02ALT Algebraická topologie

Jan Vysoký

Obsah

Úvod

Toto jsou oficiální poznámky k přednášce vyučované na FJFI ČVUT v Praze.

Studium moderní matematické a teoretické fyziky klade na posluchače neustále se zvyšující nároky na znalost matematického aparátu. Hlavním úkolem tohoto kurzu je seznámit studenty se základními metodami užívanými v algebraické topologii, zejména s elementy teorie kategorií, homotopií, homologické algebry a kohomologie. Důležitým cílem je rozšíření matematického jazyka o pojmy vyskytující se univerzálně napříč disciplínami jako jsou diferenciální geometrie a abstraktní algebra.

Kapitoly o fundamentální grupě a homologii jsou založeny téměř výhradně na knížce A. Hatchera [4]. Její aktualizovaná verze je k dispozici přímo na jeho webových stránkách na adrese

`https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf`

Kapitola o kohomologiích je výběrem ze slavné knihy [1]. Část o kohomologiích Lieových algeber lze včetně všech detailů nalézt v [3]. Více o Čechových kohomologiích předsvazků nalezne čtenář v poznámkách [2].

Děkuji studentům za užitečné připomínky.

Kapitola 1

Fundamentální grupa

V této kapitole si představíme jeden ze základních nástrojů algebraické topologie, tzv. fundamentální grupu. Víte, že topologický prostor je jednoduše souvislý, jde-li každou spojitou uzavřenou křivku spojitě stáhnout do bodu. Ukazuje se, že dva homeomorfní (tedy z hlediska topologie identické) topologické prostory vždy sdílí tuto vlastnost. Co když jednoduše souvislé nejsou? Existuje nějaká podrobnější charakteristika toho „nebýt jednoduše souvislý“ společná pro všechny reprezentanty jedné třídy homeomorfních prostorů?

1.1 Relace homotopie

Nejprve je dobré si pečlivě zavést koncept spojité deformace nejpřirozenějšího topologického objektu - spojitých zobrazení. Další modifikací této definice dostaneme potřebné nástroje. Pokud nebude řečeno jinak, I vždy označuje jednotkový *uzavřený* interval $I = [0, 1]$.

Definice 1.1.1. Nechť X a Y jsou dva topologické prostory, a nechť $f, g : X \to Y$ jsou spojitá zobrazení. Řekneme, že f a g jsou **homotopická**, pokud existuje spojité zobrazení $H : X \times I \to Y$ takové, že $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ pro všechny $x \in X$. Zobrazení H se nazývá **homotopie** zobrazení f a g. Píšeme $f \simeq g$.

Jelikož je H spojité, pro každé $t \in I$ nám předpis $f_t(x) = H(x, t)$ definuje spojité zobrazení $f_t : X \to Y$, takové že $f_0 = f$ a $f_1 = g$. Dvě homotopická zobrazení lze tedy „spojitě“ transformovat jedno na druhé změnou parametru t, přičemž každý mezikrok je spojité zobrazení.

Před důkazem klíčové vlastnosti pojmu homotopie si vyslovíme jedno technické lemma.

Lemma 1.1.2. *Nechť X, Y jsou libovolné topologické prostory a $C_1, C_2 \subseteq X$ dvě uzavřené množiny. Nechť $f : C_1 \cup C_2 \to Y$ je libovolné zobrazení. Potom f je spojité, právě tehdy když jeho restrikce na C_1 i C_2 je spojité zobrazení.*

Důkaz. Nechť je f spojité zobrazení. Ukážeme, že jeho restrikce $f_1 : C_1 \to Y$ je spojitá. Nechť $V \subseteq Y$ je otevřená množina. Z definice je $f^{-1}(V) \subseteq C_1 \cup C_2$ otevřená. Existuje tedy otevřená množina $U \subseteq X$, že $f^{-1}(V) = (C_1 \cup C_2) \cap U$. To ale můžeme přepsat jako

$$f^{-1}(V) = (C_1 \cup C_2) \cap U = (C_1 \cap U) \cup (C_2 \cap U). \tag{1.1}$$

Máme ukázat, že $f_1^{-1}(V)$ je otevřená. Zřejmě $f_1^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap C_1$. Z předchozího potom s využitím standardních vlastností sjednocení a průniků dostáváme jednoduše

$$f_1^{-1}(V) = C_1 \cap U \tag{1.2}$$

To je otevřená množina v C_1 a tedy $f_1 : C_1 \to Y$ je spojité. Důkaz pro restrikci na C_2 je analogický. Vidíme, že pro tento směr není podstatné, že C_1 a C_2 jsou uzavřené.

Pro opačný směr, ukážeme, že vzor každé uzavřené množiny vzhledem k f je uzavřená množina. Nechť $V \subseteq Y$ je libovolná uzavřená množina. Nechť f_1 a f_2 označuje příslušné restrikce. Z předpokladu je množina $U_1 = f_1^{-1}(V) \subseteq C_1$ uzavřená v C_1. Ale C_1 je uzavřená a tedy je U_1 uzavřená i v X. Ze stejného důvodu je $U_2 = f_2^{-1}(V) \subseteq C_2$ uzavřená v X. Potom ale

$$f^{-1}(V) = U_1 \cup U_2 \subseteq C_1 \cup C_2 \tag{1.3}$$

je množina uzavřená v X, speciálně tedy i v $C_1 \cup C_2$. ∎

Poznámka 1.1.3. Analogické lemma platí pro zobrazení definované na sjednocení dvou otevřených podmnožin.

Toto lemma nám dává jednoduchou možnost jak vyrábět spojitá zobrazení. Můžeme vzít dvě libovolná spojitá zobrazení $f_1 : C_1 \to Y$ a $f_2 : C_2 \to Y$. Tato jsou restrikcí unikátního zobrazení $f : C_1 \cup C_2 \to Y$, právě tehdy když se f_1 a f_2 shodují na průniku $C_1 \cap C_2$. Z předchozího tvrzení plyne, že takové f je automaticky spojité.

Tvrzení 1.1.4. *Nechť X, Y jsou dva topologické prostory. Symbolem $\mathbf{Top}(X,Y)$ označme prostor všech spojitých zobrazení. Potom „být homotopická" je relací ekvivalence na $\mathbf{Top}(X,Y)$, příslušné třídy ekvivalence se nazývají **homotopické třídy**.*

Důkaz. Musíme ukázat, že relace $f \simeq g$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

1. (**Reflexivita**) $f \simeq f$ pro každé $f \in \mathbf{Top}(X,Y)$: Zobrazení $H(x,t) = f(x)$ je zjevně spojité v obou parametrech a definuje homotopii f s f.
2. (**Symetrie**) $f \simeq g \Rightarrow g \simeq f$: Nechť H je homotopie f a g, tj. $H(x,0) = f(x)$ a $H(x,1) = g(x)$. Můžeme definovat $H'(x,t) = H(x, 1-t)$. Zjevně H' je homotopie g a f, tj. $g \simeq f$.
3. (**Tranzitivita**) $(f \simeq g) \wedge (g \simeq h) \Rightarrow f \simeq h$: Nechť H_1 je homotopie f a g, H_2 homotopie g a h. Definujeme $H : X \times I \to Y$ vztahem

$$H(x,t) = \begin{cases} H_1(x, 2t) & \text{když } (x,t) \in X \times [0, \frac{1}{2}], \\ H_2(x, 2t-1) & \text{když } (x,t) \in X \times [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \tag{1.4}$$

Zjevně $H(x,0) = H_1(x,0) = f(x)$ a $H(x,1) = H_2(x,1) = h(x)$. Spojitost plyne z poznámky pod Lemma 1.1.2, protože H je definováno pomocí dvou spojitých zobrazení $H_1(x,2t)$ na $C_1 = X \times [0, \frac{1}{2}]$ a $H_2(x, 2t-1)$ na $C_2 = X \times [\frac{1}{2}, 1]$, které splývají na $C_1 \cap C_2 = X \times \{\frac{1}{2}\}$.

A máme dokázáno. ∎

Někdy je třeba být více restriktivní a omezit množinu přípustných homotopií, například chceme-li aby homotopie dvou funkcí splývajících na nějaké podmnožině $A \subseteq X$ byla pomocí funkcí které rovněž všechny splývají na A. To vede k následující definici:

Definice 1.1.5. Nechť $f, g \in \mathbf{Top}(X, Y)$. Nechť $A \subseteq X$ je libovolná podmnožina. Řekneme, že f a g jsou **homotopické relativně k** A existuje-li jejich homotopie $H : X \times I \to Y$, taková, že pro všechny $a \in A$ je $H(a, t)$ funkce nezávislá na t. Označujeme $f \simeq_A g$.

Poznámka 1.1.6. Z důkazu předchozího tvrzení je zřejmé, že homotopie relativní vzhledem k A je opět relace ekvivalence, která má pro $A \neq \emptyset$ více tříd ekvivalence než homotopie absolutní. Zejména platí, že když je $f \simeq_A g$, tak pro všechny $a \in A$ musí platit $f(a) = H(a, 0) = H(a, 1) = g(a)$, tj. dvě zobrazení homotopická relativně k A musí na A splývat.

Na závěr této sekce si připomeňme dvě obvyklé definice, které lze pomocí (relativní) homotopie formulovat velmi efektivně.

Definice 1.1.7. Nechť X a Y jsou libovolné topologické prostory. Zobrazení $f \in \mathbf{Top}(X, Y)$ se nazývá **homotopická ekvivalence**, existuje-li zobrazení $g \in \mathbf{Top}(Y, X)$, takové že

$$g \circ f \simeq \mathbf{1}_X, \quad f \circ g \simeq \mathbf{1}_Y. \tag{1.5}$$

Existuje-li mezi dvěma prostory nějaká homotopická ekvivalence, řekneme, že mají **stejný homotopický typ**.

Příklad 1.1.8. Má-li topologický prostor X stejný homotopický typ jako bod $\{*\}$, řekneme, že X je **stáhnutelný do bodu** (nebo také kontraktibilní).

Ukažme si, že toto pojmenování má své opodstatnění. Podle definice tedy existuje homotopická ekvivalence $f : X \to \{*\}$. Zřejmě existuje jedno jediné spojité zobrazení $f : X \to \{*\}$. Příslušné zobrazení $g : \{*\} \to X$ můžeme ztotožnit s výběrem fixního bodu $x_0 = g(*) \in X$. Podmínka $f \circ g \simeq \mathbf{1}_{\{*\}}$ je triviálně splněná pro každé X i volbu g. Uvažujme tedy druhou z podmínek $g \circ f \simeq \mathbf{1}_X$. Z definice existuje spojité zobrazení $H : X \times I \to X$, které splňuje:

$$H(0, x) = \mathbf{1}_X(x) = x, \quad H(1, x) = (g \circ f)(x) = g(*) = x_0. \tag{1.6}$$

Pro každé $t \in I$ tedy dostáváme zobrazení $f_t \in \mathbf{Top}(X, X)$, kde f_0 je identita na X a f_1 zobrazuje celé X do bodu x_0. Na $t \mapsto f_t(x)$ se také můžeme dívat jako na spojitou křivku spojující x s x_0.

Tvrzení 1.1.9. *Mít stejný homotopický typ je relace ekvivalence.*

Důkaz. Identita $\mathbf{1}_X : X \to X$ je zjevně homotopická ekvivalence, a tedy relace je reflexivní. Pokud $f \in \mathbf{Top}(X, Y)$ je homotopická ekvivalence, máme příslušné $g \in \operatorname{Hom}(Y, X)$. Je zjevné, že g je homotopická ekvivalence. To ukazuje, že relace je symetrická.

Konečně, nechť $f \in \mathbf{Top}(X, Y)$ a $f' \in \mathbf{Top}(Y, Z)$ jsou homotopické ekvivalence. Ukážeme, že $f' \circ f \in \mathbf{Top}(X, Z)$ je homotopická ekvivalence. Z definice máme $g \in \mathbf{Top}(Y, X)$ a $g' \in \mathbf{Top}(Z, X)$, že $g \circ f \simeq \mathbf{1}_X$, $f \circ g \simeq \mathbf{1}_Y$, $g' \circ f' \simeq \mathbf{1}_Y$ a $f' \circ g' \simeq \mathbf{1}_Z$.

Ukažme si nejprve následující obecnější trvzení. Nechť $f, g :\in \mathbf{Top}(X, Y)$. Potom pro každé $h \in \mathbf{Top}(Y, Z)$ a $k \in \mathbf{Top}(S, X)$ platí

$$f \simeq g \Rightarrow h \circ f \simeq h \circ g, \quad f \simeq g \Rightarrow f \circ k \simeq g \circ k. \tag{1.7}$$

Nechť $H : X \times I \to Y$ je homotopie f a g. Snadno se ověří, že $H' := h \circ H$ je homotopie $h \circ f$ a $h \circ g$. Podobně, zobrazení $H''(s, t) := H(k(s), t)$ definuje homotopii $f \circ k$ a $g \circ k$.

Nyní se již můžeme vrátit k dokazovanému tvrzení a máme

$$(f' \circ f) \circ (g \circ g') = f' \circ (f \circ g) \circ g' \simeq f' \circ \mathbf{1}_Y \circ g' = f' \circ g' \simeq \mathbf{1}_Z. \tag{1.8}$$

Druhá z požadovaných identit se ukáže úplně stejně. Tím jsme dokázali tranzitivitu. ■

Definice 1.1.10. Nechť $A \subseteq X$ je podmnožina topologického prostoru X. Řekneme, že A je **deformační retrakt** X, pokud existuje $r \in \mathbf{Top}(X, X)$, takové $r(X) = A$ a platí $1_X \simeq_A r$.

Z poznámky 1.1.6 plyne, že nutně $r(a) = 1_X(a) = a$ pro všechny $a \in A$. Takové r se nazývá **retrakce** X na A. Homotopie relativní k A nám ale navíc dává množinu zobrazení $r_t \in \mathbf{Top}(X, X)$, kde $r_0 = \mathbf{1}_X$, $r_1 = r$ a každé ze zobrazení splňuje $r_t(a) = a$ pro každé $a \in A$.

Tvrzení 1.1.11. *Je-li A deformační retrakt na X, mají X a A stejný homotopický typ.*

Důkaz. r můžeme díky podmínce $r(X) = A$ považovat za spojité zobrazení $r : X \to A$. Nechť $i : A \to X$ je inkluze podmnožiny. Z definice podmnožinové topologie $i \in \mathbf{Top}(A, X)$. Ukažme, že r je homotopická ekvivalence. Z předchozí poznámky $r \circ i = \mathbf{1}_A$. Ukážeme, že $i \circ r \simeq \mathbf{1}_X$. Z definice ale máme homotopii $H : X \times I \to X$, která splňuje $H(\cdot, 0) = \mathbf{1}_X$ a $H(\cdot, 1) = i \circ r$. ■

Příklad 1.1.12. $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ je deformační retrakcí $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Retrakci r definujeme jednoduše jako $r(x) := \|x\|^{-1}x$, což je zjevně spojité zobrazení z X to X splňující $r(X) = A$. Třídu zobrazení $r_t : X \to X$ sestrojíme následovně. Můžeme chtít, aby $r_t(x)$ byl bod na spojnici mezi $r(x) \in \mathbb{S}^{n-1}$ a x. To jsou ale přesně konvexní lineární kombinace těchto bodů. Tedy navrhujeme

$$r_t(x) := tr(x) + (1 - t)x. \tag{1.9}$$

To je zjevně spojité zobrazení, $r_0 = \mathbf{1}_X$, $r_1 = r$ a pro všechny $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ platí $r(a) = a$ a proto $r_t(a) = tr(a) + (1 - t)a = ta + (1 - t)a = a$, jak jsme požadovali.

Příklad 1.1.13. Nechť $f \in \mathbf{Top}(X, Y)$. Uvažujme topologický prostor

$$M_f := \{(X \times I) \sqcup Y\}/\sim, \tag{1.10}$$

kde $(x, 0) \sim f(x)$. Co se tím míní? Vezmeme dvě množiny $X \times I$ a Y a ztotožníme každý bod $(x, 0)$ z první s $f(x)$ z druhé. Lze si představovat jako „přilepení“.

Jak se na takovém prostoru zavádí topologie? Máme přirozené „faktorové zobrazení“ $q : (X \times I) \sqcup Y \to M_f$, které každému bodu z původních dvou množin přiřadí odpovídající bod v slepeném prostoru. q není injektivní, protože $(x, 0) \in X \times I$ a $f(x) \in Y$ zobrazí na stejný bod. Řekneme, že $U \in M_f$ je otevřená, pokud $q^{-1}(U)$ je otevřená v $(X \times I) \sqcup Y$.

M_f s touto topologií se nazývá **zobrazovací válec** f. Ukažme, $Y \subseteq M_f$ je deformační retrakt M_f. Pro každé $t \in I$ musíme sestrojit $r_t : M_f \to M_f$. Pro každé $t \in [0, 1]$ sestrojíme spojité $\hat{r}_t : (X \times I) \sqcup Y \to M_f$ vztahem

$$\hat{r}_t(x, s) := (x, (1 - t) \cdot s), \quad \hat{r}_t(y) := y. \tag{1.11}$$

Snadno se ověří, že potom existuje jednoznačné zobrazení $r_t : M_f \to M_f$ takové, $r_t \circ q = \hat{r}_t$. Takové zobrazení je z definice topologie vždycky spojité. Zjevně $r_1 = \mathbf{1}_{M_f}$. Definujeme $r := r_0$. Také $r_t(y) = y$ pro všechny $y \in Y$.

Dá se ukázat, že podmnožina $X \times \{1\} \cong X$ je deformační retrakt M_f, právě tehdy když $f : X \to Y$ je homotopická ekvivalence.

1.2 Fundamentální grupa

Nyní se specializujeme na spojitá zobrazení $\mathbf{Top}(I,X)$ pro fixní topologický prostor X. Každým jeho elementem je spojité zobrazení $f : I \to X$, kterému říkáme **spojitá křivka v prostoru** X. Na prostoru $\mathbf{Top}(I,X)$ máme dle Tvrzení 1.1.4 relaci ekvivalence $\simeq$ jejíž třídy jsou homotopické křivky. Zvolíme-li si podmnožinu $A = \{0,1\} \subset I$, můžeme uvažovat homotopii relativní vzhledem k A. To je dle poznámky 1.1.6 též relace ekvivalence.

Shrňme si, co nám dává informace $f \simeq_A g$ pro $f,g \in \mathbf{Top}(I,X)$. Pro každé $t \in I$ dostáváme křivku $f_t \in \mathbf{Top}(I,X)$, takovou že $f_0(x) = f(x)$, $f_1(x) = g(x)$. Relativita vůči $A = \{0,1\}$ zaručí, že $f_t(0) \equiv f(0) = g(0)$ a $f_t(1) \equiv f(1) = g(1)$, tedy že všechny zúčastněné křivky *začínají i končí ve stejném bodě*.

Definice 1.2.1. Pokud pro $f,g \in \mathbf{Top}(I,X)$ platí $f \simeq_A g$, řekneme, že příslušná homotopie je **homotopie křivek s pevnými konci**. V následujícím textu budeme uvažovat *výhradně* tento typ homotopie a psát pouze $f \simeq g$ bez spodního indexu A.

Je zjevné, že dvě křivky nemůžou být homotopické s pevnými konci, pokud jejich počáteční a koncový bod nesplývají. Třídu ekvivalence dané křivky f budeme označovat $[f]$ a nazývat **třídou homotopie** křivky f. Jinými slovy $[f] = [f']$, právě tehdy když $f \simeq f'$. Je třeba si uvědomit, že pod slovem křivka se vždy myslí spojité zobrazení $f \in \mathbf{Top}(I,X)$, nikoliv pouze obraz (stopa) $f(I) \subseteq X$. Intuice nám ale říká, že pojem homotopie by měl být do jisté míry nezávislý na konkrétní parametrizaci křivky. Přesné tvrzení nám poskytuje následující lemma:

Lemma 1.2.2. *Nechť $f \in \mathbf{Top}(I,X)$.* ***Reparametrizací křivky*** *f rozumíme křivku $f \circ \varphi$, kde $\varphi : I \to I$ je libovolné spojité zobrazení splňující $\varphi(0) = 0$ a $\varphi(1) = 1$. Potom platí $[f] = [f \circ \varphi]$, tedy reparametrizace nemění třídu homotopie.*

Důkaz. Pro každé $(s,t) \in I \times I$ definujeme hledanou homotopii jako

$$H(s,t) = f((1-t)\varphi(s) + ts). \tag{1.12}$$

Zřejmě je o spojité zobrazení, platí $H(s,0) = f(\varphi(s))$, $H(s,1) = f(s)$, konvexnost intervalu I zaručí, že $(1-t)\varphi(s) + ts \in I$, a homotopie fixuje koncové body protože

$$H(0,t) = f((1-t)\varphi(0) + t \cdot 0) = f(0), \quad H(1,t) = f((1-t)\varphi(1) + t \cdot 1) = f(1). \tag{1.13}$$

Zjišťujeme tedy, že $f \simeq f \circ \varphi$, jak bylo dokázati. ■

Definice 1.2.3. Nechť $f,g \in \mathbf{Top}(I,X)$ jsou dvě křivky takové, že $f(1) = g(0)$. **Napojením křivek** f a g myslíme křivku $f * g$ definovanou vztahem

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ g(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \tag{1.14}$$

Z poznámky pod Lemma 1.1.2 je $f*g$ spojitá křivka, která splňuje $(f*g)(0) = f(0)$ a $(f*g)(1) = g(1)$. Intuice: v první půlce I projedeme f, v druhé půlce projedeme g.

Je jasné, že ne každé dvě křivky lze napojit. Při libovolném následujícím výroku obsahujícím operaci $*$ budeme *implicitně předpokládat*, že dané křivky napojit lze. Případné ověření, že všechny výrazy mají smysl přenecháme čtenáři. Napojení křivek má jednu význačnou vlastnost, kterou shrnujeme v následujícím lemma:

Lemma 1.2.4. *Operace napojení křivek se chová přirozeně vzhledem k homotopiím, tj. pokud pro $f, f', g, g' \in \mathbf{Top}(I, X)$ platí $f \simeq f'$ a $g \simeq g'$, potom $f * g \simeq f' * g'$.*

Důkaz. Ukážeme pouze, že za daných předpokladů platí $f * g \simeq f' * g$. Druhý speciální případ se ukáže analogicky a zbytek plyne z tranzitivity relace ekvivalence. Nechť $H : I \times I \to X$ je příslušná homotopie. Homotopii H' křivek $f * g$ a $f' * g$ definujeme pro $(t, s) \in I \times I$ jako

$$H'(t, s) = (f_s * g)(t), \tag{1.15}$$

kde $f_s \in \mathbf{Top}(I, X)$ jsou křivky definované homotopií H, tj. $f_s(t) = H(t, s)$. Snadno se ověří, že H' je spojité zobrazení a navíc $H'(0, s) = (f * g)(0)$, $H'(1, s) = (f * g)(1)$, $H'(t, 0) = (f * g)(t)$ a $H'(t, 1) = (f' * g)(t)$. Dostáváme tedy $f * g \simeq f' * g$, což bylo dokázati. ■

Definice 1.2.5 (Částečná binární operace na homotopiích). Na třídách homotopie křivek můžeme zavést částečnou binární operaci $*$ vztahem $[f] * [g] = [f * g]$.

Tvrzení 1.2.6. *Operace $*$ má vlastnosti velmi podobné těm grupovým:*

*(i) (**Násobení jednotkou**) Pro libovolnou konstantní křivku $e_{x_0}(t) = x_0$ platí rovnice*

$$[f] * [e_{x_0}] = [f], \quad [e_{x_0}] * [g] = [g], \tag{1.16}$$

pro všechny $f, g \in \mathbf{Top}(I, X)$, pro které má operace $*$ smysl.

