alpha, \tag{5.14}$$

pro všechny $x \in \mathfrak{g}$.

Důkaz. Stačí si uvědomit, že tok vektorového pole $\#x$ má tvar $\phi_t(p) = R_{\exp(tx)}(p)$. Potom

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_{\#x}\alpha)|_p &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi_t^*(\alpha|_{\phi_t(p)}) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} R^*_{\exp(tx)}(\alpha|_{p\cdot\exp(tx)}) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \rho(\exp(-tx))\alpha|_p = -\rho'(x)\alpha|_p,\end{aligned} \tag{5.15}$$

kde $x \in \mathfrak{g}$ a $p \in P$ byly libovolné. A máme dokázáno. ∎

Příklad 5.3.4. Pro formu konexe máme $A \in \Omega^1_{Ad}(P,\mathfrak{g})$. Přidružená reprezentace k Ad je ad, tj. $[x,y]_\mathfrak{g} \equiv ad_x(y) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} Ad_{\exp(tx)}(y)$. Forma konexe tedy splňuje rovnici $\mathcal{L}_{\#x}A = -[x,A]_\mathfrak{g}$.

Lemma 5.3.5. *Nechť $\alpha,\beta \in \Omega^1(P,\mathfrak{g})$ Potom pro každá dvě vektorová pole $X,Y \in \mathfrak{X}(P)$ platí*

$$[\alpha \wedge \beta]_\mathfrak{g}(X,Y) = [\alpha(X),\beta(Y)]_\mathfrak{g} + [\beta(X),\alpha(Y)]_\mathfrak{g}. \tag{5.16}$$

Speciálně $[\alpha \wedge \alpha]_\mathfrak{g}(X,Y) = 2[\alpha(X),\alpha(Y)]_\mathfrak{g}$.

Důkaz. Nechť $\{t_\mu\}_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ je libovolná báze $\mathfrak{g}$ a $\alpha = \alpha^\mu t_\mu$, $\beta = \beta^\nu t_\nu$. Potom máme

$$\begin{aligned}[\alpha \wedge \beta]_g(X,Y) &= (\alpha^\mu \wedge \beta^\nu)(X,Y)[t_\mu,t_\nu]_\mathfrak{g} = \{\alpha^\mu(X)\beta^\nu(Y) - \beta^\nu(X)\alpha^\mu(Y)\}[t_\mu,t_\nu]_\mathfrak{g} \\ &= [\alpha(X),\beta(Y)]_\mathfrak{g} + [\beta(X),\alpha(Y)]_\mathfrak{g}.\end{aligned} \tag{5.17}$$

Tvrzení pro dvě stejné 1-formy je zřejmé. ∎

Nyní již můžeme vyslovit tvrzení zásadní pro výpočet Ω.

Tvrzení 5.3.6 (Výpočet formy křivosti). *Nechť $A \in \Omega^1(P,\mathfrak{g})$ a $\Omega = DA$ je příslušná forma křivosti. Potom platí formulka*

$$\Omega = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A]_\mathfrak{g}. \tag{5.18}$$

*Této rovnici se někdy též říká **Cartanova strukturní rovnice**. Přímočarým důsledkem tohoto tvrzení je **Bianchiho identita** ve tvaru*

$$D\Omega = DDA = 0. \tag{5.19}$$

Důkaz. Jde o rovnost dvou 2-forem s hodnotami v $\mathfrak{g}$. Rovnost stačí ověřit na dvojici vektorových polí (X,Y), kde máme postupně

(i) (X, Y) jsou obě horizontální. Levá strana dává $\Omega(X, Y) = dA(\operatorname{hor} X, \operatorname{hor} Y) = dA(X, Y)$. Pravá strana je $dA(X, Y) + [A(X), A(Y)]_{\mathfrak{g}} = dA(X, Y)$, protože $A(X) = A(Y) = 0$.

(ii) (X, Y) jsou obě vertikální. Protože jde o rovnost $C^\infty(P)$-bilineárních objektů, stačí ji ověřit pouze pro $X = \#x$ a $Y = \#y$, kde $x, y \in \mathfrak{g}$. Jelikož $\operatorname{hor}(\Omega) = \Omega$, je podle tvrzení 5.1.3, bod (v), levá strana nulová. Pravá strana dává

$$
\begin{aligned}
(dA + \frac{1}{2}[A \wedge A]_{\mathfrak{g}})(\#x, \#y) &= dA(\#x, \#y) + [A(\#x), A(\#y)]_{\mathfrak{g}} \\
&= \#x.A(\#y) - \#y.A(\#x) - A([\#x, \#y]_{\mathfrak{g}}) + [x, y]_{\mathfrak{g}} \\
&= \#x.y - \#y.x - [x, y]_{\mathfrak{g}} + [x, y]_{\mathfrak{g}} = 0.
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

A tedy i pravá strana je nulová.

(iii) (X, Y), kde $X = \#x$ a Y je horizontální. Levá strana je nulová ze stejného důvodu jako v bodu (ii). Pravá strana dává

$$
\begin{aligned}
(dA + \frac{1}{2}[A \wedge A]_{\mathfrak{g}})(\#x, Y) &= dA(\#x, Y) + [A(\#x), A(Y)]_{\mathfrak{g}} \\
&= \#x.A(Y) - Y.A(\#x) - A([\#x, Y]) \\
&= (\mathcal{L}_{\#x}A)(Y) - Y.x = -[x, A(Y)]_{\mathfrak{g}} = 0,
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

kde jsme použili výsledek příkladu 5.3.4. A tedy i pravá strana je nulová.

Zbývá ukázat Bianchiho identitu. Přímo z definice dostáváme

$$
D\Omega = D(dA + \frac{1}{2}[A \wedge A]_{\mathfrak{g}}) = \frac{1}{2}D[A \wedge A]_{\mathfrak{g}} = \frac{1}{2}[DA \wedge \operatorname{hor}(A)] - [\operatorname{hor}(A) \wedge DA]_{\mathfrak{g}} = 0, \tag{5.22}
$$

kde jsme použili bod (iv) tvrzení 5.2.2 a vlastnost $\operatorname{hor}(A) = 0$. ∎

Poznámka 5.3.7. Pozor! Obecně *neplatí* tvrzení, že $D^2 = 0$.

Příklad 5.3.8 (Maurerova-Cartanova 1-forma)**.** Nechť G je libovolná Lieova algebra. Ukážeme si nyní příklad užitečné 1-formy s hodnotami v $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie}(G)$. **Levá Maurerova-Cartanova 1-forma** $\theta_L \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$ je definovaná vztahem

$$
\theta_L(x^L) := x, \tag{5.23}
$$

pro všechny $x \in \mathfrak{g}$. Zjevně tím definujeme hladkou 1-formu na G. Maurer-Cartanova forma má následující vlastnosti:

(i) θ_L splňuje **Maurer-Cartanovu rovnici**

$$
d\theta_L + \frac{1}{2}[\theta_L \wedge \theta_L]_{\mathfrak{g}} = 0. \tag{5.24}
$$

(ii) θ_L je levo-invariantní a Ad-ekvivariantní vůči pravé translaci, tj.

$$
L_g^*(\theta_L) = \theta_L, \quad R_g^*(\theta_L) = Ad_{g^{-1}}\theta_L \tag{5.25}
$$

Abychom dokázali (i), vezměme $x, y \in \mathfrak{g}$. Potom:

$$\begin{aligned} d\theta_L(x^L, y^L) &= x^L.\theta_L(y^L) - y^L.\theta_L(x^L) - \theta_L([x^L, y^L]) \\ &= -[x,y]_{\mathfrak{g}} = -[\theta_L(x^L), \theta_L(y^L)]_{\mathfrak{g}}. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Ad (ii): Levo-invariance je zřejmá, protože forma je levo-invariantní, je-li její vyčíslení na levo-invariantní vektorová pole konstantní. Vůči pravé akci dostáváme

$$\begin{aligned} (R_g^*\theta_L)|_h(x^L|_h) &= \theta_L|_{hg}(R_{g*}(x^L|_h)) = \theta_L|_{hg}(R_{g*}L_{h*}x) = \theta_L|_{hg}(L_{h*}R_{g*}x) \\ &= \theta_L|_{hg}(L_{hg*}(L_{g^{-1}*}R_{g*}x)) = \theta_L|_{hg}(\{Ad_{g^{-1}}(x)\}^L_{gh}) \\ &= Ad_{g^{-1}}(x) = (Ad_{g^{-1}}\theta_L|_h)(x^L|_h). \end{aligned} \tag{5.27}$$

Poznámka: Pochopitelně existuje i pravá Maurer-Cartanova forma θ_R, která je pravo-invariantní a Ad-ekvivariantní vůči levé translaci a splňuje Maurer-Cartanovu rovnici s opačným znaménkem.

Příklad 5.3.9 (**Triviální hlavní fibrace**)**.** Spočítáme si nyní nejobecnější formu konexe a křivosti na triviálním hlavním fibrovaném prostoru $P = M \times G$. Nejdřív je třeba si ujasnit, že pro každé $p = (m, g)$ máme $T_{(m,g)}P = T_mM \oplus T_gG$. Tečné vektory v (m, g) tedy budeme psát jako uspořádané dvojice vzhledem k tomuto rozkladu.

Jak vypadají v tomto případě fundamentální vektorová pole? Nechť $x \in \mathfrak{g}$. Potom:

$$\#x|_{(m,g)} = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(m, g \cdot \exp(tx)) = (0_m, \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g \cdot \exp(tx)) = (0_m, x^L|_g), \tag{5.28}$$

kde $x^L \in \mathfrak{X}(G)$ je levo-invariantní vektorové pole na G příslušné elementu $x \in \mathfrak{g}$.

Nechť $(X, y^L|_g) \in T_mM \oplus T_gG$ je nejobecnější tečný vektor z $T_{(m,g)}P$, tj. $X \in T_mM$ a $y \in \mathfrak{g}$. Působení pravé akce R_{h*} na $(X, y^L|_g)$ je následující:

$$R_{h*}(X, y^L|_g) = (X, R_{h*}(y^L|_g)) = (X, \{Ad_{h^{-1}}(y)\}^L|_{gh}) \tag{5.29}$$

Hledáme teď nejobecnější formu konexe $A \in \Omega^1(M \times G, \mathfrak{g})$. Jelikož $T^*_{(m,g)}P = T^*_mM \oplus T^*_gG$, můžeme psát $A|_{(m,g)}$ ve tvaru $A|_{(m,g)} = (A'|_{(m,g)}, A''|_{(m,g)})$, kde $A'|_{(m,g)} : T_mM \to \mathfrak{g}$ a $A''|_{(m,g)} : T_gG \to \mathfrak{g}$ jsou lineární zobrazení. Pozor, vidíme, že A' může záviset na g a A'' na m.

Z první vlastnosti formy konexe $A(\#x) = x$ a výše vypočítaného tvaru $\#x$ dostáváme

$$x = A|_{(m,g)}(\#x|_{(m,g)}) = A'|_{(m,g)}(0_m) + A''|_{(m,g)}(x^L|_g) = A''|_{(m,g)}(x^L|_g). \tag{5.30}$$

To nám ale říká, že $A''|_{(m,g)} = \theta_L|_g$ a tedy zrovna A'' na bodu m nezávisí. Chceme prozkoumat druhou vlastnost formy konexe, tj. $R_h^*(A|_{(m,gh)}) = Ad_{h^{-1}}A|_{(m,g)}$. Potom

$$(R_h^*(A|_{(m,gh)})(X, y^L|_g) = A|_{(m,gh)}(X, \{Ad_{h^{-1}}(y)\}^L|_{gh}) = A'|_{(m,gh)}(X) + Ad_{h^{-1}}(y). \tag{5.31}$$

Pravá strana dává požadované rovnice dává

$$\{Ad_{h^{-1}}A|_{(m,g)}\}(X, y^L|_g) = Ad_{h^{-1}}A'|_{(m,g)}(X) + Ad_{h^{-1}}(y). \tag{5.32}$$

Dostáváme tedy rovnost $A'|_{(m,gh)} = Ad_{h^{-1}}A'|_{(m,g)}$. Označme $A'|_m := A'|_{(m,e)}$. To nám definuje hladkou 1-formu $A' \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$. Potom zjevně $A'|_{(m,g)} = Ad_{g^{-1}}A'|_m$. Výsledná formulka pro formu konexe je tedy:

$$A|_{(m,g)} = Ad_{g^{-1}}\pi_1^*(A')|_{(m,g)} + \pi_2^*(\theta_L)|_{(m,g)}. \tag{5.33}$$

Prostor všech možných konexí na $P = M \times G$ je tedy prostor forem $\Omega^1(M, \mathfrak{g})$. Jak vypadá horizontální zdvih odpovídající konexi A? Pro $X \in \mathfrak{X}(M)$ můžeme psát

$$X^h|_{(m,g)} = (X'|_{(m,g)}, X''|_{(m,g)}), \quad X'|_{(m,g)} \in T_m M, \quad X''|_{(m,g)} \in T_g G. \tag{5.34}$$

Jelikož $X''|_{(m,g)} \in T_g G$, můžeme jej psát jako $y(m,g)^L|_g$, kde $y(m,g) \in \mathfrak{g}$. Podmínka projekce $\pi_*(X^h|_{(m,g)}) = X|_m$ dává $X'|_{(m,g)} = X|_m$. Podmínka $A|_{(m,g)}(X^h|_{(m,g)}) = 0$ dává

$$Ad_{g^{-1}} A'|_m(X|_m) + y(m,g) = 0. \tag{5.35}$$

A tedy $y(m,g) = -Ad_{g^{-1}}\langle A', X\rangle(m)$. Zjišťujeme, že horizontální zdvih má tvar

$$X^h|_{(m,g)} = (X|_m, -\{Ad_{g^{-1}}\langle A', X\rangle(m)\}^L|_g) = (X|_m, -\{\langle A', X\rangle(m)\}^R|_g). \tag{5.36}$$

Nyní bychom chtěli vypočítat formu křivosti Ω. Zde je velmi snadné vypočítat výsledek z definice. Potřebujeme totiž znát komutátor dvou horizontálních zdvihů. Přímým výpočtem

$$[X^h, Y^h]|_{(m,g)} = \big([X,Y]|_m, -(\{X.A'(Y) - Y.A'(X) + [A'(X), A'(Y)]_{\mathfrak{g}}\}(m))^R|_g\big). \tag{5.37}$$

Potom $\Omega(X^h, Y^h) = dA(X^h, Y^h) = -\langle A, [X^h, Y^h]\rangle$ má tvar

$$\begin{aligned} \{\Omega(X^h, Y^h)\}(m,g) &= Ad_{g^{-1}}\{X.A'(Y) - Y.A'(X) - A'([X,Y]) + [A'(X), A'(Y)]_{\mathfrak{g}}\}(m) \\ &= Ad_{g^{-1}}\{(dA' + \frac{1}{2}[A' \wedge A']_{\mathfrak{g}})(X,Y)\}(m). \end{aligned} \tag{5.38}$$

Vidím, že konexe A odpovídající formě $A' \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ je plochá, pokud $dA' + \frac{1}{2}[A' \wedge A']_{\mathfrak{g}} = 0$. To snadno splníme položením $A' = 0$, kde potom $A = \pi_2^*(\theta_L)$ se nazývá **kanonická plochá konexe** na $P = M \times G$.

Lemma 5.3.10 (Maurer-Cartan na $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$)**.** *Nechť $\varphi : M \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ je libovolné hladké zobrazení a θ_L je levá Maurer-Cartanova forma $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Potom $\varphi^*(\theta_L) = \varphi^{-1}d\varphi$, kde φ lze interpretovat jako element $\varphi \in \Omega^0(M, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ a tedy $d\varphi \in \Omega^1(M, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$.*

Z tohoto důvodu se běžně používá označení $\theta_L \equiv g^{-1}dg$. Je zjevné, že ve stejném tvaru platí pro libovolné maticové grupy (tedy podgrupy $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$).

Důkaz. Nechť $X \in T_m M$. Potom $\varphi^*(\theta_L)|_m(X) = \theta_L|_{\varphi(m)}(\varphi_*(X)) = L_{\varphi(m)^{-1}*}\varphi_*(X)$. Ale Lieova grupa $GL(n,\mathbb{R}) \subseteq \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ je otevřená podmnožina vektorového prostoru a tedy $\varphi_*(X) \in T_{\varphi(m)}\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \cong \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ je matice $n \times n$, a $L_{\varphi(m)^{-1}*}$ je obyčejné násobení maticí zleva.

Navíc se z definic snadno ukáže, že při ztotožnění $C^\infty(M, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})) \equiv \Omega^0(M, \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ dostáváme (explicitním výpočtem) $\varphi_*(X) = d\varphi|_m(X)$ pro všechny $X \in T_m M$. Tedy

$$\varphi^*(\theta_L)|_m(X) = \varphi(m)^{-1} \cdot d\varphi|_m(X), \tag{5.39}$$

což dokazuje tvrzení lemmatu. ■

Příklad 5.3.11 (Forma křivosti na $F(M)$)**.** Výsledků z předchozího příkladu můžeme využít k analýze případu hlavní fibrace repérů. Pro libovolné lokální pole repérů $f = (f_1, \dots, f_n)$ na U. Na $\pi^{-1}(U)$ jsme si zavedli funkce $y : \pi^{-1}(U) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ vztahem $e = f|_{\pi(e)} \cdot y(e)$ a psali jsme

$$\omega = y(e)^{-1} \cdot \pi^*(\hat{\omega}) \cdot y(e) + y^{-1}(e) \cdot dy|_e, \tag{5.40}$$

kde $\hat{\omega} \in \Omega^1(M, U)$ je lokální forma konexe na U příslušná poli repérů f. Na celou konstrukci ω můžeme pohlížet následovně. Sestrojíme zobrazení $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ vztahem

$$\psi(e) = (\pi(e), y(e)). \tag{5.41}$$

Jedná se o hladký ekvivariantní difeomorfismus $\pi^{-1}(U)$ a triviální hlavní fibrace $U \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. To je snadný důsledek toho, že $\psi = \phi^{-1}$ pro ekvivariantní trivializační zobrazení $\phi : U \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \pi^{-1}(U)$ odpovídající hladkému řezu $\sigma(m) = f|_m$ ve shodě s tvrzením 2.3.6. Protože $\hat{\omega} \in \Omega^1(U, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$, můžeme na ve shodě s předchozím příkladem sestrojit na triviální fibraci $U \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ formu konexe A podle vztahu (5.33), tj.

$$A|_{(m,\mathbf{A})} = Ad_{\mathbf{A}^{-1}} \pi_1^*(\hat{\omega})|_{(m,\mathbf{A})} + \pi_2^*(\theta_L)|_{(m,\mathbf{A})}, \tag{5.42}$$

pro všechny $(m, \mathbf{A}) \in U \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Snadno se ukáže, že ω sestrojená nahoře je potom prostě pullback A zobrazením ψ, tj. $\omega = \psi^*(A)$. To plyne z vlastností $\pi_1 \circ \psi = \pi$, $\pi_2 \circ \psi = y$ a zejména z lemmatu 5.3.10. Protože ψ je ekvivariantní difeomorfismus, snadno se nahlédne, že horizontální zdvihy vzhledem k obou konexím jsou ψ-vztažené, tj. $\psi_*(X^h|_e) = X^h_A|_{\psi(e)}$, kde X^h je zdvih vzhledem ke konexi ω a X^h_A vzhledem k A. Z definice formy konexe je zřejmé, že platí vztah $\Omega = \psi^*(\Omega_A)$. Dostáváme tedy rovnici

$$\{\Omega(X^h, Y^h)\}(e) = \Omega_A(X^h_A, Y^h_A) = Ad_{y(e)^{-1}}\{(d\hat{\omega} + \frac{1}{2}[\hat{\omega} \wedge \hat{\omega}]_{\mathfrak{g}})(X, Y)\}(m). \tag{5.43}$$

Nyní si stačí vzpomenout na tvrzení 3.2.2 a Cartanovy strukturní rovnice, odkud dostáváme vztah $d\hat{\omega} + \frac{1}{2}[\hat{\omega} \wedge \hat{\omega}]_{\mathfrak{g}} = \hat{\Omega}$, kde $\hat{\Omega}$ je lokální forma křivosti (vyrobená z Riemannova tenzoru). Máme tedy rovnici, která nám říká (s použitím definice Ad v maticové grupě):

$$\{\Omega(X^h, Y^h)\}(e) = y(e)^{-1} \cdot \hat{\Omega}(X, Y)(m) \cdot y(e) = \{\big(y^{-1} \cdot \pi^*(\hat{\Omega}) \cdot y\big)(X^h, Y^h)\}(e). \tag{5.44}$$

Hodnoty formy konexe stačí ověřit na horizontální zdvihy vektorových polí a platí tedy rovnost:

$$\Omega = y^{-1} \cdot \pi^*(\hat{\Omega}) \cdot y \tag{5.45}$$

Víme, že levá strana je z definice dobře definovaná a tedy nezávislá od výběru repérového pole f, které používáme na pravé straně. Stejně jako pro formu konexe můžeme původní formy lokální formy konexe (a tedy Riemannův tenzor) získat pomocí pullbacku řezem odpovídajícím repérovému poli f: $\hat{\Omega} = \sigma^*(\Omega)$, kde $\sigma(m) = f|_m$ pro všechny $m \in U$. Zjišťujeme tedy, že pro $F(M)$ je forma křivosti vskutku formou křivosti!

5.4 Kovariantní derivace forem typu ρ

V předchozí sekci jsme ukázali, že kovariantní derivaci 1-formy A lze psát snadno pomocí rovnice (5.18), kde explicitně nevystupuje horizontální distribuce odpovídající konexi A. Můžeme tedy doufat v podobné zjednodušení pro větší třídu diferenciálních forem na P. Ukazuje se, že dobrým kandidátem jsou staré dobré p-formy typu ρ z podsekce 4.4. Ukazuje se však, že musíme přidat jeden předpoklad (jehož ověření už znalost horizontální distribuce vyžaduje).

Tvrzení 5.4.1. *Nechť $\alpha \in \Omega^p_\rho(P, V)$ je* horizontální *p-forma typu ρ, kde (V, ρ) je daná konečněrozměrná reprezentace Lieovy grupy G na prostoru V. Potom*

$$D\alpha = d\alpha + \rho'(A) \dot{\wedge} \alpha, \tag{5.46}$$

speciálně pro všechny *veličiny Φ typu ρ platí $D\Phi = d\phi + \rho'(A)\Phi$. Zde ρ' je přidružená reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ na V a $\rho'(A) \dot{\wedge} \alpha = A^\mu \wedge \alpha^i \cdot \rho'(t_\mu)E_i$, kde $\{t_\mu\}_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ a $\{E_i\}_{i=1}^{\dim V}$ jsou libovolné báze $\mathfrak{g}$, respektive V. Pro $p = 0$ nepíšeme zbytečně symbol $\dot{\wedge}$.*

Důkaz. Důkaz je podobný ověření (5.18). Dosazujeme vektorová pole $(X_1, \dots, X_{p+1})$. Jsou-li všechna horizontální, máme $\rho'(A) \dot\wedge \alpha = 0$, protože v každém sčítanci ve vnějším součinu poleze horizontální vektorové pole do A a dá nulu. Potom $D\alpha(X_1, \dots, X_{p+1}) = d\alpha(X_1, \dots, X_{p+1})$ z definice D.

Jsou-li mezi vektorovými poli alespoň dvě vertikální, dají obě strany nulu. Levá strana z definice, napravo máme $d\alpha$ a $\rho'(A) \dot\wedge \alpha$. V obou z nich musí (po dosazení do obvyklých formulek pro d a vnější součin) alespoň jedno z vertikálních vektorových polí vlézt do α. Protože je α horizontální, dává podle tvrzení 5.1.3 bod (v) nulu.

Zbývá tedy dokázat tvrzení pro právě jedno vertikální vektorové pole. Můžeme předpokládat, že $X_1 = \#x$. Levá strana je opět rovna nule a vpravo dostáváme

$$\begin{aligned}(d\alpha)(\#x, X_2, \dots, X_{p+1}) &= (i_{\#x} d\alpha)(X_2, \dots, X_{p+1}) = (\mathcal{L}_{\#x}\alpha - d i_{\#x}\alpha)(X_2 \dots, X_{p+1}) \\ &= (\mathcal{L}_{\#x}\alpha)(X_2, \dots, X_{p+1}),\end{aligned} \tag{5.47}$$

kde jsme využili horizontality $i_{\#x}\alpha = 0$. Pro druhý člen na pravé straně máme

$$(\rho'(A) \wedge \alpha)(\#x, X_2, \dots, X_{p+1}) = \rho'(A(\#x))\alpha(X_2, \dots, X_{p+1}) = \rho'(x)\alpha(X_2, \dots, X_{p+1}), \tag{5.48}$$

kde do totální antisymetrizace ve vnějším součinu přispěje pouze jeden člen opět z důvodu horizontality α. Pravá strana je tedy nulová pokud $\mathcal{L}_{\#x}\alpha + \rho'(x)\alpha = 0$. Ale to je dle lemmatu 5.3.3 důsledek toho, že α je typu ρ.

Každá veličina typu ρ je 0-forma typu ρ a tedy automaticky horizontální. Právě dokázané lze tedy na 0-formy aplikovat vždy. ■

Důsledek 5.4.2 (Vyjádření Bianchiho identity)**.** *Forma křivosti Ω konexe A splňuje rovnici*

$$d\Omega + [A \wedge \Omega]_{\mathfrak{g}} = 0. \tag{5.49}$$

Důkaz. Forma křivosti je horizontální 2-forma typu Ad. Zde $\rho' = ad$ a tedy máme $\rho'(A) \dot\wedge \Omega = [A \wedge \Omega]_{\mathfrak{g}}$. Potom zbývá aplikovat předchozí tvrzení a použít Bianchiho identitu (5.19). ■

Příklad 5.4.3 (Vnější kovariantní derivace vektorových polí)**.** Ukázali jsme si, že vektorová pole lze interpretovat jako veličinu typu ρ, kde $V = \mathbb{R}^n$ a $\rho(\mathbf{A})x = \mathbf{A}.x$. Ukažme si, jak explicitně vypadá vnější kovariantní derivace Φ_X, kde $X \in \mathfrak{X}(M)$ je odpovídající vektorové pole.

Budeme pracovat lokálně na $\pi^{-1}(U)$, kde $(U, (x^1, \dots, x^n))$ jsou lokální souřadnice na M. Nechť $X = X^i\partial_i$. Ukázali jsme, že potom $\Phi_X(\partial|_m) = (X^1(m), \dots, X^n(m))^T$. Ukážeme si, že platí následující rovnost:

$$\langle D(\Phi_Y), X^h \rangle = \Phi_{\nabla_X Y}, \tag{5.50}$$

kde ∇ je afinní konexe kterou máme na $F(M)$ kódovanou pomocí formy konexe ω. Minule jsme ukázali, že horizontální zdvih $X = X^i\partial_i$ má lokálně explicitní tvar

$$X^h|_e = X^i(\pi(e))\{\partial_i|_e - \Gamma^a_{li}(\pi(e))y^l_b(e)\partial^b_a|_e\}, \tag{5.51}$$

kde $e = \partial|_{\pi(e)} \cdot y(e)$. Veličina Φ_Y je definována pomocí komponent $Y = Y^i\partial_i$ vztahem

$$\Phi_Y(\partial|_m) = (Y^1(m), \dots, Y^n(m))^T. \tag{5.52}$$

Pro obecný bod $e \in \pi^{-1}(U)$ tedy dostáváme vyjádření

$$\begin{aligned}\Phi_Y(e) &= \Phi_Y(\partial|_{\pi(e)} \cdot y(e)) = \rho(y(e)^{-1})\Phi_Y(\partial|_{\pi(e)}) = y(e)^{-1}.(Y^1(\pi(e)), \dots, Y^n(\pi(e)))^T \\ &= (y^{-1})^i_j(e) \cdot Y^j(\pi(e))\, E_i.\end{aligned} \tag{5.53}$$

Odtud dostáváme následující vztah pro pro vnější kovariantní derivaci:

$$\langle D(\Phi_Y)^i, X^h\rangle(e) = \{X^h.\Phi^i_Y\}(e) = \{X^h.(y^{-1})^i_j\}(e)\cdot Y^j(\pi(e)) + (y^{-1})^i_j(e)\cdot\{X^h.(Y^j\circ\pi)\}(e). \tag{5.54}$$

Druhý člen je snadný, protože pro každé $f \in C^\infty(M)$ máme $X^h.(f\circ\pi) = (X.f)\circ\pi$, což plyne z vlastnosti $X^h \sim_\pi X$. V prvním se využije obvyklá rovnice:

$$X^h.(y^{-1})^i_j = -(y^{-1})^i_k\,(X^h.y^k_l)\,(y^{-1})^l_j. \tag{5.55}$$

Toto platí pro libovolnou funkci s hodnotami v maticích a libovolné vektorové pole. Potom se využije, že $X^h.y^k_l = \langle dy^k_l, X^h\rangle$ jsou přesně komponenty X^h příslušné ∂^k_l a tedy

$$(X^h.y^k_l)(e) = -X^q(\pi(e))\,\Gamma^k_{mq}(\pi(e))\,y^m_l(e). \tag{5.56}$$

Dosazením zpět dostáváme vyjádření

$$\{X^h.(y^{-1})^i_j\}(e) = X^q(\pi(e))\,(y^{-1})^i_k(e)\,\Gamma^k_{jq}(\pi(e)). \tag{5.57}$$

Konečně můžeme dosadit do výrazu pro kovariantní derivaci a obdržíme

$$\langle D(\Phi_Y)^i, X^h\rangle(e) = X^q(\pi(e))\{(y^{-1})^i_j(e)(Y^j_{,q})(\pi(e)) + (y^{-1})^i_k(e)\Gamma^k_{jq}(\pi(e))Y^j(\pi(e))\}. \tag{5.58}$$

Hledáme $V \in \mathfrak{X}(M)$ splňující rovnici $\langle D(\Phi_Y), X^h\rangle(e) = \Phi_V(e)$. Komponenty $V^i(m)$ dostaneme vyčíslením pravé strany na $e = \partial|_m$ a následným odečtem i-tého prvku výsledného vektoru v $\mathbb{R}^n$. Dosazením do levé strany potom

$$\begin{aligned} V^i(m) &= \langle D(\Phi_Y)^i, X^h\rangle(\partial|_m) = X^q(m)\{\delta^i_j Y^j_{,q}(m) + \delta^i_k\Gamma^k_{jq}(m)Y^j(m)\} \\ &= \{X^q(Y^i_{,q} + \Gamma^i_{jq}Y^j)\}(m) \equiv (\nabla_X Y)^i(m). \end{aligned} \tag{5.59}$$

Dokázali jsme tedy rovnost (5.50). Isomorfismus $\mathfrak{X}(M) \cong \Omega^0_\rho(F(M), \mathbb{R}^n)$ nám tedy umožňuje přímým výpočtem pomocí D vyjádřit kovariantní derivaci ∇_X s kterou jsme začali v první řadě.

Jelikož pro horizontální formu typu ρ je její kovariantní derivace zřejmě opět horizontální forma typu ρ, můžeme se ptát co se stane, když znovu aplikujeme D a použijeme stejný vzorec.

Tvrzení 5.4.4 (Ricciho identita)**.** *Pro libovolnou horizontální p-formu α typu ρ, kde (V,ρ) je konečně-rozměrná reprezentace G na V, platí identita*

$$D^2\alpha = \rho'(\Omega)\,\dot\wedge\,\alpha. \tag{5.60}$$

kde $\Omega \in \Omega^2(P,\mathfrak{g})$ je forma křivosti. Speciálně pro všechny $\Phi \in \Omega^0_\rho(P,V)$ platí $D^2\Phi = \rho'(\Omega)\Phi$.

Důkaz. Dvojitou aplikací (5.46) dostáváme výraz

$$\begin{aligned} D^2\alpha &= D(d\alpha + \rho'(A)\,\dot\wedge\,\alpha) = d(d\alpha + \rho'(A)\,\dot\wedge\,\alpha) + \rho'(A)\wedge d\alpha + \rho'(A)\,\dot\wedge\,\alpha) \\ &= \rho'(dA)\,\dot\wedge\,\alpha + \rho'(A)\,\dot\wedge\,(\rho'(A)\,\dot\wedge\,\alpha). \end{aligned} \tag{5.61}$$

Přímo z definice se dá s užitím definice reprezentace Lieovy algebry ukázat, že

$$\rho'(A)\,\dot\wedge\,(\rho'(A)\,\dot\wedge\,\alpha) = \frac{1}{2}\rho'([A\wedge A]_{\mathfrak{g}})\,\dot\wedge\,\alpha. \tag{5.62}$$

Po dosazení zpět tedy dostáváme $D^2\alpha = \rho'(dA + \frac{1}{2}[A\wedge A]_{\mathfrak{g}})\,\dot\wedge\,\alpha = \rho'(\Omega)\,\dot\wedge\,\alpha$. ■

Příklad 5.4.5 (Ricciho identita pro $F(M)$)**.** Uvažujme opět $P = F(M)$ s konexí ω odpovídající ∇ a $(V, \rho) = (\mathbb{R}^n, \rho)$, kde $\rho(\mathbf{A})x = \mathbf{A}.x$, tak že $\Omega^0_\rho(F(M), \mathbb{R}^n) \cong \mathfrak{X}(M)$. Použitím (5.50) a předchozího tvrzení dostáváme pro $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ rovnost

$$\Phi_{\nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]} Z} = \Omega(X^h, Y^h).\Phi_Z \tag{5.63}$$

Komponenty odpovídajících vektorových polí v bodě m dostaneme vyčíslením obou funkcí v bodě $e = \partial|_m$ a odečtem i-té komponenty. S využitím (5.44) potom dostáváme

$$\{\nabla^i_X(\nabla_Y Z) - \nabla^i_Y(\nabla_X Z) - \nabla^i_{[X,Y]} Z\}(m) = \{\hat{\Omega}^i_j(X, Y)\}(m) Z^j(m) = \langle dx^i, R(X, Y)Z\rangle. \tag{5.64}$$

Dostáváme tedy přesně to, čemu se říká Ricciho identita (pro nás definice Riemannova tenzoru).

5.5 Integrabilita paralelního přenosu, holonomie

Na paralelní přenos, t.j. horizontální zdvih křivek se můžeme dívat následovně. Zvolíme si libovolné vlákno P_m pro $m \in M$ a bod $p \in P$. Chceme definovat přenos bodu p do jiného vlákna $P_{m'}$ pro $m' \in M$. Zvolím si (po částech hladkou) křivku $\gamma : I \to M$ s vlastností $\gamma(0) = m$ a $\gamma(1) = m'$.