*(ii) (**Inverze**) Pro každou křivku $f \in \mathbf{Top}(I, X)$ existuje křivka $f^{-1} \in \mathbf{Top}(I, X)$, taková, že*

$$[f] * [f^{-1}] = [e_{f(0)}], \quad [f^{-1}] * [f] = [e_{f(1)}]. \tag{1.17}$$

*(iii) (**Asociativita**) Pro každou trojici křivek $f, g, h \in \mathbf{Top}(I, X)$ platí asociativní zákon:*

$$[f] * ([g] * [h]) = ([f] * [g]) * [h]. \tag{1.18}$$

Důkaz. Ad (i): Ukážeme první z možností. Máme tedy $f(1) = x_0$. Snadno se nahlédne, že $f * e_{x_0} = f \circ \varphi$ pro spojitou funkci jejíž graf lomenou čarou zadanou body

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\frac{1}{2}) = 1, \quad \varphi(1) = 1. \tag{1.19}$$

Z Lemma 1.2.2 pak plyne $[f] * [e_{x_0}] = [f * e_{x_0}] = [f \circ \varphi] = [f]$.

Ad (ii): Nechť $f \in \mathbf{Top}(I, X)$ je libovolná křivka. Definujeme $f^{-1} \in \mathbf{Top}(I, X)$ vztahem $f^{-1}(t) = f(1 - t)$ pro $t \in I$. Ověříme, že $f * f^{-1} \simeq e_{f(0)}$, druhá rovnost se dokáže analogicky. Homotopii $H : I \times I \to X$ definujeme vztahem

$$H(t, s) = \begin{cases} f((1 - s)2t) & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ f^{-1}((1 - s)(2t - 1) + s) & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \tag{1.20}$$

Tento složitý předpis má jednoduchou interpretaci. Pro dané $s \in I$ běžíme pro $t \in [0, \frac{1}{2}]$ podél křivky f až do bodu $f(1 - s)$, pak pro $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ běžíme opačně podél křivky f^{-1} z bodu $f^{-1}(s) = f(1 - s)$ do bodu $f^{-1}(1) = f(0)$. Vidíme, že $H(t, 0) = f * f^{-1}$, $H(t, 1) = e_{f(0)}(t)$ a $H(0, s) = H(1, s) = f(0)$. Tedy $f * f^{-1} \simeq e$.

Ad (iii): Snadno se nahlédne, že obě křivky $f * (g * h)$ a $(f * g) * h$ se liší pouze parametrizací, tj $(f * g) * h = (f * (g * h)) \circ \varphi$, kde graf φ je lomená čára zadaná body

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}, \quad \varphi(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}, \quad \varphi(1) = 1. \tag{1.21}$$

Odtud již plyne asociativita $([f] * [g]) * [h] = [(f * g) * h] = [f * (g * h)] = [f] * ([g] * [h])$. ■

Vidíme, že jedinou překážkou pro definici grupy je fakt, že $*$ není definovaná pro každé dvě křivky. To se dá velmi snadno obejít uvažováním speciální podmnožiny $\mathbf{Top}(I, X)$.

Definice 1.2.7. Nechť $x_0 \in X$ je libovolný bod. **Prostorem smyček s počátkem v bodě** x_0 myslíme podmnožinu $\Omega(X, x_0) \subseteq \mathbf{Top}(I, X)$ definovanou jako

$$\Omega(X, x_0) = \{f \in \mathbf{Top}(I, X) \mid f(0) = f(1) = x_0\}. \tag{1.22}$$

Jelikož dvě homotopické křivky musí mít stejný počáteční i koncový bod, leží každá třída homotopie celá v $\Omega(X, x_0)$, nebo s ní má prázdný průnik. Následující definice má tedy dobrý smysl.

Definice 1.2.8. Fundamentální grupou $\pi_1(X, x_0)$ **prostoru** X **v bodě** x_0 myslíme množinu tříd homotopie smyček v $\Omega(X, x_0)$, tedy

$$\pi_1(X, x_0) = \{[f] \mid f \in \Omega(X, x_0)\} \equiv \Omega(X, x_0)/\simeq. \tag{1.23}$$

Vidíme, že součin $*$ je nyní poctivá binární operace na prostoru $\pi_1(X, x_0)$. S pomocí Tvrzení 1.2.6) je již důkaz následujícího pozorování triviální.

Tvrzení 1.2.9 (**Fundamentální grupa je grupa**). *Operace $*$ definovaná v Definici 1.2.5 omezená na podmnožinu $\pi_1(X, x_0)$ homotopických tříd smyček s počátkem v bodě x_0 je grupový součin.*

Důkaz. Jediná konstantní smyčka je $e \equiv e_{x_0}$ je podle (1.16) jednotkou grupy. Třída $[f]^{-1} \equiv [f^{-1}]$ tvoří podle (1.17) inverzní prvek. Konečně, podle (1.18) je operace $*$ asociativní. ∎

V definici velmi explicitně vystupuje bázový bod x_0. Ukážeme si, pro dva body spojené křivkou se příslušné fundamentální grupy příliš neliší - jsou izomorfní.

Tvrzení 1.2.10. *Nechť x_0 a y_0 jsou dva bodu prostoru X v jedné komponentě lineární souvislosti. Potom existuje isomorfismus grup $\pi_1(X, x_0)$ a $\pi_1(X, y_0)$.*

Důkaz. Jsou-li x_0 a y_0 v jedné komponentě lineární souvislosti, existuje křivka $h \in \mathbf{Top}(I, X)$, taková že $h(0) = x_0$ a $h(1) = y_0$. Nechť $[f] \in \pi_1(X, x_0)$. Definujeme $\beta_h : \pi_1(X, x_0) \to \pi_2(X, y_0)$ vztahem $\beta_h[f] = [h^{-1}] * [f] * [h]$. Vidíme, že β_h nezávisí na volbě reprezentanta třídy $[f]$. Může však explicitně záviset na třídě homotopie $[h]$ a β_h tedy není izomorfismus kanonický. Dále máme

$$\beta_h[e_{x_0}] = [h^{-1}] * [e_{x_0}] * [h] = [h^{-1}] * [h] = [e_{y_0}], \tag{1.24}$$

kde jsme použili (1.16) a (1.17). Podobně, pro všechny $[f], [g] \in \Omega(X, x_0)$ dostáváme

$$\beta_h([f] * [g]) = [h^{-1}] * [f * g] * [h] = [h^{-1}] * [f] * [h] * [h]^{-1} * [g] * [h] = \beta_h[f] * \beta_h[g]. \tag{1.25}$$

Vidíme, že β_h je homomorfismus grup. Inverzní zobrazení se definuje záměnou rolí h a h^{-1}. ∎

Poznámka 1.2.11. V lineárně souvislých prostorech se z důvodu předcházejícího tvrzení často vynechává explicitní zmínka počátečního bodu x_0 a fundamentální grupa (libovolná z nich) se označuje jednoduše jako $\pi_1(X)$. Často se píše $\pi_1(X) = 0$.

Definice 1.2.12. Nechť X je lineárně souvislý topologický prostor. Řekneme, že X je **jednoduše souvislý**, je-li fundamentální grupa $\pi_1(X)$ triviální.

Tvrzení 1.2.13. *Topologický prostor je jednoduše souvislý, existuje-li pro každé dva body $x, y \in X$ právě jedna kohomologická třída $[h]$, taková, že $h(0) = x$ a $h(1) = y$.*

Důkaz. Nechť $x, y \in X$. Je-li X jednoduše souvislý, je lineárně souvislý a tedy existuje spojitá křivka $h \in \mathbf{Top}(I, X)$, taková že $h(0) = x$ a $h(1) = y$. Nechť $h' \in \mathbf{Top}(I, X)$ je jiná taková křivka. Potom ale

$$[h] = [h] * [e_y] = [h] * ([h'^{-1}] * [h']) = ([h] * [h'^{-1}]) * [h'] = [e_x] * [h'] = [h'], \tag{1.26}$$

kde jsme použili $[h] * [h'^{-1}] = [e_x]$ z předpokladu $\pi_1(X) = 0$. Důkaz opačného tvrzení je jednoduchý. Z předpokladu vždy existuje nějaká křivka spojující libovolné dva body a tedy X je lineárně souvislý. Navíc každá smyčka $f \in \Omega(X, x_0)$ spojuje x_0 a x_0. Musí být tedy homotopická konstantní křivce, $[f] = [e_{x_0}]$. Odtud $\pi_1(X, x_0) = \{[e_{x_0}]\}$, a tedy $\pi_1(X) = 0$. ■

Příklad 1.2.14 (Vektorové prostory jsou jednoduše souvislé). Nechť V je vektorový prostor s běžnou eukleidovskou topologií indukovanou volbou nějaké báze V. Každý vektor $v \in V$ lze spojit přímkou $h(t) = t \cdot v$ s nulovým vektorem $0 \in V$, a tedy V je lineárně souvislý. Stačí spočítat $\pi_1(V, 0)$. Je-li $f \in \Omega(V, 0)$, definujeme homotopii H s konstantní křivkou $e(t) = 0$ vztahem

$$H(t, s) = (1 - s) \cdot f(t). \tag{1.27}$$

Zřejmě $H(t, 0) = f(t)$, $H(t, 1) = e(t) = 0$ a $H(0, s) = H(1, s) = 0$. Tedy $[f] = [e]$ a uzavřeme, že $\pi_1(V) = 0$, tj. V je jednoduše souvislý topologický prostor.

Tvrzení 1.2.15. *Fundamentální grupa variety v každém bodě je nejvýše spočetná.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že M je křivkově souvislá. Každá varieta M má nějaké nejvýš spočetné pokrytí $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, kde U_α je homeomorfní otevřené kouli, tj. zejména U_α je jednoduše souvislá.

Každý neprázdný průnik $U_\alpha \cap U_\beta$ má nejvýše spočetně mnoho komponent souvislosti (to je vlastnost každé otevřené podmnožiny M). Vyberme si právě jeden bod z každé komponenty každého takového průniku. Dohromady tvoří nejvýše spočetnou podmnožinu $X \subseteq M$. Nyní uvažujme $x, x' \in X$ takové, že $x, x' \in U_\alpha$ pro nějaké $\alpha \in I$. Protože U_α je křivkově souvislá, existuje křivka $h^{U_\alpha}_{x,x'} : I \to U_\alpha$ spojující x a x'.

Můžeme předpokládat, že $X \neq \emptyset$. Jinak by M samotná byla homeomorfní otevřené kouli a tedy s jednoprvkovou fundamentální grupou. Ukážeme, že $\pi_1(M, x_0)$ je spočetná pro každé $x_0 \in X$. Řekneme, že smyčka $f \in \Omega(M, x)$ je *speciálního typu*, je-li napojením konečně mnoha křivek typu $h^{U_\alpha}_{x,x'}$, kde $x, x' \in X$. Smyček speciálního typu je nejvýše spočetně mnoho.

Nechť $f \in \Omega(M, x)$ je *libovolná* smyčka. Ukážeme, že f je homotopická smyčce speciálního typu, tím bude tvrzení dokázané. Protože $f(I) \subseteq M$ je kompaktní množina pokrytá pokrytím $\mathcal{U}$, můžu vybrat rozdělení $0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$ intervalu I takové, že pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ je $f([t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_i$ pro nějaké $U_i \in \mathcal{U}$ a $f(t_i) \in U_i \cap U_{i+1}$ pro každé $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Z konstrukce máme pro každé $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ bod $x_i \in X$ takový, že x_i a $f(t_i)$ jsou spojené křivkou $g_i \in \mathbf{Top}(I, U_i \cap U_{i+1})$. Označme f_i reparametrizovanou restrikci $f|_{[t_i, t_{i+1}]}$, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Potom můžeme psát

$$\begin{aligned} [f] &= [f_0] * \cdots * [f_{n-1}] \\ &= [f_0] * [g_1]^{-1} * [g_1] * [f_1] * [g_2]^{-1} * [g_2] * \cdots * [f_{n-1}] \\ &= [\widetilde{f}_0] * [\widetilde{f}_1] \cdots * [\widetilde{f}_{n-1}], \end{aligned} \tag{1.28}$$

kde $\widetilde{f}_i = g_i * f_i * g_{i+1}^{-1}$, kde pokládáme $g_0 = g_n = e_{x_0}$. Máme $\widetilde{f}_i(0) = x_i$ a $\widetilde{f}_i(1) = x_{i+1}$ a $\widetilde{f}(I) \subseteq U_{i+1}$. Potom ale zřejmě $[\widetilde{f}_i] = [h^{U_{i+1}}_{x_i,x_{i+1}}]$ pro každé $i \in \{0, \dots, n-1\}$ a vidím, že f je homotopická smyčce speciálního typu. ■

1.3 Fundamentální grupa kružnice

V této sekci si ukážeme nejjednodušší příklad topologického prostoru s netriviální fundamentální grupou. Budeme zkoumat kružnici, označovanou v topologických kruzích jako $\mathbb{S}^1$. Výsledek si vyslovíme jako větu, kterou pak postupně dokážeme.

Věta 1.3.1 (**Fundamentální grupa kružnice**). $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ *je nekonečná cyklická grupa generovaná třídou homotopie smyčky* $\omega \in \Omega(\mathbb{S}^1, (1,0))$, *kde* $\omega(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.

Zřejmě $[\omega]^n = [\omega_n]$, kde $\omega_n(t) = (\cos(2\pi nt), \sin(2\pi nt))$. Musíme ukázat, že každá smyčka s počátkem v $(1,0)$ je homotopická ω_n pro unikátní $n \in \mathbb{Z}$.

Základní idea je následující. Definujeme zobrazení $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ vztahem $p(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s))$. Vizualizace tohoto zobrazení je následovná - $\mathbb{R}$ lze vnořit do $\mathbb{R}^3$ jako **šroubovici** $s \mapsto (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), s)$. Potom p je restrikce projekce $\mathbb{R}^3$ na $\mathbb{R}^2$ na tuto šroubovici. Všimneme si, že $\omega_n = p \circ \widetilde{\omega}_n$, kde $\widetilde{\omega}_n \in \mathbf{Top}(I, \mathbb{R})$ je definovaná vztahem $\widetilde{\omega}_n(t) = n \cdot t$. Říkáme, že $\widetilde{\omega}_n$ je **zdvih** smyčky ω_n. Důkaz věty se provede studiem zdvihů *obecných smyček* v $\mathbb{S}^1$. To se opírá o následující obecný koncept.

Definice 1.3.2. Nechť X je topologický prostor. **Nakrytí** X je topologický prostor $\widetilde{X}$ a $p \in \mathbf{Top}(\widetilde{X}, X)$, takové, že pro každý bod $x_0 \in X$ existuje jeho okolí $U \subseteq X$, takové, že $p^{-1}(U)$ je disjunktní sjednocení otevřených podmnožin, kde každou z nich p zobrazuje homeomorfně na U.

Řekneme, že U je **stejnoměrně nakryté**.

Příklad 1.3.3. Zobrazení $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ představené výše definuje nakrytí $\mathbb{S}^1$. Každý otevřený oblouk $U \subset \mathbb{S}^1$ je stejnoměrně nakrytý.

K důkazu Věty 1.3.1 využijeme užitečných vlastností nakrytí.

Tvrzení 1.3.4. *Nechť* $p : \widetilde{X} \to X$ *je nakrytí. Potom platí*

(i) Pro každou křivku $f \in \mathbf{Top}(I, X)$ *s počátkem v bodě* $x_0 \in X$ *a každé* $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ *existuje unikátní zdvih* $\widetilde{f} \in \mathbf{Top}(I, \widetilde{X})$ *s počátkem v bodě* $\widetilde{x}_0$.

(ii) Je-li H *homotopie křivek s počátkem v bodě* x_0 *(tj. musí nutně fixovat oba koncové body), existuje unikátní homotopie* $\widetilde{H}$ *příslušných zdvihů s počátkem v bodě* $\widetilde{x}_0$.

Než si tvrzení dokážeme, ukažme si, jak z jeho pomocí dokázat Větu 1.3.1.

Důkaz věty 1.3.1. Nechť $f \in \Omega(\mathbb{S}^1, x_0)$ reprezentuje třídu $[f] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)$, kde $x_0 = (1,0)$. Protože $0 \in \pi^{-1}(x_0)$, existuje podle 1.3.4 její unikátní zdvih $\widetilde{f} \in \mathbf{Top}(I, \mathbb{R})$ s počátkem v bodě 0. Tato křivka nutně končí v nějakém celočíselném bodě $n \in \mathbb{Z}$, protože $\widetilde{f}(1) \in \pi^{-1}(f(0)) = \pi^{-1}(x_0) = \mathbb{Z}$. Protože $\widetilde{f}$ a $\widetilde{\omega}_n$ mají stejné koncové body, existuje jejich lineární homotopie

$$\widetilde{H}(t,s) = (1-s) \cdot \widetilde{f}(t) + s \cdot \widetilde{\omega}_n(t). \tag{1.29}$$

Snadno vidíme, že $H = p \circ \widetilde{H}$ je homotopie (fixující počáteční i koncový bod) smyček ω_n a f, tedy $[f] = [\omega_n]$. Musíme ukázat, že takové $n \in \mathbb{Z}$ je jednoznačně určené $[f]$.

Nechť $[f] \simeq [\omega_n]$ a $[f] \simeq [\omega_m]$. Potom taky $[\omega_m] \simeq [\omega_n]$. Nechť H je příslušná homotopie, tj. $H(t,0) = \omega_n$ a $H(t,1) = \omega_m$ (s počátkem v x_0). Podle tvrzení 1.3.4 existuje unikátní homotopie $\widetilde{H}$ zdvihů křivek ω_n a ω_m. To jsou z jednoznačnosti křivky $\widetilde{\omega}_n$ a $\widetilde{\omega}_m$. Ale potom $n = \widetilde{\omega}_n(1) = \widetilde{H}(1,0) = \widetilde{H}(1,1) = \widetilde{\omega}_m(1) = m$. ■

Zbývá dokázat Tvrzení 1.3.4. Ukažme si, že obě jeho části plynou z obecnější vlastnosti topologických nakrytí:

Lemma 1.3.5. *Pro každé zobrazení $F \in \mathbf{Top}(Y \times I, X)$ a $\widetilde{F} \in \mathbf{Top}(Y \times \{0\}, \widetilde{X})$, které je zdvihem $F|_{Y \times \{0\}} \in \mathbf{Top}(Y \times \{0\}, X)$, tj. $p \circ \widetilde{F} = F|_{Y\times\{0\}}$, existuje unikátní zdvih celého F, tj. $\widetilde{F} \in \mathbf{Top}(Y \times I, \widetilde{X})$, takové že $p \circ \widetilde{F} = F$.*

Důkaz tvrzení 1.3.4. (i) je speciálním případem Lemma 1.3.5 pro $Y = \{y_0\}$. (ii) je následující aplikaci Lemma 1.3.5 pro $Y = I$. Nechť $H : I \times I \to X$ je homotopie dvou křivek $f_0 = H(\cdot, 0)$ a $f_1 = H(\cdot, 1)$ s pevnými konci $x_0 = H(0, s)$ a $x_1 = H(1, s)$. Zobrazení $H|_{I\times\{0\}} = f_0$ má podle Tvrzení 1.3.4 a již dokázaného (i) unikátní zdvih $\widetilde{H} \in \mathbf{Top}(I \times \{0\}, \widetilde{X})$, takový že $\widetilde{H}(0,0) = \widetilde{x}_0$. Podle Lemma 1.3.5 nyní existuje *jednoznačný zdvih* $\widetilde{H} \in \mathbf{Top}(I \times I, \widetilde{X})$, takový, že $p \circ \widetilde{H} = H$. Musíme ověřit, že $\widetilde{H}$ je křivková homotopie zdvihů $\widetilde{f}_0$ a $\widetilde{f}_1$ s počátkem v $\widetilde{x}_0$.

Z konstrukce $p \circ \widetilde{H}(t,0) = H(t,0) = f_0(t)$ a $\widetilde{H}(0,0) = \widetilde{x}_0$. Z jednoznačnosti v Tvrzení 1.3.4 (i) musí tedy být $\widetilde{H}(t,0) = \widetilde{f}_0(t)$.

Musíme ukázat, že křivky $\widetilde{H}(0,s)$ a $\widetilde{H}(1,s)$ jsou konstantní v s (tj. $\widetilde{H}$ je homotopie křivek). Ale $p \circ \widetilde{H}(0,s) = H(0,s) \equiv x_0$ a $s \mapsto \widetilde{H}(0,s)$ je tedy zdvih konstantní křivky s počátkem v bodě $\widetilde{H}(0,0) = \widetilde{x}_0$. Ale konstantní křivka $e_{\widetilde{x}_0}$ je zdvih do stejného bodu a tedy $\widetilde{H}(0,s) = e_{\widetilde{x}_0}(s) \equiv \widetilde{x}_0$. Podobně se dokáže, že $\widetilde{H}(1,s) \equiv \widetilde{H}(1,0) = \widetilde{f}_0(1)$.

Konečně, $p \circ \widetilde{H}(t,1) = H(t,1) = f_1(t)$ a $\widetilde{H}(0,1) = \widetilde{H}(0,0) = \widetilde{x}_0$, tj. $\widetilde{H}(t,1)$ je zdvihem křivky f_1 s počátkem v $\widetilde{x}_0$. Z jednoznačnosti $\widetilde{H}(t,1) = \widetilde{f}_1$ a $\widetilde{H}$ je tedy homotopie (křivková) obou příslušných zdvihů $\widetilde{f}_0$ a $\widetilde{f}_1$. ■

Zbývá tedy dokázat Lemma 1.3.5. Tento důkaz je přehlídkou typických topologických argumentů a proto si ho pořádně uděláme.

Důkaz Lemma 1.3.5. Nechť $y_0 \in Y$ je fixní. Nejprve sestrojíme zdvih $\widetilde{F} : N \times I \to \widetilde{X}$ pro nějaké okolí $N \ni y_0$. Pro každé $t \in I$ můžeme najít součinové okolí $N_t \times [a_t, b_t] \subset N \times I$ bodu (y_0, t), takové, že $F(N_t \times [a_t, b_t])$ je nějakém rovnoměrně nakrytém okolí U bodu $F(y_0, t)$.

Systém okolí $N_t \times [a_t, b_t]$ tedy tvoří pokrytí kompaktní množiny $\{y_0\} \times I$. Můžeme tedy vybrat rozdělení $0 = t_0 < \cdots < t_m = 1$ a okolí $N \ni y_0$, že celý obraz $F(N \times [t_i, t_{i+1}])$ je je obsažený v nějakém rovnoměrně nakrytém okolí $U_i \subseteq X$, a to pro každé $i \in \{0, \ldots, m-1\}$. Pro indukci předpokládejme, že již máme $\widetilde{F}$ definované na množině $N \times [0, t_i]$ pro *nějaké* okolí N bodu y_0, přičemž nultý krok indukce odpovídá zadanému $\widetilde{F} : N \times \{0\} \to \widetilde{X}$.

Z konstrukce je $F(N \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$. Existuje tedy otevřená množina $\widetilde{U}_i \subseteq \widetilde{X}$, kterou p zobrazuje homeomorfně na U_i a obsahuje bod $\widetilde{F}(y_0, t_i)$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\widetilde{F}(N \times \{t_i\}) \subseteq \widetilde{U}_i$, protože si místo N můžeme vzít libovolné menší okolí $N' = (N \times \{t_i\}) \cap \widetilde{F}^{-1}(\widetilde{U}_i)$. Pro $(y,t) \in N \times [t_i, t_{i+1}]$ můžeme definovat

$$\widetilde{F}(y,t) = (p^{-1} \circ F)(y,t). \tag{1.30}$$

Zjevně $p \circ \widetilde{F}(y,t) = F(y,t)$ a $\widetilde{F}$ je spojité. Podle indukčního předpokladu dostáváme $\widetilde{F} \in N \times [0, t_{i+1}]$. Po konečném počtu kroků dostáváme spojitý zdvih $\widetilde{F} : N \times I \to \widetilde{X}$.

Nyní ukážeme unikátnost zdvihu v Lemma 1.3.5 pro speciální případ $Y = \{y_0\}$. Potlačíme explicitní notaci jednobodové množiny. Máme tedy zadanou křivku $F \in \mathbf{Top}(I, X)$ a spojité zobrazení $\widetilde{F} \in \mathbf{Top}(\{0\}, \widetilde{X})$ zdvihající $F|_{\{0\}}$, tj. zvolený bod $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, kde $x_0 = F(0)$. Předpokládejme, že máme dva zdvihy $\widetilde{F}, \widetilde{F}' : \mathbf{Top}(I, \widetilde{X})$, takové, že $\widetilde{F}(0) = \widetilde{F}'(0) = \widetilde{x}_0$. Opět můžeme najít rozdělení $0 = t_0 < \cdots < t_m = 1$, takové, že $F([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$ pro nějaké rovnoměrně nakryté *souvislé* okolí $U_i \subseteq X$. Pro indukci předpokládejme, že již víme $\widetilde{F}|_{[0,t_i]} = \widetilde{F}'|_{[0,t_i]}$. Protože $[t_i, t_{i+1}]$ je souvislá množina, musí být i $\widetilde{F}([t_i, t_{i+1}])$. Musí tedy ležet celá v jedné z otevřených množin $\widetilde{U}_i \subseteq \widetilde{X}$, která je homeomorfní U_i. Protože $\widetilde{F}(t_i) = \widetilde{F}'(t_i)$, musí být i $\widetilde{F}'([t_i, t_{i+1}]) \subseteq \widetilde{U}_i$. Ale $p|_{\widetilde{U}_i}$ je homeomorfismus a tedy $p \circ \widetilde{F} = p' \circ \widetilde{F}$ na $[t_i, t_{i+1}]$ implikuje $\widetilde{F} = \widetilde{F}'$ na $[t_i, t_{i+1}]$. A tedy $\widetilde{F} = \widetilde{F}'$ na $[0, t_{i+1}]$.

Konečně, máme-li zdvih $\widetilde{F}$ definovaný na $N \times I$ a $\widetilde{F}'$ definovaný na $N' \times I$, máme pro každé $y \in N \cap N'$ jejich restrikcí i dva zdvihy $F|_{\{y\} \times I}$ na $\{y\} \times I$. Podle předchozího odstavce $\widetilde{F}$ a $\widetilde{F}'$ musí být stejné na $\{y\} \times Y$, a tedy i na celém průniku. Dostáváme tedy zdvih $\widetilde{F} : Y \times I \to \widetilde{X}$. Protože každé dva takové splývají na $\{y\} \times I$ pro každé $y \in Y$, je $\widetilde{F}$ podle předchozího odstavce unikátní. ■

Poznámka 1.3.6. Snadno vidíme, že $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong (\mathbb{Z}, +)$, kde izomorfismus je definovaný jako (jednoznačné) rozšíření $[\omega] \mapsto 1 \in \mathbb{Z}$. Často se tedy setkáme se značením $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$.

Věta 1.3.7 (**Základní věta algebry**). *Každý nekonstantní polynom s koeficienty v $\mathbb{C}$ má alespoň jeden kořen v $\mathbb{C}$.*

Důkaz. Stačí uvažovat polynom p ve tvaru $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$. Předpokládejme, že $p(z) \neq 0$ pro všechny $z \in \mathbb{C}$. Pro každé $r \geq 0$ můžeme sestrojit smyčku

$$f_r(t) = \frac{p(re^{2\pi i t})/p(r)}{|p(re^{2\pi i t})/p(r)|}, \tag{1.31}$$

která leží na jednotkové kružnici $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ a má počátek v bodě $1 \in \mathbb{C}$. Spojitou změnou parametru r můžeme přejít ke konstantní křivce $f_0(t) \equiv 1$. To ale znamená, že pro každé $r \geq 0$ je $[f_r] = [e] \in \pi_1(\mathbb{S}^1)$.

Nyní zafixujme r, tak aby $r > \max\{|a_1| + \cdots + |a_n|, 1\}$. Pro libovolné $z \in \mathbb{C}$, takové, že $|z| = |r|$ nyní platí nerovnost $|z^n| = |z||z|^{n-1} > (|a_1| + \cdots + |a_n|)|z|^{n-1} > |a_1 z^{n-1}| + \cdots + |a_n| \geq |a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n|$. To ale znamená, že polynom $p_s(z) = z^n + s(a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n)$ nemá žádné kořeny na kružnici $|z| = r$ pro žádné $s \in [0,1]$. To by totiž implikovalo, že obě komplexní čísla tvořící $p_s(z)$ mají stejný modul: $|z|^n = s|a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n| \leq |a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n|$, což je v rozporu s předchozí nerovností.

Záměnou p za p_s v (1.31) dostáváme pro (fixní a dost velké) r a každé $s \in [0,1]$ smyčku $f_r^s(t)$, přičemž $f_r^1(t) = f_r(t)$ a $f_r^0(t) = e^{2\pi n t} = \omega_n(t)$. Zjevně $H(t,s) = f_r^s(t)$ je homotopie smyček f_r a ω_n, což dokazuje, že $[f_r] = [\omega_n] = [\omega]^n$. Dostáváme tedy rovnost $[\omega]^n = [e]$, což nastává pouze pro $n = 0$, což odpovídá konstantnímu polynomu p. ■

Věta 1.3.8 (**Brouwerova věta o pevném bodě v dimenzi** 2)**.** *Nechť $D^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ je uzavřený jednotkový disk, t.j. $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Potom pro každé $h \in \mathbf{Top}(D^2, D^2)$ existuje $x_0 \in D^2$, takové, že $h(x_0) = x_0$.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $h(x) \neq x$ pro všechny $x \in D^2$. Můžeme tedy definovat spojité zobrazení $r \in \mathbf{Top}(D^2, \mathbb{S}^1)$ tak, že každému bodu $x \in D^2$ přiřadíme bod $r(x) \in \mathbb{S}^1 = \partial D^2$ kde polopřímka (dobře definovaná) z bodu $h(x)$ skrz x protíná hranici kruhu. Spojitost r je intuitivně zřejmá (změníme-li o kousek x, změní se o kousek $h(x)$ a tedy i polopřímka a její průnik s hranicí). Z definice rovněž $r(x) = x$ pro $x \in \mathbb{S}^1$.

To dokazuje, že $r : D^2 \to \mathbb{S}^1$ je **retrakce** D^2 na $\mathbb{S}^1$. Ukážeme si, že taková retrakce nemůže existovat. Nechť $f_0 \in \Omega(\mathbb{S}^1, x_0)$ je libovolná smyčka v $\mathbb{S}^1$. Zároveň f_0 je smyčka která je v D^2 homotopická konstantní křivce, kde $H(t, s) = (1 - s) \cdot f_0(t) + s \cdot x_0$. Potom ale $H' = r \circ H$ je homotopie v $\mathbb{S}^1$ křivky $r \circ f_0 = f_0$ a konstantní křivky v x_0. To je ale ve sporu s $\pi_1(\mathbb{S}^1) \neq 0$. ■

Tvrzení 1.3.9. *Fundamentální grupa každé křivkově souvislé topologické grupy je abelovská.*

Důkaz. Nechť G je topologická grupa s jednotkou 1, t.j. operace násobení je spojité zobrazení $\mu : G \times G \to G$ a máme spojitou inverzi $i : G \to G$. Nechť $f, g \in \Omega(G, 1)$. Označme $f \cdot g \in \Omega(G, 1)$ smyčku.

$$(f \cdot g)(t) := f(t) \cdot g(t) = \mu(f(t), g(t)). \tag{1.32}$$

Snadno se ověří, že opět začíná a končí v 1. Protože μ je spojité, je i $f \cdot g$ spojitá. Podobně jako pro napojování křivek platí, že $f \simeq f'$ a $g \simeq g'$ implikují, že $f \cdot g \simeq f' \cdot g'$ (prostě složím homotopii s násobením). A tedy můžu definovat $[f] \cdot [g] := [f \cdot g]$.

Vidím, že jsem získal alternativní grupový součin na $\pi_1(G, 1)$. Jednotkou je $[e_1]$, tedy původní jednotka grupy $\pi_1(G, 1)$ s operací $*$. Inverzí k $[f]$ je pak zjevně $[i \circ f]$.

Ukažme, že platí následující pozoruhodná identita:

$$([f] \cdot [g]) * ([h] \cdot [k]) = ([f] * [h]) \cdot ([g] * [k]). \tag{1.33}$$

Jak se snadno ověří, tato identita platí triviálně již na úrovni křivek! Potom ale

$$[f] * [k] = ([f] \cdot [e_1]) * ([e_1] \cdot [k]) = ([f] * [e_1]) \cdot ([e_1] * [k]) = [f] \cdot [k]. \tag{1.34}$$

Vidíme, že obě operace musí být totožné! Konečně dostáváme i identitu

$$[f] * [g] = ([e_1] * [f]) * ([g] * [e_1]) = ([e_1] * [g]) * ([f] * [e_1]) = [g] * [f], \tag{1.35}$$

kde jsme podle již dokázaného všude nahradili $\cdot$ operací $*$. Vidíme, že $*$ je komutativní. Trik tohoto důkazu se nazývá *Eckmannův-Hiltonův argument.* ■

1.4 Indukovaná zobrazení a homotopická ekvivalence

Koncept fundamentální grupy jsme od začátku zamýšleli jako topologický invariant. Je tedy třeba ověřit, že tomu tak skutečně je.

Tvrzení 1.4.1. *Nechť $\varphi \in \mathbf{Top}(X,Y)$ je spojité zobrazení. Potom předpisem*

$$\varphi_*[f] = [\varphi \circ f] \tag{1.36}$$

pro všechny $[f] \in \pi_1(X,x_0)$ definujeme homomorfismus grup $\varphi_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,\varphi(x_0))$. Pokud $\psi \in \mathbf{Top}(Y,Z)$, platí pravidla

$$(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*, \quad \mathbf{1}_* = \mathbf{1}. \tag{1.37}$$

Zejména je-li φ homeomorfismus, je φ_* izomorfismus fundamentálních grup.

Důkaz. Nejprve musíme ukázat, že φ_* je dobře definované. Je-li $[f] = [f']$ a H je příslušná homotopie, zjevně $H' = \varphi \circ H$ je homotopie smyček $\varphi \circ f$ a $\varphi \circ f'$. Evidentně $\varphi_*([e]) = [e]$ a z definice napojení křivek rovněž snadno

$$\varphi_*[f * g] = [\varphi \circ (f * g)] = [(\varphi \circ f) * (\varphi \circ g)] = \varphi_*[f] * \varphi_*[g]. \tag{1.38}$$

To dokazuje, že φ_* je grupový homomorfismus. Důkaz kompozičních pravidel je zřejmý, stejně jako tvrzení o izomorfismu. ■

Poznámka 1.4.2. Rozhodně neplatí opačné tvrzení. Jsou-li X a Y jednoduše souvislé, můžeme vzít libovolné konstantní zobrazení $\varphi(x) = y_0$ pro všechny $x \in X$. Zjevně φ_* je izomorfismus (triviálních) fundamentálních grup $\pi_1(X,x_0)$ a $\pi_1(Y,y_0)$, ale ne každé jednoduše souvislé topologické prostory jsou homeomorfní.

Toto tvrzení můžeme použít v důkazu následující věty, která ukazuje, že $\mathbb{S}^0$ a $\mathbb{S}^1$ jsou jedinými příklady n-rozměrných sfér, které nejsou jednoduše souvislé.

Věta 1.4.3 (Vícerozměrné sféry jsou jednoduše souvislé). *Pro každé $n \geq 2$ je $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0$.*

Důkaz se opírá o následující dvě obecné lemma:

Lemma 1.4.4. *Pro libovolné dva topologické prostory je $\pi_1(X \times Y)$ izomorfní $\pi_1(X) \times \pi_1(Y)$ kdykoliv jsou X a Y křivkově souvislé.*

Důkaz. Produktová topologie na $X \times Y$ je plně charakterizovaná vlastností, že $f : Z \to X \times Y$ je spojité, právě tehdy když zobrazení $g : Z \to X$ a $h : Z \to Y$ definovaná vztahem $f(z) = (g(z), h(z))$ jsou obě spojitá. Každá smyčka $f \in \Omega(X \times Y, (x_0, y_0))$ je tedy ekvivalentní dvojici smyček $g \in \Omega(X, x_0)$ a $h \in \Omega(Y, y_0)$. Ze stejného důvodu je homotopie $H \in \mathbf{Top}(I \times I, X \times Y)$ ekvivalentní zadání dvojice homotopií v X a Y. Dostáváme tedy bijekci

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \approx \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0), \tag{1.39}$$

o které se snadno dokáže, že jde o grupový isomorfismus. Křivkovou souvislost předpokládáme čistě abychom nemuseli psát body ve kterých π_1 počítáme. ■

Lemma 1.4.5. *Nechť X je sjednocení kolekce otevřených podmnožin A_α, kde každá z nich obsahuje x_0 a každý průnik $A_\alpha \cap A_\beta$ je křivkově souvislý.*

Potom každá smyčka v $\Omega(X, x_0)$ je homotopická součinu smyček, kde každá z nich je celá obsažená v nějakém A_α.

Důkaz. Nechť $f \in \Omega^1(X, x_0)$ je daná smyčka. Protože f je spojité, pro každé $t \in I$ existuje okolí $V_t \subseteq I$, takové, že $f(V_t) \subseteq A_\alpha$. Můžeme V_t vybrat jako otevřený interval, jehož uzávěr se zobrazí celý do A_α. Z kompaktnosti můžu vybrat konečné podpokrytí těmito intervaly. Dostáváme tedy rozdělení $0 = t_0 < \cdots < t_m = 1$, takové, že $f([t_i, t_{i+1}]) \subseteq A_{\alpha_i}$ pro každé $i \in \{0, \dots, m-1\}$.

Označme f_i restrikci f na $[t_i, t_{i+1}]$ reparametrizovanou tak, aby šlo o zobrazení z I. Potom $f = f_0 * f_1 \cdots * f_m$, a $f_i \in \mathbf{Top}(I, A_{\alpha_i})$. Protože $A_{\alpha_i} \cap A_{\alpha_{i+1}}$ je křivkově souvislé, existuje křivka $g_i \in \mathbf{Top}(I, A_{\alpha_i} \cap A_{\alpha_{i+1}})$ spojující x_0 a bod $f(t_i) \in A_{\alpha_i} \cap A_{\alpha_{i+1}}$. pro každé $i \in \{1, \dots, m-1\}$. Potom můžeme psát třídu $[f]$ jako kompozici

$$[f] = [f_0 * g_1^{-1}] * [g_1 * f_2 * g_2^{-1}] * \dots [g_{m-1} * f_n]. \tag{1.40}$$

A lemma je dokázáno. ■

Důkaz věty 1.4.3. Můžeme psát $\mathbb{S}^n = A_1 \cup A_2$, kde A_1 je například $\mathbb{S}^n$ bez „severního pólu“ $(1, 0, \dots, 0)$ a A_2 je $\mathbb{S}^n$ bez „jižního pólu“ $(-1, 0, \dots, 0)$. Pomocí stereografické projekce snadno vidíme, že $A_1, A_2 \approx \mathbb{R}^n$. Každý bod $A_1 \cap A_2$ můžeme zobrazit na „rovník“ $\mathbb{S}^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^1 = 0\} \approx \mathbb{S}^{n-1}$, a poznamenat si jeho souřadnici $x^1 \in (-1, 1)$. A tedy $A_1 \cap A_2 \approx \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

Pro $n \geq 2$ je prostor $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ křivkově souvislý (protože $\mathbb{S}^{n-1}$ i $\mathbb{R}$ jsou). Můžeme tedy použít předchozí lemma. Nechť $x_0 \in A_1 \cap A_2$. Potom každou $[f] \in \pi_1(\mathbb{S}^n, x_0)$ můžeme psát jako $[f] = [f_0] * [f_1] \cdots * [f_m]$, kde $f_i \in \Omega(A_{1,2}, x_0)$. Oba prostory A_1 i A_2 jsou jednoduše souvislé a tedy $[f_i] = [e]$ pro každé $i \in \{0, \dots, m\}$. Máme tedy $\pi_1(\mathbb{S}^n) = \pi_1(\mathbb{S}^n, x_0) = 0$. To dokazuje, že $\mathbb{S}^n$ je jednoduše souvislá množina. ■

Důsledek 1.4.6. *Prostory $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^n$ jsou homeomorfní pouze pro $n = 2$.*

Důkaz. Nechť $f \in \mathbf{Top}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$ je homeomorfismus. Pro libovolný bod $x \in \mathbb{R}^2$ je potom i jeho restrikce $f' \in \mathbf{Top}(\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}, \mathbb{R}^n \setminus \{f(x)\})$ homeomorfismus. Máme také homeomorfismus

$$\mathbb{R}^n \setminus \{y\} \approx \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}, \tag{1.41}$$

pro každé $y \in \mathbb{R}^n$, který lze snadno ukázat například volbou vícerozměrných sférických souřadnic s počátkem v bodě y. f' tedy indukuje homeomorfismus $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$ a $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Pro $n = 1$ dostáváme spor, protože $\mathbb{S}^0 \times \mathbb{R}$ není křivkově souvislá množina a $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$ je. Pro $n > 2$ dostáváme spor, protože $\pi_1(\mathbb{S} \times \mathbb{R}) = \pi_1(\mathbb{S}) \times \pi_1(\mathbb{R}) = \pi_1(\mathbb{S}) = \mathbb{Z}$ a zároveň $\pi_1(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}) = \pi_1(\mathbb{S}^{n-1}) = 0$. ■

Tvrzení 1.4.1 má spoustu aplikací. Hodí se zejména při porovnávání fundamentálních grup prostorů, kde jeden je retrakcí druhého.

Tvrzení 1.4.7. *Nechť $r \in \mathbf{Top}(X, A)$ je retrakce, $A \subseteq X$. Potom inkluze $i \in \mathbf{Top}(A, X)$ indukuje monomorfismus $i_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ pro všechny $x_0 \in A$. Je-li r deformační retrakt, je zobrazení i_* izomorfismus.*

Důkaz. Definice retrakce je ekvivalentní identitě $r \circ i = \mathbf{1}_A$. Dle Tvrzení 1.4.1 máme tedy $r_* \circ i_* = \mathbf{1}$. To ale může nastat jen v případě, že je i_* monomorfismus. Je-li r deformační retrakt, máme $r_t \in \mathbf{Top}(X, X)$, kde $r_0 = 1_X$, $r_1 = r$ a $r_t(a) = a$ pro všechny $a \in A$. Nechť $[f] \in \pi_1(X, x_0)$. Potom ale $H(t, s) = (r_s \circ f)(t)$ zadává homotopii a $[f] = [r \circ f]$. Ale $r \circ f \in \Omega(A, x_0)$ a můžeme tedy psát $[f] = [i \circ r \circ f] = i_*[r \circ f]$. To dokazuje, že i_* je surjektivní. ■

Nyní si vyslovíme větu zásadní pro aplikace a explicitní výpočet fundamentální grupy.

Věta 1.4.8. *Nechť X a Y jsou libovolné topologické prostory a $\varphi : X \to Y$ je homotopická ekvivalence. Potom $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ je izomorfismus.*

Teorém je jednoduchým důsledkem následujícího tvrzení:

Lemma 1.4.9. *Nechť $H : X \times I \to Y$ je homotopie zobrazení $\mu_0 = H(\cdot, 0)$ a $\mu_1 = H(\cdot, 1)$. Definujme křivku $h \in \mathbf{Top}(I, Y)$ jako obrazy bodu x_0 homotopií H, t.j. $h(t) = H(x_0, t)$. Potom následující diagram je komutativní:*

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(Y, \mu_1(x_0)) \arrow[d, "\beta_h"] \\ \pi_1(X, x_0) \arrow[ur, "\mu_{1*}"] \arrow[r, "\mu_{0*}"'] & \pi_1(Y, \mu_0(x_0)), \end{tikzcd} \tag{1.42}$$

kde β_h je izomorfismus generovaný křivkou h.

Důkaz. Připomeňme, že β_h je definovaný jako $\beta_h[g] = [h]^{-1} * [g] * [h]$ pro všechny $[g] \in \pi_1(Y, \mu_1(x_0))$. Nechť $[f] \in \pi_1(X, x_0)$. Máme tedy ukázat, že $\mu_{0*}[f] = (\beta_h \circ \mu_{1*})[f]$. Explicitně

$$[\mu_0 \circ f] = [h^{-1} * (\mu_1 \circ f) * h] \tag{1.43}$$

Sestrojíme třídu křivek $h_s(t) = h(st)$, tj. $h_0(t) \equiv h(0) = \mu_0(x_0)$ a $h_1(t) = h(t)$. Definujeme

$$\widetilde{H}(t, s) = (h_s^{-1} * (\mu_s \circ f) * h_s)(t), \tag{1.44}$$

kde $\mu_s = H(\cdot, s)$. Nejprve si člověk musí rozmyslet, že má kompozice smysl. $h_s(1) = h(s) = \mu_s(x_0)$. To je ale přesně bod, kde má počátek smyčka $\mu_s \circ f$. Máme $\widetilde{H}(t, 0) = \mu_0 \circ f$, $\widetilde{H}(t, 1) = h^{-1} * (\mu_1 \circ f) * h$ a konečně $\widetilde{H}(0, s) = \widetilde{H}(1, s) \equiv \mu_0(x_0)$. $\widetilde{H}$ je tedy homotopie smyček $\mu_0 \circ f$ a $h^{-1} * (\mu_1 \circ f) * h$, což bylo dokázati. ■

Důkaz věty 1.4.8. Nechť $\psi \in \mathbf{Top}(Y, X)$ je homotopická inverze φ, tj $\psi \circ \varphi \simeq \mathbf{1}_X$ a $\varphi \circ \psi \simeq \mathbf{1}_Y$. Uvažujme následující posloupnost homomorfismů:

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \xrightarrow{\psi_*} \pi_1(X, \psi(\varphi(x_0))) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1(Y, \varphi(\psi(\varphi(x_0)))) \tag{1.45}$$

Nejprve aplikujeme předchozí lemma na homotopii spojitých zobrazení $\psi \circ \varphi$ a $\mathbf{1}_X$ která existuje z předpokladu. Máme tedy $\mu_0 = \psi \circ \varphi$, $\mu_1 = \mathbf{1}_X$ a izomorfismus $\beta_h : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, \psi(\varphi(x_0))$, takový že $\psi_* \circ \varphi_* = \mu_{0*} = \beta_h \circ \mu_{1*} = \beta_{h*}$. Odtud vidíme, že $\psi_* \circ \varphi_*$ je izomorfismus. To dokazuje, že φ_* je injektivní zobrazení.

Nyní aplikujeme předchozí lemma obdobně na homotopii $\varphi \circ \psi$ a $\mathbf{1}_Y$ abychom dokázali, že $\varphi_* \circ \psi_*$ je isomorfismus a tedy ψ_* v posloupnosti nahoře musí být injektivní. Jelikož $\psi_* \circ \varphi_*$ je isomorfismus, musí být φ_* také surjektivní. Vskutku, pro každé $[g] \in \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ existuje právě jedno $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ takové, že $\psi_*(\varphi_*[f]) = \psi_*[g]$ a z injektivity ψ_* tedy $[g] = \varphi_*[f]$. ■

Poznámka 1.4.10. Všimněte si, že homotopická inverze φ nemusí nutně generovat grupovou inverzi φ_*, t.j. neplatí $\psi_* \circ \varphi_* = \mathbf{1}$.