Podle věty 4.3.5 existuje unikátní křivka $\gamma^h : I \to M$ s vlastností $\gamma^h(0) = p$ a $\pi \circ \gamma^h = \gamma$. Z konstrukce je $\gamma^h(1) \in P_{m'}$ a my tedy můžeme definovat paralelní přenos jako $\tau^\gamma_{m,m'}(p) = \gamma^h(1)$. Pro danou křivku γ takhle můžu zobrazit každý bod $p \in P_m$ dostávám tedy (hladké) zobrazení obou vláken $\tau^\gamma_{m,m'} : P_m \to P_{m'}$. Snadno se ukáže, že je to dokonce difeomorfismus, protože horizontálními zdvihy křivky $\gamma'(t) := \gamma(1-t)$ s použitím jednoznačnosti můžu definovat inverzní zobrazení, t.j. $\tau^{\gamma'}_{m',m} = (\tau^\gamma_{m,m'})^{-1}$.

Nyní se můžeme oprávněně ptát, jestli definice $\tau^\gamma_{m,m'}$ závisí od výběru křivky γ spojující body m a m'. Odpověď poskytneme v této sekci. Nejprve si musíme trošičku vylepšit vlastnosti integrabilních distribucí.

Definice 5.5.1. Nechť M je hladká varieta. Potom $\mathcal{F}$ se nazývá k**-rozměrná foliace** M, pokud $\mathcal{F}$ je soubor vzájemně disjunktních neprázdných souvislých vnořených k-rozměrných podvariet M, takových, že $M = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$.

Každý bod $m \in M$ navíc musí mít souřadnicové okolí $(U, \varphi) = (U, (x^1, \dots, x^n))$ takové, že $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ je n-rozměrná krychle a pro každé $F \in \mathcal{F}$ je $F \cap U$ buď prázdná množina, nebo spočetné sjednocení k-rozměrných „plátků“ ve tvaru $S = \{q \in U \mid x^{k+1}(q) = c^1(q), \dots x^n = c^n(q)\}$. Podvarietám $F \in \mathcal{F}$ se říká **listy foliace**.

Frobeniova věta nám dávala integrabilitu distribuce, t.j. každý bod leží v nějaké integrální podvarietě. Následující věta nám dává mnohem silnější tvrzení.

Věta 5.5.2 (Globální Frobeniova věta)**.** *Nechť D je integrabilní k-rozměrná distribuce. Potom*

$$\mathcal{F}_D = \{N \subseteq M \mid N \textit{ je maximální souvislá integrální podvarieta distribuce } D\}. \tag{5.65}$$

je k-rozměrná foliace variety M.

Maximalita znamená, že $N \in \mathcal{F}_D$ není obsažená v žádné další souvislé integrální podvarietě. Vzhledem k vlastnostem $\mathcal{F}_D$ je každý bod $m \in M$ obsažený *právě v jedné* souvislé maximální integrální podvarietě, kterou můžeme označovat jako N_m. Platí tedy například pravidlo, že pokud $m' \in N_m$, máme $N_m = N_{m'}$. Horizontální distribuce má ještě jednu význačnou vlastnost. Je totiž G-invariantní. V následujícím se nám bude hodit následující pomocné lemma:

Lemma 5.5.3. *Nechť D je libovolná k-rozměrná integrabilní hladká distribuce v P, která je G-invariantní ve smyslu $R_{g*}(D_p) = D_{p\cdot g}$ pro všechny $p \in P$ a $g \in G$.*

Potom příslušná foliace $\mathcal{F}_D$ splňuje vlastnost $N_{p\cdot g} = R_g(N_p)$, tj. listy foliace příslušné p a $p \cdot g$ jsou vzájemně difeomorfní a vztaženy akcí grupy G.

Nyní si musíme ujasnit, že otázka nezávislosti paralelního přenosu z daného vlákna P_m do nějakého dalšího vlákna P'_m na křivce γ se dá ekvivalentně přeformulovat jako nezávislost paralelního přenosu z P_m do P_m pomocí uzavřené smyčky $\gamma : I \to M$, tj. $\gamma(0) = \gamma(1) = m$.

Lemma 5.5.4. *Paralelní přenos $\tau^{\gamma}_{m,m'}$ pro daný bod $m \in M$ a libovolný bod $m' \in M$ nezávisí na volbě křivky $\gamma : I \to M$ s $\gamma(0) = m$ a $\gamma(1) = m'$, právě tehdy když pro každou uzavřenou smyčku $\gamma' : I \to M$, takovou že $\gamma'(0) = \gamma'(1) = m$ máme $\tau^{\gamma'}_{m,m} = 1_{P_m}$.*

Důkaz. Jeden směr je triviální. Předpokládejme, že paralelní přenos do libovolného bodu m' nezávisí na volbě γ, a nechť γ' je smyčka s počátkem v M. Ale konstantní křivka $\gamma_c(t) = m$ pro všechny $t \in I$ má pro každé p horizontální zdvih v podobě konstantní křivky v p. Podle předpokladu tedy

$$\tau^{\gamma'}_{m,m}(p) = \tau^{\gamma_c}_{m,m}(p) = p. \tag{5.66}$$

Opačně, nechť γ_1 a γ_2 jsou dvě křivky spojující m a m', nechť $p \in P_m$ a $p_1 = \gamma_1^h(1)$, $p_2 = \gamma_2^h(1)$. Musíme ukázat, že $p_1 = p_2$. Křivka $\gamma' = \gamma_2^{-1} \star \gamma_1$ definovaná vztahem

$$\gamma'(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) \; t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2(1-t)) \; t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \tag{5.67}$$

je uzavřená smyčka v počátkem v m. Protože p_2 a p_1 jsou ve stejném vlákně, máme $p_2 = p_1 \cdot g$ pro unikátní $g \in G$. Musíme nyní sestrojit horizontální zdvih γ' startující z p. Protože γ_2^h končí v jiném bodě než γ_1^h, nemůžeme složit γ_1^h s $(\gamma_2^h)^{-1}$. Můžeme ale uvažovat křivku $\hat{\gamma}_2^h(t) = \gamma_2^h(t) \cdot g$, která už splňuje $\hat{\gamma}_2^h(1) = \gamma_1^h(1)$. Navíc je horizontální, protože $\mathrm{Hor}_{p\cdot g}(P) = R_{g*}(\mathrm{Hor}_p(P))$. Snadno se nahlédne, že $\gamma'^h := (\hat{\gamma}_2^h)^{-1} \star \gamma_1^h$ je horizontální zdvih γ' startující z bodu p. Potom

$$\tau^{\gamma'}_{m,m}(p) = \gamma'^h(1) = \hat{\gamma}_2^h(0) = \gamma_2^h(0) \cdot g = p \cdot g. \tag{5.68}$$

Podle předpokladu je ale $\gamma^{\gamma'}_{m,m} = 1_{P_m}$, odkud plyne $p = p \cdot g$. Jelikož je akce volná, dostáváme $g = e$ a konečně $p_2 = p_1$. ■

Nyní si musíme pořádně rozmyslet, jak funguje horizontální zdvih křivek ve vztahu k *integrabilní* horizontální distribuci. Nechť $m \in M$ je fixní bod. Předpokládejme, že $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ definuje integrabilní distribuci, tj. $\Omega = 0$. Ukážeme si, že pro body dostatečně blízko $m \in M$ je paralelní přenos **integrabilní**, tj. nezávisí na volbě křivky, která daný bod m' spojuje s M.

Tvrzení 5.5.5. *Nechť $m \in M$. Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor. Potom existuje okolí U bodu m, že pro libovolné dvě křivky $\gamma, \gamma' : I \to U$ splňující $\gamma(0) = \gamma'(0) = q$ a $\gamma(1) = \gamma'(1) = q'$ platí $\tau^{\gamma}_{q,q'} = \tau^{\gamma'}_{q,q'}$.*

Důkaz. Zvolíme si $p \in \pi^{-1}(m)$ libovolný. Jelikož Hor je integrabilní distribuce, existuje maximální souvislá integrální podvarieta N_p příslušná bodu p. Nechť $\pi' \equiv \pi|_{N_p} : N_p \to M$ je restrikce π na podvarietu N_p. Z horizontality $T_q(N_p) \equiv \mathrm{Hor}_q(P)$ plyne, že π' je lokální difeomorfismus. Existuje tedy okolí $V \subseteq N_p$ bodu p a $U \subseteq M$ bodu $m = \pi(p)$, že $\pi'|_V : V \to U$ je difeomorfismus. Je-li $\gamma : I \to U$, definujeme $\gamma^h(t) = (\pi'|_V)^{-1}(\gamma(t))$. Máme tedy $\gamma^h : I \to V \subseteq N_p$.

Po složení s vnořením $N_p \hookrightarrow P$ dostáváme hladkou křivku která je v každém bodě horizontální a projektuje se zpět na γ. Nechť $\gamma^h(0) = r$. Je-li γ' libovolná jiná křivka se stejnými koncovými body, máme $\gamma'^h(0) = (\pi'|_V)^{-1}(\gamma'(0)) = (\pi'|_V)^{-1}(\gamma(0)) = \gamma^h(0) = r$, a stejně se ukáže, že mají stejný koncový bod. To dokazuje $\tau^{\gamma}_{q,q'}(r) = \tau^{\gamma'}_{q,q'}(r)$. Ale zbytek plyne z G-ekvivariance paralelního přenosu. Je-li $r' \in P_q$, potom existuje unikátní $g \in G$, že $r' = r \cdot g$. Platí

$$\tau^{\gamma}_{q,q'}(r') = \tau^{\gamma}_{q,q'}(r) \cdot g = \tau^{\gamma'}_{q,q'}(r) \cdot g = \tau^{\gamma'}_{q,q'}(r'). \tag{5.69}$$

A máme dokázáno! ■

Vidíme, že pro křivky v dostatečně malém okolí bodu m zaručí integrabilita Hor nezávislost paralelního přenosu na křivkách v tomto okolí. Můžeme se tedy oprávněně ptát, jak je to pro obecnou křivku spojující libovolné dva body q a q'. Obecná odpověď je záporná, jak si ukážeme na příkladu. Pro správné tvrzení si musíme definovat následující pojem.

Definice 5.5.6. Nechť M je hladká varieta a nechť $\gamma, \gamma' : I \to M$ jsou dvě hladké křivky, takové že $\gamma(0) = \gamma'(0)$ a $\gamma(1) = \gamma'(1)$, tj. jejich začátky a konce jsou stejné.

Řekneme, že γ a γ' jsou **homotopické**, existuje-li hladké zobrazení $h : I \times I \to I$, takové že

(i) $h(t, 0) = \gamma(t)$, $h(t, 1) = \gamma'(t)$. Jinými slovy $h|_{I\times\{0\}} = \gamma$ a $h|_{I\times\{1\}} = \gamma'$.

(ii) $h(0, s) = \gamma(0) = \gamma'(0)$ a $h(1, s) = \gamma(1) = \gamma'(1)$. Jinak řečeno, dostáváme třídu hladkých křivek $h_s(t) := h(t, s)$, které všechny začínají a končí ve stejném bodě a $h_0 = \gamma$ a $h_1 = \gamma'$.

Budeme psát $\gamma \sim_h \gamma'$. Speciálně pokud γ je smyčka (tedy $\gamma(0) = \gamma(1)$), řekneme, že γ je **homotopická nule**, pokud $\gamma \sim_h 0$, kde $0(t) \equiv \gamma(0) \equiv \gamma(1)$ je konstantní křivka.

Poznámka 5.5.7. Všimněte si, že předpokládáme hladkost homotopie h. Většinou se homotopie definují pouze jako spojitá zobrazení. Zejména jsou zajímavé prostory, kde je každá (spojitá) smyčka (spojitě) homotopická nule, kterým se říká **jednoduše souvislé**. Kupodivu se dá ukázat, že tato vlastnost je plně ekvivalentní tvrzení, že každá hladká smyčka je hladce homotopická nule.

Nyní již můžeme vyslovit následující tvrzení, které dává správnou odpověď na předchozí otázku.

Tvrzení 5.5.8. *Nechť $m \in M$ je libovolný bod, a $\pi : P \to M$ nechť je hlavní fibrovaný prostor vybavený plochou konexí $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$. Nechť γ a γ' jsou libovolné hladké křivky takové, že $\gamma(0) = \gamma'(0) = m$ a $\gamma(1) = \gamma(1') = m'$. Navíc předpokládejme, že $\gamma \sim_h \gamma'$. Potom $\tau^{\gamma}_{m,m'} = \tau^{\gamma'}_{m,m'}$.*

Důkaz. Důkaz tvrzení si pouze načrtneme. Vezmeme homotopii $h : I \times I \to M$ dvou zadaných křivek γ a γ'. Nechť $h_s = h(\cdot, s)$ a $h'_t = h(t, \cdot)$ jsou dvě příslušné třídy hladkých křivek.

S využitím kompaktnosti 'mýdlové bubliny' $h(I \times I) \subseteq M$ a tvrzení 5.5.5 vyrobíme rozdělení $[0, 1] \subseteq I$ a v podobě $0 = t_1 < \cdots < t_q = 1$ a $0 = s_1 < \cdots < s_r = 1$, tak, že paralelní přenos po dvou (po částech hladkých) křivkách $h_{s_i}|_{[t_j,t_{j+1}]}$ a $h'_{t_{j+1}}|_{[s_i,s_{i+1}]}$ (tj. po dolní a pravé hraně obdélníku $h([t_j, t_{j+1}] \times [s_i, s_{i+1}])$) je stejný jako po dvou křivkách $h'_{t_j}|_{[s_i,s_{i+1}]}$ a $h_{s_{i+1}}|_{[t_j,t_{j+1}]}$ (tj. po levé a horní straně téhož obdélníku). S použitím tohoto umíme ukázat, že paralelní přenos podél křivky $\gamma = h_0 = h_{s_1}$ je stejný jako podél h_{s_2}, který je stejný jako podél h_{s_3} atd.. ■

Příklad 5.5.9 (Neintegrabilita pro integrabilní distribuci)**.** Ukážeme si, že opravdu musíme uvažovat pouze vzájemně homotopní křivky. Vezmeme si M v podobě pláště kužele bez špičky (jako podmnožiny $\mathbb{R}^3$) a $\pi : F(M) \to M$. Konexi A bude odpovídat standardní Levi-Civitova konexe ∇ odpovídající indukované metrice na $M \subseteq \mathbb{R}^3$. Nechť a je výška kužele a R jeho poloměr. Lokální souřadnice na M jsou (z, φ), kde $z \in (0, a)$ udává jak vysoko nad rovinou (x, y) se nacházíme a φ je standardní polární souřadnice. Vložení M do $\mathbb{R}^3$ má v souřadnicích tvar

$$x = \frac{R}{a}(a - z)\cos(\varphi), \quad y = \frac{R}{a}(a - z)\sin(\varphi), \quad z = z. \tag{5.70}$$

Indukovaná metrika na M dopadne následovně. Nejprve si vezmeme standardní metriku v E^3 zapsanou v cylindrických souřadnicích (r, φ, z):

$$g_{E^3} = dr \otimes dr + dz \otimes dz + r^2 d\varphi \otimes d\varphi. \tag{5.71}$$

Přechod (pullback) do kužele M pak spočívá v substituci $r(z) = \frac{R}{a}(a - z)$. Potom $dr = -\frac{R}{a}dz$ a dostáváme

$$g = (R/a)^2\{(1 + (a/R)^2)dz \otimes dz + (z - a)^2 d\varphi \otimes d\varphi\}. \tag{5.72}$$

Nyní je celkem přímočaré spočítat Christoffelovy symboly Levi-Civitovy konexe podle obvyklých formulek. Dostaneme následující:

$$\Gamma^{\varphi}_{z\varphi} = (z - a)^{-1}, \quad \Gamma^{z}_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{1 + (a/R)^2}(z - a). \tag{5.73}$$

Jinými slovy, netriviální jsou pouze následující kovariantní derivace:

$$\nabla_{\partial_z}(\partial_\varphi) = \nabla_{\partial_\varphi}(\partial_z) = (z - a)^{-1}\partial_\varphi, \quad \nabla_{\partial_\varphi}(\partial_\varphi) = -\frac{1}{1 + (a/R)^2}(z - a)\partial_z. \tag{5.74}$$

Z důvodu antisymetrie operátoru křivosti stačí vypočítat kombinaci $R(\partial_\varphi, \partial_z)$. Máme

$$\begin{aligned} R(\partial_\varphi, \partial_z)\partial_\varphi &= \nabla_{\partial_\varphi}((z - a)^{-1}\partial_\varphi) + \nabla_{\partial_z}(\frac{1}{1 + (a/R)^2}(z - a)\partial_z) \\ &= -\frac{1}{1 + (a/R)^2}\partial_z + \frac{1}{1 + (a/R)^2}\partial_z = 0. \end{aligned} \tag{5.75}$$

Hodnota operátoru $R(\partial_\varphi, \partial_z)$ na ∂_z vyjde nula podobným výpočtem a dostáváme $R = 0$.

Horizontální distribuce v tomto případě *je integrabilní*. Nyní si vezmeme následující uzavřenou a hladkou smyčku $\gamma : [0, 1] \to M$.

$$z(t) = z(\gamma(t)) = z_0, \quad \varphi(t) = \varphi(\gamma(t)) = 2\pi t. \tag{5.76}$$

Jedná se tedy o křivku co jednou obtočí kužel ve výšce z_0. Chceme paralelně přenášet tečný vektor $(V^z, V^\varphi) \in T_{(z_0,0)}M$ podél křivky $\gamma(t)$. Nechť $V^z(t)$ $V^\varphi(t)$ označují komponenty paralelně rozneseného tečného vektoru podél křivky γ. Nyní ukážeme, že $(V^z(1), V^\varphi(1)) \neq (V^z(0), V^\varphi(0)) \equiv (V^z, V^\varphi)$. Rovnice paralelního přenosu dává

$$\dot{V}^z(t) + \dot{\varphi}(t)\Gamma^z_{\varphi\varphi}(t)V^\varphi(t) = 0, \quad \dot{V}^\varphi(t) + \dot{z}(t)\Gamma^\varphi_{z\varphi}(t)V^\varphi(t) + \dot{\varphi}(t)\Gamma^\varphi_{\varphi z}(t)V^z(t) = 0. \tag{5.77}$$

Po dosazení do obou rovnic dostáváme

$$\dot{V}^z(t) + \frac{2\pi(a - z_0)}{1 + (a/R)^2}V^\varphi(t) = 0, \quad \dot{V}^\varphi(t) - \frac{2\pi}{(a - z_0)}V^z(t) = 0. \tag{5.78}$$

To je ale vede standardním postupem na dvě rovnice druhého řádu:

$$\ddot{V}^z(t) + \frac{4\pi^2 R^2}{R^2+a^2} V^z(t) = 0, \quad \ddot{V}^\varphi(t) + \frac{4\pi^2 R^2}{R^2+a^2} V^\varphi(t) = 0. \tag{5.79}$$

To je ale standardní harmonický pohyb, tj. dostáváme rotaci vektoru $V = (V^z, V^\varphi)$ v rovině (z, φ). Explicitně, s troškou počítání:

$$V^z(t) = V^z \cos(2\pi\omega t) + \omega(a - z_0) V^\varphi \sin(2\pi\omega t), \tag{5.80}$$

$$V^\varphi(t) = V^\varphi \cos(2\pi\omega t) + (\omega(a - z_0))^{-1} V^z \sin(2\pi\omega t), \tag{5.81}$$

kde $\omega = R/\sqrt{R^2 + a^2}$ je kosinus úhlu mezi podstavou a pláštěm kužele M. Všimněte si, že paralelní přenos je integrabilní právě tehdy když $\omega \in \mathbb{Z}$, což ale nemůže nastat pro kužel, kde vždycky $0 < \omega < 1$.

Cvičení 5.5.10. *Zkuste si celou diskuzi pro válec a ukažte, že v tomto případě žádný problém nenastane. Tento výsledek se dá dostat i vtipným trikem. Válec je totiž kužel, kde $a \to \infty$. Potom $\omega = 0$ a paralelně přenášený vektor je konstantní.*

Problém neintegrability paralelního přenosu lze formalizovat následujícím způsobem. Definujeme relaci ekvivalence na P následovně. Řekneme, že $p \sim q$, pokud existuje po částech hladká křivka $\gamma : [0,1] \to M$, taková, že $\gamma(0) = \pi(p)$, $\gamma(1) = \pi(q)$, a $q = \tau^\gamma_{\pi(p),\pi(q)}(p)$. Definujeme

$$\mathrm{Hol}_p(A) = \{g \in G \mid p \cdot g \sim p\} \subseteq G. \tag{5.82}$$

Množina $\mathrm{Hol}_p(A)$ se nazývá **grupou holonomie** konexe A v bodě $p \in P$.

Lemma 5.5.11. $\mathrm{Hol}_p(A)$ *je Lieova podgrupa G. Její komponenta souvislosti obsahující jednotku $e \in G$ se nazývá* ***redukovaná grupa holonomie*** $\mathrm{Hol}^0_p(A)$ *a sestává se z prvků* $\mathrm{Hol}_p(A)$ *kde povolíme ekvivalenci jen pomocí křivek homotopických nule (kontraktibilních).*

Důkaz. Ukážeme si jen, že $\mathrm{Hol}_p(A)$ tvoří grupu. Zjevně $p \sim p$, protože jde o relaci ekvivalence (což plyne z toho, že horizontální zdvih konstantní smyčky zajistí triviální paralelní přenos p na p). Odtud $e \in \mathrm{Hol}_p(A)$. Inverzi nám zajistí paralelní přenos po smyčce $\gamma'(t) = \gamma(1-t)$ a uzavřenost na grupový součin vyrobí složení navázání dvou smyček γ_1 a γ_2 (s následnou reparametrizací). ■

Cvičení 5.5.12. *Rozmyslete si, že pro $p' = p \cdot h$ platí $\mathrm{Hol}_{p'}(A) = I_{h^{-1}}(\mathrm{Hol}_p(A))$.*

Z tvrzení 5.5.8 plyne, že pro integrabilní konexi A dostáváme $\mathrm{Hol}^0_p(A) = 0$ pro všechny $p \in P$. Rovněž jsme si ukázali, že tvrzení neplatí pro celou grupu $\mathrm{Hol}_p(A)$. Existuje způsob, jak grupu holonomie (její algebru) přímo vypočítat z formy křivosti. Výslednou větu uvádíme bez důkazu:

Věta 5.5.13 (Ambrose-Singer)**.** *Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor, kde M je souvislá. Nechť $p \in P$ je libovolný bod. Nechť $\Gamma(p) = \{q \in P \mid q \sim p\}$. Potom*

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Hol}_p(A)) = \cup_{q \in \Gamma(p)} \mathrm{Im}(\Omega|_q) \subseteq \mathfrak{g}. \tag{5.83}$$

Odtud dostáváme důležitý důsledek:

Důsledek 5.5.14. *Je-li* $\mathrm{Hol}^0_p(A) = 0$ *pro každý bod $p \in P$, máme $\Omega = 0$.*

Důkaz. Pokud je redukovaná grupa holonomie nulová, máme $0 = \mathrm{Lie}(\mathrm{Hol}^0_p(A)) = \mathrm{Lie}(\mathrm{Hol}_p(A))$ pro každé $p \in P$. Pro libovolné p tedy podle Ambrose-Singerovy věty platí $\mathrm{Im}(\Omega|_q) = 0$ pro všechny $q \in \Gamma(p)$. Speciálně $\mathrm{Im}(\Omega|_p) = 0$. Odtud $\Omega = 0$. ■

Konečně, ukazuje se, že pro souvislou varietu M můžeme jednoduše vztáhnout grupy holonomie v různých vláknech.

Lemma 5.5.15. *Nechť M je souvislá varieta. Pak pro libovolné dva body p a p' existuje (nekanonický) isomorfismus* $\mathrm{Hol}_p(A) \cong \mathrm{Hol}_{p'}(A)$.

Důkaz. Pro p' a p v jednom vlákně jsou grupy holonomie adjungované prvkem unikátním prvkem grupy g. Snadno je vidět, že pro $q \sim p$ platí $\mathrm{Hol}_q(A) \cong \mathrm{Hol}_p(A)$. Ale pro souvislou varietu M vždy existuje hladká křivka γ spojující libovolné dva body $m, m' \in M$. Její horizontální zdvih do bodu $p \in P_m$ potom zajistí $p \sim q \equiv \gamma^h(1) \in P_{m'}$. To nám spojí izomorfismem grupy holonomie ve dvou různých vláknech P_m a $P_{m'}$. ■

Příklad 5.5.16. Jako další příklad si ukážeme neintegrabilní horizontální distribuci s neintegrabilním paralelním přenosem a spočítáme si grupu holonomie explicitně.

Budeme uvažovat téměř hloupoučkou triviální hlavní fibraci $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, kde $\pi(x, y, z) = (x, y)$, $G = (\mathbb{R}, +)$ a akci $R_a(x, y, z) = (x, y, z + a)$. Fundamentální vektorové pole příslušné $\alpha \in \mathfrak{g} = \mathbb{R}$ je $\#\alpha = \alpha \cdot \partial_z$. Formou konexe A je tedy obyčejná 1-forma na $\mathbb{R}^3$. Definujeme

$$A = dz + xdy - ydx. \tag{5.84}$$

Máme $A(\#\alpha) = \alpha$ a $R_a^*(A) = A \equiv Ad_{a^{-1}}(A)$. A je tedy formou konexe. Horizontální podprostor v bodě (x, y, z) má tvar $\mathrm{Hor}_{(x,y,z)} \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\{(\partial_y - x\partial_z), (\partial_x + y\partial_z)\}$. Horizontální distribuce je tedy (globálně) generovaná dvojicí vektorových polí $e_1 = \partial_y - x\partial_z$ a $e_2 = \partial_x + y\partial_z$. Máme

$$[e_1, e_2] = 2\partial_z. \tag{5.85}$$

To ukazuje, že $\mathrm{Hor}(\mathbb{R}^3)$ není v tomto případě integrabilní. Forma křivosti Ω je jednoduše:

$$\Omega = dA = 2 \cdot dx \wedge dy \neq 0. \tag{5.86}$$

Nechť $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ je libovolný bod.

Protože je $M = \mathbb{R}^2$ souvislá a jednoduše souvislá, stačí vypočítat grupu holonomie v jednom bodě $P = \mathbb{R}^3$, řekněme $(0, 0, 0)$.

(i) Nejprve si ujasníme, že $(0, 0, z_0) \sim (x_0, y_0, z_0)$ pro libovolný bod $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Spojím bod $(0, 0)$ a (x_0, y_0) úsečkou $\gamma(t) = (x_0 t, y_0 t)$. Horizontální zdvih $\gamma^h(t)$ startující z bodu $(0, 0, z_0)$ tedy musí mít tvar $\gamma^h(t) = (x_0 t, y_0 t, z(t))$ pro $z(0) = z_0$. Podmínka horizontality dá ale $\dot{z}(t) = 0$, a tedy $z(t) = z(0) = z_0$. Tedy $\gamma^h(t) = (x_0 t, y_0 t, z_0)$. Máme $\gamma^h(1) = (x_0, y_0, z_0)$, což dokazuje naše tvrzení.

(ii) Uvažujme nyní bod $(a, 0)$ pro $a > 0$ a smyčku $\gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t))$. Zajímá nás její horizontální zdvih γ^h do bodu $(a, 0, 0)$. Dostaneme $\gamma^h(t) = (a\cos(t), a\sin(t), z(t))$ kde $z(0) = 0$. Podmínka horizontality dává rovnici $\dot{z}(t) = -a^2$. Odtud $\gamma^h(t) = (a\cos(t), a\sin(t), -a^2 t)$. Máme $\gamma^h(1) = (a, 0, -a^2)$. To nám dává $(a, 0, 0) \sim (a, 0, -a^2)$.

(iii) S použitím (i) a (ii) dostáváme $(0, 0, 0) \sim (a, 0, 0) \sim (a, 0, -a^2) \sim (0, 0, -a^2)$. Odtud dostáváme $-a^2 \in \mathrm{Hol}_{(0,0,0)}(A)$. Protože je to podgrupa, musíme mít

$$\{0, -a^2, a^2\} \in \mathrm{Hol}_{(0,0,0)}(A). \tag{5.87}$$

Konečně, a je libovolné a tedy $\mathrm{Hol}_{(0,0,0)}(A) = \mathbb{R} = G$.

Kapitola 6

Kalibrační teorie

6.1 Lokální formy, kalibrační transformace

Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor s konexí $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$. Nechť $\sigma : U \to P$ je lokální řez hlavní fibrace. Výběru takového řezu říkáme **volba kalibrace na** U. Pomocí řezu můžeme udělat pullback forem konexe a křivosti. Definujeme:

$$\mathcal{A} = \sigma^*(A), \quad \mathcal{F} = \sigma^*(\Omega). \tag{6.1}$$

Potom $\mathcal{A} \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$ a $\mathcal{F} \in \Omega^2(U, \mathfrak{g})$ se nazývají **lokální formy konexe a křivosti**.

Příklad 6.1.1. Připomeňme si, že pro $\pi : F(M) \to M$ odpovídá volba kalibrace volbě repérového pole $(e_1, \ldots, e_n)$ na okolí U, kde $\sigma(m) = (e_1|_m, \ldots, e_n|_m)$. Ukazovali jsme, že $\sigma^*(A) = \hat{\omega}$ a $\sigma^*(\Omega) = \hat{\Omega}$, kde $\hat{\omega}$ a $\hat{\Omega}$ jsou odpovídající lokální formy konexe a křivosti vzhledem k repérovému poli $(e_1, \ldots, e_n)$.

Nejdůležitější otázkou je pochopitelně transformace $\mathcal{A}$ při změně řezu σ. Nechť $\sigma' : U' \to P$ je jiný lokální řez, takový, že $U \cap U' \neq \emptyset$. Potom pro každý $m \in U \cap U'$, $\sigma(m)$ a $\sigma'(m)$ jsou ve stejném vlákně. Existuje tedy funkce $\mathbf{g} : U \cap U' \to G$, taková že pro všechny $m \in U \cap U'$ platí

$$\sigma'(m) = \sigma(m) \cdot \mathbf{g}(m) \tag{6.2}$$

Zobrazení $\mathbf{g}$ se nazývá (lokální) **kalibrační transformace**. Nejprve si musíme ujasnit, že $\mathbf{g}$ definuje hladké zobrazení. Ale to plyne okamžitě z důkazu Tvrzení 2.3.6 protože $\mathbf{g}$ odpovídá právě přechodovému zobrazení mezi zobrazeními lokální trivializace odpovídající řezům σ a σ'.

Abychom spočítali jak souvisí $\mathcal{A}' = \sigma'^*(A)$ a $\mathcal{A} = \sigma^*(A)$, budeme zřejmě muset ověřit, jak souvisí σ'_* a σ_*. Nejprve si ukážeme následující technické lemma.

Lemma 6.1.2. *Nechť M, N, N', S jsou hladké variety. Uvažujme hladká zobrazení $g : M \to N$ a $h : M \to N'$. Potom máme hladké zobrazení $f : N \times N' \to S$. Dohromady je tedy možné složit zobrazení $k : M \to S$ jako $k(m) = f(g(m), h(m))$, tj. $k = f \circ (g, h)$. Nechť $X \in T_m M$. Potom*

$$k_*(X) = \{f(\cdot, h(m))_* \circ g_*\}(X) + \{f(g(m), \cdot)_* \circ h_*\}(X). \tag{6.3}$$

Důkaz. Nechť $X = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\gamma(t)$. Potom máme spočítat

$$k_*(X) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} k(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(g(\gamma(t)), h(\gamma(t)). \tag{6.4}$$

Teď se jenom použije derivování složené funkce a to jak vypadá derivace funkce z kartézského součinu a výsledek snadno vyplyne. ■

Teď jednoduše použijeme toto lemma pro následující volby. Máme $M = U \cap U'$, $N = P$, $N' = G$ a $S = P$. Vezmeme $g = \sigma$, $h = \mathbf{g}$ a konečně $f = R$ (pravá akce G na P). Potom

$$k(m) = f(g(m), h(m)) = R(\sigma(m), \mathbf{g}(m)) = \sigma(m) \cdot \mathbf{g}(m) = \sigma'(m). \tag{6.5}$$

Abychom vypočítali k_*, musíme tedy zjistit, jak vypadá $R(\cdot, g)_*$ a $R(p, \cdot)_*$ pro libovolné $g \in G$ a $p \in P$. Zjevně $R(\cdot, g)_* = R_{g*}$ v našem obvyklém značení. Pro druhý případ $R(p, \cdot) = \theta^{(p)}$ je orbitové zobrazení a tedy $R(p, \cdot)_*(x^L|_g) = \#x|_{p\cdot g}$. Působení na libovolný tečný vektor $Y \in T_gG$ potom dává $R(p, \cdot)_*(Y) = \#\{\theta_L|_g(Y)\}|_{p\cdot g}$. Po dosazení tedy

$$\sigma'_*(X) = R_{\mathbf{g}(m)*}(\sigma_*(X)) + \#\{\theta_L|_{\mathbf{g}(m)}(\mathbf{g}_*(X))\}|_{\sigma'(m)} \tag{6.6}$$

S použitím tohoto výrazu je již snadné spočítat vztah mezi $\mathcal{A}'$ a $\mathcal{A}$. Dostáváme

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'|_m(X) &= A|_{\sigma'(m)}(\sigma'_*(X)) = (\sigma^* R^*_{\mathbf{g}(m)}(A|_{\sigma'(m)}))(X) + \theta_L|_{\mathbf{g}(m)}(\mathbf{g}_*(X)) \\ &= Ad_{\mathbf{g}(m)^{-1}}((\sigma^*(A|_{\sigma(m)}))(X)) + \mathbf{g}^*(\theta_L)|_m(X) \\ &= \{Ad_{\mathbf{g}(m)^{-1}}(\mathcal{A}|_m) + \mathbf{g}^*(\theta_L)|_m\}(X). \end{aligned} \tag{6.7}$$

Dostáváme tedy tvrzení shrnující předcházející výpočet:

Tvrzení 6.1.3. *Nechť $\sigma : U \to P$ a $\sigma' : U \to P'$ jsou dva lokální řezy, $\mathbf{g} : U \cap U' \to G$ je příslušná kalibrační transformace. Potom pro $\mathcal{A}' = \sigma'^*(A)$ a $\mathcal{A} = \sigma^*(A)$ platí na $U \cap U'$ vztah*

$$\mathcal{A}' = Ad_{\mathbf{g}^{-1}}(\mathcal{A}) + \mathbf{g}^*(\theta_L). \tag{6.8}$$

Poznámka 6.1.4. Pro maticové grupy G je Ad konjugace matic a platí Lemma 5.3.10. Potom můžeme psát kalibrační transformaci (6.8) ve tvaru

$$\mathcal{A}' = \mathbf{g}^{-1}\mathcal{A}\,\mathbf{g} + \mathbf{g}^{-1}d\mathbf{g}. \tag{6.9}$$

Nyní můžeme snadno dokázat tvrzení 3.3.4. Tam jsme tvrdili, že libovolná forma konexe $\omega \in \Omega^1(F(M), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ vztahem $\hat{\omega} = \sigma^*(\omega)$ definuje lokální formy konexe příslušné nějaké afinní konexi ∇.

Důsledek 6.1.5 (Důkaz tvrzení 3.3.4)**.**

Důkaz. V případě $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ je tedy $\mathbf{g}(m) = \mathbf{A}(m)$ a podle předchozí poznámky tedy $\hat{\omega}' = \mathbf{A}^{-1}\hat{\omega}\,\mathbf{A} + \mathbf{A}^{-1}d\mathbf{A}$. Ale to je přesně vztah (3.15) který jsme odvodili pro lokální formy konexe na základě transformačních vztahů pro Christoffelovy symboly při změně lokálního repérového pole. Můžeme tedy komponenty $\hat{\omega}$ v daném repérovém poli (odpovídajícím řezu σ) *vyhlásit* za Christoffelovy symboly a dostaneme dobře definovanou afinní konexi ∇ na M. ■

Nyní je velmi snadné odvodit podobné transformační vztahy i pro jiné druhy veličin na hlavním fibrovaném prostoru. Ukážeme si jeden takový případ:

Tvrzení 6.1.6. *Nechť $\alpha \in \Omega^p_\rho(P,V)$ je horizontální p-forma typu ρ. Nechť $a = \sigma^*(\alpha)$ a $a' = \sigma'^*(\alpha)$ jsou příslušné lokální formy. Potom na $U \cap U'$ platí vztah*

$$a' = \rho(\mathbf{g}^{-1})a \tag{6.10}$$

Speciálně pro lokální formy konexe tedy $\mathcal{F}' = Ad_{\mathbf{g}^{-1}}(\mathcal{F})$.

Důkaz. Opět jde o přímočaré dosazení výrazu (6.6). Protože α je dle předpokladu horizontální, můžeme zcela ignorovat vertikální část (následující za $\#$). A tedy

$$a' = \sigma^*(R^*_{\mathbf{g}}\alpha) = \sigma^*(\rho(\mathbf{g}^{-1})\alpha) = \rho(\mathbf{g}^{-1})\sigma^*(\alpha) = \rho(\mathbf{g}^{-1})a. \tag{6.11}$$

To dokazuje tvrzení. Jelikož $\mathcal{F} = \sigma^*(\Omega)$ a $\mathcal{F}' = \sigma'^*(\Omega)$, kde Ω je horizontální 2-forma typu Ad, dostáváme ihned vztah mezi $\mathcal{F}'$ a $\mathcal{F}$. ■

Konečně taky dokončit jeden nedokončený důkaz. Sliby se mají plnit:

Příklad 6.1.7 (Dokončení důkazu tvrzení 2.3.6)**.** Máme zobrazení $\phi'_\alpha : U_\alpha \times G \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ o kterém jsme nedokázali, že je vnoření, tj. $\phi'_{\alpha *} : T_{(m,g)}(U_\alpha \times G) \to T_{\phi_\alpha(m,g)}(\pi^{-1}(U_\alpha))$ má být prosté. Připomeňme, že $T_{(m,g)}(U_\alpha \times G) = T_m U_\alpha \oplus T_g G$. Obecný element $T_g G$ si navíc můžeme napsat jako $x^L|_g = L_{g*}(x)$ pro element $x \in \mathfrak{g}$ Lieovy algebry. Nechť tedy $\phi'_{\alpha *}(X, x^L|_g) = 0$ pro $X \in T_m M$ a $x \in \mathfrak{g}$. Nechť $X = \dot\gamma(0)$ pro nějakou křivku $\gamma : I \to U_\alpha$. Potom tedy máme

$$0 = \phi'_{\alpha *}(X, x^L|_g) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi'_\alpha(\gamma(t), g \cdot \exp(tx)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \sigma_\alpha(\gamma(t)) \cdot g \cdot \exp(tx). \tag{6.12}$$

Podobným výpočtem jako v důkazu lemmatu 6.1.2 teď můžeme psát

$$0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \sigma_\alpha(\gamma(t)) \cdot g \cdot \exp(tx) = R_{g*}(\sigma_{\alpha *}(X)) + \#x|_{\sigma_\alpha(m)\cdot g} \tag{6.13}$$

Aplikací π_* na obě strany tedy dostáváme $0 = (\pi \circ R_g \circ \sigma_\alpha)_*(X) = X$, kde jsme využili vertikalitu generátorů: $\pi_*(\#x) = 0$. Tedy $X = 0$. Původní rovnice nám dá $\#|_{\phi_\alpha(m,g)}(x) = 0$, a tedy $x = 0_{\mathfrak{g}}$ z injektivity zobrzení $\#|_p$ implikované volností akce. A tedy $(X, x^L|_g) = (0_m, 0_g)$, což dokazuje injektivitu zobrazení $\phi'_{\alpha *}$.

Na závěr této sekce si odvodíme analog (6.8) pro tzv. infinitesimální kalibrační transformace. Přesný význam této definice si ujasníme. Nejprve je třeba vysvětlit následující problém. Víme, že zobrazení $\exp : \mathfrak{g} \to G$ je lokální difeomorfismus. Příslušné tečné zobrazení $\exp_* : T_0(\mathfrak{g}) \to T_e(G)$ v bodě 0 je obyčejná identita na $\mathfrak{g}$ (použije se $T_0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ a $T_e(G) = \mathfrak{g}$). Můžeme se ale ptát, jak vypadá příslušné tečné zobrazení v libovolném bodě $y \in \mathfrak{g}$. To není zas tak snadné ukázat.

Lemma 6.1.8. *Tečné zobrazení $\exp_* : T_y(\mathfrak{g}) \to T_{\exp(y)}G$ má tvar (zde opět $T_y(\mathfrak{g}) \equiv \mathfrak{g}$):*

$$\exp_*(z) = L_{\exp(y)*}\{\phi(-ad_y)[z]\}, \tag{6.14}$$

kde $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je analytická funkce kterou lze psát jako

$$\phi(x) = \frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = 1 + \frac{1}{2!}x + \frac{1}{3!}x^2 + \cdots \tag{6.15}$$

Speciálně dostáváme $\theta_L|_{\exp(y)}(\exp_*(z)) = \phi(-ad_y)[z]$.

Nyní budeme předpokládat, že kalibrační transformace $\mathbf{g}$ má tvar $\mathbf{g}(m) = \exp(t\mathbf{x}(m))$, kde $\mathbf{x} : U \cap U' \to \mathfrak{g}$. Ekvivalentně $\mathbf{x} \in \Omega^0(U \cap U', \mathfrak{g})$. Jediné co je potřeba pořádně vypočítat je jak vyjádřit $\mathbf{g}^*(\theta_L)$. Mám $\mathbf{g} = \exp \circ \mathbf{x}'$, kde $\mathbf{x}'(m) = t\mathbf{x}(m)$. Odtud tedy pro $X \in T_m M$

$$\{\mathbf{g}^*(\theta_L)\}|_m(X) = \theta_L|_{\mathbf{g}(m)}(\mathbf{g}_*(X)) = \theta_L|_{\exp(\mathbf{x}'(m))}(\exp_*(\mathbf{x}'_*(X))) = \phi(-ad_{\mathbf{x}'})[\mathbf{x}'_*(X)]. \tag{6.16}$$

Již jsme jednou argumentovali, že pro zobrazení do vektorového prostoru je $\mathbf{x}'_*(X) = (d\mathbf{x}')|_m(X)$, kde $d\mathbf{x}' \in \Omega^1(U \cap U', \mathfrak{g})$. Výsledná kalibrační transformace je tedy

$$\mathcal{A}' = Ad_{\exp(-t\mathbf{x})}(\mathcal{A}) + \phi(-tad_{\mathbf{x}})[t \cdot d\mathbf{x}] \tag{6.17}$$

Pod pojmem **infinitesimální kalibrační transformace** rozumíme rozvoj pravé strany do nejvýš prvního řádu v parametru t. Dostáváme tedy

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} + t\{-ad_{\mathbf{x}}(\mathcal{A}) + d\mathbf{x}\} + o(t^2) = \mathcal{A} + t\{[\mathcal{A}, \mathbf{x}]_{\mathfrak{g}} + d\mathbf{x}\} + o(t^2). \tag{6.18}$$

Ve fyzice se často vůbec nepíše parametr t a o zobrazení $\mathbf{x}$ se místo toho říká, že je malé. Pro lokální formy křivosti platí transformační vztah

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F} + t[\mathcal{F}, \mathbf{x}]_{\mathfrak{g}} + o(t^2) \tag{6.19}$$

Opět se dá ukázat, že pro souvislé a jednoduše souvislé Lieovy grupy již infinitesimální transformace zcela určují správné chování na „konečných transformacích“.

Na objektech (formách) žijících na totálním prostoru P jsme zavedli operaci vnější kovariantní derivace $D : \Omega^p(P, V) \to \Omega^{p+1}(P, V)$. Je-li $\sigma : U \to P$ řez (volba kalibrace), můžeme tedy definovat **(lokální) vnější kovariantní derivaci** $\mathcal{D} : \Omega^p(U, V) \to \Omega^{p+1}(U, V)$ na všech lokálních objektech (pocházejících z pullbacku řezem) vztahem

$$\mathcal{D}(\sigma^*(\text{cokoliv})) := \sigma^*(D(\text{cokoliv})). \tag{6.20}$$

Zejména na formách typu ρ a lokální formě konexe dostáváme očekávaný výsledek.

Tvrzení 6.1.9. *Nechť $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ je forma konexe a $\Omega = DA$ odpovídající 2-forma křivosti. Nechť $\sigma : U \to P$ je lokální řez, přičemž $\mathcal{A} = \sigma^*(A)$ a $\mathcal{F} = \sigma^*(\Omega)$ jsou lokální formy konexe a křivosti. Potom platí vztah*

$$\mathcal{F} = \mathcal{D}\mathcal{A} = d\mathcal{A} + \frac{1}{2}[\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}]_{\mathfrak{g}}. \tag{6.21}$$

Dále, nechť $\alpha \in \Omega^p_\rho(P, V)$ je horizontální p-forma typu ρ a nechť $a = \sigma^*(\alpha)$ je odpovídající lokální objekt. Potom platí vztah

$$\mathcal{D}a = da + \rho'(\mathcal{A}) \dot{\wedge} a. \tag{6.22}$$

Důkaz. Důkaz je přímou aplikaci Cartanovy strukturní rovnice (5.18) a formulky (5.46). Pak se jen využije definic a obvyklých vlastností diferenciálních forem. Například

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \mathcal{D}\mathcal{A} = \mathcal{D}(\sigma^*(A)) = \sigma^*(DA) &= \sigma^*(dA + \frac{1}{2}[A \wedge A]_{\mathfrak{g}}) \\ = d(\sigma^*(A)) + \frac{1}{2}[\sigma^*(A) \wedge \sigma^*(A)]_{\mathfrak{g}} &= d\mathcal{A} + \frac{1}{2}[\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}]_{\mathfrak{g}}. \end{aligned} \tag{6.23}$$

To dokazuje první z rovnici. Pro horizontální formy typu ρ je důkaz podobný. ■

Nyní musíme odpovědět na důležitou otázku. Do této doby jsme mluvili o lokálních objektech pocházejících z globálních na totálním prostoru P. To je však přesný opak situace se kterou se setkáme ve fyzikálních aplikacích. Tam definujeme veličiny žijící v „prostoročase“ M v nějaké (zvolené) kalibraci a pracujeme pouze s tím, jak se při změně kalibrace změní (tomu říkáme kalibrační transformace). V komplikovanějším prostoročase (například M není kontraktibilní) musíme navíc všechny objekty definovat pouze lokálně. Obecná odpověď spojující oba světy je daná následujícím tvrzením.

Tvrzení 6.1.10. *Nechť $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in I}$ je kolekce hladkých řezů hlavní fibrace $\pi : P \to M$, taková že jejich definiční obory tvoří otevřené pokrytí báze M. Máme tedy hladká zobrazení $\sigma_\alpha : U_\alpha \to P$, $\pi \circ \sigma_\alpha = 1_{U_\alpha}$ a můžeme psát $M = \cup_{\alpha\in I} U_\alpha$.*

Pro každý neprázdný průnik $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ definujeme zobrazení $\mathbf{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ vztahem

$$\sigma_\beta(m) = \sigma_\alpha(m) \cdot \mathbf{g}_{\alpha\beta}(m) \tag{6.24}$$

Jinými slovy, $\mathbf{g}_{\alpha\beta}$ je změna kalibrace $\sigma_\alpha \mapsto \sigma_\beta$ na $U_\alpha \cap U_\beta$. Nechť $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ je kolekce lokálně definovaných 1-forem s hodnotami v $\mathfrak{g}$, $\mathcal{A}_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})$ taková, že na $U_\alpha \cap U_\beta$ platí

$$\mathcal{A}_\beta = Ad_{\mathbf{g}^{-1}_{\alpha\beta}}(\mathcal{A}_\alpha) + \mathbf{g}^*_{\alpha\beta}(\theta_L), \tag{6.25}$$

pro každý neprázdný průnik $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

Potom existuje unikátní forma konexe $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$, taková že $\mathcal{A}_\alpha = \sigma^*_\alpha(A)$.

Důkaz. Celý důkaz je jen zobecněním diskuze v sekci 3.3. Klíčovým je fakt, že na P můžeme používat lokální trivializaci odpovídající kolekci řezů $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in I}$ definovanou jako $\phi_\alpha(m, g) = \sigma_\alpha(m) \cdot g$. Viz tvrzení 2.3.6. Potom na každé otevřené množině $\pi^{-1}(U_\alpha) \subseteq P$ dostávám hladké zobrazení $g_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to G$ definované vztahem $p = \phi_\alpha(\pi(p), g_\alpha(p))$.

Definujeme formu $A_\alpha \in \Omega^1(\pi^{-1}(U_\alpha), \mathfrak{g})$ vztahem

$$A_\alpha = Ad_{g_\alpha^{-1}}(\pi^*(\mathcal{A}_\alpha)) + g^*_\alpha(\theta_L). \tag{6.26}$$

Nyní musíme ukázat, že na $\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ platí $A_\alpha = A_\beta$ a tedy dostáváme globálně definovanou formu A vztahem $A|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} := A_\alpha$. Pro $p \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ dostáváme:

$$\begin{aligned} p &= \phi_\beta(\pi(p), g_\beta(p)) = \sigma_\beta(\pi(p)) \cdot g_\beta(p) = \sigma_\alpha(\pi(p)) \cdot \mathbf{g}_{\alpha\beta}(\pi(p)) \cdot g_\beta(p) \\ &= \phi_\alpha(\pi(p), \mathbf{g}_{\alpha\beta}(\pi(p)) \cdot g_\beta(p)). \end{aligned} \tag{6.27}$$

Porovnáním s definujícím vztahem tedy $g_\alpha(p) = \mathbf{g}_{\alpha\beta}(\pi(p)) \cdot g_\beta(p)$. Dál je třeba si rozmyslet, že pro libovolnou funkci $\mathbf{g} : N \to G$ platí vztah $Ad_{\mathbf{g}}(\mathbf{g}^*(\theta_L) = \mathbf{g}^*(\theta_R)$. Potom můžeme vypočítat, jak se změní první člen. Označme $\mathbf{g}'_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_{\alpha\beta} \circ \pi$. Potom

$$\begin{aligned} Ad_{g_\beta^{-1}}(\pi^*(\mathcal{A}_\beta)) &= Ad_{g_\alpha^{-1}}(Ad_{\mathbf{g}'_{\alpha\beta}} \pi^*\{Ad_{\mathbf{g}^{-1}_{\alpha\beta}}(\mathcal{A}_\alpha) + \mathbf{g}^*_{\alpha\beta}(\theta_L)\}) \\ &= Ad_{g_\alpha^{-1}}\{\pi^*(\mathcal{A}_\alpha) + Ad_{\mathbf{g}'_{\alpha\beta}}(\mathbf{g}'^*_{\alpha\beta}(\theta_L))\} \\ &= Ad_{g_\alpha^{-1}}\{\pi^*(\mathcal{A}_\alpha) + \mathbf{g}'^*_{\alpha\beta}(\theta_R)\}. \end{aligned} \tag{6.28}$$

Aplikací lemmatu 6.1.2 pro $g = \mathbf{g}'_{\alpha\beta}$, $h = g_\beta$, $f = \mu$ (grupový součin v G) dostáváme

$$g_{\alpha*}(X) = R_{g_\beta(p)*}(\mathbf{g}'_{\alpha\beta*}(X)) + L_{\mathbf{g}'_{\alpha\beta}(p)*}(g_{\beta*}(X)), \tag{6.29}$$

pro všechny $X \in T_pP$, kde $p \in U_\alpha \cap U_\beta$. Odtud můžeme vypočítat transformační vlastnosti:

$$\begin{aligned}
\langle g_\beta^*(\theta_L)|_p, X\rangle &= \langle \theta_L|_{g_\beta(p)}, g_{\beta*}(X)\rangle = \langle \theta_L|_{g_\beta(p)}, L_{\mathbf{g}'^{-1}_{\alpha\beta}*}\{g_{\alpha*}(X) - R_{g_\beta(p)*}(\mathbf{g}'_{\alpha\beta*}(X))\}\rangle \\
&= \langle \theta_L|_{g_\alpha(p)}, g_{\alpha*}(X) - R_{g_\beta(p)*}(\mathbf{g}'_{\alpha\beta*}(X))\rangle \\
&= \langle g_\alpha^*(\theta_L)|_p, X\rangle - \langle R_{g_\beta(p)*}(\theta_L|_{g_\alpha(p)}), \mathbf{g}'_{\alpha\beta*}(X))\rangle \\
&= \langle g_\alpha^*(\theta_L)|_p, X\rangle - \langle Ad_{g_\beta^{-1}(p)}(\theta_L|_{\mathbf{g}'_{\alpha\beta}(p)}), \mathbf{g}'_{\alpha\beta*}(X)\rangle \\
&= \langle g_\alpha^*(\theta_L)|_p - Ad_{g_\alpha^{-1}(p)}(Ad_{\mathbf{g}'_{\alpha\beta}(p)}\mathbf{g}'^*_{\alpha\beta}(\theta_L)), X\rangle \\
&= \langle g_\alpha^*(\theta_L)|_p - Ad_{g_\alpha^{-1}(p)}(\mathbf{g}'^*_{\alpha\beta}(\theta_R), X\rangle.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Vidíme, že druhý člen přesně odečte člen s θ_R pocházející z prvního členu a $A_\beta = A_\alpha$. Zbývá ověřit, že A splňuje axiomy formy konexe. Nejprve máme

$$A_\alpha(\#x) = Ad_{g_\alpha^{-1}}(\langle \pi^*(\mathcal{A}_\alpha), \#x\rangle) + (g_\alpha^*(\theta_L))(\#x) = (g_\alpha^*(\theta_L)(\#x) = \theta_L(g_{\alpha*}(\#x)). \tag{6.31}$$

Ale $g_{\alpha*}(\#x|_p) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} g_\alpha(p \cdot \exp(tx)) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} g_\alpha(p) \cdot \exp(tx) = x^L|_{g_\alpha(p)}$. Odtud tedy

$$A_\alpha(\#x) = \theta_L(x^L) = x. \tag{6.32}$$

Při výpočtu jsme použili vlastnost $g_\alpha \circ R_h = R_h \circ g_\alpha$, kde na levé straně R_h je pravá akce na P a na pravé straně pravé násobení na G. S použitím tohoto vztahu máme

$$R_h^*(A_\alpha) = Ad_{R_h^*(g_\alpha)^{-1}}(\pi^*(\mathcal{A}_\alpha)) + R_h^*(g_\alpha^*(\theta_L)) = Ad_{h^{-1}}\{Ad_{g_\alpha^{-1}}(\pi^*(\mathcal{A}_\alpha)) + g_\alpha^*(\theta_L)\}. \tag{6.33}$$

To dokazuje, že A definuje formu konexe na P. Teď musíme ukázat, že $\sigma_\alpha^*(A) = \mathcal{A}_\alpha$. Z definice $g_\alpha(\sigma_\alpha(m)) = e$. Máme tedy

$$\sigma_\alpha^*(A) = \sigma^*\{Ad_{g_\alpha^{-1}}\pi^*(\mathcal{A}_\alpha) + g_\alpha^*(\theta_L)\} = Ad_{e^{-1}}(\pi \circ \sigma_\alpha)^*(\mathcal{A}_\alpha) + e^*(\theta_L) = \mathcal{A}_\alpha. \tag{6.34}$$

Použili jsme, že pullback konstantním zobrazením $e : U_\alpha \to G$ je nulový.

Konečně, musíme ukázat jednoznačnost konstrukce. Nechť $\sigma_\alpha^*(A) = \sigma_\alpha^*(A')$. Nechť $p \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ je libovolný pevně zvolený bod. Nechť $p = \sigma_\alpha(m) \cdot g$ pro jednoznačný element $g \in G$ a $m = \pi(p)$. Tvrdíme, že máme rozklad $T_pP = R_{g*}(\sigma_{\alpha*}(T_mM)) \oplus \mathrm{Ver}_p(P)$. Máme

$$\dim(R_{g*}(\sigma_{\alpha*}(T_mM)) = \dim(\sigma_{\alpha*}(T_mM)) = \dim(T_mM) = \dim(M). \tag{6.35}$$

Oba podprostory tedy mají požadovanou dimenzi. Zároveň musí mít prázdný průnik, protože $\pi_*(R_{g*}(\sigma_{\alpha*}(X))) = R_{g*}(\sigma_{\alpha*}(X)) = X$, a vertikalita tedy okamžitě implikuje $X = 0$. Pro každou konexi $A|_{\mathrm{Ver}_p(P)} = A'|_{\mathrm{Ver}_p(P)}$, takže musíme ověřit rovnost jen na komplementárním podprostoru:

$$\begin{aligned}
A'|_p(R_{g*}(\sigma_{\alpha*}(X))) &= Ad_{g^{-1}}(A'|_{\sigma_\alpha(m)}(\sigma_{\alpha*}(X)) = Ad_{g^{-1}}(\mathcal{A}_\alpha|_m(X)) \\
&= \cdots = A|_p(R_{g*}(\sigma_{\alpha*}(X))).
\end{aligned} \tag{6.36}$$

To dokazuje jednoznačnost a důkaz máme hotový. ■

Poznámka 6.1.11. Úplně analogicky se dokáže tvrzení, kde máme kolekci $\{a_\alpha\}_{\alpha\in I}$ a $a_\alpha \in \Omega^p(U_\alpha, V)$ na každém průniku splňují relaci $a_\beta = \rho(\mathbf{g}_{\alpha\beta}^{-1})a_\alpha$. Potom existuje právě jedna horizontální p-forma $\alpha \in \Omega^p_\rho(P, V)$ typu ρ, taková že $a_\alpha = \sigma_\alpha^*(\alpha)$.

Poznámka 6.1.12. Máme-li na okolí $U \subseteq M$ fixovanou kalibraci $\sigma : U \to P$ a máme k dispozici lokální formu konexe $\mathcal{A} \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$, můžeme operátor kovariantní derivace jednoduše definovat jako $\mathcal{D}a = da + \rho'(\mathcal{A}) \dot{\wedge} a$ pro všechny $a \in \Omega^p(U, V)$. Dostáváme operátor $\mathcal{D} : \Omega^p(U, V) \to \Omega^{p+1}(U, V)$. Je to ovšem pouze lokální operace. Máme-li kolekci $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I}$ správně se transformujících p-forem (viz. předchozí poznámka) a kolekci $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ jako v předpokladu tvrzení 6.1.10, dostáváme nicméně kolekci $\{\mathcal{D}a_\alpha\}_{\alpha \in I}$ se správnými vlastnostmi a vše funguje podle předpokladu, tj. je-li $a_\alpha = \sigma_\alpha^*(\alpha)$ pro $\alpha \in \Omega^p_\rho(P, V)$, je $\mathcal{D}a_\alpha = \sigma_\alpha^*(D\alpha)$.

Příklad 6.1.13 (Maxwellovo pole)**.** Uvažujme triviální hlavní fibrovaný prostor $P = E^{1,3} \times U(1)$, tj. $M = E^{1,3}$ je Minkowského prostor vybavený metrikou $\eta = \mathrm{Diag}(1, -1, -1, -1)$.

Nechť $\omega \in \Omega^1(E^{1,3}, \mathfrak{u}(1))$ je forma konexe na P (označíme ji ω místo A z politických důvodů). Nechť $\sigma : E^{1,3} \to P$ je globální řez $\sigma(m) = (m, e)$, a nechť $\mathcal{A} = \sigma^*(\omega)$ je přislušná lokální forma konexe na $E^{1,3}$. Nyní je třeba si uvědomit, že $\mathfrak{u}(1) = \{\text{antihermitovské matice } 1 \times 1\} \doteq \mathbb{R}\{i\}$, kde $i \in \mathbb{C}$ je komplexní jednotka. $\mathfrak{u}(1)$ je tedy jednorozměrný vektorový prostor kde můžeme zvolit bází $t_1 = i$. Potom $\mathcal{A}$ se rozkládá jako $\mathcal{A} = A \cdot t_i \equiv iA$, kde $A \in \Omega^1(E^{1,3})$.

Kalibrační transformace je hladké zobrazení $\mathbf{g} : U \to G = U(1)$. Pro jednoduchost $U = E^{1,3}$. Protože $U(1) = \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ je jednotková kružnice, můžeme psát[1] $\mathbf{g}(m) = \exp(i\chi(m))$ pro $\chi : E^{1,3} \to \mathbb{R}$ a každé $m \in E^{1,3}$. Dostáváme tedy kalibrační transformaci $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}'$ ve tvaru

$$\mathcal{A}' = Ad_{\mathbf{g}^{-1}}\mathcal{A} + \mathbf{g}^{-1}d\mathbf{g} = \mathcal{A} + i \cdot d\chi \tag{6.37}$$

Rozpisem A tedy přesně $A' = A + d\chi$, což není nic jiného než kalibrační transformace Maxwellova 4-potenciálu tak jak jsme ji psali v podsekci 1.1.4.

Nyní uvažujme 2-formu křivosti a její lokální podobu $\mathcal{F} = \sigma^*(\Omega)$. Opět $\mathcal{F} = iF$ pro $F \in \Omega^2(E^{1,3})$. Máme $\mathcal{F} = \mathcal{D}\mathcal{A} = d\mathcal{A} + \frac{1}{2}[\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}]_{\mathfrak{g}} = d\mathcal{A}$. Odtud $F = dA$ a vidíme, že $\mathcal{F} = iF$ popisuje přesně EM tenzor. Kalibrační transformace je v tomto případě $\mathcal{F}' = Ad_{\mathbf{g}^{-1}}\mathcal{F} = \mathcal{F}$, a tedy $F' = F$. Kalibrační invarianci F lze tedy vnímat jako důsledek „abelovskosti“ grupy $U(1)$.

Konečně, uvažujme následující reprezentaci $U(1)$. Vezmu prostor $V = \mathbb{C}$ (se strukturou 2-dim reálného vektorového prostoru) a definuju $\rho(g)[\lambda] = g \cdot \lambda$, pro všechny $g \in U(1) = \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ a $\lambda \in \mathbb{C}$. Nyní uvažuju veličinu typu ρ, tj. $\Phi \in \Omega^0_\rho(P, \mathbb{C})$. Nechť $\phi = \sigma^*(\Phi)$ je odpovídající lokální veličina. Jelikož $\phi \in \Omega^0(E^{1,3}, \mathbb{C})$, můžeme ji rozložit do báze $\{1, i\}$ prostoru $\mathbb{C}$ pomocí komponentních forem $\phi_0, \phi_1 \in \Omega^0(E^{1,3}) = C^\infty(E^{1,3})$ a psát $\phi = \phi_0 \cdot 1 + \phi_1 \cdot i \equiv \phi_0 + i\phi_1$. Vidíme, že ϕ není nic jiného, než komplexní skalární pole! Podle tvrzení 6.1.6 navíc dostáváme

$$\phi' = \rho(\mathbf{g}^{-1})\phi = \exp(-i\chi)\phi. \tag{6.38}$$

To je ale přesně lokální kalibrační transformace diskutovaná v sekci 1.3. Konečně, podívejme se na vnější kovariantní derivaci $\mathcal{D}$. Z tvrzení 6.1.9 máme

$$\mathcal{D}\phi = d\phi + \rho'(\mathcal{A}) \dot{\wedge} a = d\phi + \mathcal{A} \cdot \phi = d\phi + iA \cdot \phi. \tag{6.39}$$

To je ale do písmene přesně kovariantní derivace $\mathcal{D}$ definovaná „ručně“ v části 1.4.

6.2 Kalibračně invariantní účinek

Nyní bychom se chtěli nalézt univerzální návod jak z lokálních veličin $\mathcal{F}, \mathcal{A}$ a případně „hmotových polí“ odpovídajích lokálním verzím veličin typu ρ vyrobit funkcionál akce invariantní vůči

[1] Tohle je ve skutečnosti celkem pikantní tvrzení, které není tak snadné ukázat. Dokonce neplatí pokud U není jednoduše souvislé! V takovém případě nelze takto zapsat úplně každé zobrazení $\mathbf{g}$.

lokálním kalibračním invariancím. Připomeňme, že pro obyčejné p-formy na varietě (M, g, o) s metrikou a orientací jsme definovali (pseudo)skalární součin $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$:

$$\langle \alpha, \beta \rangle_g = \int_M (\alpha, \beta)_g \cdot \omega_g = \int_M \alpha \wedge *\beta \tag{6.40}$$

Nechť $\alpha, \beta \in \Omega^p_\rho(P, V)$ jsou *horizontální* p-formy typu ρ, a nechť $a, b \in \Omega^p(U, V)$ jsou jejich lokální verze $a = \sigma^*(\alpha)$, $b = \sigma^*(\beta)$ odpovídající volbě kalibrace $\sigma : U \to P$. Chtěli bychom definovat podobný skalární součin jako pro formy kde $V = \mathbb{R}$.

Řešení je nasnadě. Nechť $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ je symetrická bilineární nedegenerovaná forma na vektorovém prostoru V (tj. pseudoskalární součin). Nechť $\{E_i\}_{i=1}^{\dim V}$ je libovolná báze prostoru V. Definujeme

$$(\!(a, b)\!)_V = (a^i, b^j)_g \cdot \langle E_i, E_j \rangle_V. \tag{6.41}$$

Snadno se ověří, že tato definice nezávisí na výběru báze. Z definice je $(\!(a, b)\!) \in C^\infty(U)$.

Nyní předpokládejme, že $\sigma' : U' \to P$ je jiný lokální řez, a $a' = \sigma'^*(\alpha)$ and $b' = \sigma'^*(\beta)$ jsou odpovídající lokální formy. Můžeme tedy najít hladkou funkci $(\!(a', b')\!) \in C^\infty(U')$. Pochopitelně chceme aby na průniku byly obě funkce totožné, tj. $(\!(a, b)\!)|_{U \cap U'} = (\!(a', b')\!)|_{U \cap U'}$. Rozdíl obou řezů nám definuje kalibrační transformaci $\mathbf{g} : U \cap U' \to G$ a na $U \cap U$' platí

$$a' = \rho(\mathbf{g}^{-1})a, \;\; b' = \rho(\mathbf{g}^{-1})b. \tag{6.42}$$

Potom pro $m \in U \cap U'$ dostáváme kalibrační transformaci

$$(\!(a', b')\!)_V(m) = (a^i, b^j)_g(m) \cdot \langle \rho(\mathbf{g}^{-1}(m))E_i, \rho(\mathbf{g}^{-1}(m))E_j \rangle_V. \tag{6.43}$$

Definice 6.2.1. Nechť (V, ρ) je reprezentace Lieovy grup G. Nechť $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ je (pseudo)skalární součin na V. Řekneme, že $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ je **ρ-invariantní**, pokud

$$\langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle_V = \langle v, w \rangle_V, \tag{6.44}$$

pro všechny $v, w \in V$ a $g \in G$. Pro souvislou grupu G je tato vlastnost ekvivalentní ρ'-invarianci:

$$\langle \rho'(x)v, w \rangle_V + \langle v, \rho'(x)w \rangle_V = 0, \tag{6.45}$$

pro všechny $v, w \in V$ and $x \in \mathfrak{g}$, kde $\rho'(x) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \rho(\exp(tx))$ je odvozená reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ na prostoru V.

Vidíme, že ρ-invariance je přesně vlastnost, která nás zachrání a zajistí invarianci vůči kalibračním transformacím. Předpokládejme tedy, že $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ *je ρ-invariantní.* Potom

$$(\!(a', b')\!)_V(m) = (a^i, b^j)_g(m) \cdot \langle E_i, E_j \rangle_V = (\!(a, b)\!)_V(m). \tag{6.46}$$

Dostáváme tedy **kalibračně invariantní**[2] objekt $(\!(a, b)\!)_V$.

Jak jsme to již několikrát dělali při definici globálních objektů, můžeme si nyní najít libovolnou kolekci řezů $\{\sigma_\mu\}_{\mu \in I}$, že jejich definiční obory pokryjí celou varietu M, pro každý řez definovat lokální objekty $a_\mu = \sigma^*_\mu(\alpha)$ a $b_\mu = \sigma^*_\mu(\beta)$ a hladké funkce $(\!(a_\mu, b_\mu)\!) \in C^\infty(U_\mu)$, které ovšem na libovolných průnicích splývají, tj. pro všechny $m \in U_\mu \cap U_{\mu'}$ máme $(\!(a_\mu, b_\mu)\!)_V(m) =$

[2] Tady je samozřejmě trošku problém se značením, protože z logických důvodů objekt zapisujeme pomocí symbolů (tady a a b) odpovídající konkrétní kalibraci. Kalibrační invariancí se tedy myslí, že když si vybereme jinou kalibraci a objekt zapíšeme pomocí odpovídajících symbolů (tady a' a b'), nic se nezmění.

$((a_{\mu'}, b_{\mu'}))_V(m)$. Dostáváme tedy globálně definovanou funkci, kterou můžeme integrovat přes celou varietu M. Většinou ji označujeme prostě $((a,b))$ pomocí jejího (libovolného) lokálního reprezentanta. Tuto funkci (zajistili jsme, že je globálně definovaná) již můžeme integrovat přes celé M:

$$\langle\langle a, b\rangle\rangle_V = \int_M ((a,b))_V \cdot \omega_g = \int_M \langle a \wedge *b\rangle_V \tag{6.47}$$

Pro každou dvojici horizontálních forem typu ρ tedy umíme vyrobit reálné číslo. Ukažme si nyní dva příklady této konstrukce, které budeme v následujícím potřebovat:

Příklad 6.2.2. Předpokládejme, že $(V,\rho) = (\mathfrak{g}, Ad)$. Pro každou kalibrační teorii máme k dispozici formu křivosti $\Omega = DA \in \Omega^2(P,\mathfrak{g})$, která je horizontální 2-forma typu Ad. Potřebujeme tedy nějakou Ad-invariantní symetrickou nedegenerovanou bilineární formu $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ na $\mathfrak{g}$. Je-li $\mathfrak{g}$ poloprostá, máme k dispozici Cartan-Killingovu formu $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ definovanou vztahem

$$\langle x, y\rangle_{\mathfrak{g}} := \mathrm{Tr}(ad_x ad_y). \tag{6.48}$$

Nechť $\mathcal{F} = \sigma^*(\Omega)$ je lokální forma křivosti odpovídající nějakému lokálnímu řezu. Lokální formě konexe $\mathcal{A}$ se v řeči teorie pole říká **kalibrační pole** a funkcionál

$$S_{kin}[\mathcal{A}] = -\frac{1}{2}\langle\langle\mathcal{F},\mathcal{F}\rangle\rangle_{\mathfrak{g}} \tag{6.49}$$

se nazývá **kinetický člen kalibrační teorie** popisované polem $\mathcal{A}$.