1.5 Jazyk kategorií

V algebraické topologii se velmi často objevují přiřazení algebraických objektů každému topologickému prostoru. Například každé dvojici (X, x_0), kde X je topologický prostor a $x_0 \in X$ přiřazujeme fundamentální grupu $\pi_1(X, x_0)$ a to způsobem, který v jistém smyslu respektuje zobrazení mezi různými topologickými prostory.

Tento „jistý smysl“ bývá velmi podobný napříč celým oborem, je proto výhodné nalézt obecný rámec do kterého tato „přiřazení“ přirozeně zapadají. Ukazuje se, že odpovědí je tzv. **teorie kategorií**. Nyní si ukážeme její naprosto elementární základy. Nejprve si musíme vysvětlit, co kategorie je a uvést si některé příklady.

(C1) Základem každé **kategorie $\mathbf{C}$** je třída jejích **objektů** $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$.

Třídou se myslí abstraktní pojem z teorie množin, nahrazující problematický pojem „množina“ (viz. Russellův paradox). Například pro $\mathbf{C} = \mathbf{Set}$ je $\mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$ třída všech množin.

Často se zjednodušuje notace a píše se $\mathrm{Ob}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$.

(C2) Pro každé dva objekty $a, b \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ existuje třída **morfismů $\mathbf{C}(a, b)$**. Tohle už obvykle bývá obyčejná množina. Například, pro každé $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$ je $\mathbf{Set}(A, B)$ množina všech zobrazení $f : A \to B$.

(C3) Pro každé tři objekty $a, b, c \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ existuje operace **skládání** $*$, zobrazení $* : \mathbf{C}(a, b) \times \mathbf{C}(b, c) \to \mathbf{C}(a, c)$. Obvykle se značí $*(f, g) \equiv g * f$.

(C4) Pro každý objekt $a \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ existuje význačný morfismus $1_a \in \mathbf{C}(a, a)$, kterému se říká **identita v** a.

(C5) Naloží se několik axiomů, které zajistí, že operace skládání je asociativní operace, a identity fungují jako identity.

Poznámka 1.5.1. Úplně stejným argumentem jako v teorii grup se ukáže, že pro dané $a \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ je právě jedna identita 1_a.

Příklad 1.5.2. Nejdůležitějším příkladem kategorie pro algebraickou topologii je $\mathbf{Top}_*$, **kategorie topologických prostorů s význačným bodem**.

Objekty $\mathrm{Ob}(\mathbf{Top}_*)$ jsou dvojice (X, x_0), kde X je topologický prostor a $x_0 \in X$ jeho význačný bod. Pro každé (X, x_0) a (Y, y_0) definujeme množinu morfismů jako

$$\mathbf{Top}_*((X, x_0), (Y, y_0)) = \{f \in \mathbf{Top}(X, Y) \mid f(x_0) = y_0\}, \tag{1.46}$$

tj. všechna spojitá zobrazení zachovávající význačný bod. Operace $*$ je se zavede jako opravdové skládání spojitých zobrazení.

Příklad 1.5.3. Kategorií grup Grp myslíme kategorii, jejímiž objekty je třída všech grup a morfismy jsou grupové homomorfismy.

Příklad 1.5.4. Každý graf $G = (V, E)$ definuje kategorii $\mathbf{C}$. Vezmu $\mathrm{Ob}(\mathbf{C}) = V$. A pro každé $v, w \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ definujeme $\mathbf{C}(v, v')$ jako množinu všech hranových cest z v do v'. Potom $\mathbf{C}(v, v)$ jsou přesně cykly v grafu G a jednotkovým prvkem je triviální cyklus (prázdná hranová cesta). Skládání je napojování hranových cest.

Příklad 1.5.5. V obecné kategorii nemusí existovat „inverzní šipka“. Pokud pro každý morfismus $f \in \mathbf{C}(a,b)$ existuje $f^{-1} \in \mathbf{C}(b,a)$, takový, že $f * f^{-1} = 1_b$ a $f^{-1} * f = 1_a$, nazveme tuto kategorii **grupoidem**.

V této kapitole jsme ve zkonstruovali **fundamentální grupoid** $\Pi_1(X)$ **prostoru** X, kde $\mathrm{Ob}(\Pi_1(X)) = X$ a pro každou dvojici $x, y \in X$ máme

$$\Pi_1(X)(x,y) = \{[f] \mid f \in \mathbf{Top}(I,X),\ f(0) = x,\ f(1) = y\}. \tag{1.47}$$

Skládání je indukované napojováním křivek, identity jsou třídy konstantních smyček. Zřejmě máme $\Pi_1(X)(x,x) \equiv \pi_1(X,x)$ pro všechny $x \in X$.

My se však na fundamentální grupu podíváme ještě zcela jiným způsobem.

Definice 1.5.6. Nechť $\mathbf{C}$ a $\mathbf{D}$ jsou dvě kategorie. **Funktor** $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ je následující kombinace:

(i) Zobrazení na objektech, tj. přiřazení $\mathrm{Ob}(\mathbf{C}) \ni a \mapsto F(a) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$.

(ii) Zobrazení na morfismech, pro každé $f \in \mathbf{C}(a,b)$ máme morfismus $f_* \in \mathbf{D}(F(a), F(b))$.

(iii) Zobrazení na morfismech respektuje skládání v obou kategoriích, t.j. platí

$$(g * f)_* = g_* * f_*,\ \ (1_a)_* = 1_{F(a)} \tag{1.48}$$

pro všechny $f \in \mathbf{C}(a,b)$, $g \in \mathbf{C}(b,c)$ a všechny objekty $a, b, c \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$.

Příklad 1.5.7. Nechť $\mathbf{C} = \mathbf{Top}$ a $\mathbf{D} = \mathbf{Set}$. Každý topologický prostor je množina a spojité zobrazení je zobrazení množin. Na toto se můžeme dívat jako na funktor $\square : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$, kterému se říká **zapomnětlivý funktor**.

Tvrzení 1.5.8. *Fundamentální grupu lze interpretovat jako funktor z* $\mathbf{Top}_*$ *do* $\mathbf{Grp}$.

Důkaz. Pro každý objekt $(X, x_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top}_*)$ definujeme $F(X, x_0) = \pi_1(X, x_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Grp})$. Nechť $\varphi \in \mathbf{Top}_*((X, x_0), (Y, y_0))$. Potom definujeme $\varphi_* \in \mathbf{Grp}(F(X, x_0), F(Y, y_0))$ přesně jako v Tvrzení 1.4.1. Z (1.37) plyne, že jsme právě definovali funktor. ∎

Kapitola 2

Homologie

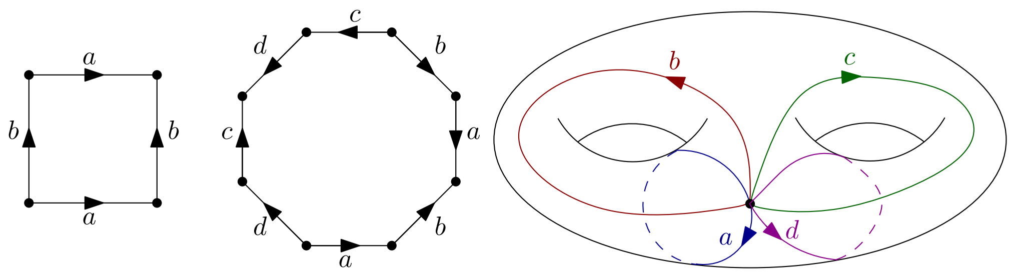
Fundamentální grupa je užitečným nástrojem. Ve své podstatě však používá pouze 1-rozměrné objekty - spojité smyčky. Intuitivně tak tušíme, že není vhodná k analýze „vícerozměrných" topologických prostorů. Již jsme například ukázali, že pro $n \geq 2$ je $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0$, a tedy navzájem nerozlišíme vícerozměrné sféry. Ze stejného důvodu nerozeznáme (jako topologické prostory) vektorové prostory různé dimenze.

Ideu fundamentální grupy lze snadno rozšířit - prostor smyček můžeme ztotožnit s prostorem $\mathbf{Top}_*((\mathbb{S}^1, *), (X, x_0))$, a definujeme $\pi_1(X, x_0)$ jako homotopické třídy těchto zobrazení. **Vyšší homotopické grupy** $\pi_n(X, x_0)$ lze pak definovat jako třídy homotopie zobrazení v $\mathbf{Top}_*((\mathbb{S}^n, *), (X, x_0))$. Problémem je jejich skutečný výpočet. Například $\pi_s(S^n)$ se obecně zná jen pro $s \leq n$, pro $s > n$ existují jen tabulky pro speciální případy, obecná formulka neexistuje.

Je proto důležité vyrobit výpočetně jednodušší způsoby. V této kapitole si představíme metodu která využívá toho, že velkou třídu známých topologických prostorů lze „slepit" z konečně mnoha elementárních objektů jako jsou úsečky, trojúhelníky, čtyřstěny, atd... Způsob jakým jsou slepeny lze zachytit algebraicky, pomocí tzv. homologických grup.

2.1 Celulární komplexy

Anglicky „cell complexes", též CW komplexy. Nejprve si ukažme jednoduchý příklad konstrukce toru $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Ten lze psát jako čtverec, ve kterém identifikujeme hrany:



Podobně, jak vidno na druhém obrázku, můžeme zapsat „nafouknutou ležatou osmičku" jako osmiúhelník, kde slepíme hrany podle obrázku. Obecně lze libovolnou orientovanou plochu genusu

g psát jako jako pravidelný $4g$-úhelník, jehož hrany (po identifikaci) tvoří $2g$ kružnic protínajícím se v jednom jediném bodě (všechny tlusté tečky na obrázcích).

Na celý proces se díváme následovně - vezmeme dvourozměrný otevřený disk, neboli **2-celu** a přilepíme ho hranicí (tj. kružnicí) k sjednocení $2g$ kružnic protínajících se v jednom bodě. Každá z těchto kružnic je otevřený interval, neboli **1-cela**, který se svojí hranicí (2 koncové body) přilepí k jednomu bodu, neboli **0-cele**. Orientovanou plochu s genusem g tedy můžeme vyrobit induktivním procesem - k 0-celám přilepím 1-cely, k tomu nakonec přidělám 2-celu. Tento postup můžeme vzít jako základ následující definice.

Definice 2.1.1. Uvažujme následující induktivní sekvenci kroků:

(1) Začneme s diskrétní množinou X^0, jejíž body považujeme za **0-cely**;

(2) Vyrobíme takzvanou **n-kostru** X^n z X^{n-1} přilepením množiny **n-cel** e^n_α pomocí spojitých zobrazení $\varphi_\alpha : \mathbb{S}^{n-1} \to X^{n-1}$. Přesněji, X^n je faktorprostor disjunktního sjednocení

$$X^{n-1} \bigsqcup_\alpha D^n_\alpha \tag{2.1}$$

množiny X^{n-1} s kolekcí n-rozměrných disků D^n_α, kde každé $x \in \partial D^n_\alpha \cong \mathbb{S}^{n-1}$ identifikujeme s $\varphi_\alpha(x) \in X^{n-1}$, t.j. $x \sim \varphi_\alpha(x)$. Množinově tedy

$$X^n = X^{n-1} \bigsqcup_\alpha e^n_\alpha, \tag{2.2}$$

kde každá n-cela e^n_α je otevřený n-rozměrný disk, na který se faktor-zobrazením homeomorfně zobrazí $D^n_\alpha \setminus \partial D^n_\alpha$.

(3) Definujeme $X = \bigcup_{n=0}^\infty X^n$, kde X je vybaveno tzv. „slabou topologií", kde $A \subset X$ je otevřená (resp. uzavřená), je-li $A \cap X^n$ otevřená (resp. uzavřená) v X^n pro každé $n \geq 0$.

Takto zkonstruovaný topologický prostor X se nazývá **celulární komplex (nebo také CW komplex)**. Je-li $X = X^n$ pro nějaké $n \geq 0$, řekneme, že X je **konečněrozměrný** a nejmenší takové n je jeho **dimenze**.

Příklad 2.1.2. Vezměme $X^0 = \{e^0\}$ tvořený jedním bodem, tj. máme právě jednu 0-celu. Poté nebudeme mít žádné n-cely pro $1 \leq n \leq k-1$, tj. $X^{k-1} = X^{k-1} = \cdots = X^0$. Budeme uvažovat právě jednu k-celu e^k, a příslušné zobrazení $\varphi : \mathbb{S}^{k-1} \to X^{k-1} = \{e^0\}$ musí být logicky konstantní zobrazení $\varphi(x) = e^0$ pro všechny $x \in \mathbb{S}^{k-1}$. Tedy

$$X^k = (\{e^0\} \sqcup D^k)/\sim, \tag{2.3}$$

kde ztotožníme ∂D^k s bodem e^0. Snadno nahlédneme, že $X^k = e^1 \cong \mathbb{S}^k$, a to včetně topologie. Další cely nepřidáváme a tedy $X = X^k = \mathbb{S}^k$. Vidíme, že vícerozměrné sféry lze psát jako celulární komplexy.

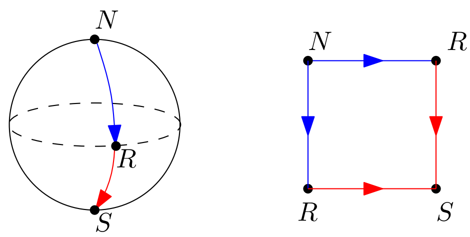
Příklad 2.1.3. Uvažujme topologický prostor $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, prostor přímek skrz počátek v $\mathbb{R}^{n+1}$. Topologicky se zavede jako faktorprostor $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ relací ekvivalence $\lambda \cdot x \sim x$ pro nějaké nenulové $\lambda \in \mathbb{R}$, nebo zcela ekvivalentně jako faktorprostor $\mathbb{S}^n$ identifikací antipodálních bodů x a $-x$ pro každé $x \in \mathbb{S}^n$.

To je ale totéž jak uvažovat pouze (uzavřenou) horní hemisféru $\mathbb{S}^n_+ = \{x \in \mathbb{S}^n \mid x^1 \geq 0\}$, která homeomorfní disku D^n (třeba pomocí stereografických souřadnic), kde body na rovníku

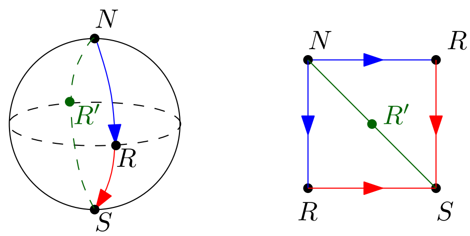
$\partial S^n_+ \cong \mathbb{S}^{n-1}$ jsou antipodálně identifikovány. Ale $\mathbb{S}^{n-1}$ s antipodální identifikací je právě prostor $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$. Projektivní prostor $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ tedy vyrobíme přilepením jedné n-cely k $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$, kde faktor-zobrazení $\varphi : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ je naše zobrazení v celulárních komplexech.

$X = \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ lze tedy opět interpretovat jako celulární n-rozměrný komplex s právě s jednou k-celou pro každé $0 \leq k \leq n$, tj. $X = e^0 \sqcup e^1 \sqcup \cdots \sqcup e^n$.

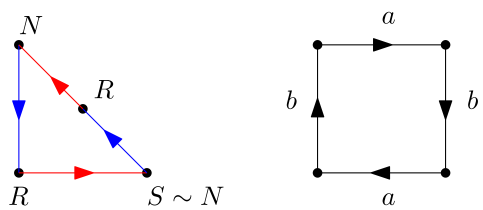
Poznámka 2.1.4. Jeden topologický prostor může mít mnoho struktur celulárních komplexů. Uvažujme například následující identifikaci prostoru $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 = \mathbb{S}^2/\{x \sim -x\}$. Nejprve si na sféře zvolme trojici bodů $\{N, S, R\}$, kde N a S jsou póly a R libovolný bod na rovníku. Potom $\mathbb{S}^2$ můžeme interpretovat jako čtverec s identifikací:



Obrazem trojice bodu (N, S, R) vzhledem k antipodálnímu zobrazení je (S, N, R'), kde R' je bod „u protinožců“ od R. Úhlopříčka čtverce pak odpovídá protilehlému poledníku:



Potom trojúhelník „pod úhlopříčkou“ odpovídá hemisféře ne východ od R, přičemž antipodální zobrazení ji celou zobrazí na hemisféru na západ od R. Kvocient $\mathbb{S}^2$ vzhledem k antipodálnímu zobrazení je tedy to samé co tento dolní trojúhelník s příslušným ztotožněním na jeho přeponě:



To je ale prostor ekvivalentní čtverci s identifikací hran tak jako na druhém obrázku. To nám dává úplně jinou strukturu celulárního komplexu na $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, který má dvě 0-cely, dvě 1-cely a jednu 2-celu, slepených jak je zobrazeno výše.

Ke každé n-cele e^n_α můžeme přiřadit její **charakteristické zobrazení** $\phi_\alpha : D^n_\alpha \to X$, definované jako rozšíření $\varphi_\alpha : \partial D^n_\alpha \to X^{n-1} \subset X$. Přesněji můžeme ϕ_α definovat komutativním diagramem

$$\begin{tikzcd} D^n_\alpha \arrow[r, hook] \arrow[rrr, bend right, dashed, "\phi_\alpha"'] & X^{n-1} \bigsqcup_\alpha D^n_\alpha \arrow[r, "q"] & X^n \arrow[r, hook] & X, \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

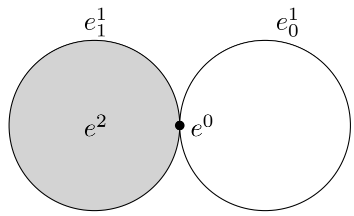
kde q je faktor-zobrazení definující X^n, ostatní šipky jsou inkluze. Snadno se uvidí, že na hranici ∂D^n_α je to opravdu φ_α, a zobrazuje $\mathrm{int}(D^n_\alpha) \equiv e^n_\alpha$ na jeho homeomorfní kopii v X^n.

Příklad 2.1.5. Uvažujme standardní celulární komplex na $\mathbb{S}^n$. Potom $\phi : D^k \to \mathbb{S}^k$ je zobrazení co identifikuje celou hranici disku ∂D^k s jedním bodem v $\mathbb{S}^k$, 0-celou e^0.

Popis topologických prostorů pomocí celulárních komplexů umí být velmi užitečným nástrojem. Zejména proto, že se chová velmi přirozeně vzhledem k obvyklým operacím na topologických prostorech. **Podkomplex** A celulárního komplexu je podmnožina, která je sjednocením cel X, taková, že každá cela z A má svůj uzávěr obsažený v A. Každé lepící zobrazení φ_α příslušné cele z A má tedy celý obraz obsažený v A a A samo o sobě je tím pádem celulárním komplexem, jehož topologie je identická jako podmnožinová v $A \subseteq X$. Dvojice (X, A) se nazývá **CW pár**.

Indukcí lze snadno ukázat, že libovolná n-kostra $X^n \subseteq X$ je vždy podkomplex X.

Příklad 2.1.6. Uvažujme dvourozměrný celulární komplex $X = e^0 \sqcup (e^1_0 \sqcup e^1_1) \sqcup e^2$ na obrázku:



Kromě koster $X^0 = e^0$, $X^1 = e^0 \sqcup e^1_0 \sqcup e^1_1$ a $X^2 = X^1 \sqcup e^2$ má X podsimplexy $e^0 \sqcup e^1_0$, $e^0 \sqcup e^1_1$ a $e^0 \sqcup e^1_1 \sqcup e^2$. Zbývající podmnožiny, například $e^2 \sqcup e^1_0$ podsimplexy nejsou.

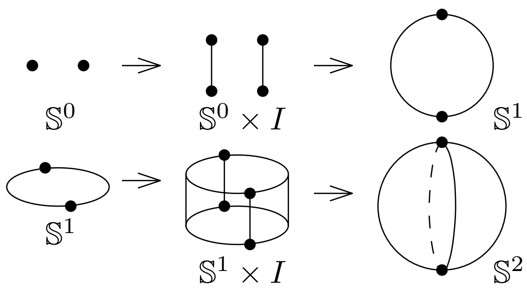
Poznámka 2.1.7. Nyní se dá ukázat, že platí následující:

1. Jsou-li X a Y celulární komplexy, je i $X \times Y$ celulární komplex. Mají-li X a Y spočetně mnoho cel, sedí to i topologicky.

2. Pro každý CW pár (X, A) je i kvocient X/A celulární komplex, jehož cely jsou cely doplňku $X \setminus A$ a jedna nová 0-cela odpovídající obrazu množiny A v X/A. Uděláme-li například v příkladu výše kvocient 1-kostrou $X^1 \subseteq X$, zbude nám 2-cela e^2 přidělaná na jednu 0-celu, tj. topologický prostor $\mathbb{S}^2$.

3. Velice důležitou operací v algebraické topologii je **suspenze** $S(X)$ **prostoru** X, definovaná jako kvocient „válce“ $X \times I$ relací ekvivalence $\sim$, definované jako $(x, 0) \sim (x', 0)$ a $(x, 1) \sim (x', 1)$ pro všechny $x, x' \in X$. Tedy $S(X) = X/\sim$ s obvyklou topologií.

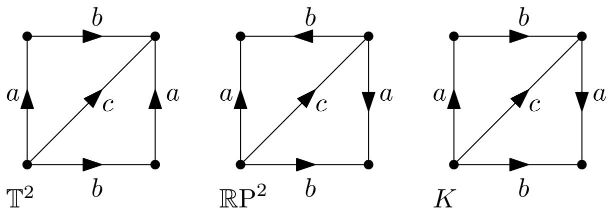
   Struktura celulárního komplexu se zavede přirozeně, tj. vezmu součinový celulární komplex na $X \times I$. Z obou podkomplexů $X \times \{0\}$ a $X \times \{1\}$ udělám dvě 0-cely a přilepím k ním zbytek. Dá se ukázat, že $S(\mathbb{S}^n) = \mathbb{S}^{n+1}$. Tímhle způsobem můžeme induktivně dostat celulární komplex na $\mathbb{S}^n$, který ovšem není ten z příkladu. Stačí se podívat na následující sekvence obrázků:



Vidíme, že $\mathbb{S}^1$ a $\mathbb{S}^2$ zkonstruované tímto indukčním procesem mají vždy dva kousky od každé k-cely, pro každé $0 \leq k \leq n$.

2.2 Δ-komplexy

Jak ukazuje následující obrázek, torus $\mathbb{T}^2$, projektivní rovinu $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ i Kleinovu lahev K lze ve psát (kreslit) jako sjednocení trojúhelníků s identifikovanými stěnami:



Snadno lze nalézt podobné rozdělení pro libovolný pravidelný n-úhelník. Každou orientovanou plochu s genusem g lze tedy tímto způsobem tzv. **triangulovat**.

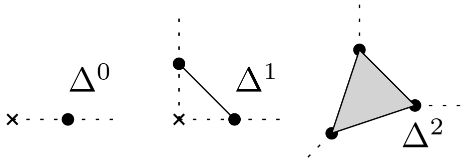
Idea Δ-komplexů je zobecnit tento náhled pro libovolnou dimenzi. Nejprve je potřeba zavést n-rozměrný analog trojúhelníku. Uvažujme afinně nezávislý soubor $n+1$ vektorů $(v_0, \ldots, v_n)$ v prostoru $\mathbb{R}^m$, tj. $(v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0)$ je lineárně nezávislý[1] soubor v $\mathbb{R}^m$. Potom n**-simplex** je *komplexní obal* souboru $(v_0, \ldots, v_n)$.

Vektory v_i se nazývají **vrcholy simplexu** a samotný simplex budeme značit jako $[v_0, \ldots, v_n]$. Je důležité, že uvažujeme vrcholy jako soubor, tj. včetně pořadí.

Příklad 2.2.1. Modelovým příkladem je **standardní simplex v** $\mathbb{R}^{n+1}$, definovaný jako

$$\Delta^n = \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} t_i = 1,\ t_i \geq 0\}, \tag{2.5}$$

t.j. $\Delta^n = [e_0, \ldots, e_n]$, kde $\{e_i\}_{i=0}^n$ je standardní báze $\mathbb{R}^{n+1}$. Každý simplex $[v_0, \ldots, v_n]$ je homeomorfní Δ^n, kde homeomorfismus definovaný jako $(t_0, \ldots, t_n) \mapsto \sum_{i=0}^n t_i v_i$ se nazývá **barycentrické souřadnice**.



[1]Nutně tedy $n \leq m$.

Z daného n-simplexu $[v_0, \ldots, v_n]$ můžeme „vymazat“ vrchol a dostaneme $(n-1)$-simplex tvořený zbývajícími vrcholy, t.j. $[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$, nazývaný **stěna simplexu** protilehlá vrcholu v_i. Pořadí vrcholů stěny, případně libovolného podsimplexu (komplexní obal na podmnožině jeho vrcholů) je určováno jejich pořadí v původním souboru. Máme tedy například orientaci **hran**, 1-simplexů ve tvaru $[v_i, v_j]$ pro $0 \leq i < j \leq n$.

Sjednocení stěn standardního n-simplexu se nazývá **hranice** Δ^n, značíme $\partial\Delta^n$. Otevřený n-simplex $\mathring{\Delta}^n$ je definovaný jako vnitřek (topologický) n-simplexu, t.j. $\mathring{\Delta}^n = \Delta^n \setminus \partial\Delta^n$. Formalizace a zároveň zobecnění pojmu triangulace shrnuje následující definice:

Definice 2.2.2. Struktura **Δ-komplexu na prostoru** X je kolekce zobrazení $\sigma_\alpha : \Delta^n \to X$, kde n závisí na indexu α, taková, že platí následující:

(i) Restrikce $\sigma_\alpha|_{\mathring{\Delta}^n}$ je injektivní a každý bod X je v obrazu právě jedné této restrikce.

(ii) Restrikce $\sigma_\alpha : \Delta^n \to X$ na libovolnou stěnu dává jiné zobrazení $\sigma_\beta : \Delta^{n-1} \to X$ z kolekce.

Implicitně používáme kanonický homeomorfismus každé ze stěn Δ^n se standardním $(n-1)$-simplexem Δ^{n-1}. Nechť $\Delta^n_{(i)}$ označuje i-tou stěnu Δ^n, $i \in \{0, \ldots, n\}$. Explicitně

$$\Delta^n_{(i)} = \{(t_0, \ldots, t_n) \in \Delta^n \mid t_i = 0\}. \tag{2.6}$$

Homeomorfismus $\psi^n_{(i)} : \Delta^n_{(i)} \to \Delta^{n-1}$ má tvar

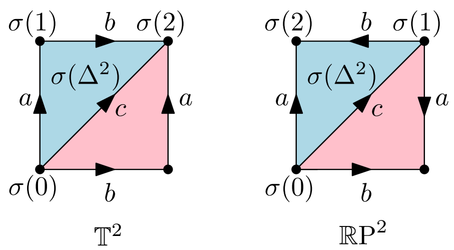
$$\psi^n_{(i)}(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \ldots, t_n) = (t_0, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n). \tag{2.7}$$

Spojitost, bijektivnost a spojitost inverze je zřejmá.

(iii) Množina $A \subseteq X$ je otevřená, právě tehdy když její vzor $\sigma_\alpha^{-1}(A) \subseteq \Delta^n$ je množina otevřená v Δ^n pro každé ze zobrazení σ_α.

Příklad 2.2.3. Všechny tři obrázky triangulovaných prostorů výše zadávají strukturu Δ-komplexu. Δ-komplexy příslušné $\mathbb{T}^2$ a K mají jeden 0-simplex, tři 1-simplexy a dva 2-simplexy, zatímco $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ má navíc jeden 0-simplex.

Orientace jednotlivých hran v obrázku jednoznačně určí kam budou σ_α zobrazovat které vrcholy standardních simplexů. Porovnejme například následující situace:



V obou případech jsou modré trojúhelníky (včetně hran a vrcholů) obrazem standardního 2-simplexu. Šipky na hranách nejprve určí jak se na ně zobrazí odpovídající standardní 1- simplexy. Je výhodné vrcholy standardního simplexu označovat pouze čísly, t.j. např. $\Delta^2 = [0, 1, 2]$ má hrany $[0, 1], [1, 2]$ a $[0, 2]$.

Je-li nyní např. $\sigma : \Delta^2 \to \mathbb{T}^2$ zobrazení na modrý trojúhelník, musí být jeho restrikce na jednotlivé hrany ve shodě s již zadanými zobrazeními 1-simplexů, a to včetně orientace. To určí obrazy souboru vrcholů $(0, 1, 2)$ jednoznačně. Pro $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ se situace liší, viz. obrázek.

Poznámka 2.2.4. Na prostor X můžeme nahlížet jako na kvocient disjunktního sjednocení simplexů Δ^n_α, přičemž ztotožníme každou hranu každého Δ^n_α se simplexem Δ^{n-1}_β, kde β je určený vlastností (ii) v definici Δ-komplexu. Stejně jako celulární komplexy, můžeme Δ-komplexy budovat induktivně - k diskrétní množině 0-simplexů přiděláme 1-simplexy a vytvoříme graf, atd.

Tvrzení 2.2.5. *Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ existuje kanonický homeomorfismus $\varphi : \Delta^n \to D^n$. Navíc platí $\varphi(\partial\Delta^n) = \partial D^n \equiv \mathbb{S}^{n-1}$.*

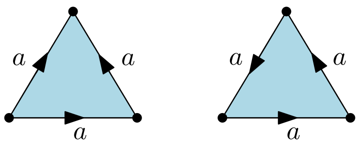
Důkaz. Standardní n-simplex Δ^n má význačný bod **těžiště** $c := (\frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{n+1})$. Definujeme $\varphi(c) := 0$. Pro každý bod $x \in \Delta^n \setminus \{c\}$ sestrojíme polopřímku skrz x s počátkem v bodě c. Tato polopřímka protne hranici $\partial\Delta^n$ právě v jednom bodě, který označme jako $f(x)$. Protože c není na hranici, musí být $\|f(x) - c\| > 0$ a tedy má smysl definovat

$$\varphi(x) := \frac{x - c}{\|f(x) - c\|}. \tag{2.8}$$

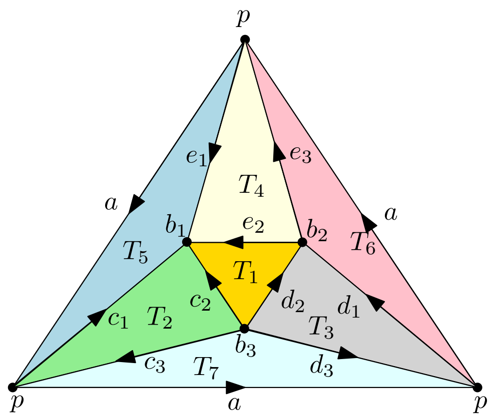
Bod $f(x)$ nemůže být blíž k c než x, jinak by byl v $\mathring{\Delta}^n$, a tedy $\|x - c\| \leq \|f(x) - c\|$. To implikuje $\|\varphi(x)\| \leq 1$. Lze si rozmyslet, že φ je spojitá bijekce. Detaily přenecháme čtenáři. Je zřejmé, že $x \in \partial\Delta^n$, právě tehdy když $f(x) = x$, což nastane právě tehdy když $\|x - c\| = \|f(x) - c\|$, což je ekvivalentní $\varphi(x) = 1$. To dokazuje, že $\varphi(\partial\Delta^n) = \partial D^n$. ■

Poznámka 2.2.6. Podle předchozího tvrzení můžeme kanonicky identifikovat $\Delta^n \cong D^n$, $\partial\Delta^n \cong \mathbb{S}^{n-1}$. Definujeme-li **otevřené n-simplexy** $e^n_\alpha = \sigma_\alpha(\mathring{\Delta}^n)$, definují nám σ_α charakteristická zobrazení a X je celulární komplex s n-celami e^n_α. Zejména tedy $X = \bigsqcup_\alpha e^n_\alpha$. Lepící zobrazení (restrikce σ_α na $\partial\Delta^n$) jsou ovšem velmi speciální.

Příklad 2.2.7. První z obrázků představuje podivuhodný Δ-komplex nazývaný **hlupákův klobouk** (anglicky dunce hat). Má jeden 0-simplex, jeden 1-simplex a jeden 2-simplex.



Druhý obrázek zdánlivě vypadá jako krásný Δ-komplex, ale ve skutečnosti jím není. Ne každý obrázek s trojúhelníky a šipkami je Δ-komplex. Triangulace dotyčného prostoru je ve skutečnosti poměrně komplikovaná (čtyři 0-simplexy, deset 1-simplexů, sedm 2-simplexů):



2.3 Simpliciální homologie

Každý Δ-komplex je ve skutečnosti jen snůškou kombinatorických dat. Říkáme z jakých simplexů je udělaný, přičemž je podstatné jen to, která hrana kterého simplexu se přilepí kam - přičemž lepení (jako spojité zobrazení) je již jednoznačně určené. Ukazuje se, že těmto datům můžeme přiřadit algebraický objekt, který bude navíc do jisté míry nezávislý na volbě „triangulace“, t.j. je jedno jak X ze simplexů slepíme.

Definujeme $\Delta_n(X)$ jako volnou abelovskou grupu generovanou zobrazeními $\sigma_\alpha : \Delta^n \to X$. Každý element $\Delta_n(X)$ je tedy formální lineární kombinace $\sum_\alpha n_\alpha \sigma_\alpha$, kde $n_\alpha \in \mathbb{Z}$ jsou celočíselné koeficienty, a *jen konečně mnoho z nich je různých od nuly.* Grupovou operaci budeme psát v aditivní notaci, přičemž.

$$(\sum_\alpha n_\alpha \sigma_\alpha) + (\sum_\alpha m_\alpha \sigma_\alpha) := \sum_\alpha (n_\alpha + m_\alpha)\sigma_\alpha \tag{2.9}$$

Inverze a jednotka jsou zřejmé. $\Delta_n(X)$ se nazývá prostor n-**řetězců**.

Nechť $\Delta^n = [0, 1, \dots, n]$. Standardní n-simplex má $(n+1)$ stěn, které označíme jako

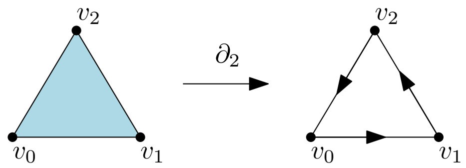
$$\Delta^n_{(i)} \equiv [0, \dots, \hat{i}, \dots, n], \tag{2.10}$$

kde jsme v $\Delta^n_{(i)}$ jednoduše vynechali i-tý vrchol. Z definice je restrikce každého σ_α na $\Delta^n_{(i)}$ nějaký $(n-1)$-simplex $\sigma_\beta : \Delta^{n-1} \to X$. Má tedy dobrý smysl definovat **operátor hranice** $\partial_n : \Delta_n(X) \to \Delta_{n-1}(X)$ pomocí jeho hodnoty na generátory:

$$\partial_n \sigma_\alpha = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, \sigma_\alpha|_{\Delta^n_{(i)}}. \tag{2.11}$$

Poznámka 2.3.1. Operátor hranice si lze vizualizovat následovně. Každý ze simplexů $\Delta^n_\alpha = \sigma_\alpha(\Delta^n)$ je tvořený vrcholy $(v_0, \dots, v_n)$, t.j. $\Delta^n_\alpha = [v_0, \dots, v_n]$. Potom element $\partial_n \sigma_\alpha \in \Delta_{n-1}(X)$ je celočíselná (formální) kombinace zobrazení, jejímiž obrazy jsou právě stěny $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ simplexu Δ^n_α. Můžeme tedy psát $\partial_n[v_0, \dots, v_n] = \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$.

Jako příklad máme $\partial_2[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$. Přiřadili jsme 2-simplexu $[v_0, v_1, v_2]$ sekvenci (1-řetězec) jeho hran, přičemž znaménko lze interpretovat jako „otočení šipky“ tak abychom dostali orientovaný graf hran:



(2.12)

Co se stane když aplikujeme ∂_1 na výsledek ∂_2? Dostáváme

$$\partial_1([v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]) = [v_2] - [v_1] - [v_2] + [v_0] + [v_1] - [v_0] = 0. \tag{2.13}$$

Dostáváme tedy $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$. Jelikož jsme o simplexu $[v_0, v_1, v_2]$ nepředpokládali vůbec nic, vypadá to na obecné pravidlo.

Tvrzení 2.3.2. *Pro každý Δ-komplex X platí $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$. Zavádí se konvence $\Delta_n(X) = 0$ pro $n < 0$. Jinými slovy* $\operatorname{im}(\partial_n) \subseteq \ker(\partial_{n-1})$.

Důkaz. Označme $\Delta^n_{(ij)} = [0, \ldots, \hat{i}, \ldots, \hat{j}, \ldots, n]$. Pro každé $\sigma_\alpha : \Delta^n \to X$ máme

$$\begin{aligned}
\partial_{n-1}(\partial_n \sigma_\alpha) &= \partial_{n-1}(\sum_{i=0}^{n} (-1)^j \sigma_\alpha|_{\Delta^n_{(j)}}) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \partial_{n-1}(\sigma_\alpha|_{\Delta^n_{(j)}}) \\
&= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \sigma_\alpha|_{\Delta^n_{(ij)}} + \sum_{i>j} (-1)^{i+j-1} \sigma_\alpha|_{\Delta^n_{(ji)}}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

V druhé sumě můžeme zaměnit sčítací indexy i a j, a zjistíme, že výsledek se liší právě o znaménko, takže se obě části odečtou a máme $\partial_{n-1}(\partial_n \sigma_\alpha) = 0$. ■

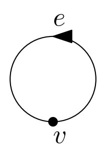
Definice 2.3.3. Nechť $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost abelovských grup společně s homomorfismy $\{\partial_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ splňují $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$. Tato struktura se nazývá **řetězcový komplex**, značíme $(C_\bullet, \partial_\bullet)$. Index n se často u ∂ nepíše.

Grupě C_n se říká n-**řetězce**. Můžeme definovat dvě její podgrupy. Podgrupa n-**cyklů** $Z_n = \ker(\partial_n)$ a podgrupa n-**hranic** $B_n = \mathrm{im}(\partial_{n+1})$. Zjevně $B_n \subseteq Z_n \subseteq C_n$. Má tedy smysl definovat n-**tou grupu homologie** $H_n = Z_n/B_n$. Elementy H_n se nazývají **homologické třídy**. Pokud dva cykly $\omega, \omega' \in Z_n$ reprezentují stejnou homologickou třídu, řekneme, že ω a ω' **jsou homologické**. Dva cykly jsou homologické, liší-li se o hranici: $\omega' = \omega + \partial\beta$.

Tvrzení 2.3.4. *Nechť X je Δ-komplex. Potom $C_n = \Delta_n(X)$ spolu s operátorem hranice (2.11) tvoří řetězcový komplex. Příslušnou homologickou grupu značíme $H_n^\Delta(X)$ a nazýváme n-tou* ***simpliciální grupou homologie****.*

Poznámka 2.3.5. Všimněte si, že je-li v X maximální dimenze simplexů n, máme $B_n = 0$ a tedy $H_n^\Delta(X) = Z_n$. Zřejmě také $H_i^\Delta(X) = 0$ pro $i > n$. Podobně $Z_0 = C_0$ a tedy $H_0^\Delta(X) = \Delta_0(X)/B_0$.

Příklad 2.3.6. Uvažujme jednoduchý Δ-simplex definovaný jako na obrázku:



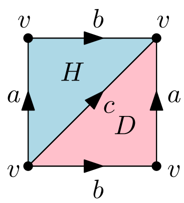
Je tvořený jedním 0-simplexem $v = \sigma_v(\Delta^0)$ a jedním 1-simplexem $e = \sigma_e(\Delta^1)$. Máme $\Delta_0(X) = \mathbb{Z}\{\sigma_v\}$ a $\Delta_1(X) = \mathbb{Z}\{\sigma_e\}$. Operátor hranice $\partial_1 : \Delta_1(X) \to \Delta_0(X)$ má tvar

$$\partial_1(\sigma_e) = \sigma_e|_{\Delta^1_0} - \sigma_e|_{\Delta^1_1} = \sigma_v - \sigma_v = 0. \tag{2.15}$$

Odtud vidíme, že $H_1^\Delta(X) = Z_1 = \Delta_1(X) = \mathbb{Z}\{\sigma_e\} \cong \mathbb{Z}$. Zároveň $B_0 = 0$ a tedy $H_0^\Delta(X) = \Delta_0(X)/B_0 = \Delta_0(X) = \mathbb{Z}\{\sigma_v\} \cong \mathbb{Z}$. Dokázali jsme následující:

$$H_n^\Delta(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pro } n \in \{0, 1\}, \\ 0 & \text{pro } n \geq 2. \end{cases} \tag{2.16}$$

Příklad 2.3.7. Uvažujme torus $\mathbb{T}^2$ s následující strukturou Δ-komplexu:



V následujícím ztotožníme zobrazení σ s jejich obrazy v X. Máme tedy $\Delta_0(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}\{v\}$, $\Delta_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}\{a, b, c\}$ a $\Delta_2(\mathbb{T}^2) = \{H, D\}$. Začněme operátorem hranice. Máme

$$\partial_2 H = H|_{\Delta_0^2} - H|_{\Delta_1^2} + H|_{\Delta_2^2}. \tag{2.17}$$

Ale vrcholy trojúhelníku H jsou obrazem vrcholů Δ^2 jako na obrázku v příkladu 2.2.3. Odtud

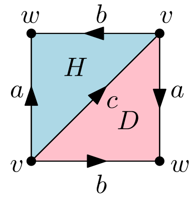
$$\partial_2 H = b - c + a, \tag{2.18}$$
$$\partial_2 D = a - c + b, \tag{2.19}$$

kde hodnotu na D jsme vypočítali analogicky. Protože všechny 1-simplexy končí na stejném vrcholu, 0-simplexu v, máme zřejmě $\partial_1 = 0$. Jdeme počítat podgrupy cyklů.

Abychom vypočítali Z_2, stačí si všimnout, že $\partial_2(H-D) = 0$, a tedy $Z_2 = \mathbb{Z}\{H-D\} \cong \mathbb{Z}$. Dále zřejmě $Z_1 = \Delta_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}\{a, b, c\}$ a $Z_0 = \Delta_0(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}\{v\}$. Konečně, podgrupa B_1 je generovaná prvkem $a + b - c$. Tento stačí doplnit na bázi Z_1, stačí zřejmě soubor $(a, b, a + b - c)$. Vidíme, že $H_2^\Delta(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}\{a, b, a + b - c\}/\mathbb{Z}\{a + b - c\} = \mathbb{Z}\{a, b\} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Dostáváme tedy

$$H_n^\Delta(\mathbb{T}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pro } n = 0, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{pro } n = 1, \\ \mathbb{Z} & \text{pro } n = 2, \\ 0 & \text{pro } n \geq 3. \end{cases} \tag{2.20}$$

Příklad 2.3.8. Uvažujme projektivní prostor $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ s následující strukturou Δ-komplexu:



Máme tedy $\Delta_0(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) = \mathbb{Z}\{v, w\}$, $\Delta_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) = \mathbb{Z}\{a, b, c\}$ a $\Delta_2(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) = \{H, D\}$. Máme

$$\partial_2 H = b - a + c, \tag{2.21}$$
$$\partial_2 D = a - b + c. \tag{2.22}$$

Vidíme, že už ∂_2 se liší od $\mathbb{T}^2$. O mnoho zajímavější je navíc ∂_1. Máme:

$$\partial_1 a = w - v, \;\; \partial_1 b = w - v, \;\; \partial_1 c = 0. \tag{2.23}$$

Začněme opět hledáním 2-cyklů, neboli řešením rovnice $\partial_2(\lambda_1 H + \lambda_2 D) = 0$. To vede na rovnici

$$(\lambda_2 - \lambda_1)a + (\lambda_1 - \lambda_2)b + (\lambda_1 + \lambda_2)c = 0. \tag{2.24}$$

Ta má zřejmě pouze triviální řešení a tedy $H_2^\Delta(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) = Z_2 = 0$. Pokračujme hledáním prostoru 1-cyklů, tedy jádra homomorfismu ∂_1. Rovnice $\partial_1(\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c) = 0$ vede na

$$(\lambda_1 + \lambda_2)(w - v) = 0. \tag{2.25}$$

Nutně tedy $\lambda_2 + \lambda_1 = 0$ a vidíme, že $Z_1 = \mathbb{Z}\{b-a, c\}$. Je výhodné psát $Z_1 = \mathbb{Z}\{b-a+c, c\}$. Protože $B_1 = \operatorname{im}(\partial_2)$ je obraz injektivního zobrazení, je generovaný obrazy libovolné báze $\Delta_2(\mathbb{R}\mathrm{P}^2)$, například $B_1 = \{\partial_2(H), \partial_2(H + D)\} = \mathbb{Z}\{b - a + c, 2c\}$. Odtud snadno vidíme, že

$$H_1^\Delta(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) = \mathbb{Z}\{b - a + c, c\}/\mathbb{Z}\{b - a + c, 2c\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \equiv \mathbb{Z}_2. \tag{2.26}$$

Konečně, snadno vidíme, že $B_0 = \mathbb{Z}\{w - v\}$. V $Z_0 = \Delta_0(\mathbb{R}\mathrm{P}^2)$ si můžeme zvolit bázi $Z_0 = \mathbb{Z}\{w - v, v\}$ a tedy $H_0^\Delta(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \cong \mathbb{Z}$. Souhrnně tedy

$$H_n^\Delta(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pro } n = 0, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{pro } n = 1, \\ 0 & \text{pro } n > 1. \end{cases} \tag{2.27}$$

2.4 Singulární homologie

Ukázali jsme, že pokud je topologický prostor X vybaven strukturou Δ-komplexu, je v principu snadné spočítat příslušnou simpliciální homologii $H_\bullet^\Delta(X)$. Abychom však těmto algebraickým datům mohli přiřadit jakýkoliv význam, potřebujeme ukázat, že ve grupy ve skutečnosti nezávisí na konkrétní „triangulaci“ prostoru X. Jak je v matematice běžné, na problém se zaútočí z úplně jiné strany. Klíčovým trikem je zavést výrazně obecnější a výpočetně absurdně složitou homologickou teorii, která se však velmi předvídatelně chová vzhledem ke spojitým zobrazením topologických prostorů. Konečně, s použitím (již převážně algebraických) triků se ukáže, že grupy této tzv. **singulární homologie** jsou izomorfní těm pocházející ze simpliciální homologie. Tím získáme nejen užitečný nástroj na jejich výpočet, ale automaticky i nezávislost těch simpliciálních na konkrétním Δ-komplexu (a mnoho dalšího).

Singulárním n-simplexem nazveme libovolné *spojité zobrazení* $\sigma : \Delta^n \to X$. Grupa **singulárních n-řetězců** $C_n(X)$ je volná abelovská grupa na singulárních n-simplexech, tedy množina konečných formálních sum $\sum_i n_i \sigma_i$, kde $n_i \in \mathbb{Z}$ a $\sigma_i : \Delta^n \to X$. **Operátor hranice** se definuje naprosto analogicky jako pro Δ-komplex, tedy

$$\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, \sigma|_{\Delta^n_{(i)}}, \tag{2.28}$$

kde $\Delta^n_{(i)} \cong \Delta^{n-1}$ je hrana standardního n-simplexu Δ^n protilehlá vrcholu n. Úplně analogicky se dokáže, že $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ a tedy $(C_\bullet(X), \partial_\bullet)$ tvoří řetězcový komplex. Potom $H_n(X) = \ker(\partial_n)/\operatorname{im}(\partial_{n+1})$ se nazývá **singulární n-tou grupou homologie**.