Příklad 6.2.3. Uvažujme $(V,\rho) = (\mathbb{C},\rho)$, kde $\mathbb{C}$ považujeme za dvourozměrný reálný vektorový prostor s bazí $\{1,i\}$ a $\rho(g)\lambda = g\cdot\lambda$. Pokud zapíšeme $g = e^{i\chi}$ pro $\chi\in\mathbb{R}$, má zobrazení $\rho(e^{i\chi})$ v bázi $\{1,i\}$ matici ve tvaru

$$\rho(e^{i\chi}) = \begin{pmatrix}\cos\chi & -\sin\chi\\ \sin\chi & \cos\chi\end{pmatrix}, \tag{6.50}$$

což jen potvrzuje známý fakt, že násobení komplexním číslem $\exp(i\chi)$ ležícím na jednotkové kružnici odpovídá rotaci v Gaussově rovině o úhel χ. Díváme-li se na $\mathbb{C}$ jako na *reálný vektorový prostor*, je přirozenou volbou Euklidovský skalární součin

$$\langle\alpha_0 + i\alpha_1, \beta_0 + i\beta_1\rangle_V = \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1, \tag{6.51}$$

který je přirozeně invariantní vůči rotacím a tedy $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ je ρ-invariantní.

K věci můžeme přistupovat i jinak, tj. dívat se na $\mathbb{C}$ jako na jednorozměrný komplexní vektorový prostor a použít standardní (komplexní) skalární součin na $\mathbb{C}$, tj.

$$\langle\lambda,\lambda'\rangle_{\mathbb{C}} = \bar{\lambda}\cdot\lambda'. \tag{6.52}$$

Tento skalární součin (je seskvilineární, ne bilineární) je ρ-invariantní vůči ρ jako komplexní reprezentaci $U(1)$ na $\mathbb{C}$. Je-li $\alpha\in\Omega^p_\rho(P,\mathbb{C})$ horizontální p-forma typu ρ a $a = \sigma^*(\alpha)$, můžeme použít $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ nebo $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}}$ k definici (stejného) reálného čísla $\langle\langle a, a\rangle\rangle$. Speciálně tedy můžeme definovat účinek pro komplexní skalární pole

$$S_0[\phi] = \langle\langle\mathcal{D}\phi,\mathcal{D}\phi\rangle\rangle_V - m^2\langle\langle\phi,\phi\rangle\rangle_V. \tag{6.53}$$

Je důležité si uvědomit, že v $\mathcal{D}$ je pořád schované Maxwellovo kalibrační pole $A = -i\mathcal{A}$. Jelikož $\mathfrak{u}(1)$ není poloprostá Lieova algebra, nemůžeme použít pro přidání kinetického členu Cartan-Killingovu formu jako v předchozím příkladě (je dokonce nulová). Jelikož $\mathfrak{u}(1) = \mathbb{R}\{i\}\cong\mathbb{R}$, můžeme použít standardní skalární součin na $\mathbb{R}$, t.j. $\langle i\alpha, i\alpha'\rangle_{\mathfrak{g}} = \alpha\alpha'$. Potom

$$S_{kin}[A] = -\frac{1}{2}\langle\langle\mathcal{F},\mathcal{F}\rangle\rangle_{\mathfrak{g}} = -\frac{1}{2}\langle F,F\rangle_g\cdot\langle i\cdot 1, i\cdot 1\rangle_{\mathfrak{g}} = -\frac{1}{2}\langle dA, dA\rangle_g. \tag{6.54}$$

Kombinací S_{kin} a S_0 dostáváme přesně minimální interakci S, kterou jsme nalezli v (1.72).

Tyto příklady v zásadě shrnují základní filozofii kalibračních teorií. Máme Lieovu grupu G a hlavní fibraci $\pi : P \to M$. Varieta M plní úlohu fyzikálního prostoročasu. **Kalibrační pole** $\mathcal{A} \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$ je lokálně definovaná veličina pevně spjatá s **fixací kalibrace** $\sigma : U \to P$ a předepsaným chováním při změně kalibrace. Geometricky odpovídá volbě konexe $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$.

Potom pro každou reprezentaci (V, ρ) Lieovy grupy G můžeme definovat **hmotová pole** $a \in \Omega^p(U, V)$, která jsou lokální verzí horizontální p-formy α typu ρ, $\alpha \in \Omega^p_\rho(P, V)$. Na V potřebujeme ρ-invariantní pseudoskalární součin.

Dohromady můžeme vytvořit kalibračně invariantní účinek (akci) pro pole $\mathcal{A}$ a hmotové pole α (těch můžeme do akce přidat libovolný počet) definovaný jako

$$S[\mathcal{A}, a] = -\frac{1}{2}\langle\!\langle \mathcal{D}\mathcal{A}, \mathcal{D}\mathcal{A}\rangle\!\rangle_{\mathfrak{g}} + \langle\!\langle \mathcal{D}a, \mathcal{D}a\rangle\!\rangle_V - m^2\langle\!\langle a, a\rangle\!\rangle_V, \tag{6.55}$$

přičemž interakce polí $\mathcal{A}$ a a je vždy schovaná výhradně v $\mathcal{D}a = da + \rho'(\mathcal{A}) \dot\wedge a$.

Příklad 6.2.4 (Yang-Millsova teorie, 1954). Uvažujme izospinový dublet $\Psi \in C^\infty(E^{1,3}, \mathbb{C}^2)$, tj. $\Psi = (\phi_1, \phi_2)^T$, kde $\phi_1, \phi_2 \in C^\infty(E^{1,3}, \mathbb{C})$ jsou komplexní skalární pole. Příslušný funkcionál pro Ψ se obvykle píše ve tvaru

$$S_0[\Psi] = \int d^4x \{(\partial^\mu \Psi^\dagger)(\partial_\mu \Psi) - m^2 \Psi^\dagger \Psi\} = \int d^4x \sum_{i=1}^{2} \{\partial^\mu \bar\phi_i \cdot \partial_\mu \phi_i - m^2 \bar\phi_i \cdot \phi_i\} \tag{6.56}$$

Funkcionál je zjevně invariantní vůči transformaci $\Psi' = \mathbf{S}^{-1}\Psi$, kde $\mathbf{S} \in \mathrm{SU}(2)$ je *konstantní matice*. Problémem je opět lokální kalibrační transformace, kde $\mathbf{S} = \mathbf{S}(x)$.

Naštěstí už přesně víme, jak postupovat. Uvažujme kanonickou reprezentaci SU(2) na $V = \mathbb{C}^2$, tj. $\rho(\mathbf{S})[\chi] = \mathbf{S}.\chi$ pro všechny $\chi \in \mathbb{C}^2$. Potom lokální kalibrační transformace Ψ odpovídá přesně kalibrační transformaci $\Psi = \sigma^*(\boldsymbol{\Psi})$ pro $\boldsymbol{\Psi} \in C^\infty_\rho(P, \mathbb{C}^2)$ je veličina typu ρ a $P = E^{1,3} \times \mathrm{SU}(2)$. Standardní skalární součin $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}^2}$ je ρ-invariantní z definice grupy SU(2) a můžeme ho tedy použít pro definici (komplexního seskvilineárního) skalárního součinu $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle_V$. Potom

$$S_0[\Psi] = \langle\!\langle d\Psi, d\Psi\rangle\!\rangle_V - m^2\langle\!\langle \Psi, \Psi\rangle\!\rangle_V, \tag{6.57}$$

a víme, že je třeba nahradit d operátorem vnější kovariantní derivace $\mathcal{D} = d + \rho'(\mathcal{A})$, kde $\mathcal{A} \in \Omega^1(E^{1,3}, \mathfrak{su}(2))$ se kalibračně transformuje vztahem

$$\mathcal{A}' = \mathbf{S}^{-1}\mathcal{A}\mathbf{S} + \mathbf{S}^{-1}d\mathbf{S}. \tag{6.58}$$

Připomeňme, že algebra $\mathfrak{su}(2)$ má bázi standardně zvolenou jako $\{\tau_a\}_{a=1}^3$, kde $\tau_a = -\frac{i}{2}\sigma_a$. Fyzikové ovšem nemají rádi anti-hermitovské matice, takže pracují s hermitovskou bází (která ale není báze $\mathfrak{su}(2)$!) $\{T_a\}_{a=1}^3$, kde $T_a = \frac{1}{2}\sigma_a$. Komutační relace v obou bázích jsou

$$[\tau_a, \tau_b] = \epsilon_{abc}\tau_c, \quad [T_a, T_b] = i\epsilon_{abc}T_c. \tag{6.59}$$

Lokální forma konexe $\mathcal{A}$ se potom parametrizuje jako $\mathcal{A} = A^a\tau_a = -iA^aT_a$, kde $A^a \in \Omega^1(E^{1,3})$ jsou komponentní 1-formy, a píšeme $A = A^aT_a$. Kovariantní derivace $\mathcal{D}$ působící na dublet Ψ tedy získá tvar $\mathcal{D}\Psi = d\Psi - iA \cdot \Psi$. Analogicky, je-li $\mathcal{F} = \sigma^*(\Omega)$ odpovídající forma křivosti, píšeme $\mathcal{F} = -iF^aT_a$, kde $A^a \in \Omega^2(E^{1,3})$. S použitím komutačních relací výše tedy

$$F^a = dA^a + \frac{1}{2}\epsilon_{abc}A^b \wedge A^c. \tag{6.60}$$

Zapsáno v obvyklých komponentách vzhledem k standardní souřadnicové bázi v $E^{1,3}$ dostáváme modifikovaný výraz

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + \epsilon_{abc} A^b_\mu A^c_\nu. \tag{6.61}$$

Konečně, kalibrační transformaci lze psát jako (zde $A_\mu = A^a_\mu T_a$)

$$A'_\mu = \mathbf{S}^{-1} A_\mu \mathbf{S} + i\mathbf{S}^{-1}\partial_\mu \mathbf{S}. \tag{6.62}$$

Konečně, musíme analyzovat kinetický člen $S_{kin}[\mathcal{A}] = -\frac{1}{2}\langle\langle \mathcal{F}, \mathcal{F}\rangle\rangle_{\mathfrak{g}}$ z příkladu 6.2.2. Dá se snadno ukázat, že Cartan-Killingova formu lze pro $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ a všechny $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{su}(2)$ psát jako $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B}\rangle_{\mathfrak{g}} = 4\,\mathrm{Tr}(\mathbf{AB})$. Po dosazení tedy dostáváme:

$$-\frac{1}{2}\langle\langle \mathcal{F}, \mathcal{F}\rangle\rangle_{\mathfrak{g}} = -\frac{1}{4}\int_M d^4x \{F^a_{\mu\nu}(F^b)^{\mu\nu}\}\langle \tau_a, \tau_b\rangle_{\mathfrak{g}} = -\int_M d^4x \{F^a_{\mu\nu}(F^b)^{\mu\nu}\}\,\mathrm{Tr}(\tau_a\tau_b). \tag{6.63}$$

Ale $\mathrm{Tr}(\tau_a\tau_b) = -\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}(\sigma_a\sigma_b) = -\frac{1}{2}\delta_{ab}$. Celkově tedy dostáváme

$$-\frac{1}{2}\langle\langle \mathcal{F}, \mathcal{F}\rangle\rangle_{\mathfrak{g}} = \sum_{a=1}^{3} \frac{1}{2}\int_M d^4x \{F^a_{\mu\nu}(F^a)^{\mu\nu}\}. \tag{6.64}$$

Všimněte si, že normalizace kinetického členu se může lišit knížka od knížky. Důvodem je nejednoznačnost volby pseudoskalárního součinu, kde si můžeme obecně vzít libovolný násobek Cartan-Killingovy metriky.

6.3 Pohybové rovnice kalibrační teorie

Uvažujme hlavní fibrovaný prostor $\pi : P \to M$ se strukturní grupou G. Uvažujme kalibrační teorii pole $\mathcal{A}$ spolu s hmotovým polem a, definovanou akcí (6.55). Jak vypadají pohybové rovnice? Připomeňme si, že kodiferenciál je zobrazení definované pomocí Hodgeovy duality: $\delta = *^{-1} d * \hat{\eta}$, kde $\hat{\eta}$ je operátor definovaný na p-formách jako $\hat{\eta}(\alpha) = (-1)^p\alpha$.

Definice 6.3.1. Nechť $\mathcal{D} : \Omega^p(U, V) \to \Omega^{p+1}(U, V)$ je operátor kovariantní derivace. Pro všechny $a \in \Omega^p(U, V)$ definovaný jako $\mathcal{D}a = da + \rho'(\mathcal{A}) \dot{\wedge} a$. Nechť g je metrika na M. **Kovariantní kodiferenciál** $\mathcal{D}^\dagger$ definujeme vztahem

$$\mathcal{D}^\dagger = *^{-1}\mathcal{D} * \hat{\eta}, \tag{6.65}$$

kde $*$ působí pouze na komponentní p-formy jako obyčejná Hodgeova dualita na M.

Dostáváme tedy zobrazení $\mathcal{D}^\dagger : \Omega^{p+1}(U, V) \to \Omega^p(U, V)$. Stejně jako pro $\mathcal{D}$ neplatí, že $(\mathcal{D}^\dagger)^2 = 0$, přesněji $(\mathcal{D}^\dagger)^2(a) = - *^{-1} (\rho'(\mathcal{F}) \dot{\wedge} * a)$. Důležité je, že v platnosti zůstává sdružení s operátorem $\mathcal{D}$, což si dokážeme v následujícím tvrzení.

Tvrzení 6.3.2. *Nechť $a \in \Omega^p(U, V)$, $b \in \Omega^{p+1}(U, V)$. Potom platí pravidlo*

$$d\langle a \wedge *b\rangle_V = \{((\mathcal{D}a, b))_V - ((a, \mathcal{D}^\dagger b))_V\} \cdot \omega_g. \tag{6.66}$$

Je-li $a = \sigma^*(\alpha)$ a $b = \sigma^*(\beta)$ pro kalibraci $\sigma : U \to P$ a horizontální formy $\alpha \in \Omega^p_\rho(P, V)$, resp. $\beta \in \Omega^{p+1}_\rho(P, V)$, jsou obě strany kalibračně invariantní n-formy (definují tedy globální n-formu a má smysl je integrovat přes celou varietu M). Dostáváme tedy rovnici

$$\int_M d\langle a \wedge *b\rangle_V = \langle\langle \mathcal{D}a, b\rangle\rangle_V - \langle\langle a, \mathcal{D}^\dagger b\rangle\rangle_V. \tag{6.67}$$

Konečně, pokud je integrál z $\langle a \wedge *b\rangle_V$ přes ∂M z jakéhokoliv důvodu nula, dostáváme

$$\langle\!\langle \mathcal{D}a, b\rangle\!\rangle_V = \langle\!\langle a, \mathcal{D}^\dagger b\rangle\!\rangle_V. \tag{6.68}$$

Důkaz. Důkaz je modifikací podobného tvrzení pro obyčejný kodiferenciál. Přímým výpočtem

$$\begin{aligned}
d\langle a \wedge *b\rangle_V &= \langle da \wedge *b\rangle_V + (-1)^p \langle a \wedge d(*b)\rangle_V \\
&= \langle \mathcal{D}a \wedge *b\rangle_V + (-1)^p \langle a \wedge \mathcal{D}(*b)\rangle_V \\
&\quad - \langle (\rho'(\mathcal{A}) \dot{\wedge} a) \wedge *b\rangle_V - (-1)^p \langle a \wedge (\rho'(\mathcal{A}) \dot{\wedge} * b)\rangle_V \\
&= \langle \mathcal{D}a \wedge *b\rangle_V - \langle a \wedge *(*^{-1}\mathcal{D} * \hat{\eta}(b))\rangle_V \\
&\quad - \mathcal{A}^\alpha \wedge a^i \wedge (*\beta)^j \cdot \{\langle \rho'(t_\alpha)E_i, E_j\rangle_V + \langle E_i, \rho'(t_\alpha)E_j\rangle_V\} \\
&= \{(\!(\mathcal{D}a, b)\!)_V - (\!(a, \mathcal{D}^\dagger b)\!)_V\} \cdot \omega_g.
\end{aligned} \tag{6.69}$$

V posledním kroku jsme použili ρ'-invarianci formy $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$. Kalibrační invariance je zřejmá, stejně jako zbývající tvrzení (Stokesova věta). ■

Předpokládejme, že $a = \phi$, tj. $a = \sigma^*(\Phi)$ pro $\Phi \in \Omega^0_\rho(P, V)$ veličinu typu ρ. S využitím předchozího tvrzení můžeme odvodit pohybové rovnice akce $S[\mathcal{A}, \phi]$. Nejprve nalezneme pohybové rovnice pro kalibrační pole $\mathcal{A}$. Nechť $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ je konexe a nechť $\theta \in \Omega^1_{Ad}(P, \mathfrak{g})$ je horizontální 1-forma typu Ad. Potom $\hat{A} = A + \epsilon\theta$ je opět konexe na P. Pro jednoduchost $\partial M = \emptyset$. Příslušná forma křivosti dává

$$\hat{\Omega} = d\hat{A} + \frac{1}{2}[\hat{A} \wedge \hat{A}]_{\mathfrak{g}} = \Omega + \epsilon\{d\theta + [A \wedge \theta]_{\mathfrak{g}}\} + o(\epsilon^2) = \Omega + \epsilon D\theta + o(\epsilon^2). \tag{6.70}$$

Lokálně dostáváme vztah $\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{F} + \epsilon\mathcal{D}\vartheta + o(\epsilon^2)$, kde $\vartheta = \sigma^*(\theta)$. Variace kinetického členu je tedy velmi jednoduchá z pomocí předcházejícího tvrzení:

$$S_{kin}[\hat{\mathcal{A}}] = -\frac{1}{2}\langle\!\langle \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{F}}\rangle\!\rangle_{\mathfrak{g}} = -\frac{1}{2}\langle\!\langle \mathcal{F}, \mathcal{F}\rangle\!\rangle_{\mathfrak{g}} - \epsilon\langle\!\langle \mathcal{F}, \mathcal{D}\vartheta\rangle\!\rangle_{\mathfrak{g}} = S_{kin}[\mathcal{A}] - \epsilon\langle\!\langle \mathcal{D}^\dagger\mathcal{F}, \vartheta\rangle\!\rangle_{\mathfrak{g}} + o(\epsilon^2). \tag{6.71}$$

Nicméně nesmíme zapomenout, že kinetický člen hmotového pole $\langle\!\langle \mathcal{D}\phi, \mathcal{D}\phi\rangle\!\rangle$ rovněž obsahuje konexi. Je-li $\phi = \sigma^*(\Phi)$, máme $\hat{D}\Phi = D\Phi + \rho'(\theta)\Phi$. Lokálně tedy $\hat{\mathcal{D}}\phi = \mathcal{D}\phi + \rho'(\vartheta)\phi$. Odtud

$$\langle\!\langle \hat{\mathcal{D}}\phi, \hat{\mathcal{D}}\phi\rangle\!\rangle_V = \langle\!\langle \mathcal{D}\phi, \mathcal{D}\phi\rangle\!\rangle_V + 2\epsilon\langle\!\langle \mathcal{D}\phi, \rho'(\vartheta)\phi\rangle\!\rangle_V + o(\epsilon^2). \tag{6.72}$$

Ve variaci kinetického členu dostáváme člen ve tvaru $\langle\!\langle \cdot, \vartheta\rangle\!\rangle_{\mathfrak{g}}$. Naším cílem je tedy přepsat $\langle\!\langle \mathcal{D}\phi, \rho'(\vartheta)\phi\rangle\!\rangle_V = -\frac{1}{2}\langle\!\langle \mathcal{J}, \vartheta\rangle\!\rangle_{\mathfrak{g}}$, kde $\mathcal{J}$ bude plnit roli „čtyřproudu“. Zavedeme si označení $\rho'_{\mu jk} = \langle \rho'(t_\mu)E_j, E_k\rangle_V$ a $s_{\mu\nu} = \langle t_\mu, t_\nu\rangle_{\mathfrak{g}}$. Potom dosazením do definic dostáváme

$$\begin{aligned}
(\!(\mathcal{D}\phi, \rho'(\vartheta)\phi)\!)_V \cdot \omega_g &= \langle \rho'(\vartheta)\phi \wedge *\mathcal{D}\phi\rangle_V = \vartheta^\mu \phi^j \wedge (*\mathcal{D}\phi)^k \langle \rho'(t_\mu)E_j, E_k\rangle_V \\
&= \vartheta^\mu \wedge *\{\rho'_{\mu jk}\phi^j \mathcal{D}\phi^k\} \\
&= \vartheta^\mu \wedge *\{s^{\nu\lambda}\rho'_{\lambda jk}\phi^j \mathcal{D}\phi^k\} \cdot \langle t_\mu, t_\nu\rangle_{\mathfrak{g}}.
\end{aligned} \tag{6.73}$$

Zavedeme si nyní lokální 1-formu proudu $\mathcal{J} \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$ vztahem

$$\mathcal{J} = -2\{s^{\nu\lambda}\rho'_{\lambda jk}\phi^j \mathcal{D}\phi^k\}t_\nu = -2\langle \rho'(t^\nu_{\mathfrak{g}})\phi, \mathcal{D}\phi\rangle_V \cdot t_\nu, \tag{6.74}$$

kde $t^\nu_{\mathfrak{g}} = s^{\nu\mu}t_\mu$. Potom tedy $\langle\!\langle \mathcal{D}\phi, \rho'(\vartheta)\phi\rangle\!\rangle_V = -\frac{1}{2}\langle\!\langle \mathcal{J}, \vartheta\rangle\!\rangle_{\mathfrak{g}}$. Celkovou variaci akce S vzhledem k $\mathcal{A}$ můžeme tedy psát jako

$$S[\hat{\mathcal{A}}, \phi] = S[\mathcal{A}, \phi] - \epsilon\{\langle\!\langle \mathcal{D}^\dagger\mathcal{F} + \mathcal{J}, \vartheta\rangle\!\rangle_{\mathfrak{g}}\} + o(\epsilon^2). \tag{6.75}$$

Jelikož do prvního řádu v ϵ se musí obě akce rovnat, dostáváme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\mathcal{D}^\dagger \mathcal{F} = -\mathcal{J}. \tag{6.76}$$

Variace akce pro hmotové pole je již velmi jednoduchá. Předpokládáme $\hat{\Phi} = \Phi + \epsilon\Psi$, lokálně $\hat{\phi} = \phi + \epsilon\psi$. Po dosazení do akce

$$S[\mathcal{A}, \hat{\phi}] = S[\mathcal{A}, \phi] + 2\epsilon\langle\!\langle \mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}\phi + m^2\phi, \psi \rangle\!\rangle_V + o(\epsilon^2) \tag{6.77}$$

Z nedegenerovanosti $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle_V$ potom plyne pohybová rovnice pro ϕ ve tvaru

$$\mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}\phi + m^2\phi = 0. \tag{6.78}$$

Tvrzení 6.3.3. *Kalibrační pole $\mathcal{A}$ a hmotové pole ϕ splňují pohybové rovnice (extremalizují funkcionál S) právě tehdy když*

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = 0, \;\; \mathcal{D}^\dagger \mathcal{F} = -\mathcal{J}, \;\; \mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}\phi + m^2\phi = 0. \tag{6.79}$$

První z rovnic nepochází z variace akce. Čtyřproud je dán rovnicí (6.74).

Tvrzení 6.3.4 (Noetherovský proud j)**.** *Definujeme $j = \mathcal{J} + *^{-1}[\mathcal{A} \wedge *\mathcal{F}]_{\mathfrak{g}}$. Potom j splňuje **rovnici kontinuity** ve tvaru $d * j = 0$, neboli ekvivalentně $\delta j = 0$.*

Důkaz. Pohybová rovnice (6.76) dává (ekvivalentně) $*\mathcal{J} = -\mathcal{D}*\mathcal{F} = -d(*\mathcal{F}) - [\mathcal{A} \wedge *\mathcal{F}]_{\mathfrak{g}}$. Odtud $-d(*\mathcal{F}) = *(\mathcal{J} + *^{-1}[\mathcal{A} \wedge *\mathcal{F}]_{\mathfrak{g}})$, a tedy $0 = d * (\mathcal{J} + *^{-1}[\mathcal{A} \wedge *\mathcal{F}]_{\mathfrak{g}}) = d * j$. ■

Kapitola 7

Přidružený vektorový fibrovaný prostor

7.1 Redukce ekvivariantních vektorových bandlů

Na začátek si ujasníme jednu generální proceduru, která za jistých okolností umožňuje vektorový bandl nad totálním prostorem hlavní fibrace $\pi : P \to M$ vybavený vhodnou grupovou akcí „redukovat“ na vektorový bandl nad M, jehož totální prostor je prostor orbit E/G. Nejprve si ovšem musíme vyjasnit několik základních pojmů z teorie vektorových bandlů.

Definice 7.1.1. Nechť $q : E \to M$ a $q' : E' \to M'$ jsou dva vektorové bandly. Potom dvojice $(\mathcal{F}, \varphi)$ se nazývá **morfismus vektorových bandlů**, pokud $\mathcal{F} : E \to E'$ a $\varphi : M \to M'$ jsou hladká zobrazení taková, že následující diagram je komutativní:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\mathcal{F}} & E' \\ \big\downarrow{\scriptstyle q} & & \big\downarrow{\scriptstyle q'} \\ M & \xrightarrow{\varphi} & M' \end{array} . \tag{7.1}$$

Jinými slovy, $\mathcal{F}(E_m) \subseteq E'_{\varphi(m)}$, tj. $\mathcal{F}$ zobrazuje vlákno nad m do vlákna nad $\varphi(m)$. Kromě toho musí být $\mathcal{F}$ po vláknech lineární, tj. pro každé $m \in M$ je $\mathcal{F}_m \equiv \mathcal{F}|_{E_m}$ lineární zobrazení příslušných vektorových prostorů, tj. $\mathcal{F}_m \in \mathrm{Hom}(E_m, E'_{\varphi(m)})$. Jsou-li $\mathcal{F}$ a φ difeomorfismy, nazývá se $(\mathcal{F}, \varphi)$ **izomorfismus vektorových bandlů**.

Morfismy vektorových bandlů jsou standardní nástroj jak porovnávat vektorové fibrované prostory. Izomorfní vektorové bandly jsou tedy po všech stránkách „de facto stejné“.

Lemma 7.1.2. *Nechť $(\mathcal{F}, \varphi)$ je morfismus vektorových bandlů E a E', kde $\varphi : M \to M'$ je difeomofismus. Potom je to izomorfismus právě tehdy když je pro každé $m \in M$ zobrazení $\mathcal{F}_m \in \mathrm{Hom}(E_m, E'_{\varphi(m)})$ lineární izomorfismus.*

Nyní máme definice potřebné k popisu vektorových bandlů vhodných k redukci.

Definice 7.1.3. Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor s akci $R : P \times G \to P$ grupy G. Nechť $q : E \to P$ je vektorový bandl nad totálním prostorem P s typickým vláknem V.

Předpokládejme, že na totálním prostoru E působí G pravou akcí $\Re : E \times G \to E$. Řekneme, že E je **ekvivariantní vektorový bandl**, pokud jsou splněny následující dvě vlastnosti:

1. Pro každé $g \in G$ tvoří dvojice $(\Re_g, R_g)$ automorfismus vektorového bandlu E.
2. Pro E existuje **π-saturovaná ekvivariantní lokální trivializace** $\{(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$. To znamená, že pro každé $\alpha \in I$ je $\mathcal{U}_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$ pro otevřenou množinu $U_\alpha \subseteq M$, a každé trivializační zobrazení $\psi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times V \to q^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$ je ekvivariantní:
$$\psi_\alpha(R_g(p), v) = \Re_g(\psi_\alpha(p, v)), \tag{7.2}$$
pro každé $(p, v) \in \mathcal{U}_\alpha \times V$ a $g \in G$. V oblíbené tečkové notaci $\psi_\alpha(p \cdot g, v) = \psi_\alpha(p, v) \cdot g$.

Nechť E/G je prostor orbit příslušný pravé akci $\Re$, a označme $\natural : E \to E/G$ příslušné faktorzobrazení, tj. pro každé $e \in E$ je $\natural(e) \in E/G$ orbita obsahující bod e. Říkali jsme si, že ne vždycky je E/G poctivou varietou (takovou, že $\natural$ je hladká submerze). Ukážeme si, že pro ekvivariantní vektorový bandl E se dá říct mnohem víc.

Tvrzení 7.1.4. *Nechť $q : E \to P$ je ekvivariantní vektorový bandl. Potom na E/G existuje unikátní struktura vektorového bandlu (tj. včetně hladké struktury) $q^\natural : E/G \to M$, taková, že $(\natural, \pi)$ se stane po vláknech bijektivním morfismem vektorových bandlů E a E/G. Zejména*
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\natural"] \arrow[d, "q"] & E/G \arrow[d, "q^\natural"] \\ P \arrow[r, "\pi"] & M \end{tikzcd} \tag{7.3}$$
tvoří komutativní diagram a $\natural : E \to E/G$ je hladká surjektivní submerze. Vektorové bandly E a E/G mají společné typické vlákno.

Důkaz. Budeme postupovat v duchu tvrzení 2.2.2, tj. sestrojíme lokální trivializaci prostoru E/G, a ukážeme, že přechodová zobrazení jsou hladká. Tím zajistíme na E/G topologii a hladkou strukturu. Pak zbývá ukázat tvrzení o $(\natural, \pi)$ a jednoznačnost konstrukce.

Nejprve si definujeme projekci $q^\natural : E/G \to M$. Můžeme si ji definovat přímo pomocí komutativity diagramu (7.3), tj. definujeme $q^\natural(\natural(e)) = \pi(q(e))$. Musíme ukázat, že tento předpis definuje zobrazení $q^\natural$, tj. musí dávat stejné hodnoty v případě, že $\natural(e) = \natural(e')$. To ale znamená, že existuje $g \in G$ takové, že $e' = \Re_g(e)$. Ale $(\Re_g, R_g)$ je morfismus vektorových bandlů, a tedy $q \circ \Re_g = R_g \circ q$. Navíc R působí podél vláken, a tedy $\pi \circ R_g = \pi$. Odtud tedy
$$q^\natural(\natural(e')) = \pi(q(e')) = \pi(q(\Re_g(e))) = \pi(R_g(q(e))) = \pi(q(e)) = q^\natural(\natural(e)). \tag{7.4}$$
A tedy $q^\natural$ je dobře definované a navíc automaticky zajistí komutativitu (7.3).

Jdeme vyrobit lokální trivializaci. Nechť $\{(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ je π-saturovaná ekvivariantní trivializace z předpokladu. Můžeme předpokládat, že $\mathcal{U}_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$, kde U_α jsou okolí, kde máme lokální trivializaci $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ pro hlavní fibraci P. Chceme definovat bijektivní zobrazení $\mu_\alpha : U_\alpha \times V \to (q^\natural)^{-1}(U_\alpha)$ a ověřit, že příslušná přechodová zobrazení jsou hladká. Nechť $m \in U_\alpha$ and $p \in \pi^{-1}(m)$ je libovolný bod vlákna P nad m. Pro každé $(m, v) \in U_\alpha \times V$ definujeme
$$\mu_\alpha(m, v) = \natural(\psi_\alpha(p, v)). \tag{7.5}$$

Musíme zjistit, zda pravá strana nezávisí na výběru $p \in P_m$. Nechť $p' = p \cdot g$. Potom

$$\natural(\psi_\alpha(p \cdot g, v)) = \natural(\psi_\alpha(p, v) \cdot g) = \natural(\psi_\alpha(p, v)), \tag{7.6}$$

kde jsme využili ekvivarianci trivializačního zobrazení ψ_α (danou předpokladem). Jak vypadá zobrazení inverzní k μ_α? Máme definovat $\mu_\alpha^{-1} : (q^\natural)^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times V$. Pro libovolné $e \in \mathcal{U}_\alpha$:

$$\mu_\alpha^{-1}(\natural(e)) = ((\pi \circ \pi_1)(\psi_\alpha^{-1}(e)), \pi_2(\psi_\alpha^{-1}(e))), \tag{7.7}$$

kde π_1 a π_2 jsou projekce z kartézského součinu $\mathcal{U}_\alpha \times V$ na první a druhou komponentu. Opět je potřeba ověřit, že pravá strana se nezmění pokud $\natural(e) = \natural(e')$, tj. $e' = \Re_g(e)$ pro nějaké $g \in G$. Z ekvivariance zobrazení ψ_α ovšem plyne, že

$$\pi_1 \circ \psi_\alpha^{-1}(e \cdot g) = \pi_1(\psi_\alpha^{-1}(e)) \cdot g, \quad \pi_2 \circ \psi_\alpha^{-1}(e \cdot g) = \pi_2 \circ \psi_\alpha^{-1}(e). \tag{7.8}$$

Odtud plyne i nezávislost μ_α^{-1} na volbě reprezentanta třídy (orbity) $\natural(e)$. Je to však inverze?

$$\mu_\alpha^{-1}(\mu_\alpha(m, v)) = \mu_\alpha^{-1}(\natural(\psi_\alpha(p, v))) = ((\pi \circ \pi_1)(p, v), \pi_2(p, v)) = (m, v). \tag{7.9}$$

Opačné pořadí je obdobně jednoduché. Konečně, nechť $\hat{g}_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \to \mathrm{GL}(V)$ jsou přechodová zobrazení odpovídající lokální trivializaci $\{(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$. Definujeme $g^\natural_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(V)$ obvyklým vztahem $[g^\natural_{\alpha\beta}(m)](v) = (\pi_2 \circ \mu_\alpha^{-1})(\mu_\beta(m, v))$. Pro $p \in \mathcal{U}_\alpha \cap U_\beta$ máme z definice přechodových zobrazení vztah $\psi_\beta(p, v) = \psi_\alpha(p, [\hat{g}_{\alpha\beta}(p)](v))$. Po dosazení tedy

$$[g^\natural_{\alpha\beta}(m)](v) = (\pi_2 \circ \mu_\alpha^{-1})(\natural(\psi_\beta(p, v))) = (\pi_2 \circ \mu_\alpha^{-1})(\natural\psi_\alpha(p, [\hat{g}_{\alpha\beta}(p)](v))) = [\hat{g}_{\alpha\beta}(p)](v). \tag{7.10}$$

Z toho ale plyne, že $\hat{g}_{\alpha\beta}$ a $g^\natural_{\alpha\beta}$ jsou zobrazení vztažená relací $\hat{g}_{\alpha\beta} = g^\natural_{\alpha\beta} \circ \pi$. Jelikož π je hladká sumberze a $\hat{g}_{\alpha\beta}$ je hladké zobrazení, musí být i $g^\natural_{\alpha\beta}$ hladké zobrazení.