Je zřejmé, že výpočet $H_n(X)$ je téměř nemožným úkolem, jelikož i pro hodně jednoduché X je $C_n(X)$ nespočetná množina. Není vůbec zřejmé, že by $H_n(X)$ měla být nějaká hezká abelovská grupa typu $\mathbb{Z}$ nebo $\mathbb{Z}_n$. Než si ukážeme nejdůležitější vlastnost singulární homologie, zavedeme si následující pojem:

Definice 2.4.1. Nechť $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ a $(C'_\bullet, \partial'_\bullet)$ jsou dva řetězcové komplexy. Homomorfismus[2] $\varphi : C_\bullet \to C'_\bullet$ se nazývá **řetězcové zobrazení**, pokud zachovává stupeň, t.j. $\varphi(C_n) \subseteq C'_n$ a komutuje s operátory hranice, t.j. platí $\partial'_n \circ \varphi = \varphi \circ \partial_n$ pro každé $n \geq 0$. Snadno se rozmyslí, že řetězcové komplexy společně s řetězcovými zobrazeními tvoří **kategorii řetězcových komplexů Ch**.

Lemma 2.4.2. *Přiřazení $(C_\bullet, \partial_\bullet) \mapsto H_\bullet$ je funktor z* **Ch** *do kategorie abelovských grup* **Ab**.

Důkaz. Na objektech máme funktor definovaný. Musíme ukázat, že pro každé řetězcové zobrazení $\varphi : C_\bullet \to C'_\bullet$ máme indukovaný homomorfismus abelovských grup $\varphi_* \in \mathbf{Ab}(H_\bullet, H'_\bullet)$. Nechť $[\sigma] \in H_n$ je třída reprezentovaná n-cyklem $\sigma \in C_n$. Definujeme

$$\varphi_*[\sigma] = [\varphi(\sigma)]. \tag{2.29}$$

[2] Na $C_\bullet$ se díváme jako na abelovskou grupu $C_\bullet = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} C_n$.

Musí se ověřit, že je φ_* dobře definované. Zaprvé musí být $\varphi(\sigma)$ opět n-cyklus. Ale $\partial'_n(\varphi(\sigma)) = \varphi(\partial_n\sigma) = 0$, kde jsme využili toho, že φ je řetězcové zobrazení. Dál nesmí záviset na výběru reprezentanta. Pokud $[\sigma] = [\sigma']$, máme $\sigma' = \sigma + \partial_{n+1}\lambda$ a tedy $\varphi(\sigma') = \varphi(\sigma) + \partial'_{n+1}(\varphi(\lambda))$. Obrazy se tedy opět liší jen o hranici a φ_* je dobře definované zobrazení.

Zjevně jde o morfismus abelovských grup (protože φ jím z definice je) a na skládání se chová jak má. To dokazuje, že $(C_\bullet, \partial_\bullet) \mapsto H_\bullet$ je funktor. ∎

Lemma 2.4.3. *Přiřazení $X \mapsto H_\bullet(X) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n(X)$ je funktor z kategorie* **Top** *do* **Ab**.

Důkaz. Stačí ukázat, že přiřazení $X \mapsto (C_\bullet(X), \partial_\bullet)$ je funktor z **Top** do **Ch**. Každému spojitému zobrazení $\varphi \in \mathbf{Top}(X, Y)$ musíme přiřadit řetězcové zobrazení $\hat{\varphi} : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$. Jelikož $C_n(X)$ je volná abelovská grupa na n-simplexech, stačí definovat $\hat{\varphi}$ na n-simplexech $\sigma : \Delta^n \to X$. To je ale jednoduché, protože $\hat{\varphi}(\sigma) := \varphi \circ \sigma$ definuje spojité zobrazení z Δ^n do Y, tedy jeden z generátorů $C_n(Y)$. Musí se ukázat, že komutuje z hranicí. Ale to je triviální:

$$\partial_n(\hat{\varphi}(\sigma)) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \hat{\varphi}[\sigma]|_{\Delta^n_{(i)}} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\varphi \circ \sigma)|_{\Delta^n_{(i)}} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \varphi \circ (\sigma|_{\Delta^n_{(i)}}) = \hat{\varphi}(\partial_n \sigma). \quad (2.30)$$

Je triviální uvidět, že $\hat{\mathbf{1}}_X = \mathbf{1}$ a $\widehat{\varphi \circ \psi} = \hat{\varphi} \circ \hat{\psi}$, což dokazuje, že jsme právě definovali funktor z **Top** do **Ch**. Funktor z tvrzení je potom složení dvou funktorů $X \mapsto (C_\bullet(X), \partial_\bullet) \mapsto H_\bullet(X)$ a tedy automaticky funktor. Explicitně pro každé spojité zobrazení $\varphi \in \mathbf{Top}(X, Y)$ definujeme morfismus $\varphi_* \in \mathbf{Ab}(H_\bullet(X), H_\bullet(Y)$ jako $\varphi_*[\sigma] = [\hat{\varphi}(\sigma)] = [\varphi \circ \sigma]$. ∎

Důsledek 2.4.4. *Je-li $\varphi \in \mathbf{Top}(X, Y)$ homeomorfismus, je $\varphi_* : H_\bullet(X) \to H_\bullet(Y)$ izomorfismus abelovských grup. Singulární homologie je tedy topologický invariant!*

Singulární homologii můžeme počítat pro každou komponentu křivkové souvislosti X zvlášť, protože platí následující pozorování:

Lemma 2.4.5. *Každý topologický prostor je disjunktním sjednocením svých komponent křivkové souvislosti, $X = \bigsqcup_\alpha X_\alpha$. Potom $H_n(X) \cong \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$.*

Důkaz. Důkaz je zřejmý, pokud si člověk uvědomí, že pro každý n-simplex σ je $\sigma(\Delta^n) \subseteq X_\alpha$ pro nějaké α ze spojitosti zobrazení σ. Navíc $\partial_n\sigma$ je rovněž kombinace simplexů z podgrupy $C_{n-1}(X_\alpha)$ a výpočet $H_n(X)$ lze tedy dělat „po komponentách“. ∎

Důsledek 2.4.6. *Je-li $X = \bigsqcup_\alpha X_\alpha$, kde X_α jsou komponenty křivkové souvislosti X, máme $H_0(X) = \bigoplus_\alpha \mathbb{Z}$. Nultá singulární homologie tedy „počítá“ komponenty křivkové souvislosti X.*

Důkaz. Podle předchozího lemmatu stačí ukázat, že pro (neprázdný) křivkově souvislý prostor X máme $H_0(X) = \mathbb{Z}$. Grupa $C_0(X)$ je volná abelovská grupa na spojitých zobrazeních z jednobodové množiny Δ^0 do X. Tedy $C_0(X) = \mathbb{Z}X$ a 0-řetězce jsou konečné celočíselné kombinace bodů z X. 1-simplexy jsou spojitá zobrazení z Δ^1 do X, neboli spojité křivky z $\mathbf{Top}(I, X)$, a 1-řetězce $C_1(X)$ jsou jejich formální celočíselné kombinace.

Nechť $x_0 \in X$ je fixní význačný bod. Označme σ_x 0-simplex odpovídající bodu $x \in X$. Jelikož X je křivkově souvislý, existuje křivka $f \in \mathbf{Top}(I, X)$, taková, že $f(0) = x_0$ a $f(1) = x$. Nechť $\sigma_f \in C_1(X)$ je odpovídající 1-simplex. Snadno vidíme, že

$$\sigma_x = \sigma_{x_0} + (\sigma_x - \sigma_{x_0}) = \sigma_{x_0} + \partial_1 \sigma_f. \quad (2.31)$$

Odtud $[\sigma_x] = [\sigma_{x_0}]$ a celá grupa $H_0(X)$ je generovaná $[\sigma_{x_0}]$, neboli $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. ∎

Žádná podobná snadná interpretace neexistuje pro vyšší singulární homologické grupy. Nenajdeme mnoho příkladů, kde lze ty vyšší z definice spočítat. Jeden bychom však měli.

Příklad 2.4.7. Je-li X jednobodová množina, máme $H_0(X) = \mathbb{Z}$ a $H_n(X) = 0$ pro $n > 0$.

Zřejmě $C_n(X) = \mathbb{Z}\{\sigma_n\}$, kde $\sigma_n : \Delta^n \to X$ je jediný možný n-simplex zobrazující Δ^n do jednoho bodu. Operátor hranice ∂_n má tvar

$$\partial_n \sigma_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_{n-1} = (\sum_{i=0}^{n} (-1)^i) \cdot \sigma_{n-1} = \begin{cases} \sigma_{n-1} & \text{je-li } n \text{ sudé,} \\ 0 & \text{je-li } n \text{ liché.} \end{cases} \tag{2.32}$$

Náš řetězcový komplex je tedy posloupnost grup a zobrazení

$$\cdots \xrightarrow{\mathbf{1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbf{1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0 \tag{2.33}$$

Odtud hned vidíme, že (ve shodě s předchozím tvrzením) $H_0(X) = \mathbb{Z}$. Pro $k \geq 1$ pak

$$H_{2k}(X) = \ker(\mathbf{1}) / \operatorname{im}(0) = 0/0 = 0, \tag{2.34}$$

$$H_{2k-1}(X) = \ker(0) / \operatorname{im}(\mathbf{1}) = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = 0. \tag{2.35}$$

Poznámka 2.4.8. První singulární homologická grupa $H_1(X)$ souvisí velmi úzce s fundamentální grupou $\pi_1(X)$, předpokládáme-li křivkovou souvislost X. Skutečně, lze ukázat, že $H_1(X)$ je tzv. **abelizací grupy** $\pi_1(X)$.

Pro libovolnou grupu G lze sestrojit **komutátorovou podgrupu** $[G, G] \subseteq G$, definovanou jako nejmenší podgrupu obsahující všechny komutátory $[g, h] \equiv g^{-1}h^{-1}gh$. Je snadné ukázat, že $[G, G]$ je normální podgrupa a tedy má smysl definovat **abelizaci** G **jako**

$$G_{\mathbf{Ab}} = G/[G, G]. \tag{2.36}$$

Snadno se ukáže, že $G_{\mathbf{Ab}}$ je abelovská grupa a $G \mapsto G_{\mathbf{Ab}}$ je funktor z **Grp** do **Ab**. Toto pozorování může být užitečné. Například

$$\mathbb{Z}_2 = H_1^{\Delta}(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \cong H_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \cong \pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2)_{\mathbf{Ab}}, \tag{2.37}$$

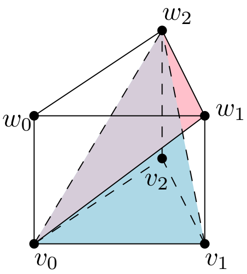
odkud hned vidíme, že $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \neq 0$ a prostor $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ není jednoduše souvislý. Ve skutečnosti se dá dokázat, že pro libovolnou topologickou křivkově souvislou varietu X je $\pi_1(X)$ automaticky abelovská a potom rovnou $\pi_1(X) \cong H_1(X)$.

Pro každé spojité zobrazení $\varphi \in \mathbf{Top}(X, Y)$ máme homomorfismus $\varphi_* : H_\bullet(X) \to H_\bullet(Y)$. Ukazuje se, že tento nezávisí na výběru reprezentanta příslušné třídy homotopických zobrazení:

Věta 2.4.9. *Nechť $\varphi, \varphi' \in \mathbf{Top}(X, Y)$ jsou homotopická zobrazení. Potom $\varphi_* = \varphi'_*$.*

Důsledek 2.4.10. *Je-li $\varphi \in \mathbf{Top}(X, Y)$ homotopická ekvivalence, je φ_* izomorfismus.*

Důkaz věty 2.4.9. Základem důkazu je si správně „triangulovat“ prostor $\Delta^n \times I$. Označme $[v_0, \ldots, v_n]$ a $[w_0, \ldots, w_n]$ n-simplexy odpovídající krajům $\Delta^n \times \{0\}$ a $\Delta^n \times \{1\}$, přičemž v_i a w_i mají stejný obraz v Δ^n vzhledem k projekcím, t.j. leží „proti sobě“.



Vyrobíme nyní posloupnost n-simplexů tím, že vždy přesuneme jeden z vrcholů v_i po úsečce $[v_i, w_i]$ do vrcholu w_i a začneme pro $i = n$. Nejprve tedy z $[v_0, \dots, v_n]$ vyrobíme $[v_0, \dots, v_{n-1}, w_n]$, potom $[v_0, \dots, v_{n-2}, w_{n-1}, w_n]$, atd. Celkem dostaneme n nových n-simplexů. V příkladu pro $n = 2$ na obrázku jsou to postupně $[v_0, v_1, w_2]$ (modrý) a $[v_0, w_1, w_2]$ (červený).

Typický krok tento konstrukce vyrábí z $[v_0, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n]$ přesunutím v_i do w_i simplex $[v_0, \dots, w_i, w_{i+1}, \dots, w_n]$. Oba dva n-simplexy jsou stěnou $(n+1)$-simplexu $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, v_n]$. V příkladu nahoře jsou 2-simplexy $[v_0, v_1, w_2]$ (modrý) a $[v_0, w_1, w_2]$ (červený) stěnami 3-simplexu (čtyřstěnu) $[v_0, v_1, w_1, w_2]$. Snadno si rozmyslíme, že $\Delta^n \times I$ lze psát jako sjednocení $n+1$ právě takto sestrojených $(n+1)$-simplexů $\Delta_{[i]} \equiv [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$. Podstatné je, že $\Delta_{[i]}$ a $\Delta_{[i+1]}$ spolu sousedí vždy právě jednou stěnou, a to n-simplexem $[v_0, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n]$.

Nechť $H : X \times I \to Y$ je homotopie zobrazení φ a φ'. Pro libovolný singulární simplex $\sigma : \Delta^n \to X$ můžeme sestrojit zobrazení $H \circ (\sigma \times \mathbf{1}) : \Delta^n \times I \to Y$. Pomocí něj a konstrukce výše můžeme sestrojit tzv. **hranolový operátor** $P : C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$ jako

$$P(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \{H \circ (\sigma \times \mathbf{1})\}|_{\Delta_{[i]}} \tag{2.38}$$

Všimněte si, že tento operátor zdvihá stupeň řetězce z singulárním komplexu o 1. Je klíčové si rozmyslet, jak se P chová vzhledem k operátoru hranice. Ukážeme si, že platí rovnost

$$\partial_{n+1} \circ P = \hat{\varphi}' - \hat{\varphi} - P \circ \partial_n, \tag{2.39}$$

kde $\hat{\varphi}[\sigma] = \varphi \circ \sigma$ je řetězcové zobrazení obou komplexů, podobně pro $\hat{\varphi}'$. Slovem **hranol** se typicky označuje $\Delta^n \times I$. Tuto rovnici si lze (intuitivně) představit jako tvrzení, že hranice hranolu $P(\sigma)$ je tvořena dvěma podstavami $\hat{\varphi}'(\sigma)$ a $\hat{\varphi}(\sigma)$ a hranolem vyrobeným z hranice, t.j. $P(\partial_n \sigma)$, přičemž znaménka jen zaručují správnou orientaci. Prostým dosazením dostáváme

$$\begin{aligned} \partial_{n+1} P(\sigma) = & \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_{n+1} (\{H \circ (\sigma \times \mathbf{1})\}|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}) \\ = & \sum_{j \le i} (-1)^{i+j} \{H \circ (\sigma \times \mathbf{1})\}|_{[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \\ & + \sum_{j \ge i} (-1)^{i+j+1} \{H \circ (\sigma \times \mathbf{1})\}|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n]}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Členy, kde $i = j$ tvoří jednoduchou sumu

$$\sum_{i=1}^{n} \left((-1)^{2i} \{H \circ (\sigma \times \mathbf{1})\}|_{[v_0, \dots, v_{i-1}, w_i, \dots, w_n]} + (-1)^{2i+1} \{H \circ (\sigma \times \mathbf{1})\}|_{[v_0, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n]} \right). \tag{2.41}$$

Vidíme, že se členy po dvojicích odečtou až na dva krajní odpovídající $i \in \{0, n\}$:

$$(-1)^0 \{H \circ (\sigma \times \mathbf{1})\}|_{[w_0, \dots, w_n]} = \varphi' \circ \sigma, \;\; (-1)^{2n+1} \{H \circ (\sigma \times \mathbf{1})\}|_{[v_0, \dots, v_n]} = -\varphi \circ \sigma. \tag{2.42}$$

Sčítance s $i = j$ tedy dávají přesně rozdíl obou podstav $\hat{\varphi}'(\sigma) - \hat{\varphi}(\sigma)$. Zbývající členy jsou přesně opak $P(\partial_n \sigma)$, protože $\partial_n \sigma = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n]}$ a Teda

$$\begin{aligned} P(\partial_n \sigma) = & \sum_{j<i} (-1)^{j+i-1} \{H \circ (\sigma \times \mathbf{1})\}|_{[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \\ & + \sum_{j>i} (-1)^{j+i} \{H \circ (\sigma \times \mathbf{1})\}|_{[v_0, \dots v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n]}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Tím jsme dokázali rovnici (2.39). Zbytek důkazu je nyní velice jednoduchý. Nechť $\sigma \in C_n(X)$ je libovolný n-cyklus. Máme ukázat, že $\varphi'_*[\sigma] = \varphi_*[\sigma]$. Ale

$$(\varphi'_* - \varphi_*)[\sigma] = [(\hat{\varphi}' - \hat{\varphi})(\sigma)] = [\partial_{n+1}(P(\sigma)) + P(\partial_n \sigma)] = [\partial_{n+1}(P(\sigma)) + P(0)] = 0. \tag{2.44}$$

Tímto můžeme považovat větu za dokázanou. ■

Důkaz je typickou ukázkou velmi obvyklé konstrukce v algebraické topologii. Chtěli jsme ukázat, že dvě řetězcová zobrazení $\hat{\varphi}$ a $\hat{\varphi}'$ z $C_n(X)$ do $C_n(Y)$ indukují stejné zobrazení $\varphi_* = \varphi'_*$ mezi příslušnými homotopiemi $H_n(X)$ a $H_n(Y)$. Sestrojili jsme zobrazení $P : C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$, které splňuje rovnici $\hat{\varphi}' - \hat{\varphi} = \partial_{n+1} \circ P + P \circ \partial_n$.

Takovému zobrazení P se říká **řetězcová homotopie** a řetězcová zobrazení $\hat{\varphi}'$ a $\hat{\varphi}$ jsou **řetězcově homotopická**. Jde o algebraický analog pojmu homotopie, člověk si snadno rozmyslí, že být řetězcově homotopický definuje relaci ekvivalence na prostoru $\mathbf{Ch}((C_\bullet, \partial_\bullet), (C'_\bullet, \partial'_\bullet))$ pro libovolné dva řetězcové komplexy $(C_\bullet, \partial_\bullet), (C'_\bullet, \partial'_\bullet)$.

Příklad 2.4.11. Nechť X je kontraktibilní prostor. Z definice má X homotopický typ bodu a existuje tedy homotopická ekvivalence $\varphi : X \to \{*\}$. Podle příkladu 2.4.7 a důsledku 2.4.10 tedy

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pro } n = 0, \\ 0 & \text{pro } n \geq 1. \end{cases} \tag{2.45}$$

2.5 Exaktní posloupnosti a vyříznutí

Je-li X topologický prostor a $A \subseteq X$ jeho uzavřená podmnožina, je přirozené se ptát, jak souvisí homologické grupy $H_n(A)$, $H_n(X/A)$ a $H_n(X)$. V ideálním světě by platilo, že $H_n(A)$ je podgrupa $H_n(X)$ a $H_n(X/A) \cong H_n(X)/H_n(A)$, což by ale při obecné platnosti tohoto tvrzení vedlo k trivialitě celé homologické teorie. Pro každý topologický prostor X můžeme uvažovat kužel

$$CX = (X \times I)/(X \times \{0\}). \tag{2.46}$$

Tento prostor je kontraktibilní do bodu (špičky kuželu) a zároveň $X \subseteq CX$. Pro $n > 0$ máme tedy $H_n(CX) = 0$ a nebylo by tedy příliš užitečné, kdyby obecně platilo $H_n(X) \subseteq H_n(CX) = 0$.

Uvažujme nyní následující užitečnou modifikaci singulární homologické teorie:

Definice 2.5.1. Pro libovolný *neprázdný* topologický prostor X definujeme $\epsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ vztahem $\epsilon(\sum_i n_i \sigma_i) = \sum_i n_i$. Pro libovolný 1-simplex σ je $\epsilon(\partial_1 \sigma) = \epsilon(\sigma|_{\Delta^1_{(0)}} - \sigma|_{\Delta^1_{(1)}}) = 1 - 1 = 0$. Můžeme tedy uvažovat **augmentovaný singulární komplex**:

$$\cdots \longrightarrow C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \tag{2.47}$$

Příslušná homologie $\widetilde{H}_n(X)$ se nazývá **redukovaná singulární homologie**. Zjevně $\widetilde{H}_n(X) = H_n(X)$ pro $n > 0$ a $\widetilde{H}_{-1}(X) = 0$. $\hat{\epsilon}[\sigma] = \epsilon(\sigma)$ je dobře definovaný epimorfismus z $H_0(X)$ do $\mathbb{Z}$ a $\widetilde{H}_0(X) \subseteq H_0(X)$ je jeho jádro. Tedy $H_0(X) \cong \widetilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$.

Je-li $\varphi : X \to Y$ spojité zobrazení, indukované zobrazení $\varphi_* : \widetilde{H}_0(X) \to \widetilde{H}_0(Y)$ můžeme definovat stejným předpisem, protože pokud $\sigma \in C_0(X)$ splňuje $\epsilon(\sigma) = 0$, pak $\epsilon'(\varphi \circ \sigma) = 0$.

Příklad 2.5.2. Pro křivkově souvislý topologický prostor je $\widetilde{H}_0(X) = 0$. Ukázali jsme totiž, že $H_0(X) = \mathbb{Z}[\sigma_{x_0}]$, kde $x_0 \in X$ je libovolný fixní bod. Potom $\hat{\epsilon}[\sigma_{x_0}] = 1$ je zjevně izomorfismus a má tedy triviální jádro $\widetilde{H}_0(X)$.

Velmi užitečným konceptem v algebraické topologii je exaktnost posloupností homomorfismů grup. Často umožní jednoduše formulovat několik předpokladů najednou.

Definice 2.5.3. Uvažujme posloupnost grup a homomorfismů

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} A_n \xrightarrow{\varphi_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots \tag{2.48}$$

Řekneme, že jde o **exaktní posloupnost**, pokud $\ker(\varphi_n) = \operatorname{im}(\varphi_{n+1})$ pro každé n.

Příklad 2.5.4. Platí následující tvrzení:

(i) Posloupnost $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B$ je exaktní, právě tehdy když je φ injektivní.

(ii) Posloupnost $A \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow 0$ je exaktní, právě tehdy když je φ surjektivní.

(iii) Posloupnost $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow 0$ je exaktní, právě tehdy když je φ izomorfismus.

(iv) Posloupnost $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$ je exaktní, právě tehdy když je φ injektivní, ψ surjektivní a $\ker \psi = \operatorname{im} \varphi$. Tento speciální případ se nazývá **krátká exaktní posloupnost**.

Věta 2.5.5. *Nechť X je topologický prostor a A jeho uzavřená podmnožina. Dále A musí být deformační retrakt nějakého okolí $U \subseteq X$. Dvojice (X, A) se nazývá **dobrý pár**. Potom existuje následující exaktní posloupnost redukovaných homologických grup:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \widetilde{H}_n(A) \arrow[r, "i_*"] & \widetilde{H}_n(X) \arrow[r, "q_*"] & \widetilde{H}_n(X/A) \arrow[dll, "\delta"] & & \\
& \widetilde{H}_{n-1}(A) \arrow[r, "i_*"] & \widetilde{H}_{n-1}(X) \arrow[r, "q_*"] & \widetilde{H}_{n-1}(X/A) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \widetilde{H}_0(X/A) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd} \tag{2.49}$$

kde $i \in \mathbf{Top}(A, X)$ je vnoření a $q \in \mathbf{Top}(X, X/A)$ faktor-zobrazení.