Abychom ukázali, že $(\natural, \pi)$ je morfismus vektorových bandlů, musí být $\natural$ hladké, diagram (7.3) musí komutovat (to už jsme zajistili), a $\natural_p : E_p \to (E/G)_{\pi(p)}$ musí být lineární. Připomeňme si, že lineární struktura v jednotlivých vláknech se zavádí pomocí lokální trivializace, tj. řekneme, že $\mu_\alpha(m, v) + \lambda \cdot \mu_\alpha(m, w) := \mu_\alpha(m, v + \lambda w)$. Pro hladkost a linearity $\natural$ tedy stačí ukázat, že každé složení $\mu_\alpha^{-1} \circ \natural \circ \psi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times V \to U_\alpha \times V$ je hladké a po vláknech lineární. Ale

$$(\mu_\alpha^{-1} \circ \natural \circ \psi_\alpha)(p, v) = (\pi(p), v), \tag{7.11}$$

kde jsou zmíněné vlastnosti zřejmé. Navíc je zřejmě $\natural$ po vláknech bijektivní (lokálně je to identita na V). Dokázali jsme tedy všechno až na jednoznačnost.

Předpokládejme, že $p^\natural : (E/G)' \to M$ splňuje předpoklady tvrzení, kde apostrof označuje pouze rozdílnost přidaných struktur (hladký atlas, fibrace), a nechť $\natural' : E \to (E/G)'$ je odpovídající zobrazení (množinově opět stejné). Můžeme definovat (množinově identitu) zobrazení $\mathbf{\Psi} : E/G \to (E/G)'$ vztahem $\mathbf{\Psi}(\natural(e)) = \natural'(e)$, které je automaticky hladké, protože $\natural$ je surjektivní submerze a $\natural'$ je hladké. Stejně nalezneme inverzi $\mathbf{\Psi}^{-1}$ a $\mathbf{\Psi}$ je tedy difeomorfismus. Platí

$$p^\natural(\mathbf{\Psi}(\natural(e)) = p^\natural(\natural'(e)) = \pi(q(e)) = q^\natural(\natural(e)). \tag{7.12}$$

Využili jsme, že $\natural'$ je morfismus vektorových bandlů. Odtud plyne komutativita diagramu:

$$\begin{tikzcd} E/G \arrow[r, "\mathbf{\Psi}"] \arrow[d, "q^\natural"] & (E/G)' \arrow[d, "p^\natural"] \\ M \arrow[r, "1_M"] & M \end{tikzcd} \tag{7.13}$$

Obdobně se ukáže, že $\mathbf{\Psi}_m : (E/G)_m \to (E/G)'_m$ je lineární isomorfismus, což dokazuje, že $(\mathbf{\Psi}, 1_M)$ je izomorfismus vektorových bandlů E/G a $(E/G)'$. To je důkaz jednoznačnosti. ■

Před uvedením příkladů redukce vektorových fibrovaných prostorů si ještě za čerstva ujasníme, jak vypadají hladké řezy nového fibrovaného prostoru E/G. Ukazuje se, že se dají kanonicky ztotožnit s podmnožinou řezů původního vektorového bandlu E.

Definice 7.1.5. Nechť $q : E \to P$ je ekvivariantní vektorový bandl nad P. Nechť $\psi \in \Gamma(E)$ je hladký řez E. Řekneme, že ψ je **G-invariantní** řez, pokud pro všechny $g \in G$ a $p \in P$ platí

$$\psi(p \cdot g) = \Re_g(\psi(p)). \tag{7.14}$$

Množinu G-invariantních řezů označujeme jako $\Gamma_G(E)$.

$\Gamma_G(E)$ je zjevně vektorový podprostor $\Gamma(E)$. Nejde však o $C^\infty(P)$-podmodul, protože pro obecnou funkci f a $\psi \in \Gamma_G(E_P)$ není $f\psi$ G-invariantní řez bandlu E. Lze však snadno nahlédnout, že $\Gamma_G(E)$ tvoří $C^\infty(M)$-modul, kde „násobení“ $\bullet$ hladkou funkcí $h \in C^\infty(M)$ je definované jako $(h \bullet \psi)(p) = (h \circ \pi)(p) \cdot \psi(p)$, tj. ve zkratce $h \bullet \psi \equiv (h \circ \pi)\psi$. Množina hladkých řezů vektorového bandlu E/G též tvoří $C^\infty(M)$-modul, dá se tedy očekávat, že $\Gamma_G(E)$ a $\Gamma(E/G)$ spolu mohou nějak souviset.

Tvrzení 7.1.6. *$C^\infty(M)$-moduly $\Gamma_G(E)$ a $\Gamma(E/G)$ jsou kanonicky izomorfní.*

Důkaz. Definujeme zobrazení $\mathbf{\Phi} : \Gamma_G(E) \to \Gamma(E/G)$ a ukážeme, že jde o bijekci $C^\infty(M)$-modulů, tj. o lineární bijektivní zobrazení, které splňuje vlastnost $\mathbf{\Phi}(h \bullet \psi) = h \cdot \mathbf{\Phi}(\psi)$. Definujeme

$$\{\mathbf{\Phi}(\psi)\}(m) := \natural(\psi(p)), \tag{7.15}$$

pro každé $m \in M$ a libovolné $p \in \pi^{-1}(m)$. Musíme ověřit, že $\mathbf{\Phi}$ je dobře definovaný hladký řez E/G. Je-li $p' = p \cdot g$ jiný bod vlákna nad m, máme $\natural(\psi(p')) = \natural(\Re_g \psi(p)) = \natural(\psi(p))$. Navíc

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\natural"] & E/G \\ P \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "\pi"] & M \arrow[u, "\mathbf{\Phi}(\psi)"'] \end{tikzcd} \tag{7.16}$$

komutuje, což dokazuje, že $\mathbf{\Phi}(\psi)$ je hladké zobrazení (π je hladká submerze). Konečně, máme

$$(q^\natural \circ \mathbf{\Phi}(\psi))(m) = q^\natural(\natural(\psi(p)) = \pi((q \circ \psi)(p)) = \pi(p) = m. \tag{7.17}$$

A tedy $q^\natural \circ \mathbf{\Phi}(\psi) = 1_M$ a jde o řez fibrace E/G. Zobrazení Φ je zjevně lineární. Konečně, pro každou funkci $h \in C^\infty(M)$ dostáváme

$$\{\mathbf{\Phi}(h \bullet \psi)\}(m) = \natural((h \circ \pi)(p)\psi(p)) = h(m) \cdot \natural(\psi(p)) = h(m) \cdot \{\mathbf{\Phi}(\psi)\}(m). \tag{7.18}$$

S konstrukcí inverze $\mathbf{\Phi}^{-1}$ je to trošičku složitější, protože musíme využít lokální trivializaci popsanou v předchozím důkazu. Nechť $\phi \in \Gamma(E/G)$. Na okolí U_α můžeme definovat kompozici $\phi_\alpha = \mu_\alpha^{-1} \circ \phi$, t.j. $\phi_\alpha : U_\alpha \to U_\alpha \times V$. Z definice hladkého řezu $\phi_\alpha(m) = (m, \hat{\phi}_\alpha(m))$ pro hladké zobrazení $\hat{\phi}_\alpha : U_\alpha \to V$. Pro libovolný bod $p \in \mathcal{U}_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$ definujeme (lokální řez) $(\mathbf{\Phi}^{-1}(\phi))_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to E$ vztahem $(\mathbf{\Phi}^{-1}(\phi))_\alpha(p) = \psi_\alpha(p, \hat{\phi}_\alpha(\pi(p)))$. Protože $q \circ \phi_\alpha = 1_{U_\alpha}$ a funkce napravo jsou zjevně hladké, dostáváme hladký lokální řez na $\mathcal{U}_\alpha$. Pokud ukážeme, že pro $p \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ platí $(\mathbf{\Phi}^{-1}(\phi))_\alpha(p) = (\mathbf{\Phi}^{-1}(\phi))_\beta)(p)$, dostaneme hladký globální řez $\mathbf{\Phi}^{-1}(\phi)$.

Porovnáním dvou různých trivializačních zobrazení na E/G dostáváme pro $m \in U_\alpha \cap U_\beta$

$$\mu_\alpha(m, \hat{\phi}_\alpha(m)) = \phi(m) = \mu_\beta(m, \hat{\phi}_\beta(m)) = \mu_\alpha(m, [g^\natural_{\alpha\beta}(m)](\hat{\phi}_\beta(m))), \tag{7.19}$$

a tedy $\hat{\phi}_\alpha(m) = [g^\natural_{\alpha\beta}(m)](\hat{\phi}_\beta(m))$. Nyní můžeme porovnat lokální řezy E, nechť $p \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{\Phi}^{-1}(\phi))_\alpha(p) &= \psi_\alpha(p, \hat{\phi}_\alpha(\pi(p))) = \psi_\alpha\{p, [g^\natural_{\alpha\beta}(\pi(p))](\hat{\phi}_\beta(\pi(p))\} \\ &= \psi_\alpha\{p, [\hat{g}_{\alpha\beta}(p)](\hat{\phi}_\beta(\pi(p))\} = \psi_\beta(p, \hat{\phi}_\beta(\pi(p))) = (\mathbf{\Phi}^{-1}(\phi))_\beta(p).\end{aligned} \tag{7.20}$$

Máme dokázáno, že $\mathbf{\Phi}^{-1}(\phi)$ definuje globální řez. Zbývá ověřit, že je vskutku inverzní k $\mathbf{\Phi}$. Pro $m \in U_\alpha$ máme

$$\{\mathbf{\Phi}(\mathbf{\Phi}^{-1}(\phi))\}(m) = \natural(\mathbf{\Phi}^{-1}(\phi)(p)) = (\natural \circ \psi_\alpha)(p, \hat{\phi}_\alpha(\pi(p))) \tag{7.21}$$

Ale z definice lokální trivializace $\natural \circ \psi_\alpha(p, v) = \mu_\alpha(\pi(p), v)$, a dostáváme tedy

$$\{\mathbf{\Phi}(\mathbf{\Phi}^{-1}(\phi))\}(m) = \mu_\alpha(m, \hat{\phi}_\alpha(m)) = \phi(m). \tag{7.22}$$

Opačné poskládání $\mathbf{\Phi}^{-1} \circ \mathbf{\Phi} = 1$ se ověří obdobně. A máme dokázáno. ■

Nyní si ukážeme dva klasické příklady této konstrukce.

Příklad 7.1.7 (Redukce tečného bandlu)**.** Uvažujme vektorový bandl $\tau_P : TP \to P$, tj. obyčejný tečný fibrovaný prostor. Pravou akci $\Re : TP \times G \to TP$ můžeme definovat následovně. Nechť $X \in TP$, tj. $X \in T_pP$ pro bod $p = \tau_P(X)$. Definujeme $\Re_g(X) = R_{g*}(X)$. $R_{g*} \in \mathrm{Hom}(T_pP, T_{p\cdot g}P)$ a $\Re_g$ je tedy po vláknech lineární zobrazení takové, že diagram

$$\begin{array}{ccc} TP & \xrightarrow{\Re_g} & TP \\ \downarrow{\scriptstyle \tau_P} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_P} \\ P & \xrightarrow{R_g} & P \end{array} \tag{7.23}$$

komutuje. $(\Re_g, R_g)$ je tedy automorfismus vektorového bandlu TP. Musíme ukázat, že na TP existuje ekvivariantní lokální trivializace. Nechť $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha\in I}\}$ je principální lokální trivializace P, tj. $\phi_\alpha : U_\alpha \times G \to \mathcal{U}_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$. Pro každé $p \in \mathcal{U}_\alpha$ máme tedy $p = \phi_\alpha(m, g)$ pro $m \in U_\alpha$ a $g \in G$. Zobrazení ϕ_α je difeomorfismus, a tedy $\phi_{\alpha*} : T_mU_\alpha \oplus T_gG \to T_pP$ je lineární izomorfismus.

Předpokládejme, že na $U_\alpha \subseteq M$ máme lokální souřadnice $(x^1, \ldots, x^n)$, a nechť $(\vec{V}, x) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}$. Definujeme trivializační zobrazení $\psi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times (\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}) \to \tau_P^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$ jako

$$\psi_\alpha(\phi_\alpha(m, g), (\vec{V}, x)) = \phi_{\alpha*}(V^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_m, x^R|_g), \tag{7.24}$$

pro všechny $(m, g) \in U_\alpha \times G$. Snadno se ověří, že jde vskutku o hladkou lokální trivializaci (v podstatě je to standardní lokální trivializace tečného bandlu, kde se nejprve použije lokální izomorfismus $T\mathcal{U}_\alpha \cong TU_\alpha \times TG$). Navíc je to ekvivariantní lokální trivializace:

$$\begin{aligned}\Re_h\{\psi_\alpha(\phi_\alpha(m, g), (\vec{V}, x))\} &= (R_h \circ \phi_\alpha)_*(V^i\partial_i|_m, x^R|_g) = (\phi_\alpha \circ (1 \times R_h))_*(V^i\partial_i|_m, x^R|_g) \\ &= \phi_{\alpha*}(V^i\partial_i|_m, R_{h*}(x^R|_g)) = \phi_{\alpha*}(V^i\partial_i|_m, x^R|_{gh}) \\ &= \psi_\alpha(\phi_\alpha(m, gh), (\vec{V}, x)) = \psi_\alpha(R_h(\phi_\alpha(m, g)), (\vec{V}, x)).\end{aligned} \tag{7.25}$$

Můžeme tedy vypustit výše zmíněnou mašinerii a sestrojit vektorový bandl $\tau_P^\natural : TP/G \to M$. Podle výše zmíněného tvrzení navíc $\Gamma(TP/G) \cong \Gamma_G(TP) \equiv \mathfrak{X}_G(P)$, kde $X \in \mathfrak{X}_G(P)$, pokud $R_{g*}(X|_p) = X|_{p\cdot g}$, tzn. $\Gamma(TP/G)$ odpovídá G-invariantním vektorovým polím na P. TP/G se někdy nazývá **Atiyahův vektorový bandl** a hraje důležitou roli při více „algebraickém“ popisu konexí na principálním fibrovaném prostoru.

7.2 Asociovaná fibrace

Druhý příklad je natolik důležitý, že si vysloužil vlastní sekci. Uvažujme libovolnou konečněrozměrnou reprezentaci (V, ρ). Vezmeme si triviální vektorový bandl $E = P \times V$ nad P, tj. $q = \pi_1$. Pravou akci $\Re : E \times G \to E$ si zavedeme vztahem

$$\Re_g(p, v) = (p \cdot g, \rho(g^{-1})[v]), \tag{7.26}$$

pro všechny $(p, v) \in P \times V$. Snadno je vidět, že akce působí lineárně po vláknech a $(\Re_g, R_g)$ tvoří automorfismus vektorových bandlů. Kanonická (globální) trivializace ovšem není G-ekvivariantní. Musíme si definovat jinou.

Nechť $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ je lokální trivializace hlavní fibrace P. Nechť $\mathcal{U}_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$, a definujeme naši oblíbenou hladkou funkci $g_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to G$ vztahem $p = \phi_\alpha(\pi(p), g_\alpha(p))$. Definujeme trivializační zobrazení $\psi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times V \to \pi_1^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$ jako

$$\psi_\alpha(p, v) = (p, \rho(g_\alpha^{-1}(p))[v]). \tag{7.27}$$

Je snadné si rozmyslet, že jde o hladké zobrazení. Inverzní zobrazení ψ_α^{-1} má tvar $\psi_\alpha^{-1}(p, v) = (p, \rho(g_\alpha(p))[v])$. Zbývá ukázat, že je tato lokální trivializace ekvivariantní.

$$\begin{aligned} \Re_h(\psi_\alpha(p, v)) &= (p \cdot h, \rho(h^{-1})\{\rho(g_\alpha^{-1}(p))[v]\}) = (p \cdot h, \rho((g_\alpha(p) \cdot h)^{-1})[v]) \\ &= (p \cdot h, \rho(g_\alpha(p \cdot h)^{-1})[v]) = \psi_\alpha(p \cdot h, v). \end{aligned} \tag{7.28}$$

Použili jsme obvyklou ekvivarianci funkce g_α. Jaká jsou přechodová zobrazení trivializace ψ_α? Připomeňme, že zobrazení g_α a g_β jsou pro $p \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ vztaženy jako $g_\alpha(p) = g^P_{\alpha\beta}(\pi(p)) \cdot g_\beta(p)$, kde $g^P_{\alpha\beta}$ jsou přechodová zobrazení $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$. Potom

$$\begin{aligned} [g_{\alpha\beta}(p)](v) &= \pi_2 \circ \psi_\alpha^{-1}(\psi_\beta(p, v)) = \pi_2 \circ \psi_\alpha^{-1}(p, \rho(g_\beta^{-1}(p))[v]) \\ &= \pi_2 \circ \psi_\alpha^{-1}(p, \rho(g_\alpha^{-1}(p))[\rho(g^P_{\alpha\beta}(\pi(p))[v]]) \\ &= \rho(g^P_{\alpha\beta}(\pi(p)))[v]. \end{aligned} \tag{7.29}$$

Jinými slovy, přechodovými zobrazeními jsou kompozice $\hat{g}_{\alpha\beta} = \rho \circ g^P_{\alpha\beta} \circ \pi$. To mi ihned dává přechodová zobrazení $(P \times V)/G$ ve tvaru $g^\natural_{\alpha\beta} = \rho \circ g^P_{\alpha\beta}$.

Definice 7.2.1. Vektorový bandl na faktorprostoru $(P \times V)/G$ se nazývá **vektorový bandl přidružený hlavní fibraci** $\pi : P \to M$ **a reprezentaci** (V, ρ). Obvyklé značení je $P \times_\rho V$. Někdy též **asociovaný vektorový bandl**.

Nyní můžeme použít tvrzení 7.1.6 k identifikaci modulu řezů $\Gamma(P \times_\rho V)$.

Tvrzení 7.2.2. *Pro každou přidruženou reprezentaci máme kanonický izomorfismus*

$$\Gamma(P \times_\rho V) \cong \Omega^0_\rho(P, V) \tag{7.30}$$

Jinými slovy, řezy $P \times_\rho V$ lze identifikovat s veličinami typu ρ.

Důkaz. Ve světle tvrzení 7.1.6 stačí ukázat, že $\Gamma_G(P \times V)$ jsou právě veličiny typu ρ. Každý řez $\sigma \in \Gamma(P \times V)$ musí být hladké zobrazení $\sigma : P \to P \times V$, splňující $\pi_1 \circ \sigma = 1_P$. Tedy

$$\sigma(p) = (p, \Phi(p)), \tag{7.31}$$

kde $\Phi : P \to V$ je hladká funkce. Máme tedy kanonický izomorfismus $\Gamma(P \times V) \cong C^\infty(P, V)$. Řez σ je G-invariantní, pokud $\Re_g(\sigma(p)) = \sigma(p \cdot g)$. Potom máme

$$\Re_g(\sigma(p)) = (p \cdot g, \rho(g^{-1})[\Phi(p)]) \stackrel{!}{=} \sigma(p \cdot g) = (p \cdot g, \Phi(p \cdot g)). \tag{7.32}$$

Dostáváme podmínku $\Phi(p \cdot g) = \rho(g^{-1})[\Phi(p)]$, tedy nic jiného než $\Phi \in \Omega^0_\rho(P, V)$. Dostáváme tedy kýžený izomorfismus $\Gamma(P \times_\rho V) \cong \Omega^0_\rho(P, V)$. ■

Příklad 7.2.3. Pro $(V, \rho) = (\mathfrak{g}, Ad)$ se $\mathfrak{g}_P \equiv P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ nazývá **adjungovaný vektorový bandl**. Jeho řezy jsou Ad-ekvivariantní funkce na P.

Příklad 7.2.4. Nechť $\pi : F(M) \to M$ je repérová hlavní fibrace variety M. Zvolíme si reprezentaci $(\mathbb{R}^n, \rho)$, kde ρ je kanonická reprezentace $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ na $\mathbb{R}^n$.

Připomeňme, že lokální trivializace $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ fibrace $F(M)$ je definovaná na okolích U_α z hladkého atlasu M jako $\phi_\alpha(m, \mathbf{A}) = \partial|_m \cdot \mathbf{A}$, kde $\partial|_m = (\partial_1|_m, \dots, \partial_n|_m)$ je souřadnicová báze v bodě m odpovídající daným lokálním souřadnicím $(x^1, \dots, x^n)$ na U_α. Potom zobrazení g_α přiřazuje bodu $e \in F(M)$ matici $g_\alpha(e) = \mathbf{A}(e)$, takovou že $e = \partial|_{\pi(e)} \cdot \mathbf{A}(e)$. Akce na triviálním bandlu $E = F(M) \times \mathbb{R}^n$ má tvar $\Re_{\mathbf{A}}(e, \vec{V}) = (e \cdot \mathbf{A}, \mathbf{A}^{-1}.\vec{V})$. Na $\mathcal{U}_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$ má lokální trivializace $\mu_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^n \to (\pi_1^\natural)^{-1}(U_\alpha)$ tvar $\mu_\alpha(m, \vec{V}) = \natural(\psi_\alpha(e, \vec{V})) = \natural(e, \mathbf{A}^{-1}(e).\vec{V})$, kde $e \in F_m(M)$ je libovolná báze $T_m M$.

Nyní připomeňme lokální trivializaci tečného bandlu TM. Definujeme ji jako $\{(U_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, kde $\tau_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to \tau_M^{-1}(U_\alpha)$ má tvar $\tau_\alpha(m, \vec{V}) = V^i \partial_i|_m$. Je-li $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ a na U_β máme lokální souřadnice $(y^1, \dots, y^n)$, přechodové zobrazení má tvar

$$[g_{\alpha\beta}(m)](\vec{V}) = \mathbf{J}(m)^{-1}.\vec{V}, \tag{7.33}$$

kde $\mathbf{J}^j_i(m) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}|_m$ je Jacobiho matice transformace souřadnic.

Definujeme si nyní izomorfismus vektorových bandlů $(\mathcal{F}, 1_M)$ z TM do $F(M) \times_\rho \mathbb{R}^n$. Nejprve lokálně jako zobrazení $\mathcal{F}_\alpha : \tau_M^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \to (\pi_1^\natural)^{-1}(U_\alpha)$ pomocí příslušných lokálních trivializací:

$$\mathcal{F}_\alpha(\tau_\alpha(m, \vec{V})) = \mu_\alpha(m, \vec{V}), \tag{7.34}$$

To definuje zjevně hladké a po vláknech lineární a bijektivní zobrazení na 1_M (lokálně je to identita). Stačí ukázat, že pro $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ je $(\mathcal{F}_\beta)_m = (\mathcal{F}_\alpha)_m$. Přechodová zobrazení pro $F(M) \times_\rho \mathbb{R}^n$ jsou $g^\natural_{\alpha\beta}(m) = \rho(g^{F(m)}_{\alpha\beta}(m))$. Ale $g^{F(m)}_{\alpha\beta}(m) = \mathbf{J}^{-1}(m)$. A můžeme počítat:

$$\mathcal{F}_\alpha(\tau_\beta(m, \vec{V})) = \mathcal{F}_\alpha(\tau_\alpha(m, \mathbf{J}^{-1}(m).\vec{V})) = \mu_\alpha(m, \mathbf{J}^{-1}(m).\vec{V}) = \mu_\beta(m, \vec{V}). \tag{7.35}$$

To ale ukazuje, že pro $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ působí $\mathcal{F}_\alpha$ stejně jako $\mathcal{F}_\beta$, což dokazuje naše tvrzení. Dostáváme tedy globální izomorfismus $\mathcal{F} : TM \to F(M) \times_\rho \mathbb{R}^n$.

Připomeňme, že body asociované fibrace $P \times_\rho V$ mají tvar $\natural(p, v)$, kde $(p, v) \in P \times V$ a $\natural(p', v') = \natural(p, v)$, právě tehdy když existuje $g \in G$, takové, že $(p', v') = (p \cdot g, \rho(g^{-1})v)$.

7.3 Paralelní přenos, kovariantní derivace

Nyní si odvodíme několik alternativních způsobů jak popsat paralelní přenos řezů asociované fibrace. Ukážeme si jakým způsobem definuje konexe A na hlavní fibraci operátor kovariantní derivace. Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor a nechť (V, ρ) je libovolná konečněrozměrná reprezentace jeho strukturní grupy G. Nechť $q^\natural : P \times_\rho V \to M$ je příslušný asociovaný vektorový bandl.

Budeme psát $E = P \times_\rho V$. Nechť $\psi \in \Gamma(E)$. Nechť $\gamma : I \to M$ je hladká křivka. Nechť $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ je 1-forma konexe na P. Nechť $p_0 \in P$ je libovolný bod vlákna nad $\gamma(0)$, tj. $\pi(p_0) = \gamma(0)$. Nechť $\gamma^h : I \to P$ je horizontální zdvih křivky γ startující z bodu p_0, tj. $\gamma^h(0) = p_0$ a $\pi \circ \gamma^h = \gamma$.

Pro každé $t \in I$ je $\psi(\gamma(t)) = \natural(p(t), v(t)) \in E$, kde $(p(t), v(t)) \in P \times V$. Jelikož je ψ řez, musí platit $\gamma(t) = q^\natural(\psi(\gamma(t)) = q^\natural(\natural(p(t), v(t))) = (\pi \circ \pi_1)(p(t), v(t)) = \pi(p(t))$. A tedy $\pi \circ p(t) = \gamma(t)$. Bod $p(t)$ může být zvolen jako libovolný bod vlákna nad $\gamma(t)$, můžeme tedy zvolit

$$\psi(\gamma(t)) = \natural(\gamma^h(t), v(t)). \tag{7.36}$$

Horizontální zdvih (přítomnost konexe) nám tedy umožňuje volit si konzistentně reprezentanta třídy $\psi(\gamma(t))$ v E. Nyní má smysl následující definice.

Definice 7.3.1. Nechť $\psi \in \Gamma(E)$ a $\gamma : I \to M$ je zvolená hladká křivka. Zbytek značení nechť odpovídá diskuzi výše. Řekneme, že řez ψ je **autoparalelní podél křivky** $\gamma(t)$, pokud je funkce $v(t) : I \to V$ definovaná vztahem (7.36) konstantní.

Abychom ukázali, že je tato definice korektní, musí si člověk rozmyslet, že nezávisí na volbě startovního bodu p_0 horizontálního zdvihu γ^h. Pokud γ'^h startuje z $p_0' = p_0 \cdot g$, máme $\gamma'^h(t) = \gamma^h(t) \cdot g$ pro všechny $t \in I$. Potom

$$\psi(\gamma(t)) = \natural(\gamma'^h(t), v'(t)) = \natural(\gamma^h(t) \cdot g, v'(t)) = \natural(\gamma^h(t), \rho(g)v'(t)). \tag{7.37}$$

Odtud tedy $v(t) = \rho(g)v'(t)$. Potom ale $\dot{v}(t) = \rho(g)\dot{v}'(t)$ a konstantnost vektorové funkce $v(t)$ tedy implikuje konstantnost $v'(t)$.

Ukázali jsme, že $\Gamma(E)$ je přirozeně izomorfní $C^\infty(M)$-modulu $\Omega^0_\rho(P, V)$ veličin typu ρ. Tam jsme již ale koncept autoparalelní veličiny definovali. Je tedy logické ukázat, že obě definice jsou plně ekvivalentní.

Tvrzení 7.3.2. *Nechť $\psi \in \Gamma(E)$, a nechť $\Phi \in \Omega^0_\rho(P, V)$ je odpovídající veličina typu ρ. Potom ψ je autoparalelní podél křivky γ právě tehdy když Φ je autoparalelní podél křivky γ, tj. $\Phi(\gamma^h(t))$ je konstantní pro libovolný horizontální zdvih γ^h.*

Důkaz. Nechť $\Phi \in \Omega^0_\rho(P, V) = \Gamma_G(P \times V)$. Odpovídající řez $\psi \in \Gamma(E)$ je definovaný jako $\psi(m) = \natural(p, \Phi(p))$, kde $p \in \pi^{-1}(m)$ libovolný bod vlákna na m. Pro $m = \gamma(t)$ si můžeme p vybrat jako $\gamma^h(t)$, tj. $\psi(\gamma(t)) = \natural(\gamma^h(t), \Phi(\gamma^h(t)))$. To ale ukazuje, že $v(t) = \Phi(\gamma^h(t))$, takže zjevně $v(t)$ je konstantní právě tehdy když $\Phi(\gamma^h(t))$ je konstantní. To dokazuje naše tvrzení. ∎

Autoparalelnost veličin můžeme analyzovat pomocí následující definice kovariantní derivace. Nechť $X \in \mathfrak{X}(M)$ je vektorové pole. Nechť $\gamma(t) : I \to M$ je integrální křivka pole X startující z bodu m, tj. $\gamma(0) = m$. Nechť $\gamma^h : I \to P$ je libovolný horizontální zdvih γ. Nechť $\psi \in \Gamma(E)$. Definujeme **kovariantní derivaci řezu** ψ **podél vektorového pole** X vztahem

$$(\nabla_X \psi)(m) = \natural(\gamma^h(0), \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} v(t)), \tag{7.38}$$

kde $v(t)$ je zobrazení definované vztahem (7.36). Musíme ověřit, že $\nabla_X \psi$ je opravdu hladký řez E. Místo přímého ověření můžeme použít izomorfismus $\Gamma(E) \cong \Omega^0_\rho(P, V)$.

Lemma 7.3.3. *Nechť* $\Phi \in \Omega^0_\rho(P,V)$ *je veličina typu* ρ. *Nechť* $X \in \mathfrak{X}(M)$. *Potom* $\nabla_X \Phi \in C^\infty(P,V)$ *definovaná vztahem*

$$\nabla_X \Phi = X^h.\Phi, \tag{7.39}$$

je opět veličina typu ρ. *Zde* $X^h \in \mathfrak{X}(P)$ *je horizontální zdvih vektorového pole* X. *Odpovídá-li* Φ *řezu* $\psi \in \Gamma(E)$, *pak* $\nabla_X \Phi$ *odpovídá řezu* $\nabla_X \psi$.

Důkaz. Mimo jiné tím zadarmo dokážeme, že opravdu $\nabla_X \psi \in \Gamma(E)$. Zjevně $\nabla_X \Phi$ je hladké zobrazení z P do V. Musíme ukázat, že je to veličina typu ρ. Připomeňme, že X^h je G-invariantní vektorové pole, tj. $X^h|_{p\cdot g} = R_{g*}(X^h|_p)$. Nyní můžeme psát

$$\begin{aligned}(X^h.\Phi)(p\cdot g) &= \langle (d\Phi)|_{p\cdot g}, X^h|_{p\cdot g}\rangle = \langle (d\Phi)|_{p\cdot g}, R_{g*}(X^h|_p)\rangle = \langle R_g^*((d\Phi)|_{p\cdot g}), X^h|_p\rangle \\ &= \langle d(R_g^*\Phi)|_p, X^h|_p\rangle = \langle d(\rho(g^{-1})\Phi)|_p, X^h|_p\rangle = \rho(g^{-1})\{(X^h.\Phi)(p))\}.\end{aligned} \tag{7.40}$$

Odtud tedy $\nabla_X \Phi \in \Omega^0_\rho(P,V)$. Zbývá ukázat, že $\nabla_X \Phi$ odpovídá řezu $\nabla_X \psi$. Nechť $\psi' \in \Gamma(E)$ je řez odpovídající $\nabla_X \Phi$. Máme

$$\psi'(m) = \natural(p, (\nabla_X \Phi)(p)) = \natural(p, (X^h.\Phi)(p)), \tag{7.41}$$

kde $p \in \pi^{-1}(m)$ je libovolný bod vlákna nad m. Nechť $\gamma : I \to M$ je integrální křivka pole X startující z bodu m, a nechť $\gamma^h : I \to M$ je horizontální zdvih γ startující ze zvoleného (ale libovolného) bodu $p \in \pi^{-1}(m)$. Ale potom můžeme psát $(X^h.\Phi)(p) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \Phi(\gamma^h(t))$ a

$$\psi'(m) = \natural(\gamma^h(0), \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi(\gamma^h(t))). \tag{7.42}$$

Ale v důkazu předchozího tvrzení jsme ukázali, že $v(t) = \Phi(\gamma^h(t))$, a tedy opravdu $\psi' = \nabla_X \psi$. ∎

Předtím, než si vyjasníme vlastnosti kovariantní operátoru kovariantní derivace, musíme si vyjasnit následující. Prostor veličin typu ρ, neboli (ekvivalentně) řezů asociované fibrace $P \times_\rho V$ si můžeme vybavit „povláknovou metrikou“, neboli $C^\infty(M)$-bilineárním zobrazením $(\cdot,\cdot)_V : \Omega^0_\rho(P,V) \times \Omega^0_\rho(P,V) \to C^\infty(M)$, které je symetrické a nedegenerované, tj. $(\Phi,\Phi')_V = 0$ pro všechny $\Phi' \in \Omega^0_\rho(P,V)$ implikuje $\Phi = 0$. Nechť $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ je ρ-invariantní nedegenerovaná symetrická bilineární forma na V. Potom můžeme definovat

$$(\Phi,\Phi')_V(m) = \langle \Phi(p), \Phi'(p)\rangle_V \tag{7.43}$$

kde $p \in \pi^{-1}(m)$ je libovolný bod vlákna nad m. Snadno se ověří, že pravá strana nezávisí na volbě p (ρ-invariance $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$) a levá strana závisí hladce na m (π je surjektivní submerze). Symetričnost a nedegenerovanost plyne z vlastností $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$.

Tvrzení 7.3.4. *Nechť* $\sigma : U \to P$ *je lokální řez a* $\phi = \sigma^*(\Phi) \in C^\infty(U,V)$ *a* $\phi' = \sigma^*(\Phi')$ *jsou příslušná lokální verze* Φ *a* Φ'. *Potom na* U *máme* $(\!(\phi,\phi')\!)_V = (\Phi,\Phi')_V$.

Důkaz. Pro každé $m \in U$ můžeme psát

$$(\phi,\phi')_V(m) = \langle \sigma^*(\Phi)(m), \sigma^*(\Phi')(m)\rangle_V = \langle \Phi(\sigma(m)), \Phi'(\sigma(m)\rangle_V = (\Phi,\Phi')_V(m). \tag{7.44}$$

∎

Nyní si můžeme shrnout vlastnosti kovariantní derivace ∇. Můžeme ji psát v řeči veličin typu ρ nebo (plně ekvivalentně) v řeči řezů asociované fibrace $P \times_\rho V$. My si v tuto chvíli zvolíme první z možností. Připomeňme, že $\Omega^0_\rho(P,V)$ tvoří $C^\infty(M)$-modul s násobením $\bullet$.

Tvrzení 7.3.5 (Vlastnosti ∇). *Nechť $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Omega^0_\rho(P,V) \to \Omega^0_\rho(P,V)$ je konexe odpovídající formě konexe $A \in \Omega^1(P,\mathfrak{g})$. Potom ∇ je $\mathbb{R}$-bilineární a platí*

$$\nabla_{fX}(\Phi) = f \bullet \nabla_X(\Phi), \;\; \nabla_X(f \bullet \Phi) = f \bullet \nabla_X(\Phi) + (X.f) \bullet \Phi, \tag{7.45}$$

pro všechny $X \in \mathfrak{X}(M)$. Vnější kovariantní derivace $D : \Omega^0_\rho(P,V) \to \Omega^1_\rho(P,V)$ souvisí s operátorem kovariantní derivace ∇ vztahem

$$\nabla_X(\Phi) = \langle D\Phi, X^h \rangle \equiv \langle d\Phi, X^h \rangle. \tag{7.46}$$

Konečně, kovariantní derivace ∇ je vždy kompatibilní s metrikou $(\cdot,\cdot)_V$, tj.

$$X.(\Phi,\Phi')_V = (\nabla_X \Phi, \Phi')_V + (\Phi, \nabla_X \Phi')_V, \tag{7.47}$$

pro každé vektorové pole $X \in \mathfrak{X}(M)$ a $\Phi, \Phi' \in \Omega^0_\rho(P,V)$.

Důkaz. Všechna tvrzení lze snadno dokázat z definice. Pro libovolnou funkci $f \in C^\infty(M)$ máme

$$\{\nabla_{fX}(\Phi)\}(p) = (fX)^h|_p.\Phi = \{(f \circ \pi) \cdot X^h\}|_p.\Phi = f(\pi(p)) \cdot (X^h.\Phi)(p) = \{f \bullet \nabla_X \Phi\}(p). \tag{7.48}$$

Druhá vlastnost se dokáže velmi obdobně. Souvislost z vnější kovariantní derivací plyne přímo z definice D. Konečně, pro libovolnou ρ-invariantní formu $\langle \cdot,\cdot \rangle_V$ a indukovanou metriku $(\cdot,\cdot)_V$ můžeme psát $(\Phi,\Phi')_V \circ \pi = \langle \Phi, \Phi' \rangle_V$. Potom

$$\begin{aligned} X.(\Phi,\Phi')_V \circ \pi &= X^h.\langle \Phi,\Phi' \rangle_V = \langle X^h.\Phi, \Phi' \rangle_V + \langle \Phi, X^h.\Phi' \rangle_V \\ &= \langle \nabla_X \Phi, \Phi' \rangle_V + \langle \Phi, \nabla_X \Phi' \rangle_V \\ &= \{(\nabla_X \Phi, \Phi')_V + (\Phi, \nabla_X \Phi')_V\} \circ \pi. \end{aligned} \tag{7.49}$$

Protože je π surjektivní zobrazení, dokázali jsme kompatibilitu s metrikou. ∎

Vidíme, že ∇ má vlastnosti velmi podobné obyčejné kovariantní derivaci na varietě. To není úplně náhoda. Vskutku, pokud pro $P = F(M)$ konexe $A \in \Omega^1(F(M), \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}))$ odpovídá afinní konexi ∇ na varietě M. Vezmeme-li si $V = (\mathbb{R}^n, \rho)$, kde ρ je standardní reprezentace $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ na $\mathbb{R}^n$, máme $\Omega^0_\rho(P,V) \cong \mathfrak{X}(M)$ a kovariantní derivace v této sekci definuje původní afinní konexi.

Máme-li k dispozici operátor kovariantní derivace ∇, můžeme definovat **operátor křivosti** R příslušný ∇ následujícím způsobem. Pro všechny $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ a $\Phi \in \Omega^0_\rho(P,V)$ definujeme

$$R(X,Y)\Phi = \nabla_X(\nabla_Y \Phi) - \nabla_Y(\nabla_X \Phi) - \nabla_{[X,Y]}\Phi. \tag{7.50}$$

Snadno si odvodíme několik základních vlastností operátoru křivosti:

Tvrzení 7.3.6. *Operátor křivosti R příslušný kovariantní derivaci ∇ je $C^\infty(M)$-lineární v každém vstupu, tj. je $\mathbb{R}$-lineární a vzhledem k násobení funkcí platí*

$$R(X,fY)\Phi = R(fX,Y)\Phi = R(X,Y)(f \bullet \Phi) = f \bullet R(X,Y)\Phi, \tag{7.51}$$

pro všechny $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ a $\Phi \in \Omega^0_\rho(P,V)$. Platí vztah

$$R(X,Y)\Phi = \rho'(\Omega(X^h,Y^h))\Phi \tag{7.52}$$

Důkaz. Vlastnosti vzhledem k násobení funkcí jsou jednoduchý důsledek (7.48). $\mathbb{R}$-linearita je zřejmá. Ukážeme si pouze jedno z tvrzení. Nechť $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ a $\Phi \in \Omega^0_\rho(P, V)$.

$$\begin{aligned} R(X,Y)(f \bullet \Phi) &= \nabla_X(\nabla_Y(f \bullet \Phi)) - \nabla_Y(\nabla_X(f \bullet \Phi)) - \nabla_{[X,Y]}(f \bullet \Phi) \\ &= \nabla_X(f \bullet \nabla_Y \Phi + (Y.f) \bullet \Phi) - \nabla_Y(f \bullet \nabla_X \Phi + (X.f) \bullet \Phi) \\ &\quad - f \bullet \nabla_{[X,Y]}\Phi - ([X,Y].f) \bullet \Phi \\ &= f \bullet \{\nabla_X(\nabla_Y \Phi) - \nabla_Y(\nabla_X \Phi) - \nabla_{[X,Y]}\Phi\} \\ &\quad + (X.f) \bullet \nabla_Y \Phi + (Y.f) \bullet \nabla_X \Phi - (Y.f) \bullet \nabla_X \Phi - (X.f) \bullet \nabla_Y \Phi \\ &\quad + \{X.(Y.f) - Y.(X.f) - [X,Y].f\} \bullet \Phi \\ &= f \bullet R(X,Y)\Phi. \end{aligned} \tag{7.53}$$

Linearita v ostatních vstupech se dokáže analogicky (jednodušeji). Zbývá ukázat poslední tvrzení. Z definice kovariantní derivace máme

$$R(X,Y)\Phi = X^h.(Y^h.\Phi) - Y^h.(X^h.\Phi) - [X,Y]^h.\Phi = \{[X^h, Y^h] - [X,Y]^h\}.\Phi. \tag{7.54}$$

Musíme tedy vyzkoumat akci vektorového pole $[X^h, Y^h] - [X,Y]^h$. Připomeňme, že $X^h \sim_\pi X$, a z toho důvodu $[X^h, Y^h] \sim_\pi [X, Y]$. Jinými slovy, $[X^h, Y^h] - [X,Y]^h$ je vertikální vektorové pole. Máme tedy $[X^h, Y^h] - [X,Y]^h = f^\mu \cdot \# t_\mu$ pro neznámé funkce $f^\mu \in C^\infty(P)$. Zapůsobíme na obě strany 1-formou konexe A. Dostáváme

$$\begin{aligned} f^\mu \cdot t_\mu = A(f^\mu \cdot \# t_\mu) &= A([X^h, Y^h] - [X,Y]^h) = A([X^h, Y^h]) \\ &= -\{X^h.A(Y^h) - Y^h.A(X^h) - A([X^h, Y^h])\} \\ &= -\Omega(X^h, Y^h) = -\Omega^\mu(X^h, Y^h) \cdot t_\mu. \end{aligned} \tag{7.55}$$

Odtud tedy $f^\mu = -\Omega^\mu(X^h, Y^h)$. Připomeňme, že Φ je veličina typu ρ a tedy platí

$$R(X,Y)\Phi = f^\mu \# t_\mu.\Phi = -\rho'(f^\mu \cdot t_\mu)\Phi = \rho'(\Omega(X^h, Y^h))\Phi. \tag{7.56}$$

A máme dokázáno! ∎

7.4 Kalibrační teorie podruhé

Na závěr této kapitoly si ukážeme, jak lze akci kalibrační teorie přepsat v řeči globálně definovaných objektů na M, což je v kontrastu s originálním funkcionálem, kde akci definujeme „lepením po lokálních kouscích“. Nejprve si musíme definovat následující zobecnění známého pojmu formy s hodnotami ve vektorovém prostoru

Definice 7.4.1. Nechť $q : E \to M$ je vektorový fibrovaný prostor. Potom zobrazení $\omega : \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(E)$ se nazývá ***p*-forma s hodnotami v řezech** E, pokud je totálně antisymetrické a $C^\infty(M)$-lineární v každém vstupu. Jejich prostor tvoří $C^\infty(M)$-modul označovaný jako $\Omega^p(M, E)$. Pro triviální vektorový bandl $E = M \times V$ máme $\Gamma(E) = C^\infty(M, V)$ a tedy $\Omega^p(M, E) = \Omega^p(M, V)$ je prostor forem s hodnotami ve vektorovém prostoru V.

Formy s hodnotami ve vektorovém bandlu lze opět rozložit do „komponentních forem“. Tentokrát to obecně lze pouze lokálně. Řekneme, že $\{\psi_\mu\}_{\mu=1}^{\mathrm{rank}(E)}$ jsou **lokální generátory** $\Gamma(E)$, pokud $\psi_\mu \in \Gamma_U(E)$ je pro každé μ lokální řez E na okolí $U \subseteq M$ a pro každé $m \in U$ tvoří

$\{\psi_j(m)\}_{j=1}^{\mathrm{rank}(E)}$ bázi vektorového prostoru vlákna E_m. Lze si snadno rozmyslet, že každý řez $\psi \in \Gamma(E)$ lze na U psát jako $\psi = f^j \psi_j$ pro unikátní hladké funkce $f^j \in C^\infty(U)$. Potom pro $\omega \in \Omega^p(M, E)$ můžeme na U pro vektorová pole $(X_1, \ldots, X_p)$ psát

$$\omega(X_1, \ldots, X_p) = \omega^j(X_1, \ldots, X_p) \cdot \psi_j, \tag{7.57}$$

a analogicky jako pro formy ve vektorovém prostoru zjistíme, že $\omega^j \in \Omega^p(U)$.

Příklad 7.4.2. Nechť $E = \mathfrak{g}_P = P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ je adjungovaný vektorový bandl. Již jsme si ujasnili, že $\Gamma(E) \cong C^\infty_{Ad}(P, \mathfrak{g})$. Definujeme $F \in \Omega^2(M, \mathfrak{g}_P)$ vztahem

$$F(X, Y) = \Omega(X^h, Y^h) \in \Gamma(\mathfrak{g}_P) \tag{7.58}$$

Musíme ukázat, že pravá strana je opravdu Ad-ekvivariantní a závisí $C^\infty(M)$-lineárně na X a Y. První věc plyne z ekvivariance 2-formy křivosti a invariance horizontálních zdvihů:

$$\begin{aligned} F(X,Y)(p \cdot g) &= \Omega|_{p \cdot g}(X^h|_{p \cdot g}, Y^h|_{p \cdot g}) = \Omega|_{p \cdot g}(R_{g*}(X^h|_p), R_{g*}(Y^h|_p)) \\ &= R_g^*(\Omega|_{p \cdot g})(X^h|_p, Y^h|_p) = Ad_{g^{-1}}(\Omega|_p(X^h|_p, Y^h|_p)) \\ &= Ad_{g^{-1}}(F(X,Y)(p)). \end{aligned} \tag{7.59}$$

$C^\infty(M)$-linearita plyne z vlastnosti $(f \cdot X)^h = (f \circ \pi) \cdot X^h$. Potom

$$F(fX, Y) = \Omega((f \circ \pi) \cdot X^h, Y^h) = (f \circ \pi) \cdot \Omega(X^h, Y^h) = f \bullet F(X, Y). \tag{7.60}$$

Linearita v druhém vstupu již plyne z antisymetrie. Dokázali jsme, že $F \in \Omega^2(M, \mathfrak{g}_P)$. Jelikož Ω je horizontální 2-forma na P, obsahuje F všechny informace o křivosti $\Omega = DA$. Z tohoto důvodu se někdy F říká **2-forma křivosti konexe** A.

Na rozdíl od forem na vektorovém prostoru nemůžeme přímočaře definovat vnější derivaci $d : \Omega^p(M, E) \to \Omega^{p+1}(M, E)$. V případě, že $E = P \times_\rho V$ je asociovaný vektorový bandl, můžeme využít operátoru kovariantní derivace.

Definice 7.4.3. Nechť $E = P \times_\rho V$ Potom $\Gamma(E) \cong C^\infty_\rho(P, V) \equiv \Omega^0(M, E)$ Definujeme **kovariantní diferenciál** $\nabla : \Omega^0(M, E) \to \Omega^1(M, E)$ vztahem

$$\nabla(\Phi)(X) = \nabla_X(\Phi), \tag{7.61}$$

pro všechny $\Phi \in \Omega^0(M, E)$ a $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Z vlastností kovariantní derivace plyne, že $\nabla(\Phi)(f \cdot X) = \nabla_{f \cdot X}(\Phi) = f \bullet \nabla_X(\Phi)$ a tedy opravdu $\nabla(\Phi) \in \Omega^1(M, E)$. Ve skutečnosti se dá kovariantní diferenciál ∇ rozšířit na zobrazení $\nabla : \Omega^p(M, E) \to \Omega^{p+1}(M, E)$ s využitím pomocné afinní konexe na M. Nebudeme to však potřebovat.

Konečně, musíme si ujasnit, že pro varietu (M, g, o) můžeme na prostoru forem $\Omega^p(M, P \times_\rho V)$ definovat povláknový skalární součin $(\cdot, \cdot)_V$ analogicky jako na $\Omega^0_\rho(P, V) \equiv \Omega^0(M, P \times_\rho V)$, jen s použitím Hodgeovy duality. Nechť $\{\Phi_j\}_{j=1}^{\dim V}$ jsou libovolné lokální generátory $\Gamma(E)$. Potom na $U \subseteq M$ můžeme psát $\omega = \omega^j \cdot \Phi_j$, $\omega' = \omega'^k \Phi_k$. Definujeme

$$(\omega, \omega')_V = (\omega^j, \omega'^k)_g \cdot (\Phi_j, \Phi_k)_V, \tag{7.62}$$

kde na pravé straně používáme povláknový skalární součin definovaný na $C^\infty_\rho(P, V)$ v předchozí sekci. Snadno se ověří, že $(\cdot, \cdot)_V$ je (pseudo)skalární součin na prostoru $\Omega^p(M, P \times_\rho V)$.

Nechť $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ je forma konexe, $F \in \Omega^2(M, \mathfrak{g}_P)$ příslušná 2-forma křivosti. Nechť $\Phi \in \Omega^0_\rho(P, V)$ je veličina typu ρ. Můžeme definovat funkcionál

$$S'[A, \Phi] = \int_M \{-\frac{1}{2}(F, F)_{\mathfrak{g}} + (\nabla\Phi, \nabla\Phi)_V - m^2(\Phi, \Phi)_V\} \cdot \omega_g. \tag{7.63}$$

Nyní si ukážeme, že tohle je přesně stejný funkcionál jako kalibrační teorie pro dvojici polí $(\mathcal{A}, \phi)$ definovaný akci (6.55). V této verzi ovšem nepoužíváme lokální řezy a příslušné lokální formy konexe $\mathcal{A}$ a hmotové pole ϕ. Mimo jiné opravdu vidíme, že skutečnými geometrickými objekty v pozadí kalibrační teorie jsou globální pole (A, Φ).

Tvrzení 7.4.4. *Funkcionál $S'[A, \Phi]$ je ekvivalentní přepis funkcionálu $S[\mathcal{A}, \phi]$.*

Důkaz. Může být matoucí, že S píšeme jako funkcionál od polí $(\mathcal{A}, \phi)$. To má svůj původ ve fyzice, protože tam vždy používají lokální objekty. Striktně vzato závisí i S pouze na dvojici (A, Φ). Oba funkcionály S a S' jsou integrály n-forem na varietě M, přičemž v případě S jsou integrandy definované pouze lokálně (a na průnicích se transformují tak aby definovaly globální n-formu). Nechť $\sigma : U \to P$ je lokální řez. Uvažujme nejprve kinetický člen. Nechť $\mathcal{F} = \sigma^*(\Omega)$ je lokální forma křivosti. Máme

$$S_{kin}[\mathcal{A}] = -\frac{1}{2}\int_M (\!(\mathcal{F}, \mathcal{F})\!)_{\mathfrak{g}} \cdot \omega_g, \tag{7.64}$$

kde $(\!(\mathcal{F}, \mathcal{F})\!)_{\mathfrak{g}} \in C^\infty(U)$ je (lokálně definovaná) funkce

$$(\!(\mathcal{F}, \mathcal{F})\!)_{\mathfrak{g}} \cdot \omega_g = \mathcal{F}^\mu \wedge *_g(\mathcal{F}^\nu) \cdot \langle t_\mu, t_\nu \rangle_{\mathfrak{g}}. \tag{7.65}$$

Na druhou stranu, kinetický člen v S' má explicitní tvar

$$-\frac{1}{2}(F, F)_{\mathfrak{g}} \cdot \omega_g = -\frac{1}{2}(F^\mu, F^\nu)_g \cdot (\Phi_\mu, \Phi_\nu)_{\mathfrak{g}} \cdot \omega_g = -\frac{1}{2}F^\mu \wedge *(F^\nu) \cdot (\Phi_\mu, \Phi_\nu)_{\mathfrak{g}}, \tag{7.66}$$

kde $\{\Phi_\mu\}_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ jsou libovolné lokální generátory $\Gamma(\mathfrak{g}_P)$ na nějakém okolí U. Lokální řez σ můžeme využít ke speciální volbě lokálních generátorů na U. Chceme $\Phi_\mu \in C^\infty_{Ad}(P, \mathfrak{g})$. Definujeme

$$\Phi_\mu(\sigma(m)) = t_\mu, \tag{7.67}$$

kde $t_\mu \in \mathfrak{g}$ je vektor báze $\{t_\mu\}_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ algebry $\mathfrak{g}$. Standardním způsobem můžeme definovat hladké zobrazení $g : \pi^{-1}(U) \to G$ vztahem $p = \sigma(\pi(p)) \cdot g(p)$. Pro libovolné p tak z požadavku ekvivariance Φ dostáváme jednoznačný předpis

$$\Phi_\mu(p) = \Phi_\mu(\sigma(\pi(p)) \cdot g(p)) = Ad_{g(p)^{-1}}\Phi_\mu(\sigma(\pi(p)) = Ad_{g(p)^{-1}}(t_\mu). \tag{7.68}$$

Z definice $g(p \cdot h) = g(p) \cdot h$ a snadno se tedy ověří, že Φ_μ je Ad-ekvivariantní funkce definovaná na $\pi^{-1}(U)$, a tedy $\Phi_\mu \in C^\infty_{Ad}(\pi^{-1}(U), \mathfrak{g}) \cong \Gamma_U(\mathfrak{g}_P)$. Nechť $\Phi \in C^\infty_{Ad}(\pi^{-1}(U), \mathfrak{g})$. Máme $\Phi(\sigma(m)) = f^\mu(m) \cdot t_\mu$ pro jednoznačné a hladké funkce $f^\mu \in C^\infty(U)$. A tady

$$\Phi(p) = \Phi(\sigma(\pi(p)) \cdot g(p)) = Ad_{g(p)^{-1}}(\Phi(\sigma(\pi(p))) = f^\mu(\pi(p)) \cdot Ad_{g(p)^{-1}}(t_\mu) = (f^\mu \bullet \Phi_\mu)(p). \tag{7.69}$$

Vidíme tedy, že $\{\Phi_\mu\}_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ tvoří lokální generátory $\Gamma(\mathfrak{g}_P)$ na U. S využitím lokálního řezu můžeme pro $m \in U$ psát

$$(\Phi_\mu, \Phi_\nu)_{\mathfrak{g}}(m) = (\Phi_\mu, \Phi_\nu)_{\mathfrak{g}}(\pi(\sigma(m)) = \langle \Phi_\mu(\sigma(m)), \Phi_\nu(\sigma(m)) \rangle_{\mathfrak{g}} = \langle t_\mu, t_\nu \rangle_{\mathfrak{g}} \tag{7.70}$$

Zbývá ukázat, že komponentní 1-formy $\mathcal{F}^\mu$ and F^μ (pro tyto konkrétní lokální generátory) jsou stejné. Z definice máme

$$F^\mu(X,Y) \bullet \Phi_\mu = F(X,Y) = \Omega(X^h, Y^h) = \Omega^\mu(X^h, Y^h) \cdot t_\mu. \tag{7.71}$$

Obě strany jsou funkce na P, které vyčíslíme v bodě $p = \sigma(m)$. Dostáváme

$$\{F^\mu(X,Y)\}(m) \cdot t_\mu = \{\Omega^\mu(X^h, Y^h)\}(\sigma(m)) \cdot t_\mu. \tag{7.72}$$

Nyní si stačí uvědomit, že $\sigma_*(X|_m) = X^h|_{\sigma(m)} + \#x|_{\sigma(m)}$ pro nějaké $x \in \mathfrak{g}$, a podobně pro Y. Jelikož Ω je horizontální 2-forma, dostáváme

$$\begin{aligned} \{\Omega^\mu(X^h, Y^h)\}(\sigma(m)) &= \Omega^\mu|_{\sigma(m)}(\sigma_*(X|_m), \sigma_*(Y|_m)) \\ &= (\sigma^*\Omega)^\mu|_m(X|_m, Y|_m) = \{\mathcal{F}^\mu(X,Y)\}(m). \end{aligned} \tag{7.73}$$

Porovnáním obou stran dostáváme výsledek. Tedy $S_{kin}[\mathcal{A}] = S'_{kin}(A)$. Ekvivalence zbývajících členů se ukáže úplně analogicky, tj. přítomnost lokálního řezu σ poslouží k výběru vhodných lokálních generátorů $C^\infty(U)$-modulu $\Gamma_U(P \times_\rho V)$. ■

Kapitola 8

Spinová teorie

8.1 Cliffordovy algebry a spinová grupa

Nechť V je konečněrozměrný reálný vektorový prostor. Pro každé $p \in \mathbb{N}$ definujeme

$$T^p(V) := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p \text{ krát}}. \tag{8.1}$$

Konvenčně zavádíme $T^0(V) := \mathbb{R}$. Pro $p \in \mathcal{N}$ je tedy $T^p(V)$ vektorový prostor generovaný vektory ve tvaru $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$, které splňují relace

$$v_1 \otimes \cdots \otimes (v_i + \lambda w_i) \otimes \cdots \otimes v_p = v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_p + \lambda v_1 \otimes \cdots \otimes w_i \otimes \cdots \otimes v_p \tag{8.2}$$

pro každé $i \in \{1, \ldots, p\}$ a vektory $v_1, \ldots, v_p, w_i \in V$. $T^p(V)$ se nazývá **p-tá tenzorová mocnina vektorového prostoru** V. Je-li $(e_i)_{i=1}^{\dim(V)}$ báze V, tvoří soubor

$$(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p})_{(i_1,\ldots,i_p) \in \{1,\ldots,n\}^p} \tag{8.3}$$

bázi $T^p(V)$. Jinými slovy $T^p(V)$ je konečněrozměrný vektorový prostor a $\dim(T^p(V)) = n^p$. Uvažujme direktní sumu těchto prostorů, tedy

$$T(V) := \bigoplus_{p=0}^{\infty} T^p(V). \tag{8.4}$$

Elementy tohoto prostoru jsou formální součty *konečně mnoha* elementů z různých tenzorových mocnin. Například tedy výrazu typu $1 + v \otimes w - x \otimes y \otimes z$. Pro netriviální V je $T(V)$ vždy nekonečněrozměrný vektorový prostor!

Na $T(V)$ lze zavést asociativní bilineární součin $\otimes : T(V) \times T(V) \to T(V)$. Pro každé $p, q \in \mathbb{N}_0$ zavedeme $\otimes_{p,q} : T^p(V) \times T^q(V) \to T^{p+q}(V)$ vztahem

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \otimes_{p,q} (w_1 \otimes \cdots \otimes w_q) := v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_q \tag{8.5}$$

pro všechny $v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_q \in V$, a rozšíříme na bilineární zobrazení. Pro $p = 0$ nebo $q = 0$ zavedeme jako $\lambda \otimes_{0,q} t := \lambda t$ a $t' \otimes_{p,0} \lambda := \lambda t'$ pro všechny $\lambda \in \mathbb{R} = T^0(V)$ a $t \in T^q(V)$ a

$t' \in T^p(V)$. Součin $\otimes$ pak dostaneme požadováním bilinerity, například:

$$\begin{aligned}(1 + v \otimes w) \otimes (x - y \otimes z) &= 1 \otimes_{0,1} x - 1 \otimes_{0,2} (y \otimes z) \\ &\quad + (v \otimes w) \otimes_{2,1} x - (v \otimes w) \otimes_{2,2} (y \otimes z) \\ &= 1 \otimes x - 1 \otimes y \otimes z + v \otimes w \otimes x - v \otimes w \otimes y \otimes z.\end{aligned} \tag{8.6}$$

$(T(V), \otimes)$ se nazývá **tenzorová algebra prostoru** V. Triviálně se ověří, že $T(V)$ je asociativní algebra s jednotkou $1 \in T^0(V) \equiv \mathbb{R}$. Tenzorová algebra *není komutativní.*

Definice 8.1.1. **Ideálem** $J \subseteq T(V)$ nazýváme podprostor J takový, že pro všechny $j \in J$ a všechny $s, t \in T(V)$ platí $s \otimes j \otimes t \in T(V)$.

Pro každou podmnožinu $S \subseteq T(V)$ existuje **ideál** $\langle S \rangle$ **generovaný množinou** S. Je to unikátní nejmenší ideál obsahující množinu S. Explicitně má tvar

$$\langle S \rangle = \mathbb{R}\{t \otimes s \otimes t' \mid s \in S,\ t, t' \in T(V)\}. \tag{8.7}$$

Pro každý ideál $J \subseteq T(V)$ existuje struktura asociativní algebry s jednotkou na faktorprostoru $T(V)/J$. Připomeňme, že na $T(V)$ se zavede relace ekvivalence $t \sim t' \Leftarrow t' - t \in J$. $T(V)/J$ je prostor tříd této ekvivalence. Struktura algebry se zavede jednoduše vztahem

$$[t] \cdot [t'] := [t \otimes t'] \tag{8.8}$$

Tato definice dává smysl *pouze v případě*, že J je ideál v $T(V)$. Jednotkou je třída [1].

Definice 8.1.2. Nechť V je konečněrozměrný vektorový prostor vybavený pseudoskalárním součinem $g : V \times V \to V$. Uvažujeme ideál $J_g(V)$ definovaný jako

$$J_g(V) := \langle \{v \otimes w + w \otimes v - 2g(v, w) \mid v, w \in V\} \rangle \tag{8.9}$$

Cliffordova algebra odpovídající (V, g) je definovaná jako příslušná faktoralgebra, tedy

$$\mathrm{Cl}(V, g) := T(V)/J_g(V). \tag{8.10}$$

Jak tato algebra vypadá v praxi? Nechť $[v] \in \mathrm{Cl}(V, g)$ je třída ekvivalence $v \in V \equiv T^1(V)$. Potom pro každé $v, w \in V$ dostáváme následující relaci:

$$[v] \cdot [w] + [w] \cdot [v] = [v \otimes w + w \otimes v] = 2g(v, w)[1]. \tag{8.11}$$

Prostor $\mathrm{Cl}(V, g)$ je tedy generovaný formálními konečnými lineárními kombinacemi vektorů tvaru $[v_1] \cdots [v_p] \equiv [v_1 \otimes \cdots \otimes v_p]$. Je-li $(e_i)_{i=1}^n$ báze V, snadno se rozmyslí, že každý element $u \in \mathrm{Cl}(V, g)$ lze psát jako jednoznačná lineární kombinace

$$u = \sum_{p=0}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \alpha^{i_1 \ldots i_p} [e_{i_1}] \cdots [e_{i_p}] \tag{8.12}$$

Vidím, že $\mathrm{Cl}(V, g)$ je konečněrozměrná algebra a $\dim(\mathrm{Cl}(V, g)) = 2^n$. Tento rozklad rovněž zadává nekanonický izomorfismus *vektorových prostorů* $\mathrm{Cl}(V, g) \cong \Lambda V$. V následujícím upouštíme od explicitního psaní závorek okolo generátorů $[v]$.

Příklad 8.1.3. Nechť $p, q \in \mathbb{N}_0$ a uvažujme $V = \mathbb{R}^{p+q}$ vybavený standardním pseudoskalárním součinem $g = \eta^{(p,q)}$. Obvykle se používá značení $\mathrm{Cl}(p,q) := \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{p+q}, \eta^{(p,q)})$.

Uvažujme $\mathrm{Cl}(1,1)$ se standardní bázi (e_1, e_2). Máme tedy $g(e_1, e_1) = 1$, $g(e_2, e_2) = -1$ a $g(e_1, e_2) = g(e_2, e_1) = 0$. Podle předchozího pozorování tedy bázi $\mathrm{Cl}(1,1)$ tvoří vektory $(1, e_1, e_2, e_1 \cdot e_2)$. Obecný prvek $u \in \mathrm{Cl}(1,1)$ lze tedy psát jako kombinaci

$$u = \alpha + \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 + \alpha^{12} e_1 \cdot e_2. \tag{8.13}$$

Jak vypadá součin s jiným prvkem $v = \beta + \beta^1 e_1 + \beta^2 e_2 + \beta^{12} e_1 \cdot e_2$. Jelikož je (e_1, e_2) ortonormální bázi V, je snadné nalézt součiny bazických elementů, t.j.

$$e_1 \cdot e_1 = g(e_1, e_1) = 1, \tag{8.14}$$

$$e_2 \cdot e_2 = g(e_2, e_2) = -1, \tag{8.15}$$

$$e_1 \cdot e_2 = -e_2 \cdot e_1 + 2g(e_1, e_2) = -e_2 \cdot e_1. \tag{8.16}$$

Pomocí nich už snadno spočítáme libovolný součin $u \cdot v$. Uvažujme například $u = 1 + e_1 \cdot e_2$ a $v = e_1 - e_2$. Potom s použitím těchto relací

$$\begin{aligned} u \cdot v &= (1 + e_1 \cdot e_2) \cdot (e_1 - e_2) = e_1 - e_2 + e_1 \cdot e_2 \cdot e_1 - e_1 \cdot e_2 \cdot e_2 \\ &= 2e_1 - 2e_2. \end{aligned} \tag{8.17}$$

Podobně snadno se dá počítat v libovolné ortonormální bázi v libovolné Cliffordově algebře.

Příklad 8.1.4. Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{C}^{2,2}$ komplexních matic 2×2, vybavený standardní asociativní algebrou maticového násobení. V tomto prostoru leží trojice Pauliho matic $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Jak známo, tyto splňují antikomutační relace

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} \equiv \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} \mathbf{1}_2 \tag{8.18}$$

Uvažujeme-li nyní Cliffordovu algebru $\mathrm{Cl}(3,0)$, zjistíme, že zobrazení $\Psi : \mathrm{Cl}(3,0) \to \mathbb{C}^{2,2}$ definované na generátorech jako $\Psi(e_i) := \sigma_i$ je izomorfismus algeber, t.j. $\mathrm{Cl}(3,0) \cong \mathbb{C}^{2,2}$.

Máme dva významné podprostory $\mathrm{Cl}(V,g)$. Definujeme $\mathrm{Cl}^+(V,g)$ jako $u \in \mathrm{Cl}(V,g)$ mající netriviální koeficienty v rozkladu (8.12) pouze u *sudých* součinů generátorů. Podobně $\mathrm{Cl}^-(V,g)$ má netriviální koeficienty pouze u *lichých* součinů generátorů. Snadno se ověří, že definice nezávisí na výběru báze $(e_i)_{i=1}^n$ a dostáváme direktní rozklad *vektorového prostoru*

$$\mathrm{Cl}(V,g) = \mathrm{Cl}^+(V,g) \oplus \mathrm{Cl}^-(V,g). \tag{8.19}$$

$\mathrm{Cl}^+(V,g)$ tvoří podalgebru $\mathrm{Cl}(V,g)$. Nyní můžeme definovat důležitý příklad Lieových grup.

Tvrzení 8.1.5. *Nechť (V,g) je konečněrozměrný vektorový prostor vybavený pseudoskalárním součinem g. Uvažujme pouze $V \neq 0$. Definujeme podmnožinu*

$$\mathrm{Pin}(V,g) := \{u \in \mathrm{Cl}(V,g) \mid u = v_1 \cdots v_k, \;\; g(v_i, v_i) \in \{-1, 1\}, \; k \in \mathbb{N}\}, \tag{8.20}$$

tedy elementy v u, které lze psát jako součin konečně mnoha elementů z $V \subseteq \mathrm{Cl}(V,g)$ normovaných na ± 1. Dál označujeme $\mathrm{Spin}(V,g) := \mathrm{Pin}(V,g) \cap \mathrm{Cl}^+(V,g)$.

Potom $\mathrm{Pin}(V,g)$ *a* $\mathrm{Spin}(V,g)$ *tvoří Lieovu grupu vzhledem k násobení indukovanému z* $\mathrm{Cl}(V,g)$. $\mathrm{Pin}(V,g)$ *se nazývá* ***pinová grupa*** *příslušná* (V,g). $\mathrm{Spin}(V,g)$ *se nazývá* ***spinová grupa*** *příslušná* (V,g). *Opět se používá standardní značení* $\mathrm{Pin}(p,q) := \mathrm{Pin}(\mathbb{R}^{p+q}, \eta^{(p,q)})$ *a podobně pro* $\mathrm{Spin}(p,q)$.

Důkaz. Ukažme si že $\mathrm{Pin}(V,g)$ tvoří grupu. Je-li $v_1 \cdots v_k \in \mathrm{Pin}(V,g)$ a $w_1 \cdots w_\ell \in \mathrm{Pin}(V,g)$, zjevně jejich součin je opět v $\mathrm{Pin}(V,g)$. $\mathrm{Pin}(V,g)$ obsahuje jednotku 1. Protože $V \neq 0$, existuje $v \in V$ takový, že $g(v,v) \in \{-1,1\}$. Potom $1 = v \cdot v \cdot v \cdot v \in \mathrm{Pin}(V,g)$. Inverze k $v_1 \cdots v_k$ je $\pm v_k \cdots v_1$, kde znaménko závisí na konkrétní normalizaci vektorů.