Poznámka 2.5.6. Příkladem dobrého páru je například každý CW pár (X, A), t.j. celulární komplex X společně s jeho libovolným podkomplexem A.

Důsledek 2.5.7 (Redukovaná homologie sfér). *Platí $\widetilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ a $\widetilde{H}_i(\mathbb{S}^n) = 0$ pro $i \neq n$.*

Důkaz. Stačí si vzít $(X, A) = (D^n, \mathbb{S}^{n-1})$. Zjevně se jedná o dobrý pár a $X/A = \mathbb{S}^n$. Protože D^n je kontraktibilní prostor, máme $\widetilde{H}_i(D^n) = 0$ pro všechny i. V exaktní posloupnosti (2.49) se pro každé $i > 0$ vyskytuje úsek

$$\cdots \xrightarrow{i_*} 0 \xrightarrow{q_*} \widetilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\delta} \widetilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{i_*} 0 \xrightarrow{q_*} \cdots, \tag{2.50}$$

jehož exaktnost okamžitě implikuje, že $\delta : \widetilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \to \widetilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ je izomorfismus. Odtud indukcí okamžitě plyne, že $\widetilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \cong \cdots \cong \widetilde{H}_0(\mathbb{S}^0) \cong \mathbb{Z}$. Pro $i < n$ je $\widetilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \cong \widetilde{H}_0(\mathbb{S}^{n-i}) = 0$, protože $\widetilde{S}^{n-i}$ je křivkově souvislá. Pro $i > n$ je $\widetilde{H}_i(\mathbb{S}^n) = \widetilde{H}_{i-n}(\mathbb{S}^0) = 0$, protože $\mathbb{S}^0$ je disjunktní sjednocení dvou bodů. ■

Důsledek 2.5.8 (Brouwerova věta o pevném bodě v dimenzi n). *Každé spojité zobrazení $\varphi : D^n \to D^n$ má pevný bod.*

Důkaz. V důkazu pro $n = 2$ jsme argumentovali, že stačí ukázat, že neexistuje retrakce $r : D^n \to \partial D^n \cong \mathbb{S}^{n-1}$. Pokud by existovala, máme $r \circ i = 1$ a tedy

$$\widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_{n-1}(D^n) \xrightarrow{r_*} \widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \tag{2.51}$$

definuje automorfismus grupy $\widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$. Ale prostřední člen $\widetilde{H}_{n-1}(D^n)$ je triviální grupa a tedy nutně i_* a r_* jsou triviální zobrazení, což vede ke sporu. ■

Větu 2.5.5 si podrobně nedokážeme, protože vynecháme nejtěžší část. Nejprve si ukážeme, že podobná dlouhá exaktní posloupnost existuje, když homologie X/A nahradíme jinou grupou, tzv. relativní homologií.

Definice 2.5.9. Pro libovolnou podmnožinu $A \subseteq X$ můžeme sestrojit faktorgrupu **relativních** n**-řetězců** $C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A)$. Protože $\partial_n(C_n(A)) \subseteq C_{n-1}(A)$, můžu přirozeně indukovat operátor **relativní hranice** $\partial_n : C_n(X, A) \to C_{n-1}(X, A)$. Dostávám řetězcový komplex

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X, A) \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0\ , \tag{2.52}$$

a příslušné $H_n(X, A) = \ker \partial_n / \operatorname{im} \partial_{n+1}$ se nazývají **grupy relativní homologie**.

Označme $q : C_n(X) \to C_n(X, A)$ přirozené faktor-zobrazení z definice relativních n-řetězců. Rovněž z definice dostáváme pro každé n komutativní diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{i} & C_n(X) & \xrightarrow{q} & C_n(X,A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle \partial} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \partial} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \partial} & & \\ 0 & \longrightarrow & C_{n-1}(A) & \xrightarrow{i} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{q} & C_{n-1}(X,A) & \longrightarrow & 0 \end{array}\ , \tag{2.53}$$

kde už dál nebudeme explicitně psát stupeň ∂. Oba řádky tvoří krátkou exaktní posloupnost. Označme $A_n = C_n(A)$, $B_n = C_n(X)$ a $C_n = C_n(X, A)$. Jelikož tohle platí pro každé n, můžeme vyrobit komutativní „superdiagram“:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & A_n & \xrightarrow{\partial} & A_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle i} & & \Big\downarrow{\scriptstyle i} & & \Big\downarrow{\scriptstyle i} & & \\ \cdots & \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & B_n & \xrightarrow{\partial} & B_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle q} & & \Big\downarrow{\scriptstyle q} & & \Big\downarrow{\scriptstyle q} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & C_n & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array} \tag{2.54}$$

Stojí za povšimnutí, že i a q lze interpretovat jako řetězcová zobrazení. Přirozeně tedy indukují zobrazení příslušných homologií $i_* : H_\bullet(A) \to H_\bullet(B)$ a $q_* : H_\bullet(B) \to H_\bullet(C)$. Klíčové je následující obecně platné pozorování:

Tvrzení 2.5.10 (Hadí lemma). *Uvažujme scénář jako v diagramu (2.54). Potom pro každé n existuje tzv.* ***spojující homomorfismus*** $\delta : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$ *takový, že*

$$
\begin{tikzcd}
\cdots & H_{n+1}(A) \arrow[d, "i_*"] & H_n(A) \arrow[d, "i_*"] & H_{n-1}(A) \arrow[d, "i_*"] & \cdots \\
\cdots & H_{n+1}(B) \arrow[d, "q_*"] & H_n(B) \arrow[d, "q_*"] & H_{n-1}(B) \arrow[d, "q_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[uur, dashed] & H_{n+1}(C) \arrow[uur, dashed, "\delta"] & H_n(C) \arrow[uur, dashed, "\delta"] & H_{n-1}(C) \arrow[uur, dashed] & \cdots
\end{tikzcd}
\tag{2.55}
$$

je dlouhá exaktní posloupnost.

Důkaz. Sestrojíme zobrazení $\delta : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$. Uvažujme tedy $[c] \in H_n(C)$ pro nějaké $c \in C_n$. Z předpokladu je q surjektivní a tedy $c = q(b)$ pro nějaké $b \in B_n$. Potom ale $q(\partial b) = \partial(q(b)) = \partial c = 0$, protože c je n-cyklus. Z exaktnosti $\partial b \in \ker(q) = \operatorname{im}(i)$ a tedy nutně existuje (právě jedno) $a \in A_{n-1}$ splňující $\partial b = i(a)$. Definujeme $\delta[c] = [a]$.

V průběhu jsme činili několik voleb, musíme ukázat, že definice δ je na nich nezávislá. Nechť $b' \in B_n$ také splňuje $q(b') = c$. Protože $q(b' - b) = 0$, existuje z exaktnosti (právě jedno) $k \in A_n$, že $b' = b + i(k)$. Stejně jako předtím máme $\partial b' = i(a')$ pro unikátní $a' \in A_{n-1}$. Potom ale

$$
i(a') = \partial(b') = \partial(b + i(k)) = i(a + \partial k), \tag{2.56}
$$

protože i komutuje s hranicí. Jelikož je z exaktnosti i prosté, máme $a' = a + \partial k$, tedy $[a'] = [a]$.

Dál musíme vyřešit závislost na výběru reprezentanta třídy $[c]$. Nechť $[c'] = [c]$, neboli $c' = c + \partial n$ pro $n \in C_{n+1}$. Protože q je surjektivní, existuje $m \in B_{n+1}$ splňující $q(m) = n$. Můžeme tedy psát $c' = c + \partial n = c + \partial(q(m)) = c + q(\partial m)$. Je-li $c = q(b)$, máme tedy $c' = q(b + \partial m)$. Podle konstrukce popsané výše najdeme a' řešící rovnici $i(a') = \partial(b + \partial m) = \partial b = i(a)$. Z injektivity i ale $a' = a$. Zobrazení δ je tedy dobře definované. Ve zbytku důkazu je třeba objasnit exaktnost sekvence výše. Musíme ukázat trojici vlastností

(i) $\ker(q_*) = \operatorname{im}(i_*)$: Jelikož $q \circ i = 0$ a tedy $q_* \circ i_* = 0$, jedna inkluze je zřejmá. Opačně, nechť $q_*[b] = 0$, což implikuje $q(b) = \partial k$ pro $k \in C_{n+1}$. Protože je q surjektivní, existuje $m \in B_{n+1}$ splňující $k = q(m)$. Potom ale $q(b - \partial m) = 0$. Z exaktnosti máme $a \in A_n$ splňující rovnici $b - \partial m = i(a)$. Ověříme, že a je cyklus. Máme $i(\partial a) = \partial(i(a))\partial(b - \partial m) = \partial b = 0$, protože b reprezentuje třídu homologie. Z injektivity i je $\partial a = 0$. Konečně, $[b] = [i(a) + \partial m] = [i(a)] = i_*[a]$. To dokazuje druhou inkluzi.

(ii) $\ker(\delta) = \operatorname{im}(q_*)$: Nejprve ukážeme, že $\delta \circ q_* = 0$. Nechť $[c] = q_*[b]$ pro $b \in B_n$. Jelikož b reprezentuje homologickou třídu, máme $\partial b = 0$. Ale a v definici δ bylo unikátní řešení rovnice $\partial b = i(a)$. Nutně tedy $a = 0$ a $\delta[c] = [a] = 0$. Opačně, nechť $\delta[c] = 0 = [\partial x]$ pro nějaké $x \in A_n$. Ale ∂x je jednoznačné řešení rovnice $\partial b = i(\partial x)$ pro nějaké $b \in B_n$ splňující $q(b) = c$. Odtud $\partial(b - i(x)) = 0$. Potom $q_*[b - i(x)] = [q(b - i(x))] = [c]$. Tím jsme dokázali opačnou inkluzi $\ker(\delta) \subseteq \operatorname{im}(q_*)$.

(iii) $\operatorname{im}(\delta) = \ker(i_*)$: Rovnice $i_* \circ \delta = 0$ je opět jednoduchá, protože $i_*(\delta[c]) = i_*[a] = [i(a)] = [\partial b] = 0$. Naopak, nechť $i_*[a] = 0$ pro nějaký cyklus $a \in A_{n-1}$. To ale znamená, že $i(a) = \partial b$ pro nějaké $b \in B_n$. Dostáváme $\partial(q(b)) = q(\partial b) = q(i(a)) = 0$. Vidíme, že $q(b)$ může reprezentovat třídu $[q(b)]$. Z konstrukce zřejmě $\delta[q(b)] = [a]$ a opačná inkluze je dokázána.

Nalezli jsme hada a jsme hotovi. ■

Důsledek 2.5.11. *Pro každý topologický prostor X a jeho libovolnou podmnožinu A dostáváme dlouhou exaktní posloupnost homologických grup*

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] & H_n(X) \arrow[r, "q_*"] & H_n(X,A) \arrow[dll, bend right, "\delta"'] & & & \\ & H_{n-1}(A) \arrow[r, "i_*"] & H_{n-1}(X) \arrow[r, "q_*"] & H_{n-1}(X,A) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & H_0(X,A) \arrow[r] & 0, \end{tikzcd} \tag{2.57}$$

kde $i \in \mathbf{Top}(A, X)$ je inkluze a q_* je indukované zobrazením $q : C_n(X) \to C_n(X, A)$.

Poznámka 2.5.12. Pro $A \neq \emptyset$ můžeme úplně stejně odvodit dlouhou exaktní sekvenci redukovaných homologií, kde se ve stupni -1 přidá krátká exaktní sekvence

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbf{1}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0. \tag{2.58}$$

Zejména platí $\widetilde{H}_n(X, A) = H_n(X, A)$ pro *každé* n. Konečně, pro libovolné neprázdné podmnožiny $B \subseteq A \subseteq X$ můžeme uvažovat krátkou exaktní posloupnost

$$0 \longrightarrow C_n(A, B) \xrightarrow{i} C_n(X, B) \xrightarrow{q} C_n(X, A) \longrightarrow 0, \tag{2.59}$$

a pomocí hadího lemmatu dostáváme dlouhou exaktní posloupnost s relativními homologickými grupami $H_n(A, B)$, $H_n(X, B)$ a $H_n(X, A)$. Pro $B = \{a\} \subseteq A$ dostaneme dlouhou posloupnost redukovaných homologií.

Příklad 2.5.13. Pro libovolný bod $x_0 \in X$ můžeme uvažovat dlouhou exaktní sekvenci redukovaných homologických grup pro dvojici (X, x_0). Protože $\widetilde{H}_n(x_0) = 0$ pro všechny n, dostáváme exaktní úseky ve tvaru

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}_n(X) \xrightarrow{q_*} H_n(X, x_0) \longrightarrow 0, \tag{2.60}$$

což dokazuje, že $H_n(X, x_0) \cong \widetilde{H}_n(X)$.

Důkaz věty 2.5.5 využívá následující klíčovou vlastnost singulární homologie, jejíž důkaz je dalece nad rámec této přednášky. Poznamenejme, že podobně jako pro singulární homologie, každé zobrazení $\varphi : X \to Y$ které splňuje $\varphi(A) \subseteq B$ pro nějaké podmnožiny $A \subseteq X$ a $B \subseteq Y$, indukuje homomorfismus $\varphi_* : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$.

Věta 2.5.14 (Věta o vyříznutí). *Pro libovolné množiny $Z \subseteq A \subseteq X$, kde uzávěr Z je ve vnitřku A. Potom vnoření $(X - Z, A - Z) \mapsto (X, A)$ indukuje izomorfismus relativních homologických grup $H_n(X - Z, A - Z) \mapsto H_n(X, A)$ pro každé $n \geq 0$.*

Abychom dokázali větu 2.5.5, zbývá ukázat, že relativní grupy $H_n(X, A)$ a a redukované grupy $\widetilde{H}_n(X/A)$ jsou pro dobrý pár (X, A) izomorfní.

Tvrzení 2.5.15. *Pro dobrý pár (X, A) zobrazení $q : (X, A) \to (X/A, A/A)$ indukuje izomorfismus grup $q_* : H_n(X, A) \to H_n(X/A, A/A)$.*

Důkaz. Nechť $U \subseteq X$ je okolí uzavřené podmnožiny A která je jeho deformačním retraktem. Můžeme uvažovat komutativní diagram

$$\begin{tikzcd} H_n(X,A) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "q_*"] & H_n(X,U) \arrow[d, "q_*"] & H_n(X-A,U-A) \arrow[l] \arrow[d, "q_*"] \\ H_n(X/A,A/A) \arrow[r] & H_n(X/A,U/A) & H_n(X/A-A/A,U/A-A/A) \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{2.61}$$

Celý problém je v tom, že větu o vyříznutí nemůžeme použít přímo, ale musíme umět „obalit“ množinu A otevřeným okolím, které se na ni dokáže spojitě „smrsknout“. Ukážeme, že všechny horizontální šipky jsou izomorfismy, a nejpravější q_* také. Komutativita zajistí, že homomorfismus označený přerušovaně je izomorfismus.

Levá horní horizontální šipka je izomorfismus protože trojice (A,U,X) dle poznámky 2.5.12 indukuje dlouhou exaktní posloupnost

$$\cdots \longrightarrow H_n(U,A) \longrightarrow H_n(X,A) \longrightarrow H_n(X,U) \longrightarrow H_{n-1}(U,A) \longrightarrow \cdots . \tag{2.62}$$

Deformační retrakce U na A indukuje homotopickou ekvivalenci dvojic[3] (U,A) a (A,A). Stejně jako pro singulární grupy platí $H_n(U,A) \cong H_n(A,A) = 0$. Krajní členy v posloupnosti výše jsou tedy triviální a prostřední šipka je isomorfismus. Protože U/A je zjevně deformačním retraktem A/A, stejný argument lze použít na levou dolní horizontální šipku.

Obě pravé horizontální šipky nejsou nic jiného než izomorfismy z věty o vyříznutí. Konečně, nejpravější q_* je izomorfismus, protože restrikce q na $X-A$ je homeomorfismus topologických prostorů $X-A$ a $X/A-A/A$. Tím máme tvrzení dokázané. ■

Dokončení důkazu věty 2.5.5. Označme po zbytek důkazu

$$q : X \to X/A, \tag{2.63}$$
$$q' : \widetilde{C}_n(X) \to C_n(X,A), \tag{2.64}$$
$$q'' : \widetilde{C}_n(X/A) \to C_n(X/A,A/A). \tag{2.65}$$

Dostáváme následující komutativní diagram řetězcových zobrazení:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{C}_n(X) \arrow[r, "\hat{q}"] \arrow[d, "q'"] & \widetilde{C}_n(X/A) \arrow[d, "q''"] \\ C_n(X,A) \arrow[r, "\hat{q}"] & C_n(X/A,A/A) \end{tikzcd} \tag{2.66}$$

Aplikací funktoru singulární (redukované a relativní) homologie na tento diagram dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ komutativní diagram

$$\begin{tikzcd} \widetilde{H}_n(X) \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, "q'_*"] & \widetilde{H}_n(X/A) \arrow[d, "q''_*"] \\ H_n(X,A) \arrow[r, "q_*"] & H_n(X/A,A/A) \end{tikzcd} \tag{2.67}$$

[3] Homotopická ekvivalence prostorů, kde homotopie pro každé t zachovávají podmnožiny.

Dolní horizontální šipka je izomorfismus díky předchozímu tvrzení a pravá vertikální šipka je izomorfismus díky příkladu 2.5.13. Spojovací homomorfismus $\delta : \widetilde{H}_n(X/A) \to \widetilde{H}_{n-1}(A)$ můžeme nyní sestrojit pomocí spojovacího homomorfismus $\delta' : H_n(X,A) \to \widetilde{H}_{n-1}(A)$ z dlouhé exaktní posloupnosti pro relativní homologie, t.j. doplníme na komutativní diagram

$$\begin{tikzcd} \widetilde{H}_n(X) \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, "q'_*"] & \widetilde{H}_n(X/A) \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, "q''_*"] & \widetilde{H}_{n-1}(A) \\ H_n(X,A) \arrow[r, "q_*"] \arrow[urr, bend right, "\delta'"'] & H_n(X/A, A/A) & \end{tikzcd} . \tag{2.68}$$

Z konstrukce je jasné, že výsledná dlouhá posloupnost bude exaktní. Nyní lze explicitně nalézt fungování δ. Je-li $[\sigma] \in \widetilde{H}_n(X/A)$, můžu pomocí tuto třídu izomorfně zobrazit do $H_n(X,A)$. Tato třída je reprezentovaná elementem $q'(\sigma') \in C_n(X,A)$ pro nějaké $\sigma' \in \widetilde{C}_n(X)$. Z konstrukce je $q_*[q'(\sigma')] \equiv [q''(q \circ \sigma')] = [q''(\sigma)]$. To ale znamená, že $q''_*([q \circ \sigma']) = q''_*[\sigma]$ a tady $[q \circ \sigma'] = [\sigma]$.

Protože $q'(\sigma')$ reprezentuje třídu relativní homologie, musí být $\partial\sigma' \in \widetilde{C}_{n-1}(A)$. Z definice δ' v důkazu hadího lemma je tedy $\delta([\sigma]) = \delta'([q'(\sigma')]) = [\partial\sigma']$. ■

Věta 2.5.16 (Věta o invariance dimenze, Brouwer cca 1910). *Jsou-li $U \subseteq \mathbb{R}^n$ a $V \subseteq \mathbb{R}^m$ dvě homeomorfní otevřené množiny, je $m = n$.*

Důkaz. nechť $x \in U$. Potom $H_k(U, U - \{x\}) \cong H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\})$ podle věty o vyříznutí. Z dlouhé exaktní posloupnosti (2.57) pro dvojici $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\})$ dostáváme $H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\}) \cong \widetilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^n - \{x\}) \cong \widetilde{H}_{k-1}(\mathbb{S}^{n-1})$, kde jsme využili, že $\mathbb{S}^{n-1}$ je deformační retrakt $\mathbb{R}^n - \{x\}$. Podle důsledku 2.5.7 tedy $H_n(U, U - \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ a všechny ostatní jsou nula.

Libovolný homeomorfismus $\varphi : U \to V$ ale indukuje izomorfismus relativních homologických grup $H_k(U, U - \{x\})$ a $H_k(V, V - \{\varphi(x)\})$. Odtud snadno vidíme, že nutně $m = n$. ■

Na závěr této sekce si spočítáme ještě dva příklady, které budeme potřebovat v sekci následující.

Příklad 2.5.17. Ukažme si relativní singulární homologii páru $H_i(D^n, \partial D^n)$. Tvrdíme, že

$$H_n(D^n, \partial D^n) = \mathbb{Z}, \quad H_i(D^n, \partial D^n) = 0 \text{ pro } i \neq n. \tag{2.69}$$

Toto se nejjednodušeji dokáže z dlouhé exaktní sekvence pro redukované homologie. Dostáváme tam exaktní úseky ve tvaru

$$\widetilde{H}_i(\partial D^n) \longrightarrow \widetilde{H}_i(D^n) \longrightarrow H_i(D^n, \partial D^n) \longrightarrow \widetilde{H}_{i-1}(\partial D^n) \longrightarrow \widetilde{H}_{i-1}(D^n) \tag{2.70}$$

Pro $i = n$ využijeme toho, že $\widetilde{H}_{n-1}(\partial D^n) = \widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = \mathbb{Z}$ a dostáváme exaktní posloupnost

$$0 \longrightarrow H_n(D^n, \partial D^n) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \tag{2.71}$$

z které plyne první tvrzení. Pro $i \neq n$ je místo $\mathbb{Z}$ nula, z čehož plyne druhé tvrzení.

Příklad 2.5.18. Spočítali jsme, že $H_n(D^n, \partial D^n)$ je netriviální grupa izomorfní $\mathbb{Z}$, t.j. jsou volně generované jednou homologickou třídou. Někdy je užitečné nalézt explicitní předpis pro n-cyklus který ji reprezentuje.

Dvojici $(D^n, \partial D^n)$ je užitečné nahradit ekvivalentní (homeomorfní) dvojicí $(\Delta^n, \partial\Delta^n)$. V singulárním komplexu $C_n(\Delta^n)$ vždy máme n-simplex $\mathbf{1}_n : \Delta^n \to \Delta^n$. Z definice mají všechny simplexy tvořící hranici $\partial\mathbf{1}_n$ hodnoty v $\partial\Delta^n$, z čehož plyne, že $\mathbf{1}_n$ reprezentuje relativní n-cyklus v $C_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$, označme ho jako $\mathbf{1}'_n$. Tvrdíme, že $[\mathbf{1}'_n] \in H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ je generátor.

To se ukáže indukcí podle n. Pro $n = 0$ lze tvrzení snadno vidět přímo z definice. Uvažujme tedy $n > 0$ libovolné. Symbolem Λ označme podmnožinu $\partial\Delta^n$ tvořenou všemi stěnami Δ^n kromě jedné. Tvrdíme, že šipky v následujícím diagramu jsou izomorfismy:

$$H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \longrightarrow H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \longleftarrow H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) \tag{2.72}$$

Levá šipka je spojující homomorfismus v dlouhé exaktní posloupnosti pro trojici $\Lambda \subset \partial\Delta^n \subset \Delta^n$:

$$H_n(\partial\Delta^n, \Lambda) \longrightarrow H_n(\Delta^n, \Lambda) \longrightarrow H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \longrightarrow H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \longrightarrow H_{n-1}(\Delta^n, \Lambda) \tag{2.73}$$

Dá se snadno uvidět, že Λ je deformační retrakt Δ^n, odtud ale $H_i(\Delta^n, \Lambda) \cong H_i(\Lambda, \Lambda) = 0$. To mi dává dvě nuly v posloupnosti výše a ukazuje, že spojující homomorfismus je izomorfismus.