Jak ukázat, že tvoří Lieovu grupu? Platí, že pro každou konečněrozměrnou asociativní algebru $(A, *_A, 1_A)$ s jednotkou je podmnožina $A^\times := \{a \in A \mid a *_A b = b *_A a = 1_A \text{ pro nějaké } b \in B\}$ vždy otevřenou podmnožinou A (se standardní topologií). Jelikož $A^\times$ je zjevně grupa, tvoří $A^\times$ Lieovu grupu, jejíž Lieova algebra je A vybavená komutátorem $[a,b]_A := a *_A b - b *_A a$. Klasickým příkladem je maticová algebra $A = \mathbb{R}^{n,n}$, kde $A^\times = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

Dá se ukázat, že $\mathrm{Pin}(V,g)$ tvoří podgrupu a uzavřenou podmnožinu Lieovy grupy $\mathrm{Cl}^\times(V,g)$ a tedy Lieovu grupu. Důkaz pro $\mathrm{Spin}(V,g)$ je analogický. ■

Poznámka 8.1.6. Protože $\mathrm{Pin}(V,g)$ a $\mathrm{Spin}(V,g)$ jsou zkonstruovány jako uzavřené podgrupy $\mathrm{Cl}^\times(V,g)$, jejich Lieovy algebry $\mathfrak{pin}(V,g)$ a $\mathfrak{spin}(V,g)$ musí jít ztotožnit s podalgebrami Lieovy algebry $\mathfrak{cl}^\times(V,g) \doteq \mathrm{Cl}(V,g)$. Dá se relativně snadno ukázat, že obě jsou stejné a platí

$$\mathfrak{pin}(V,g) = \mathfrak{spin}(V,g) = \mathrm{Cl}^2(V,g) = \mathbb{R}\{e_i \cdot e_j \mid i < j\}, \tag{8.21}$$

kde $(e_i)_{i=1}^n$ je libovolná ortonormální báze (V,g). Podprostoru $\mathrm{Cl}^2(V,g)$ se říká **bivektory** v $\mathrm{Cl}(V,g)$, protože $e_i \cdot e_j \to 2e_i \wedge e_j$ definuje *kanonický* izomorfismus $\mathrm{Cl}^2(V,g) \cong \Lambda^2 V$. Další ekvivalentní popis je $\mathrm{Cl}^2(V,g) = \{v \cdot w - w \cdot v \mid v,w \in V\}$.

Každý element $u \in \mathrm{Cl}(V,g)$ lze kanonicky rozložit jako $u = u_+ + u_-$, kde $u_\pm \in \mathrm{Cl}^\pm(V,g)$. Definujeme zobrazení $\hat{\eta} : \mathrm{Cl}(V,g) \to \mathrm{Cl}(V,g)$ vztahem $\hat{\eta}(u) := u_+ - u_-$, tj. $\mathrm{Cl}^\pm(V,g)$ jsou vlastní podprostory $\hat{\eta}$ s vlastním číslem ± 1.

Lemma 8.1.7. *$\hat{\eta}$ je automorfismus algebry $\mathrm{Cl}(V,g)$.*

Důkaz. Pro každé $u, v \in \mathrm{Cl}(V,g)$ máme

$$\begin{aligned}
\hat{\eta}(u \cdot v) &= \hat{\eta}((u_+ + u_-) \cdot (v_+ + v_-)) = \hat{\eta}(u_+ \cdot v_+ + u_- \cdot v_- + u_+ \cdot v_- + u_- \cdot v_+) \\
&= u_+ \cdot v_+ + u_- \cdot v_- - u_+ \cdot v_- - u_- \cdot v_+ \\
&= (u_+ - u_-) \cdot (v_+ - v_-) \\
&= \hat{\eta}(u) \cdot \hat{\eta}(v).
\end{aligned} \tag{8.22}$$

Důkaz je hotov. ■

Nyní si ukážeme, že grupy $\mathrm{Pin}(V,g)$ a $\mathrm{Spin}(V,g)$ mají kanonické reprezentace na prostoru V.

Tvrzení 8.1.8. *Nechť $u \in \mathrm{Pin}(V,g)$. Definujeme zobrazení $\rho : \mathrm{Pin}(V,g) \to \mathrm{GL}(V)$ vztahem*

$$[\rho(u)](v) := \hat{\eta}(u) \cdot v \cdot u^{-1} \tag{8.23}$$

pro každé $v \in V$. Potom platí následující tvrzení:

(i) *(V,ρ) je reprezentace grupy $\mathrm{Pin}(V,g)$.*

(ii) *Pro $u \in V \cap \mathrm{Pin}(V,g)$ je $\rho(u)$ zrcadlení okolo roviny kolmé na u, t.j.*

$$[\rho(u)](v) = v - \frac{2g(u,v)}{g(u,u)} u \tag{8.24}$$

(iii) ρ *má hodnoty v podgrupě* $\mathrm{O}(V,g) \subseteq \mathrm{GL}(V,g)$.

(iv) ρ *můžeme interpretovat jako hladký epimorfismus* $\rho : \mathrm{Pin}(V,g) \to \mathrm{O}(V,g)$. *Jeho jádro je* $\ker(\rho) = \{-1,1\} \cong \mathbb{Z}_2$.

(v) Označme ρ_+ *restrikci* ρ *na* $\mathrm{Spin}(V,g)$. *Potom* (V,ρ_+) *je reprezentace* $\mathrm{Spin}(V,g)$ *na* V *a* $\rho_+ : \mathrm{Spin}(V,g) \to \mathrm{SO}(V,g)$ *je hladký grupový epimorfismus se stejným jádrem.*

Důkaz. Dokažme nejprve bod (ii), tedy $u \in V$. Zřejmě $u = u_-$ a tedy $\hat{\eta}(u) = -u$. Protože $u \cdot u = g(u,u)$, můžeme psát $u^{-1} = g(u,u)^{-1}u$. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} [\rho(u)](v) &= -\frac{1}{g(u,u)} u \cdot v \cdot u = -\frac{1}{g(u,u)}(2g(u,v) - v \cdot u) \cdot u \\ &= v - \frac{2g(u,v)}{g(u,u)} u. \end{aligned} \tag{8.25}$$

Zrcadlení okolo roviny kolmé na u je ortogonální transformace, t.j. v tomto případě $\rho(u) \in \mathrm{O}(V,g)$. Musíme si rozmyslet, že $[\rho(u)](v) \in V \subseteq \mathrm{Cl}(V,g)$ pro obecné $u \in \mathrm{Pin}(V,g)$. Ale $u = w_1 \cdots w_k$ pro $w_i \in V$ splňující $g(w_i,w_i) \in \{-1,1\}$, a tedy

$$\begin{aligned} [\rho(u)](v) &= \hat{\eta}(w_1 \cdots w_k) \cdot v \cdot (w_1 \cdots w_k)^{-1} = \hat{\eta}(w_1) \cdots \hat{\eta}(w_k) \cdot v \cdot w_k^{-1} \cdots w_1^{-1} \\ &= [\rho(w_1) \circ \cdots \circ \rho(w_k)](v) \in V, \end{aligned} \tag{8.26}$$

protože $\rho(u)$ je působení k po sobě následujících zrcadlení vektoru v. Zejména $\rho(u) \in \mathrm{O}(V,g)$. Zároveň snadno vidíme, že $\rho : \mathrm{Pin}(V,g) \to \mathrm{O}(V,g)$ je grupový homomorfismu a (V,ρ) je reprezentace $\mathrm{Pin}(V,g)$ na V. Máme tedy dokázaná tvrzení (i) a (iii).

Hladkost ρ plyne z faktu, že je lze považovat za restrikci hladkého zobrazení $\rho : \mathrm{Cl}^{\times}(V,g) \to \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Cl}(V,g))$ definovaného stejnou formulkou. Fakt, že ρ je surjektivní plyne z Cartanovy–Dieudonného věty, která říká: *Každý element* $A \in \mathrm{O}(V,g)$ *lze psát jako složení nejvýše* $\dim(V)$ *zrcadlení.* Zbývá nalézt jádro ρ.

Nechť tedy $\hat{\eta}(u) \cdot v \cdot u^{-1} = v$ pro všechny $v \in V$. Píšeme $u = u_+ + u_-$. Potom dostáváme rovnici $(u_+ - u_-) \cdot v = v \cdot (u_+ + u_-)$. Protože $v \in V \subseteq \mathrm{Cl}^-(V,g)$, máme dvě nezávislé rovnice

$$u_+ \cdot v = v \cdot u_+, \quad u_- \cdot v = -v \cdot u_- \tag{8.27}$$

pro každé $v \in V$. Nechť $(e_i)_{i=1}^n$ je libovolná ortonormální báze V. Pišme $u_+ = a_+ + b_- \cdot e_1$, kde $a_+ \in \mathrm{Cl}^+(V,g)$ a $b_- \in \mathrm{Cl}^-(V,g)$ již neobsahují e_1. Protože u_+ musí komutovat s libovolným $v \in V$, musí komutovat i s e_1, a tedy

$$(a_+ + b_- \cdot e_1) \cdot e_1 = e_1 \cdot (a_+ + b_- \cdot e_1). \tag{8.28}$$

Protože a_+ a b_- neobsahují e_1, máme $a_+ \cdot e_1 = e_1 \cdot e_+$ a $b_- \cdot e_1 = -e_1 \cdot b_-$. Odtud po dosazení

$$a_+ \cdot e_1 + g(e_1,e_1)b_- = a_+ e_1 - g(e_1,e_1)b_-, \tag{8.29}$$

tedy $b_- = 0$ a $u_+ = a_+$ neobsahuje e_1. Zopakováním tohoto argumentu nemůže u_+ obsahovovat žádný generátor e_i a tedy $u_+ = \lambda$. S použitím druhé z rovnic bychom analogicky ukázali, že $u_- = 0$ a tedy $u = \lambda$. Dá se ukázat, že $\lambda \in \mathrm{Pin}(V,g)$, právě tehdy když $\lambda \in \{-1,1\}$.

Tvrzení o $\mathrm{Spin}(V,g)$ plyne z toho, že složení sudého počtu zrcadlení má determinant $+1$, a tedy je elementem $\mathrm{SO}(V,g)$. ■

Tvrzení 8.1.9. *Dá se ukázat, že* $\rho : \mathrm{Pin}(V,g) \to \mathrm{O}(V,g)$ *a* $\rho_+ : \mathrm{Spin}(V,g) \to \mathrm{SO}(V,g)$ *jsou tzv. dvoulistá nakrytí.*

Jinými slovy, ρ *je surjektivní lokální difeomorfismus a každý bod* $A \in \mathrm{O}(V,g)$ *má okolí* U *takové, že* $\rho^{-1}(U)$ *je disjunktním sjednocením dvou souvislých množin difeomorfních* U*.*

Nakrývací homomorfismus $\rho : \mathrm{Pin}(V,g) \to \mathrm{O}(V,g)$ vždy indukuje izomorfismus algeber $\rho' : \mathfrak{pin}(V,g) \to \mathfrak{o}(V,g)$. Pro každé $u \in \mathfrak{pin}(V,g) = \mathrm{Cl}^2(V,g)$ jej získáme formulí

$$\rho'(u) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho(\exp(tu)). \tag{8.30}$$

Zde máme usnadněnou situaci, protože $\exp(tu)$ je „opravdická“ exponenciála v asociativní algebře $\mathrm{Cl}(V,g)$, tedy absolutně konvergentní suma

$$\exp(tu) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \underbrace{u \cdots u}_{p \text{ krát}} \tag{8.31}$$

Mám tedy spočítat výraz

$$\begin{aligned}[\rho'(u)](v) = & \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \hat{\eta}(\exp(tu)) \cdot v \cdot \exp(tu)^{-1} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tu) \cdot v \cdot \exp(-tu) \\ &= u \cdot v - v \cdot u =: [u,v]. \end{aligned} \tag{8.32}$$

Volme nyní za u generátory Lieovy algebry $\mathfrak{pin}(V,g)$, tedy $u = e_i \cdot e_j$, kde $i < j$ a $(e_i)_{i=1}^n$ je ortonormální báze V. Dostáváme

$$\begin{aligned}[\rho'(e_i \cdot e_j)](v) &= e_i \cdot e_j \cdot v - v \cdot e_i \cdot e_j \\ &= e_i \cdot (2g(e_j,v) - v \cdot e_j) - v \cdot e_i \cdot e_j \\ &= 2g(e_j,v)e_i - 2g(e_i,v)e_j + v \cdot e_i \cdot e_j - v \cdot e_i \cdot e_j \\ &= 2g(e_j,v)e_i - 2g(e_i,v)e_j. \end{aligned} \tag{8.33}$$

Zaveďme si označení $\mathcal{E}_{ij}$ pro lineární operátor $\mathcal{E}_{ij} \in \mathfrak{o}(V,g)$ daný pro $i,j \in \{1,\dots,n\}$ vzorcem

$$\mathcal{E}_{ij}(v) := g(e_j,v)e_i - g(e_i,v)e_j. \tag{8.34}$$

To je ovšem obvyklá báze algebry $\mathfrak{o}(V,g)$. Její matice vzhledem ke stejné bázi $(e_i)_{i=1}^n$ má tvar

$$(\mathcal{E}_{ij})^k_\ell = g(e_j,e_\ell)\delta^k_i - g(e_i,e_\ell)\delta^k_j. \tag{8.35}$$

Dokázali jsme následující lemma:

Lemma 8.1.10. *Indukovaný izomorfismus* $\rho' : \mathfrak{pin}(V,g) \to \mathfrak{o}(V,g)$ *má tvar*

$$\rho'(e_i \cdot e_j) = 2\mathcal{E}_{ij}, \tag{8.36}$$

pro všechny $1 \le i < j \le n$*,* $(e_i)_{i=1}^n$ *je ortonormální báze* (V,g) *a* $\mathcal{E}_{ij} \in \mathfrak{o}(V,g)$ *jsou definované vztahem (8.34). Zavádíme proto novou bázi* $(m_{ij})_{i<j}$ *algebry* $\mathfrak{pin}(V,g)$*, kde* $m_{ij} := \frac{1}{2} e_i \cdot e_j \equiv \frac{1}{4}[e_i,e_j]$*. Potom* $\rho'(m_{ij}) = \mathcal{E}_{ij}$*.*

Poznámka 8.1.11. Výraz $m_{ij} = \frac{1}{4}[e_i,e_j]$ má dobrý smysl pro libovolné hodnoty $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Všimněte si, že $m_{ij} = -m_{ji}$ a zejména $m_{ii} = 0$.

8.2 Prolongace hlavních fibrovaných prostorů

Definice 8.2.1. Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor se strukturní grupou G. Nechť $\rho : H \to G$ je hladký homomorfismus Lieových grup.

Hlavní fibrovaný prostor $\varpi : Q \to M$ se strukturní grupoou H spolu s hladkým zobrazením $\varphi : Q \to P$ nazveme **prolongací** P **nad** ρ, pokud

(i) $\varphi : Q \to P$ je hladké zobrazení takové, že $\pi \circ \varphi = \varpi$;

(ii) φ je ekvivariantní, t.j. pro každé $q \in Q$ a $h \in H$ platí

$$\varphi(q \cdot h) = \varphi(q) \cdot \rho(h). \tag{8.37}$$

Zobrazení φ má obvykle velmi podobné geometrické vlastnosti jako homomorfismus ρ. Pro nás je důležité zejména následující pozorování:

Tvrzení 8.2.2. *Je-li $\rho : H \to G$ nakrytí, je i $\varphi : Q \to P$ nakrytí.*

Důkaz. Ukažme nejprve, že φ je surjektivní. Nechť $p \in P$. Označme $m := \pi(p)$. Pro libovolné $q \in Q_m$ leží $\varphi(q)$ ve stejném vlákně jako p. Odtud $\varphi(q) \cdot g = p$ pro jednoznačné $g \in G$. Jelikož je ρ surjektivní, můžeme psát $g = \rho(h)$ a tedy

$$p = \varphi(q) \cdot g = \varphi(q) \cdot \rho(h) = \varphi(q \cdot h). \tag{8.38}$$

Odtud vidíme, že je surjektivní. Nechť $\phi : U \times G \to \pi^{-1}(U)$ a $\psi : U \times H \to \varphi^{-1}(U)$ jsou ekvivariantní trivializační zobrazení pro P, resp. pro Q. Definujme hladké zobrazení $\hat{\varphi} : U \to G$ vztahem $\phi(m, \hat{\varphi}(m)) = \varphi(\psi(m, e))$. Potom pro každé $(m, h) \in M \times H$ dostáváme

$$\varphi(\psi(m, h)) = \varphi(\psi(m, e) \cdot h) = \varphi(\psi(m, e)) \cdot \rho(h) = \phi(m, \hat{\varphi}(m)) \cdot \rho(h) = \phi(m, \hat{\varphi}(m) \cdot \rho(h)). \tag{8.39}$$

Definuju si nyní nové zobrazení $\phi' : U \times G \to \pi^{-1}(U)$ předpisem $\phi'(m, g) = \phi(m, \hat{\varphi}(m) \cdot g)$. Lze snadno uvidět, že tento předpis definuje nové **trivializační zobrazení pro** P **adaptované na** ρ, protože zobrazení φ získá pro každé $(m, h) \in U \times H$ tvar.

$$\varphi(\psi(m, h)) = \phi'(m, \rho(h)). \tag{8.40}$$

Vidím, že $\phi'^{-1} \circ \varphi|_{\varpi^{-1}(U)} \circ \psi = 1 \times \rho$, což je zřejmě lokální difeomorfismus. Proto nutně i φ je lokální difeomorfismus.

Abychom dokázali, že jde o nakrytí, stačí pro každý bod $p_0 \in P$ nalézt stejnoměrně nakryté okolí $\mathcal{U} \subseteq P$. Nechť $m_0 := \pi(p)$. Nechť U je souvislé okolí bodu m_0 spolu s lokálními trivializacemi $\phi' : U \times G \to \pi^{-1}(U)$ a $\psi : U \times H \to \varpi^{-1}(U)$ splňující (8.40). Máme $p_0 = \phi'(m_0, g_0)$ pro nějaké $g_0 \in G$. Protože ρ je nakrytí, existuje stejnoměrně nakryté okolí $V \subseteq G$ bodu g_0. Snadno se rozmyslí, že $\mathcal{U} := \phi(U \times V)$ je stejnoměrně nakryté okolí bodu p_0. ■

Nadále předpokládejme, že $\rho : H \to G$ je nakrytí. Potom ρ indukuje izomorfismus Lieových algeber $\rho' : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$. Ukazuje se, že vertikální podprostory a konexe $\pi : P \to M$ a jeho prolongace $\varphi : Q \to M$ jsou pevně svázány.

Tvrzení 8.2.3. *Nechť $\varphi : Q \to M$ a φ jsou prolongací $\pi : P \to M$ nad nakrytím ρ. Potom následující fakta jsou pravdivá:*

(i) Nechť $\# : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$ a $\#' : \mathfrak{h} \to \mathfrak{X}(P)$ označuje infinitesimální generátory. Potom $\#'x$ a $\#\rho'(x)$ jsou φ-vztažená pro každé $x \in \mathfrak{h}$. Jinými slovy, pro každé $q \in Q$ máme

$$\varphi_*(\#'_q(x)) = \#_{\varphi(x)}(\rho'(x)). \tag{8.41}$$

Zejména platí $\varphi_*(\mathrm{Ver}_q(Q)) = \mathrm{Ver}_{\varphi(q)}(Q)$.

(ii) Pro každou konexi $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ zadává $A' := \rho'^{-1}(\varphi^*(A))$ konexi na Q. Naopak, pro každou konexi $A' \in \Omega^1(Q, \mathfrak{h})$ existuje právě jedna konexe A splňující tento vztah.

(iii) Ekvivalentně máme $\varphi_*(\mathrm{Hor}'_q(Q)) = \mathrm{Hor}_{\varphi(q)}(P)$ pro každé $q \in Q$.

Důkaz. Nechť $q \in Q$ a $x \in \mathfrak{h}$ jsou libovolné. Potom

$$\varphi_*(\#'_q(x)) = \varphi_*(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} q \cdot \exp(tx)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(q \cdot \exp(tx)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(q) \cdot \rho(\exp(tx)). \tag{8.42}$$

Ale $\rho(\exp(tx)) = \exp(t\rho'(x))$ a tedy na pravé straně dostáváme $\#_{\varphi(x)}(\rho'(x))$. To dokazuje tvrzení (i). Vztah vertikálních podprostorů je zřejmý.

Nechť $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ je forma konexe na P. Zjevně $A' \in \Omega^1(Q, \mathfrak{h})$. Musíme ověřit axiomy formy konexe. Pro každé $q \in Q$ a $x \in \mathfrak{h}$ máme

$$A'|_q(\#'_q(x)) = \rho'^{-1}(A|_{\varphi(q)}(\varphi_*(\#'_q(x)))) = \rho'^{-1}(A|_{\varphi(q)}(\#_{\varphi(q)}(\rho'(x)))) = x. \tag{8.43}$$

Na ověření ekvivariance je potřeba si rozmyslet, že pro každé $x \in \mathfrak{h}$ a $h \in H$ platí formulka

$$\rho'(Ad_h(x)) = Ad_{\rho(h)}\rho'(x). \tag{8.44}$$

To snadno získáme z příslušných definic, protože

$$\begin{aligned} \rho'(Ad_h(x)) = & \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \rho(\exp(tAd_h(x))) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \rho(h\exp(tx)h^{-1}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \rho(h)\rho(\exp(tx))\rho(h)^{-1} \\ = & \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \rho(h)\exp(t\rho'(x))\rho(h)^{-1} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tAd_{\rho(h)}(\rho'(x))) = Ad_{\rho(h)}(\rho'(x)). \end{aligned} \tag{8.45}$$

Potom pro každý vektor $X \in T_qQ$ platí

$$(R_h^*(A'|_{q\cdot h}))(X) = A'|_{q\cdot h}(R_{h*}(X)) = \rho'^{-1}(A|_{\varphi(q\cdot h)}(\varphi_*(R_{h*}(X)))) \tag{8.46}$$

Ale $\varphi \circ R_h = R_{\rho(h)} \circ \varphi$. Můžu tedy použít ekvivarianci formy A a dostávám

$$\begin{aligned} (R_h^*(A'|_{q\cdot h}))(X) &= \rho'^{-1}\{Ad_{\rho(h)^{-1}}(A|_{\varphi(q)}(\varphi_*(X)))\} \\ &= Ad_{h^{-1}}(\rho'^{-1}(A|_{\varphi(q)}(\varphi_*(X)))) \\ &= Ad_{h^{-1}}A'_q(X), \end{aligned} \tag{8.47}$$

kde jsme použili výše odvozený vztah (8.44). Vidíme, že $A' \in \Omega^1(Q, \mathfrak{h})$ je opravdu forma konexe.

Naopak, je-li $A' \in \Omega^1(Q, \mathfrak{h})$ forma konexe, definujeme pro každé $p \in P$ a $X \in T_pP$ formu $A|_p$ následovně. Protože φ je surjektivní, existuje $q \in Q$, že $p = \varphi(q)$. Potom

$$A|_p(X) := \rho'(A'|_q(\hat{X}_q)), \tag{8.48}$$

kde $\hat{X}_q \in T_qQ$ je jednoznačný vektor takový, že $X = \varphi_*(\hat{X}_q)$. Musíme ověřit nezávislost pravé strany na výběru q. Je-li $\varphi(q') = p$ pro jiné q', máme $q' = q \cdot h$ pro nějaké $h \in \ker(\rho)$. Z jednoznačnosti plyne, že $\hat{X}_{q'} = R_{h*}(\hat{X}_q)$. Potom tedy

$$\begin{aligned}\rho'(A'|_{q'}(\hat{X}_{q'})) &= \rho'((R_h^*(A'|_q))(\hat{X}_q)) = \rho'(Ad_{h^{-1}}A'|_q(\hat{X}_q)) \\ &= Ad_{\rho(h)^{-1}}\rho'(A'|_q(\hat{X}_q)) = \rho'(A'|_q(\hat{X}_q)).\end{aligned} \tag{8.49}$$

Zbývá ukázat, že $A|_p$ definuje hladkou formu, ale to snadno plyne z toho, že φ je nakrytí (lokální difeomorfismus). To dokazuje tvrzení (*ii*). V důkazu tvrzení (*iii*) stačí ověřit, že $\varphi_*(\mathrm{Hor}'_q(Q))$ je v jádru $A|_{\varphi(q)}$ pro všechna $q \in Q$, ale to je zřejmé. ■

Lokální řezy hlavní fibrace P a fibrovaného prostoru Q jsou opět v blízkém vztahu. K tomuto potřebujeme jedno obecné tvrzení:

Tvrzení 8.2.4. *Nechť $\varphi : Q \to P$ je nakrytí. Nechť M je souvislá a jednoduše souvislá varieta. Nechť $\sigma : M \to P$ je hladké zobrazení. Nechť $m_0 \in N$ je libovolný bod a zvolme $q_0 \in Q$ takové, že $\varphi(q_0) = \sigma(m_0)$.*

Potom existuje právě jedno hladké zobrazení $\hat{\sigma} : M \to Q$ takové, že $\varphi \circ \hat{\sigma} = \sigma$ a $\hat{\sigma}(n_0) = q_0$.

To se nám bude hodit pro následující pozorování:

Tvrzení 8.2.5. *Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní fibrovaný prostor a $\varpi : Q \to M$, $\varphi : Q \to P$ jeho prolongace nad nakrytím $\rho : H \to G$.*

Nechť $\sigma \in \Gamma_U(P)$ je lokální řez, kde U je souvislá a jednoduše souvislá otevřená množina. Nechť $m_0 \in U$ a $q_0 \in \varphi^{-1}(\sigma(m_0))$. Potom existuje jednoznačný řez $\hat{\sigma} \in \Gamma_U(Q)$ takový, že $\varphi \circ \hat{\sigma} = \sigma$. Množina $\varphi^{-1}(\sigma(m_0))$ a tedy i množina možných zdvihů $\hat{\sigma}$ je nanejvýš spočetná a izomorfní normální podgrupě $K := \ker(\rho) \subseteq H$.

Důkaz. První část plyne z předchozího tvrzení, pokud ověříme, že $\hat{\sigma}$ je řez. Ale z definice prolongace plyne, že $\varpi \circ \hat{\sigma} = (\pi \circ \varphi) \circ \hat{\sigma} = \pi \circ \sigma = 1_U$.

Druhá část tvrzení plyne z následujícího. Nechť V je stejnoměrně nakryté okolí bodu $\sigma(m_0)$. Potom každý z bodů $\varphi^{-1}(\sigma(m_0))$ musí ležet v jiné komponentě souvislosti variety $\varphi^{-1}(U)$, kterých může být nanejvýš spočetně mnoho.

Konečně, nechť $q_0' \in \varphi^{-1}(\sigma(m_0))$ je jiný bod. Protože $\varpi(q_0') = \varpi(q_0)$, existuje $h \in H$ takové, že $q_0' = q_0 \cdot h$. Potom ale $\varphi(q_0') = \varphi(q_0 \cdot h) = \varphi(q_0) \cdot \rho(h)$, z čehož plyne $\rho(h) = e$ a tedy $h \in K$. Nechť $\hat{\sigma}'(m) := \hat{\sigma}(m) \cdot h$ pro každé $m \in U$. Zjevně $\varphi \circ \hat{\sigma}' = \sigma$ a $\hat{\sigma}'(m_0) = q_0 \cdot k = q_0'$, a tedy $\hat{\sigma}'$ je příslušný zdvih. ■

8.3 Spinový bandl

Nechť (M, g, o) je varieta s metrikou a orientací. Předpokládejme, že g má signaturu (p, q) Nyní ukážeme, že za pomocí přidaných struktur můžeme sestrojit kanonický hlavní fibrovaný prostor $O^+(M)$, jehož strukturní grupou je $\mathrm{SO}(p, q)$. Sestrojí se podobně jako $F(M)$, ale tentokrát

$$O^+(M) := \sqcup_{m \in M} \mathcal{E}_g^+(T_mM), \tag{8.50}$$

kde $\mathcal{E}_g^+(T_mM)$ je množina *pravotočivých ortonormálních* bází T_mM.

Lemma 8.3.1. *Nechť $e \in \mathcal{E}_g^+(T_m M)$. Nechť $e' \in \mathcal{E}(T_m M)$ je libovolná jiná báze. Zejména tedy $e' = e \cdot \mathbf{A}$ pro unikátní $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.*

Potom $e' \in \mathcal{E}_g^+(T_m M)$ právě tehdy když $\mathbf{A} \in \mathrm{SO}(p, q)$.

Důkaz. Nechť $e = (e_1, \dots, e_n) \in \mathcal{E}_g^+(T_m M)$. Máme tedy $g(e_i, e_j) = \eta_{ij}^{(p,q)}$. Nechť $e'_i = \mathbf{A}^i_j e_j$. Potom podmínka ortonormality báze $(e'_1, \dots, e'_n)$ dává rovnici

$$\eta_{ij}^{(p,q)} = g(e'_i, e'_j) = g(\mathbf{A}^k_i e_k, \mathbf{A}^\ell_j e_\ell) = \mathbf{A}^k_i \mathbf{A}^\ell_j \eta_{k\ell}^{(p,q)} \tag{8.51}$$

Maticově tedy $\eta^{(p,q)} = \mathbf{A}^T \eta^{(p,q)} \mathbf{A}$, což je přesně podmínka $\mathbf{A} \in \mathrm{O}(p, q)$. Má-li být e' pravotočivá, musí být (z definice pravotočivosti) $\det(\mathbf{A}) > 0$ a tedy $\mathbf{A} \in \mathrm{SO}(p, q)$. ■

Tvrzení 8.3.2. *Nechť (M, g, o) je varieta s metrikou a orientací, kde g má signaturu (p, q). Potom $\pi : O^+(M) \to M$ tvoří hlavní fibrovaný prostor se strukturní grupou $\mathrm{SO}(p, q)$ a akci a trivializací definovanou stejně jako pro $F(M)$.*

$O_+(M)$ se nazývá ***fibrace ortonormálních pravotočivých repérů****. Lokální řezy $O_+(M)$ odpovídají polím ortonormálních pravotočivých repérů.*

Důkaz. Důkaz kopíruje všechna tvrzení pro $F(M)$. ■

Konexe na $F(M)$ odpovídaly afinním konexím na M. Není překvapivé, že $O^+(M)$ odpovídá jisté jejich podtřídě. Jelikož jsme kromě orientace přidali metriku g, výsledek není překvapivý.

Tvrzení 8.3.3. *Konexe na $O^+(M)$ odpovídají* ***metrickým afinním konexím*** *vzhledem k metrice g, t.j. kovariantní derivace splňuje pro všechny $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ rovnici*

$$X.g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \tag{8.52}$$

Důkaz. Nechť $(e_1, \dots, e_n)$ je ortonormální pravotočivé pole repérů na $U \subseteq M$. Pro $X = e_a$, $Y = e_b$ a $Z = e_c$ má podmínka (8.52) tvar

$$\begin{aligned} 0 &= g(\nabla_{e_a} e_b, e_c) + g(e_b, \nabla_{e_a} e_c) = g(\Gamma^k_{ba} e_k, e_c) + g(e_b, \Gamma^k_{ca} e_k) \\ &= \Gamma^k_{ba} \eta_{kc} + \Gamma^k_{ca} \eta_{bk}, \end{aligned} \tag{8.53}$$

kde píšeme $\eta_{ab} = g(e_a, e_b)$. To ukazuje, že výraz $\Gamma_{cba} := \Gamma^k_{ba} \eta_{kc}^{(p,q)}$ je antisymetrický v indexech c a b. Příslušné lokální formy konexe můžeme nyní přepsat jako

$$\hat{\omega} = \hat{\omega}^a_b E^b_a = (\Gamma^a_{bc} e^c) E^b_a = (\Gamma_{abc} e^c) \eta^{ak} E^b_k = \frac{1}{2} (\Gamma_{abc} e^c) \{\eta^{ak} E^b_k - \eta^{bk} E^a_k\}, \tag{8.54}$$

kde jsme použili předpokládanou antisymetrii Γ_{abc} v prvních dvou indexech. Označme matici napravo jako $\mathcal{E}^{ab}$. Vidíme, že $\mathcal{E}^{ab} = -\mathcal{E}^{ba}$. Tvrdíme, že $(\mathcal{E}^{ab})_{a<b}$ tvoří bázi $\mathfrak{o}(p, q)$ a její vztah s maticemi $\mathcal{E}_{ij}$ v první sekci této kapitoly je jednoduše $\mathcal{E}_{cd} = \eta_{ca} \eta_{db} \mathcal{E}^{ab}$. Máme

$$(\mathcal{E}^{ab})^i_j = \eta^{ak} (E^b_k)^i_j - \eta^{bk} (E^a_k)^i_j = \eta^{ak} \delta^b_j \delta^i_k - \eta^{bk} \delta^a_j \delta^i_k = \eta^{ai} \delta^b_j - \eta^{bi} \delta^a_j \tag{8.55}$$

Odtud tedy dostáváme výraz

$$(\mathcal{E}_{cd})^i_j = \eta_{ca} \eta_{db} (\eta^{ai} \delta^b_j - \eta^{bi} \delta^a_j) = \eta_{dj} \delta^i_c - \eta_{cj} \delta^i_d. \tag{8.56}$$

Ale to je přesně výraz (8.35). Je zřejmé, že matice $(\mathcal{E}^{ab})_{a<b}$ tvoří bázi $\mathfrak{o}(p,q)$ a právě jsme dokázali, že lokální formy konexe můžeme psát jako

$$\hat{\omega} = \frac{1}{2}\hat{\omega}_{ab}\mathcal{E}^{ab} = \sum_{a<b}\hat{\omega}_{ab}\mathcal{E}^{ab}, \ \ \hat{\omega}_{ab} = \Gamma_{abc}e^c. \tag{8.57}$$

Vidíme, že $\hat{\omega} \in \Omega^1(U, \mathfrak{o}(p,q))$. Postupem analogickým ke konstrukci na $F(M)$ se nyní ukáže, že lze z takových forem vyrobit globální formu konexe $\omega \in \Omega^1(O^+(M), \mathfrak{o}(p,q))$ a každá taková zadává metrickou afinní konexi na M vzhledem k metrice g. ■

Nyní připomeňme, že máme dvoulisté nakrytí $\rho_+ : \mathrm{Spin}(p,q) \to \mathrm{SO}(p,q)$. Zároveň jsme pro danou varietu (M,g,o) zkonstruovali hlavní fibrovaný prostor $\pi : O^+(M) \to M$ se strukturní grupou $\mathrm{SO}(p,q)$. Můžeme se tedy ptát, jestli existuje prolongace $O^+(M)$ nad morfismem ρ_+.

Definice 8.3.4. Prolongace $\varpi : S(M) \to M$, $\varphi : S(M) \to O^+(M)$ nad nakrytím $\rho_+ : \mathrm{Spin}(p,q) \to \mathrm{SO}(p,q)$ se nazývá **spinový bandl nad** M, nebo též **spinová struktura na** M. Variety, které připouští existenci spinové struktury se nazývají **spinové variety**.

Poznámka 8.3.5. Ne každá orientovaná varieta s metrikou je spinová. Na jedné varietě může existovat několik neekvivalentních prolongací $\mathcal{O}^+(M)$ a tedy i spinových struktur. V následujícím tedy budeme předpokládat, že máme spinovou varietu (M,g,o) a zafixovali jsme spinový bandl $\varpi : S(M) \to M$ (spolu se zobrazením $\varphi : S(M) \to O^+(M)$.

Tvrzení 8.3.6. *Nechť $\sigma : U \to O^+(M)$ je lokální řez (a tedy pole ortonormálních pravotočivých repérů na U), kde U je souvislá a jednoduše souvislá otevřená množina.*

Potom existuje hladký řez $\hat{\sigma} : U \to S(M)$ takový, že $\varphi \circ \hat{\sigma} = \sigma$. Jediný další takový řez je $\hat{\sigma}' := \hat{\sigma} \cdot (-1)$. Každému poli ortonormálních pravotočivých repérů na souvislém a jednoduše souvislém U odpovídají právě dva zdvihy na řez spinového bandlu.

Tvrzení 8.3.7. *Konexe na spinovém bandlu $S(M)$ odpovídají jednoznačně metrickým konexím na M vzhledem k metrice g. Nechť $\omega \in \Omega^1(O^+(M), \mathfrak{o}(p,q))$ a $\omega' \in \Omega^1(S(M), \mathfrak{pin}(p,q))$ jsou ve vztahu jako v Tvrzení 8.2.3. Nechť $\sigma \in \Gamma_U(O^+(M))$ je lokální řez odpovídající poli pravotočivých ortonormálních repérů a nechť $\hat{\sigma} \in \Gamma_U(S(M))$ je jeho zdvih, tj. $\varphi \circ \hat{\sigma} = \sigma$.*

Nechť $\hat{\omega} = \sigma^*(\omega)$ a $\hat{\omega}' = \hat{\sigma}'^*(\omega')$ jsou přislušné lokální formy konexe. Potom $\hat{\omega} = \rho'(\hat{\omega}')$.

Označme $(m^{ab})_{a<b}$ bázi $\mathfrak{pin}(p,q)$ definovanou jako $m^{ab} := \eta^{ai}\eta^{bj}m_{ij}$, kde $(m_{ij})_{i<j}$ je báze $\mathfrak{pin}(p,q)$ z Lemma 8.1.10. Můžeme psát $\hat{\omega} = \sum_{a<b}\hat{\omega}_{ab}\mathcal{E}^{ab}$ a $\hat{\omega}' = \sum_{a<b}\hat{\omega}'_{ab}m^{ab}$. Potom

$$\hat{\omega}'_{ab} = \hat{\omega}_{ab}. \tag{8.58}$$

*Konexi ω' se říká **spinová konexe**, a je jednoznačně určená metrickou afinní konexí, kterou unikátně kóduje konexe ω.*

Důkaz. Vztah mezi ω a ω' lze psát jako $\rho'(\omega') = \varphi^*(\omega)$. Působením $\hat{\sigma}^*$ dostaneme rovnici

$$\rho'(\hat{\omega}') = (\hat{\sigma}^* \circ \varphi^*)(\omega) = (\varphi \circ \hat{\sigma})^*(\omega) = \sigma^*(\omega) = \hat{\omega}. \tag{8.59}$$

Rovnost komponentních forem plyne triviálně z Lemma 8.1.10, protože

$$\rho'(\hat{\omega}') = \rho'(\frac{1}{2}\hat{\omega}'_{ab}m^{ab}) = \frac{1}{2}\hat{\omega}'_{ab}\rho'(m^{ab}) = \frac{1}{2}\hat{\omega}'_{ab}\mathcal{E}^{ab}, \tag{8.60}$$

ale pravá strana je dle již dokázaného rovna $\hat{\omega} = \frac{1}{2}\hat{\omega}_{ab}\mathcal{E}^{ab}$. To implikuje (8.58). ■

Na spínovém bandlu se spinovou konexí můžeme uvažovat následující konstrukci. Nechť $s \in S(M)$ je libovolný bod. Potom $\varphi(s) \in O^+(M)$ je z definice pravotočivá ortonormální báze T_mM, kde $m = \varpi(s) = \pi(\varphi(s))$, označme ji jako $\varphi(s) =: (e_1(s), \dots, e_n(s))$. Každý z těchto tečných vektorů můžeme horizontálně zdvihnout zpět do bodu s, tj. sestrojit

$$\mathcal{E}_a(s) := (e_a(s))^h_s \in \mathrm{Hor}_s(S(M)) \subseteq T_sS(M), \tag{8.61}$$

pro každé $a \in \{1, \dots, n\}$. Ukazuje se, že tímto způsobem definujeme hladká vektorová pole.

Tvrzení 8.3.8. *Předpis $\mathcal{E}_a|_s := \mathcal{E}_a(s)$ definuje globální hladké horizontální vektorové pole $\mathcal{E}_a \in \mathfrak{X}(S(M))$ pro každé $a \in \{1, \dots, n\}$. $(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$ jsou globální generátory horizontální distribuce* $\mathrm{Hor}(S(M))$. *Nechť $u \in \mathrm{Spin}(p,q)$ a nechť $\mathbf{A} := \rho(u) \in \mathrm{O}(p,q)$. Potom*

$$R_{u*}(\mathcal{E}_a) = (\mathbf{A}^{-1})^b{}_a \mathcal{E}_b. \tag{8.62}$$

Důkaz. Na souvislém a jednoduše souvislém okolí U zvolme řez $\sigma : U \to O^+(M)$, neboli pravotočivé ortonormální pole repérů $(f_1, \dots, f_n)$ na U. Nechť $\hat{\sigma} : U \to S(M)$ je nějaký jeho zdvih. Potom obvyklým způsobem dostáváme hladkou funkci $u : \varpi^{-1}(U) \to \mathrm{Spin}(p,q)$ splňující

$$s = \hat{\sigma}(\varpi(s)) \cdot u(s). \tag{8.63}$$

Označme $\mathbf{A} := \rho \circ u : \varpi^{-1}(U) \to \mathrm{SO}(p,q)$. Zapůsobením φ na obě strany tedy dostáváme

$$\varphi(s) = \sigma(\varpi(s)) \cdot \mathbf{A}(s). \tag{8.64}$$

Odtud dostáváme vztah $e_a(s) = \mathbf{A}(s)^b{}_a \, f_b|_{\varpi(s)}$. Horizontální zdvih je lineární zobrazení a proto

$$\mathcal{E}_a|_s = \mathbf{A}(s)^b{}_a \, f^h_b|_s, \tag{8.65}$$

kde f^h_b jsou horizontální zdvihy vektorových polí $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{X}_U(M)$. To ale dokazuje, že $\mathcal{E}_a$ jsou hladká vektorová pole. Zřejmě tvoří globální generátory horizontální distribuce, protože na $\varpi^{-1}(U)$ je lze pomocí hladkých funkcí nakombinovat z generátorů $(f^h_1, \dots, f^h_n)$.

Nechť $u \in \mathrm{Spin}(p,q)$ a $\mathbf{A} := \rho(u)$. Jelikož $\mathcal{E}_a|_s = (e_a(s))^h_s$, je nutně $R_{u*}(\mathcal{E}_a|_s)$ horizontálním zdvihem téhož vektoru do bodu $s \cdot u$, tj. $R_{u*}(\mathcal{E}_a|_s) = (e_a(s))^h_{s \cdot u}$. Navíc můžeme psát

$$\begin{aligned} e_a(s) \equiv \varphi(s)_a &= \varphi(s \cdot u \cdot u^{-1})_a = (\varphi(s \cdot u) \cdot \rho(u)^{-1})_a \\ &= (\mathbf{A}^{-1})^b{}_a \varphi(s \cdot u)_b = (\mathbf{A}^{-1})^b{}_a e_b(s \cdot u). \end{aligned} \tag{8.66}$$

Odtud pak okamžitě dostáváme kýženou rovnici, protože

$$R_{u*}(\mathcal{E}_a|_s) = (e_a(s))^h_{s\cdot u} = (\mathbf{A}^{-1})^b{}_a (e_b(s \cdot u))^h_{s \cdot u} = (\mathbf{A}^{-1})^b{}_a \mathcal{E}_b|_{s \cdot u}. \tag{8.67}$$

Důkaz je nyní hotov! ■

8.4 Spinorové reprezentace, spinorová pole

Uvažujme nyní reprezentaci (W, ζ) asociativní algebry $\mathrm{Cl}(V,g)$. Jinými slovy, máme lineární zobrzení $\zeta : \mathrm{Cl}(V,g) \to \mathrm{End}(W)$ splňující

$$\zeta(u \cdot u') = \zeta(u) \circ \zeta(u'), \;\; \zeta(1) = 1_V. \tag{8.68}$$

Nechť $(e_i)^n_{i=1}$ je ortonormální báze (V,g). Pro každé $a \in \{1, \dots, n\}$ zavedeme označení $e^a := \eta^{ab} e_b$. Pro zmatení nepřítele $(e^1, \dots, e^n)$ je nová báze V, nikoliv duální báze V^*. Není příliš třeba je explicitně rozlišovat, protože jsou spolu jednoznačně izomorfismem $V \cong V^*$ indukovaným metrikou g.

Tvrzení 8.4.1. *Nechť (W,ζ) je reprezentace $\mathrm{Cl}(V,g)$. Nechť $(e_i)_{i=1}^n$ je ortonormální báze (V,g). Potom reprezentace je jednoznačně určena obrazy $\gamma^a := \zeta(e^a) \in \mathrm{End}(W)$, které splňují*

$$\gamma^a \circ \gamma^b + \gamma^b \circ \gamma^a = 2\eta^{ab}\, 1_W. \tag{8.69}$$

Pro každé $u \in \mathrm{Spin}(V,g)$ pak platí identita

$$\zeta(u) \circ \gamma^a \circ \zeta(u)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^a_b \gamma^b, \tag{8.70}$$

*kde $\mathbf{A}$ je matice operátoru $\rho(u)$ vzhledem k bázi $(e_i)_{i=1}^n$. Reprezentace (W,ζ) indukuje reprezentaci grupy $\mathrm{Spin}(V,g)$ na prostoru W, kterou nazýváme **spinorová reprezentace**.*

Důkaz. S využitím standardní relace pro vektory v Cliffordově algebře dostáváme pro bázi $(e^a)_{a=1}^n$ prostoru V vztah

$$e^a \cdot e^b + e^b \cdot e^a = \eta^{ai}\eta^{bj}(e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i) = \eta^{ai}\eta^{bj} 2\eta_{ij} = \eta^{ab}. \tag{8.71}$$

Na tuto relaci můžeme vypustit ζ a dostaneme (8.69). Zbývá ukázat relaci (8.70). Z definice nakrývacího homomorfismusu $\rho : \mathrm{Spin}(V,g) \to \mathrm{SO}(V,g)$ máme pro každé $u \in \mathrm{Spin}(V,g)$ a každé $v \in V$ vztah $[\rho(u)](v) = u \cdot v \cdot u^{-1}$, kde můžeme vynechat operátor $\hat{\eta}$ protože $u \in \mathrm{Cl}^+(V,g)$. Pro každé $a \in \{1,\dots,n\}$ pokládáme $v = e^a$ a dostáváme

$$u \cdot e^a \cdot u^{-1} = [\rho(u)](e^a) = \eta^{ai}[\rho(u)](e_i) = \eta^{ai}\mathbf{A}^j_i e_j = (\eta^{ai}\mathbf{A}^j_i \eta_{jb})e^b. \tag{8.72}$$

Nyní si stačí povšimnout, že $\eta^{ai}\mathbf{A}^j_i\eta_{jb} = (\eta^{-1}\mathbf{A}^T\eta)^a_b = (\mathbf{A}^{-1})^a_b$. To plyne z toho, že $\mathbf{A} \in \mathrm{SO}(p,q)$. Vskutku, taková matice z definice splňuje rovnici

$$\mathbf{A}^T\eta\mathbf{A} = \eta. \tag{8.73}$$

Vynásobením rovnice η^{-1} zleva dostáváme $(\eta^{-1}\mathbf{A}^T\eta)\mathbf{A} = \mathbf{1}_n$ a tedy $\mathbf{A}^{-1} = \eta^{-1}\mathbf{A}^T\eta$. Vidíme, tedy, že platí rovnice $u \cdot e^a \cdot u^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^a_b e^b$. Zapůsobením ζ na obě strany dostáváme (8.70). ■

Příklad 8.4.2. Uvažujme $(V,g) = (\mathbb{R}^4, \eta^{(3,1)})$. Sestrojíme reálnou věrnou reprezentaci $\mathrm{Cl}(V,g)$ na prostoru $\mathbb{R}^4$. Podle předchozí věty stačí zadat γ-matice, které se v tomto případě obvykle označují $(\gamma^0,\gamma^1,\gamma^2,\gamma^3)$ a matice skalárního součinu vzhledem ke standardní bázi (e_0,e_1,e_2,e_3) prostoru $\mathbb{R}^4$ má tvar $\eta^{(3,1)} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$. Definujeme

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix},\ \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^2 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix},\ \gamma^3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \tag{8.74}$$

Všechny matice jsou reálné - jedná se tedy o reálnou reprezentaci $\mathrm{Cl}(3,1)$ na $\mathbb{R}^4$. Dá se ukázat, že se jedná o věrnou reprezentaci, tj. $\zeta : \mathrm{Cl}(3,1) \to \mathbb{R}^{4,4}$ je monomorfismus. Protože $\dim(\mathrm{Cl}(3,1)) = \dim(\mathbb{R}^{4,4}) = 16$, je to navíc izomorfismus, t.j. $\mathrm{Cl}(3,1) \cong \mathbb{R}^{4,4}$. ζ se nazývá **Majoranova reprezentace Cliffordovy algebry** $\mathrm{Cl}(3,1)$.

Příklad 8.4.3. Pro $(V,g) = (\mathbb{R}^4, \eta^{(1,3)})$ neexistuje reálná věrná reprezentace $\mathrm{Cl}(1,3)$ na $\mathbb{R}^4$, protože potom by nutně platilo $\mathrm{Cl}(1,3) \cong \mathbb{R}^{4,4} \cong \mathrm{Cl}(3,1)$, což se ví, že není pravda. Existuje ale věrná *komplexní* reprezentace na $\mathbb{C}^4$, kde při označení z předchozího příkladu

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix},\ \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \text{ pro } i \in \{1,2,3\}. \tag{8.75}$$

Této reprezentaci se říká **Diracova reprezentace Cliffordovy algebry** $\mathrm{Cl}(1,3)$.

Nyní se dostáváme ke kýženým veličinám pro fyzikální teorie obsahující fermiony.

Definice 8.4.4. Nechť (W, ζ) je spinorová reprezentace $\mathrm{Spin}(p,q)$. Potom $\Psi \in \Omega^0_\zeta(S(M), W)$ nazýváme **spinorovým polem**. Ekvivalentně, $\Psi \in \Gamma(S(M) \times_\zeta W)$.

Tvrzení 8.4.5. *Nechť $\sigma : U \to O^+(M)$ je lokální řez definovaný na souvislém a jednoduše souvislém $U \subseteq M$, neboli pravotočivé ortonormální pole repérů na U. Nechť $\hat{\sigma} : U \to S(M)$ je jeden ze dvou jeho zdvihů. Nechť (W, ζ) je spinorová reprezentace* $\mathrm{Spin}(p,q)$.

*Potom **lokální spinorové pole** definujeme vztahem*

$$\psi := \hat{\sigma}^*(\Psi) \in \Omega^0(U, W). \tag{8.76}$$

Nechť $\hat{\sigma}' : U \to S(M)$ je druhý ze zdvihů a $\psi' = \hat{\sigma}'^*(\Psi)$. Potom $\psi' = -\psi$.

Důkaz. Jelikož $\hat{\sigma}' = \hat{\sigma} \cdot (-1)$, kde $-1 \in \mathrm{Spin}(p,q)$, z obvyklých transformačních vlastností lokálních veličin typu ζ máme

$$\psi' = \zeta((-1)^{-1})\psi = \zeta(-1)\psi = -\zeta(1)\psi = -\psi. \tag{8.77}$$

Tím je důkaz hotový. ■

8.5 Diracův operátor, Diracovo pole

Připomeňme, že na $S(M)$ máme kanonickou n-tici vektorových polí $(\mathcal{E}_a)_{a=1}^n$. Nechť $(e_a)_{a=1}^n$ je standardní ortonormální báze v $(\mathbb{R}^{p+1}, \eta^{(p,q)})$.

Tvrzení 8.5.1. *Nechť (W, ζ) je spinorová reprezentace $\mathrm{Spin}(p,q)$. Nechť $\beta \in \Omega^k_\zeta(S(M), W)$ je horizontální forma typu ζ. Definujeme operátor $i_{\not{\mathcal{E}}}$ vztahem*

$$i_{\not{\mathcal{E}}}\beta := \gamma^a i_{\mathcal{E}_a}\beta, \tag{8.78}$$

kde $\gamma^a := \zeta(e^a)$. Potom $i_{\not{\mathcal{E}}}\beta$ je horizontální $(k-1)$-forma typu ζ.

Nechť $\hat{\sigma} : U \to S(M)$ je libovolný lokální řez. Nechť $\sigma := \varphi \circ \hat{\sigma} : U \to S^+(M)$ je odpovídající lokální řez definujíci pole pravotočivých ortonormálních repérů $(f_a)_{a=1}^n$ na U. Nechť $b := \hat{\sigma}^*(\beta)$ je odpovídající lokální forma. Potom

$$\hat{\sigma}^*(i_{\not{\mathcal{E}}}\beta) = \gamma^a i_{f_a} b. \tag{8.79}$$

Důkaz. Pro každé $x \in \mathfrak{spin}(p,q)$ dostáváme $i_{\#x}(i_{\not{\mathcal{E}}}\beta) = -i_{\not{\mathcal{E}}}(i_{\#x}\beta) = 0$ a tedy β je horizontální. Nechť $u \in \mathrm{Spin}(p,q)$ a označme $\mathbf{A} := \rho(u) \in \mathrm{SO}(p,q)$. Potom můžeme psát

$$R_u^*(i_{\not{\mathcal{E}}}\beta) = \gamma^a R_u^*(i_{\mathcal{E}_a}\beta) = \gamma^a i_{R_{u^{-1}*}(\mathcal{E}_a)} R_u^*(\beta) = \mathbf{A}^b_a \gamma^a i_{\mathcal{E}_b}(\zeta(u^{-1})\beta) = \mathbf{A}^b_a \gamma^a \zeta(u^{-1}) i_{\mathcal{E}_b}\beta, \tag{8.80}$$

kde jsme využili (8.62). S využitím (8.70) můžeme psát $\mathbf{A}^b_a \gamma^a = \zeta(u^{-1})\gamma^b\zeta(u)$. Dosazením

$$R_u^*(i_{\not{\mathcal{E}}}\beta) = \zeta(u^{-1})\gamma^b i_{\mathcal{E}_b}\beta = \zeta(u^{-1})(i_{\not{\mathcal{E}}}\beta). \tag{8.81}$$

To dokazuje, že $i_{\not{\mathcal{E}}}\beta$ je $(k-1)$-forma typu ζ. Zbývá ukázat vztah (8.79). Připomeňme, že pro každé $m \in U$ máme $\mathcal{E}_a|_{\hat{\sigma}(m)} = f^h_a|_{\hat{\sigma}(m)} = \hat{\sigma}_*(f_a|_m) +$ vertikální vektor. Protože β je podle předpokladu *horizontální forma*, můžeme pro všechny $X_1, \dots, X_{k-1} \in T_m M$ psát

$$
\begin{aligned}
[\hat{\sigma}^*(i_{\not{\mathcal{E}}}\beta)]|_m(X_1,\dots,X_k) &= [i_{\not{\mathcal{E}}}\beta]|_{\hat{\sigma}(m)}(\hat{\sigma}_*(X_1),\dots,\hat{\sigma}_*(X_{k-1})) \\
&= \gamma^a \beta|_{\hat{\sigma}(m)}(\mathcal{E}_a|_{\hat{\sigma}(m)}, \hat{\sigma}_*(X_1),\dots,\hat{\sigma}_*(X_{k-1})) \\
&= \gamma^a \beta|_{\hat{\sigma}(m)}(\hat{\sigma}_*(f_a|_m), \hat{\sigma}_*(X_1),\dots,\hat{\sigma}_*(X_{k-1})) \\
&= \gamma^a a|_m(f_a|_m, X_1,\dots,X_{k-1}) \\
&= [\gamma^a i_{f_m} b]|_m(X_1,\dots,X_{k-1}).
\end{aligned} \tag{8.82}
$$

Což bylo dokázáti. ∎

Tvrzení 8.5.2. *Nechť (W,ζ) je spinorová reprezentace $\mathrm{Spin}(p,q)$. Nechť $\beta \in \Omega^k_\zeta(S(M),W)$ je horizontální forma typu ζ. Nechť $\omega' \in \Omega^1(S(M),\mathfrak{pin}(p,q))$ je spinová konexe. Definujeme operátor $\not{D}$ vztahem*

$$\not{D}\beta := (i_{\not{\mathcal{E}}} \circ D)(\beta), \tag{8.83}$$

kde D je vnější kovariantní derivace odpovídající ω'. Potom $\not{D}\beta$ je opět horizontální k-forma typu ζ.

Nechť $\hat{\sigma} : U \to S(M)$ je libovolný lokální řez. Nechť $\sigma := \varphi \circ \hat{\sigma} : U \to S^+(M)$ je odpovídající lokální řez definujíci pole pravotočivých ortonormálních repérů $(f_a)_{a=1}^n$ na U. Nechť $b := \hat{\sigma}^*(\beta)$ je odpovídající lokální forma. Potom

$$\hat{\sigma}^*(\not{D}\beta) = \not{\mathcal{D}}b \equiv \gamma^a i_{f_a}(\mathcal{D}b). \tag{8.84}$$

*$\not{D}$ se nazývá **Diracův operátor**.*

Důkaz. Všechno plyne triviálně z předchozího tvrzení a vlastností vnější kovariantní derivace. ∎

Z hlediska fyziky nás pochopitelně nejvíce zajímají transformační vlastnosti lokální verze Diracova operátoru $\not{\mathcal{D}}$. Zaveďme si následující notaci. Nechť $\hat{\sigma}' : U' \to S(M)$ je jiný lokální řez. Příslušnou kalibrační transformaci označme jako $\mathbf{u} : U \cap U' \to \mathrm{Spin}(p,q)$.

Tvrzení 8.5.3. *Nechť $\hat{\sigma} : U \to S(M)$ a $\hat{\sigma}' : U' \to S(M)$ jsou dva řezy spjaté kalibrační transformací $\mathbf{u} : U \cap U' \to \mathrm{Spin}(p,q)$. Potom na $U \cap U'$ platí vztah*

$$\not{\mathcal{D}}' = \zeta(\mathbf{u}^{-1})\not{\mathcal{D}}\zeta(\mathbf{u}). \tag{8.85}$$

Zejména pokud $\hat{\sigma} : U \to S(M)$ a $\hat{\sigma}' : U \to S(M)$ zadávají stejné pole ortonormálních pravotočivých repérů $\sigma = \varphi \circ \hat{\sigma} = \varphi \circ \hat{\sigma}'$ na U, máme $\not{\mathcal{D}} = \not{\mathcal{D}}'$.

Důkaz. Nechť $\mu \in \Omega^k_\zeta(S(M),W)$ je horizontální forma typu ζ. Označme $m := \hat{\sigma}^*(\mu)$ a $m' = \hat{\sigma}'^*(\mu)$. Z již dokázaných vlastností vnějších kovariantních derivací víme, že $\mathcal{D}'m' = \zeta(\mathbf{u}^{-1})\mathcal{D}m$. Definujme funkci $\mathbf{A} := \rho \circ \mathbf{u} : U \cap U' \to \mathrm{SO}(p,q)$. Nechť $(f_a)_{a=1}^n$ a $(f'_a)_{a=1}^n$ jsou repérová pole odpovídající $\hat{\sigma}$ a $\hat{\sigma}'$. Na $U \cap U'$ platí $f'_b = \mathbf{A}^a_b f_b$. Odtud potom

$$
\begin{aligned}
\not{\mathcal{D}}'b' = \gamma^a i_{f'_a}(\mathcal{D}'b') &= \mathbf{A}^b_a \gamma^a i_{f_b}(\zeta(\mathbf{u}^{-1})\mathcal{D}b) = (\zeta(\mathbf{u}^{-1})\gamma^b\zeta(\mathbf{u}))\zeta(\mathbf{u}^{-1}) i_{f_b}\mathcal{D}b \\
&= \zeta(\mathbf{u}^{-1})(\gamma^b i_{f_b}\mathcal{D}b) = \zeta(\mathbf{u}^{-1})(\not{\mathcal{D}}b).
\end{aligned} \tag{8.86}
$$

S přihlédnutím k faktu, že na $U \cap U'$ platí $b' = \zeta(\mathbf{u}^{-1})b$, dostaneme snadno relaci (8.85). Pokud $\hat{\sigma}$ a $\hat{\sigma}'$ zadávají stejné pole ortonormálních pravotočivých repérů, je $\mathbf{u}$ na každé komponentě souvislosti U rovna ± 1. Protože $\zeta(\pm 1) = \pm 1_W$, případné vlastnosti, plyne tvrzení z (8.85). ∎

Pojďme si nyní nalézt explicitní vyjádření Diracova operátoru na lokálních spinorových polích ψ. Budeme předpokládat následující zadaná data:

(i) spinová konexe ω', odpovídající jednoznačně metrické afinní konexi na M vzhledem ke g;

(ii) spinorová reprezentace (W, ζ) grupy $\mathrm{Spin}(p, q)$;

(iii) volba kalibrace $\hat{\sigma} : U \to S(M)$ indukující pole pravotočivých ortonormálních repérů $(f_a)_{a=1}^n$ na U odpovídající řezu $\sigma := \varphi \circ \hat{\sigma} : U \to O^+(M)$;

(iv) souřadnice $(x^\mu)_{\mu=1}^n$ na okolí U;

(v) bázi $(E_\alpha)_{\alpha=1}^{\dim(W)}$ reprezentačního prostoru W.

K výpočtu budeme potřebovat ještě následující pozorování. Jak vypadá přidružená reprezentace (W, ζ') algebry $\mathfrak{pin}(p, q)$? Protože (W, ζ) pochází z reprezentace ζ asociativní algebry $\mathrm{Cl}(p, q)$, dá se snadno rozmyslet, že ζ' je indukovaná restrikcí ζ na $\mathfrak{pin}(p, q) \subseteq \mathrm{Cl}(p, q)$.

Vstutku, pro každé $x \in \mathfrak{pin}(p, q)$ máme

$$\begin{aligned}\zeta'(x) = {} & \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \zeta(\exp(tx)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \zeta\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \underbrace{x \cdots x}_{k \text{ krát}}\Big) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \underbrace{\zeta(x) \cdots \zeta(x)}_{k \text{ krát}} \\ = {} & \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(t\zeta(x)) = \zeta(x).\end{aligned} \tag{8.87}$$

Že homomorfismus algeber ζ může vlézt i dovnitř nekonečné sumy vyžaduje nějakou práci s normami, kterou si rádi odpustíme.

Nechť $\Psi \in \Omega^0_\zeta(S(M), W)$ je spinorové pole a $\sigma = \hat{\sigma}^*(\Psi)$ příslušná lokální verze. Můžeme psát $\psi = \psi^\alpha E_\alpha$. Pro každé $a \in \{1, \dots, n\}$ můžeme psát $f_a = f_a^\mu \partial_\mu$ pro funkce $f_a^\mu \in C^\infty(U)$, kterým se také někdy říká *vielbeinová pole*. Operátory $\gamma^a \in \mathrm{End}(W)$ rovněž můžeme psát vzhledem k bázi, tj. $\gamma^a E_\alpha =: \gamma^{a\beta}_\alpha E_\beta$.

Připomeňme, že lokální forma konexe má tvar $\hat{\omega}' = \frac{1}{2}(\Gamma_{bca} f^a) m^{bc}$, kde $\Gamma_{abc} = \eta_{ak} \Gamma^k_{bc}$ se získají z Christoffelových symbolů konexe ∇ vzhledem k repérovému poli $(f_a)_{a=1}^n$. Z využitím rovnice (6.22) tedy dostáváme výraz

$$\begin{aligned}\not{D}\psi &= \gamma^a i_{f_a}(d\psi + \zeta(\hat{\omega})\psi) = \gamma^a (f_a^\mu \partial_\mu \psi + \frac{1}{2} \Gamma_{bca} \zeta(m^{bc}) \psi) \\ &= \gamma^a (f_a^\mu \partial_\mu \psi + \frac{1}{8} \Gamma_{bca} [\gamma^b, \gamma^c] \psi)\end{aligned} \tag{8.88}$$

Vzhledem k tomu, že $\Gamma_{bca} = -\Gamma_{cba}$, můžeme výraz psát o něco jednodušeji jako

$$\not{D}\psi = \gamma^a (f_a^\mu \partial_\mu \psi + \frac{1}{4} \Gamma_{bca} \gamma^b \gamma^c \psi). \tag{8.89}$$

Toto je správná forma (lokálního) Diracova operátoru v prostorech s netriviální metrikou g s použitím obecné metrické konexe ∇.

Příklad 8.5.4. Pro $M = \mathbb{R}^4$ a plochou Minkowského metriku $\eta^{(1,3)}$.

K dispozici máme globální pole ortonormálních pravotočivých repérů $(\frac{\partial}{\partial x^\mu})_{\mu=0}^3$. To nám zadává globální trivializaci $O^+(M) \cong M \times \mathrm{SO}(1, 3)$. Snadno tak můžeme sestrojit prolongaci

$O^+(M)$ v podobě triviální fibrace $S(M) = M \times \mathrm{Spin}(1,3)$, kde $\varphi : S(M) \to O^+(M)$ má explicitní tvar $\varphi(m,u) := \partial|_m \cdot \rho(u)$, kde $\partial|_m = (\partial_0|_m, \partial_1|_m, \partial_2|_m, \partial_3|_m)$.

Potom $\hat{\sigma}(m) := (m, 1)$ definuje globální řez $S(M)$ a $\sigma := \varphi \circ \hat{\sigma}$ odpovídá právě poli repérů $(\partial_\mu)_{\mu=0}^3$. Druhý řez odpovídající tomuto poli repérů je $\hat{\sigma}'(m) = (m, -1)$. Za metrickou afinní konexi ∇ můžeme zvolit Levi-Civitovu konexi odpovídající $\eta^{(1,3)}$. Taková má ale triviální Christoffelovy symboly vzhledem k souřadnicovému poli repérů $(\partial_\mu)_{\mu=0}^3$.

Dostáváme tedy očekávanou formulku pro Diracův operátor: $\not{D}\psi = \gamma^\mu \partial_\mu \psi$.

Nyní je již snadné vymyslet vhodný účinek pro spinorová pole ψ.

Tvrzení 8.5.5. *Nechť (W, ζ) je komplexní spinorová reprezentace* $\mathrm{Spin}(p,q)$ *na W. Nechť $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ je ζ-invariantní pseudoskalární součin na W. Označme g metriku signatury (p,q) definující fibraci $O^+(M)$ a $S(M)$.*

Nechť $\Psi_1, \Psi_2 \in \Omega^0_\zeta(S(M), W)$ jsou spinorová pole Zvolíme-li lokální kalibraci $\hat{\sigma} : U \to S(M)$, můžeme definovat $\psi_1 := \hat{\sigma}^*(\Psi_1)$ a $\psi_2 := \hat{\sigma}^*(\Psi_2)$ a funkci

$$(\!(\psi_1, \psi_2)\!)_W := \psi_1^\alpha \psi_2^\beta \langle E_\alpha, E_\beta \rangle_W, \tag{8.90}$$

kde $(E_\alpha)_{\alpha=1}^n$ je libovolná báze W. Potom $(\!(\psi_1, \psi_2)\!)_W$ je kalibračně invariantní a tedy definuje globální funkci, kterou můžeme vyintegrovat a dostat pseudoskalární součin:

$$\langle\!\langle \psi_1, \psi_2 \rangle\!\rangle_W := \int_M (\!(\psi_1, \psi_2)\!)_W \cdot \omega_g. \tag{8.91}$$

Důkaz. Je-li $\hat{\sigma}' : U \to \mathrm{Spin}(p,q)$ jiná volba kalibrace, máme kalibrační transformaci $\mathbf{u} : U \cap U' \to \mathrm{Spin}(p,q)$ a vztahy $\psi_1' = \zeta(\mathbf{u}^{-1})\psi_1$ a $\psi_2' = \zeta(\mathbf{u}^{-1})\psi_2$. Protože je $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ podle předpokladu ζ-invariantní, snadno vidíme, že $(\!(\psi_1, \psi_2)\!)_W(m) = (\!(\psi_1', \psi_2')\!)_W(m)$ Pro všechny $m \in U \cap U'$. ■

Příklad 8.5.6. Uvažujme $W = \mathbb{C}^4$ a Diracovu spinorovou reprezentaci $\mathrm{Spin}(1,3)$ z příkladu (8.4.3). Potom na $\mathbb{C}^4$ existuje ζ-invariantní skalární součin definovaný pro $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{C}^4$ vztahem

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_W := \bar{\psi}_1 \psi_2 = \psi_1^\dagger \gamma^0 \psi_2. \tag{8.92}$$

Pro hermitovské sdružení γ-matic platí relace $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$. Nechť $u \in \mathbb{R}^4$ je libovolný vektor normovaný na ± 1, t.j. $\eta^{(1,3)}(u,u) = \pm 1$. Z definice grupy $\mathrm{Spin}(1,3)$ stačí ukázat, že $\langle \zeta(u)\psi_1, \zeta(u)\psi_2 \rangle_W = \pm \langle \psi_1, \psi_2 \rangle$. Píšeme-li $u = u_a e^a$, máme

$$\begin{aligned}\langle \zeta(u)\psi_1, \zeta(u)\psi_2 \rangle_W &= u_a u_b \psi_1^\dagger (\gamma^a)^\dagger \gamma_0 \gamma^b \psi_2 = u_a u_b \psi_1^\dagger \gamma^0 \gamma^a (\gamma^0)^2 \gamma^b \psi_2 \\ &= u_a u_b \psi_1^\dagger \gamma^0 \gamma^a \gamma^b \psi_2.\end{aligned} \tag{8.93}$$

S použitím standardních relací mezi γ-maticemi můžeme psát

$$\gamma^a \gamma^b = \frac{1}{2}\{\gamma^a, \gamma^b\} + \frac{1}{2}[\gamma^a, \gamma^b] = \eta^{ab} 1_W + \frac{1}{2}[\gamma^a, \gamma^b]. \tag{8.94}$$

Protože však vysčítáváme přes výraz $u^a u^b$ symetrický v indexech a a b, můžeme na komutátor zapomenout a dostáváme

$$\langle \zeta(u)\psi_1, \zeta(u)\psi_2 \rangle_W = u_a u_b \eta^{ab} \psi_1^\dagger \gamma^0 \psi_2 = \eta^{(1,3)}(u,u) \cdot \langle \psi_1, \psi_2 \rangle_W = \pm \langle \psi_1, \psi_2 \rangle_W. \tag{8.95}$$

Obecný element $\mathrm{Spin}(p,q)$ je součin $u_1 \cdots u_k$, kde $\eta^{(1,3)}(u_i, u_i) = \pm 1$ a k je *sudé číslo*.

Literatura

[1] M. Fecko, *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov.* IRIS, 2008.

[2] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, vol. 2. Wiley New York, 1969.

[3] J. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2012.

[4] K. C. Mackenzie, *General theory of Lie groupoids and Lie algebroids*, vol. 213 of *London Mathematical Society Lecture Note Series.* Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[5] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics.* CRC Press, 2003.