Druhá šipka je indukovaná inkluzí stěny $i : \Delta^{n-1} \to \partial\Delta^n$ kterou jsme vynechali v definici Λ. Potom $i(\partial\Delta^{n-1}) \subseteq \Lambda$, máme zobrazení párů a tedy i indukovaný homomorfismus relativních homologií $i_* : H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) \to H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda)$. Pro $n = 1$ platí izomorfismus už na úrovni řetězcových komplexů $C_0(\Delta^0) \to C_0(\partial\Delta^1, \Lambda)$, stačí uvažovat $n > 1$. Potom ale $(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$ a $(\partial\Delta^n, \Lambda)$ jsou dobré páry. Dostáváme tedy komutativní diagram

$$\begin{tikzcd} H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \arrow[d] \\ H_{n-1}(\Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1}) \arrow[r, dashed] & H_{n-1}(\partial\Delta^n/\Lambda), \end{tikzcd} \tag{2.74}$$

kde přerušovaná šipka je indukovaná zobrazením $\hat{i} : \Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1} \to \partial\Delta^n/\Lambda$, které pochází z injektivního vnoření Δ^{n-1} do $\partial\Delta^n$. Snadno je vidět, že $\hat{i}$ je homeomorfismus, což ihned implikuje, že přerušovaná šipka v diagramu nahoře je izomorfismus.

Zbytek důkazu je jednoduchou aplikací indukčního předpokladu. Homologická třída $[\mathbf{1}'_n]$ se spojujícím *izomorfismem* zobrazí na třídu (viz. důkaz hadího lemma) $[\partial\mathbf{1}'_n] \in H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda)$. V závislosti na tom, kterou přesně stěnu jsme vyndali při definici Λ je ale tato třída rovná $\pm[\mathbf{1}'_{n-1}]$, které podle indukčního předpokladu generují $H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$ a tedy i $H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda)$. Vidíme, že $[\mathbf{1}'_n]$ je izomorfním obrazem (až na znaménko) generátoru, a tedy rovněž generátor.

2.6 Singulární versus simpliciální

V předchozí sekci jsme si připravili půdu pro důkaz klíčového tvrzení této kapitoly. Uvažujme nejprve Δ-komplex X a jeho podkomplex A. Podkomplexem rozumíme sjednocení nějakých simplexů z X rovněž tvořící Δ-komplex. Z logiky věci (simpliciální homologie funguje stejně jako singulární, jen používá méně simplexů) můžeme definovat **relativní simpliciální homologii** $H_n^\Delta(X, A)$ jako homologii řetězcového komplexu $\Delta_n(X, A) = \Delta_n(X)/\Delta_n(A)$. Naprosto analogicky pak můžeme sestavit příslušné krátké exaktní posloupnosti a použít hadí lemma na získání dlouhé exaktní sekvence s grupami $H_n^\Delta(A)$, $H_n^\Delta(X)$ a $H_n^\Delta(X, A)$.

Jelikož každý n-simplex $\sigma_\alpha : \Delta^n \to X$ v Δ-komplexu X je z definice singulární simplex v X, snadno dostáváme kanonické řetězcové zobrazení $\Delta_n(X, A) \to C_n(X, A)$, které indukuje homomorfismus grup $H_n^{\Delta}(X,A) \to H_n(X,A)$. Nyní si ukážeme, že toto zobrazení je izomorfismus. Volbou $A = \emptyset$ pak snadno dostaneme tvrzení pro absolutní homologie.

Věta 2.6.1. *Homomorfismy $H_n^{\Delta}(X,A) \to H_n(X,A)$ jsou izomorfismy pro libovolné n a všechny dvojice Δ-komplexů (X,A).*

Důkaz. Důkaz si ukážeme pouze pro konečněrozměrný Δ-komplex X, t.j. $X = X^m$ pro nějaké $m \geq 0$. Tvrzení platí obecně, jen se musí trošku více pracovat s topologií celulárních komplexů. Uvažujme nejprve $A = \emptyset$. Indukcí podle k dokážeme, že zobrazení $H_n^{\Delta}(X^k) \to H_n(X^k)$ je izomorfismus. Pro $k = 0$ je tvrzení zřejmé, protože izomorfní už jsou i grupy 0-řetězců $\Delta_n(X^0)$ a $C_n(X^0)$. Tím je hotový nultý krok indukce.

Nechť tedy $k > 0$ a tvrzení platí pro všechny nižší kostry. $X^{k-1} \subseteq X^k$ je podkomplex a dostáváme komutativní diagram exaktních posloupností:

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{n+1}^{\Delta}(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n^{\Delta}(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n^{\Delta}(X^k) & \longrightarrow & H_n^{\Delta}(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\Delta}(X^{k-1}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{n+1}(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^k) & \longrightarrow & H_n(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^{k-1}). \end{array} \tag{2.75}$$

Ukážeme, že všechny vertikální šipky kromě té prostřední jsou izomorfismy. Druhá a pátá šipka jsou izomorfismy z indukčního předpokladu. Ukažme si, že první a čtvrtá šipka jsou izomorfismy.

Nejprve je třeba si uvědomit, že grupa relativních n-řetězců $\Delta_n(X^k, X^{k-1})$ je triviální pro $n \neq k$ a $\Delta_k(X^k, X^{k-1})$ je volná abelovská grupa na k-simplexech tvořících Δ-komplex X. Totéž ale musí platit pro simpliciální homologické grupy $H_n^{\Delta}(X^k, X^{k-1})$.

Singulární relativní homologie $H_n(X^k, X^{k-1})$ můžeme vypočítat následujícím trikem. Uvažujme spojité zobrazení $\Phi : \coprod_\alpha (\Delta_\alpha^k, \partial\Delta_\alpha^k) \to (X^k, X^{k-1})$ které je poskládané z k-simplexů $\sigma_\alpha : \Delta^k \to X$ tvořících Δ-komplex X. To zřejmě indukuje homomorfismus grup a komutativní diagram

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_\alpha H_n(\Delta_\alpha^k, \partial\Delta_\alpha^k) & \xrightarrow{\Phi_*} & H_n(X^k, \partial X^k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_\alpha \widetilde{H}_n(\Delta_\alpha^k / \partial\Delta_\alpha^k) & \xrightarrow{\hat{\Phi}_*} & \widetilde{H}_n(X^k / X^{k-1}), \end{array} \tag{2.76}$$

kde $\hat{\Phi} : \coprod_\alpha \Delta_\alpha^k / \partial\Delta_\alpha^k \to X^k / X^{k-1}$ je homeomorfismus (každý k-simplex $\sigma_\alpha : \Delta^k \to X$ je zobrazuje $\Delta^k - \partial\Delta^k$ homeomorfně do X). Potom ale $\hat{\Phi}_*$ je izomorfismus a obě vertikální šipky rovněž, jak plyne z tvrzení 2.5.15. To dokazuje, že Φ_* je izomorfismus.

To dokazuje, že $H_n(X^k, \partial X^k)$ je triviální pro $n \neq k$ a $H_k(X^k, \partial X^k)$ je generovaná Φ_*-obrazy generátorů grupy $\bigoplus_\alpha H_n(\Delta_\alpha^k, \partial\Delta_\alpha^k)$. Podle příkladu je každá kopie $H_n(X_\alpha^k, \partial\Delta_\alpha^k)$ generovaná třídou $[\mathbf{1}_k']_\alpha$ reprezentovanou k-simplexem $\mathbf{1}_k : \Delta^k \to \Delta^k$. Potom ale

$$\Phi_*[\mathbf{1}_k']_\alpha = [\Phi \circ \mathbf{1}_k] = [\sigma_\alpha] \tag{2.77}$$

Ukázali jsme, že $H_k(X^k, \partial X^k)$ je grupa generovaná třídami $[\sigma_\alpha]$ reprezentovanými k-simplexy $\sigma_\alpha : \Delta^k \to X$ Δ-komplexu. To ale dokazuje, že indukované zobrazení z $H_n^{\Delta}(X^k, X^{k-1})$ do $H_n(X^k, X^{k-1})$ zobrazuje generátory na generátory, a tedy je izomorfismus.

Poslední krok je ukázat, že i prostřední krok je izomorfismus. To plyne z následujícího všeobecného tvrzení o morfismech exaktních posloupností:

Lemma 2.6.2 (O pěti izomorfismech). *Uvažujme následující komutativní diagram grup a jejich homomorfismů:*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_5 \\ \downarrow{\scriptstyle\gamma_1} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma_2} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma_3} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma_4} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma_5} \\ B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_5 \end{array}, \tag{2.78}$$

kde obě horizontální posloupnosti jsou exaktní a $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4$ a γ_5 jsou izomorfismy.

Potom i γ_3 (vyznačený přerušovanou čarou) je izomorfismus.

Důkaz. Důkaz je klasickým „honěním diagramu". Předpoklady lze trošku zjemnit:

(i) γ_3 je injektivní, je-li γ_2 a γ_4 injektivní a γ_1 surjektivní.

(ii) γ_3 je surjektivní, je-li γ_2 s γ_4 surjektivní a γ_5 injektivní.

Krajní zobrazení tedy nemusí být nutně izomorfismy. Pojďme si dokázat obě části.

Ad (i): Nechť $\gamma_3(a) = 0$. Odtud $(\beta_3 \circ \gamma_3)(a) = (\gamma_4 \circ \alpha_3)(a) = 0$. Protože je γ_4 injektivní, je nutně $\alpha_3(a) = 0$. Z exaktnosti posloupnosti vyplývá, že nutně existuje $k \in A_2$, takové že $a = \alpha_2(k)$. Potom $(\beta_2 \circ \gamma_2)(k) = (\gamma_3 \circ \alpha_2)(k) = 0$. Z exaktnosti dolní posloupnosti $\gamma_2(k) = \beta_1(b)$ pro nějaké $b \in B_1$. Ze surjektivity γ_1 nacházíme $m \in A_1$, že $\gamma_1(m) = b$. Potom $(\gamma_2 \circ \alpha_1)(m) = (\beta_1 \circ \gamma_1)(m) = \beta_1(b)$. Ale γ_2 je injektivní a tedy $\gamma_1(m) = k$. Konečně, dostáváme $a = \alpha_2(k) = \alpha_2(\alpha_1(m)) = 0$, kde jsme použili exaktnost horní sekvence.

Ad (ii): Nechť $b \in B_3$ je libovolné. Ze surjektivity γ_4 pak existuje $k \in A_4$, že $\gamma_4(k) = \beta_3(b)$. Potom ale $(\gamma_5 \circ \alpha_4)(k) = (\beta_4 \circ \gamma_4)(k) = (\beta_4 \circ \beta_3)(b) = 0$, kde jsme využili exaktnost dolní posloupnosti. Z injektivity γ_5 potom nutně $\alpha_4(k) = 0$. Z exaktnosti horní posloupnosti potom existuje $a' \in A_3$, že $k = \alpha_3(b')$. Odtud $(\beta_3 \circ \gamma_3)(a') = (\gamma_4 \circ \alpha_3)(a') = \beta_3(b)$. Vidíme, že $b - \gamma_3(a') \in \ker(\beta_3)$. Z exaktnosti dolní posloupnosti existuje $c \in B_2$, že $\beta(c) = b - \gamma_3(a')$. Konečně, ze surjektivity γ_2 plyne existence $m \in A_2$, že $\gamma_2(m) = c$. Definujeme $a = a' + \alpha_2(m)$. Máme $\gamma_3(a) = \gamma_3(a') + (\gamma_3 \circ \alpha_2)(m) = \gamma_3(a') + (\beta_2 \circ \gamma_2)(m) = \gamma_3(a') + b - \gamma_3(a') = b$. Našli jsme vzor b a jsme hotovi. ∎

Jednoduchou aplikací právě dokázaného lemmatu vidíme, že prostřední šipka v (2.75) je izomorfismus a indukční krok je dokončen. Pro konečněrozměrné X tedy máme zcela dokázán příklad $A = \emptyset$. Případ netriviálního A je ovšem triviální, stačí použít lemma o pěti homomorfismech na komutativní diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} H_n^{\Delta}(A) & \longrightarrow & H_n^{\Delta}(X) & \longrightarrow & H_n^{\Delta}(X,A) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\Delta}(A) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\Delta}(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X,A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) \end{array}, \tag{2.79}$$

kde všechny šipky až na prostřední jsou již izomorfismy. A máme hotovo. ∎

Důsledek 2.6.3. *Jako vedlejší produkt jsme ukázali, že $H_n(X)$ je* ***konečně generovaná abelovská grupa*** *kdykoliv má X konečně mnoho n-simplexů. Je známá věc, že každá konečně generovaná abelovská grupa G je izomorfní*

$$G \cong \mathbb{Z}^q \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{k_m}, \tag{2.80}$$

kde $q \geq 0$ a $k_1, \dots, k_m$ celá čísla ostře větší než 1 taková, že k_i vždy dělí k_{i+1}. Koeficient q se značí jako $\operatorname{rank}(G)$ *a pro $G = H_n(X)$ nazývá n-**té Bettiho číslo prostoru** X a značí jako $b_n(X)$. m-tice čísel $(k_1, \dots, k_m)$ (uspořádané, s opakováním) celých čísel se nazývají **torzní koeficienty**.*

2.7 Nějaké aplikace

Nyní si můžeme ukázat nějaké známé využití homologické teorie. Umožňuje například zkoumat spojitá zobrazení na sféře.

Definice 2.7.1. Nechť $f \in \mathbf{Top}(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n)$ pro $n > 0$. Dostáváme indukované zobrazení $f_* : H_n(\mathbb{S}^n) \to H_n(\mathbb{S}^n)$. Ukázali jsme, že $H_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ a tedy $f_*(\alpha) = \deg(f) \cdot \alpha$ pro libovolný generátor $\alpha \in \mathbb{Z}$ a číslo $\deg(f) \in \mathbb{Z}$, které závisí pouze na f, nazývané **stupeň** f. Z definice a funktoriality homologie snadno dostáváme spoustu vlastností $\deg(f)$:

(i) $\deg(\mathbf{1}) = 1$, protože $\mathbf{1}_* = \mathbf{1}$.

(ii) $\deg(f) = 0$ kdykoliv f není surjektivní. Je-li $x_0 \in \mathbb{S}^n - f(\mathbb{S}^n)$, můžeme f psát jako faktorizaci dvou zobrazení $\mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n - \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{S}^n$. Jelikož $H_n(\mathbb{S}^n - \{x_0\}) = 0$ z kontraktibility, je nutně $f_* = 0$.

(iii) $\deg(fg) = \deg(f) \cdot \deg(g)$. Homeomorfismus má tedy stupeň ± 1.

(iv) Reflexe podle jedné nadroviny má stupeň -1, antipodální zobrazení $(-1)^{n+1}$.

(v) Pro $f \cong g$ platí $\deg(f) = \deg(g)$. Platí i opak!

(vi) Zobrazení f nemá žádné fixní body, právě tehdy když je homotopické antipodálnímu.

Ukažme si tvrzení (iv) explicitně.

Příklad 2.7.2. Na $\mathbb{S}^n$ se dá zavést následující struktura Δ-komplexu. $\mathbb{S}^n$ lze psát následovně. Uvažujme dvě hemisféry

$$H = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n \mid x_0 \geq 0\}, \quad D = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n \mid x_0 \leq 0\}. \tag{2.81}$$

Můžeme psát $\mathbb{S}^n = (H \sqcup D)/\sim$, kde všechny $x \in \partial H$ identifikujeme s $x \in \partial D$. Pomocí stereografické projekce můžeme sestrojit homeomorfismy $H \cong D^n$ a $D \cong D^n$. Protože $D^n \cong \Delta^n$, můžu psát $\mathbb{S}^n$ jako dva n-simplexy, které jejich hranicemi „slepím k sobě“. Výsledný Δ-komplex má tedy dva n-simplexy a stejně k-simplexů jako Δ-komplex Δ^n pro každé $k < n$. Víme, že $H_n^\Delta(\mathbb{S}^n) = \ker(\partial_n)$ má jeden generátor. Z definice ale dostávám okamžitě $\partial(\sigma_H - \sigma_D) = 0$. Odtud tedy $H_n(\mathbb{S}^n) \cong H_n^\Delta(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}\{[\sigma_H - \sigma_D]\}$.

Nechť $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ je reflexe okolo nadroviny $x_0 = 0$. Zjevně $f_*[\sigma_H - \sigma_D] = [f \circ \sigma_H - f \circ \sigma_D] = [\sigma_D - \sigma_H] = -[\sigma_H - \sigma_D]$. To dokazuje, že $\deg(f) = -1$. Je zřejmé, že vhodnou volnou triangulace můžeme dokázat, že stejnou vlastnost má reflexe okolo jakékoliv nadroviny.

Antipodální zobrazení je složení reflexí okolo všech $n+1$ možných nadrovin. S použitím (*iii*) je tedy stupeň antipodálního zobrazení $(-1)^{n+1}$.

Věta 2.7.3. *Na sféře $\mathbb{S}^n$ existuje všude nenulové spojité vektorové pole právě tehdy, je-li n liché.*

Důkaz. Nechť $x \mapsto v(x)$ je spojité tečné vektorové pole. $v(x)$ můžeme interpretovat jako vektorové pole v $\mathbb{R}^{n+1}$ v počátku, kde $x \perp v(x)$ pro všechny $x \in \mathbb{S}^n$. Je-li $|v(x)| \neq 0$, můžeme ho normalizovat a uvažovat $|v(x)| = 1$. Potom $\cos(t) \cdot x + \sin(t) \cdot v(x)$ leží na jednotkové kružnici v rovině tvořené vektory x a $v(x)$. Potom

$$H(x,t) = \cos(t) \cdot x + \sin(t) \cdot v(x) \tag{2.82}$$

pro $t \in [0, \pi]$ definuje homotopii z identity do antipodálního zobrazení. Obě musí mí dle předchozí definice stejný stupeň a tedy $(-1)^{n+1} = 1$, tedy n musí být liché.

Naopak, pokud $n = 2k-1$, definujeme $v(x_1, x_2, \ldots, x_{2k-1}, x_{2k}) = (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2k}, x_{2k-1})$. Zjevně $v(x) \perp x$ a $|v(x)| = 1$, tedy $x \mapsto v(x)$ je spojité všude nenulové vektorové pole na $\mathbb{S}^n$. ■

V historii topologie sehrála významnou roli tzv. **Eulerova charakteristika** mnohostěnů, definovaná jako $\chi(P) = \#V - \#E + \#F$, kde V, E a F jsou množiny vrcholů, hran a stěn tvořící P. Každý mnohostěn má přirozenou strukturu celulárního komplexu. Můžeme tedy definovat Eulerovu charakteristiku libovolného konečného celulárního komplexu X jako

$$\chi(X) = \sum_n (-1)^n c_n(X), \tag{2.83}$$

kde c_n je počet n-cel v X. Na první pohled není vůbec jasné, že by mělo toto číslo mít vypovídající hodnotu. Ukazuje se ovšem, že pro každý konečný celulární komplex X je $H_n(X)$ opět konečně generovaná a má tedy smysl definovat n-té Bettiho číslo $b_n(X)$. Platí formulka

$$\chi(X) = \sum_n (-1)^n b_n(X). \tag{2.84}$$

Na podrobný důkaz není dostatek prostoru. Podobně jako pro Δ-komplexy se dá přímo ukázat, že $H_k(X^n, X^{n-1})$ je triviální pro $n \neq k$ a volná abelovská s bází odpovídající k-celám pro $n = k$. Platí tedy $\operatorname{rank}(H_k(X^k, X^{k-1})) = c_k(X)$. Dále existuje řetězcový komplex $C_k^{CW} = H_k(X^k, X^{k-1})$ tvořený těmito operátory s jistým operátorem hranice $d_k : C_k^{CW} \to C_{k-1}^{CW}$. Příslušné homologické grupy H_k^{CW} definují tzv. **celulární homologii** X. Platí $H_k(X) \cong H_k^{CW}(X)$. Pro libovolný řetězcový komplex (C_k, d_k) můžeme sestrojit dvojici krátkých exaktních sekvencí

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow B_n \longrightarrow Z_n \longrightarrow H_n \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow C_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{2.85}$$

Jsou-li všechny grupy konečně generované, hodnost prostřední grupy je součtem krajních. Dostáváme tedy rovnosti $\operatorname{rank}(Z_n) = \operatorname{rank}(B_n) + \operatorname{rank}(H_n)$ a $\operatorname{rank}(C_n) = \operatorname{rank}(Z_n) + \operatorname{rank}(B_{n-1})$. Dosazením první rovnice do druhé a střídavým součtem přes n potom

$$\sum_n (-1)^n \operatorname{rank}(C_n) = \sum_n (-1)^n \operatorname{rank}(H_n). \tag{2.86}$$

Volbou $C_n = C_n^W$ ale dostáváme přesně rovnost (2.83) a (2.84).

Příklad 2.7.4. Eulerova charakteristika $\chi(X)$ je definovaná pro velké množství prostorů. Ihned například dostáváme následující tvrzení:

$$\chi(\mathbb{T}^2) = 0, \ \ \chi(K) = 0, \ \ \chi(\mathbb{S}^n) = 1 + (-1)^n, \ \ \chi(\mathbb{RP}^n) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n), \ \ \chi(M^g) = 2(1-g). \tag{2.87}$$

Kapitola 3

Kohomologie

V poslední kapitole této přednášky se budeme zaobírat matematickou teorií, která je v jistém smyslu plně duální k homologické teorie. Jinými slovy, budeme uvažovat **kořetězcové komplexy**

$$\ldots \longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C^n \xrightarrow{d_n} C^{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \ldots, \tag{3.1}$$

posloupnosti abelovských grup a jejich morfismů, přičemž platí $d_{n+1} \circ d_n = 0$ pro každé n. d_n se nazývá **operátor kohranice** nebo též **diferenciál**[1]. Zcela analogicky definujeme n-kocykly $Z^n = \ker(d_n)$ a n-kohranice $B^n = \mathrm{im}(d_{n-1})$. Příslušná **$n$-tá kohomologie** je jejich faktorgrupa $H^n = Z^n/B^n$. Prvky H^n se nazývají **kohomologické třídy** a platí $[\alpha'] = [\alpha]$, pokud $\alpha' = \alpha + d_{n-1}\omega$, říkáme, že α a α' jsou **kohomologické**. Spousta tvrzení o kohomologiích je pouhou modifikací podobných nápadů pro homologie.

Příklad 3.0.1. Nechť $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ je řetězcový komplex, kde každá abelovská grupa n-řetězců tvoří $\mathbb{Z}$-modul. Máme tedy definovanou operaci násobení celým číslem, která se chová jak má (distributivní, kompatibilní se strukturou okruhu v $\mathbb{Z}$).

Definujeme $C^n = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_n, \mathbb{Z})$, t.j. n-kořetězce jsou $\mathbb{Z}$-lineární zobrazení z C_n do $\mathbb{Z}$. Operátor kohranice d_n definujeme pomocí ∂_n. Nechť $\alpha \in C^n$ a $\sigma \in C_{n+1}$. Potom

$$(d_n\alpha)(\sigma) := \alpha(\partial_{n+1}\sigma). \tag{3.2}$$

Snadno se ověří, že $(C^\bullet, d_\bullet)$ je kořetězcový komplex.

3.1 de Rhamova kohomologie

My se však budeme zabývat zejména kohomologickou teorií, kterou lze přímo přiřadit nějakému geometrickému objektu. Těmi budou v této sekci hladké variety, velmi dobře vychované topologické prostory s extra (hladkou) strukturou.

Definice 3.1.1. Nechť M je hladká varieta. Potom dostáváme kořetězcový komplex

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{N-1}} \Omega^N(M) \xrightarrow{d_N} 0, \tag{3.3}$$

[1] Původ tohohle názvu bude záhy zřejmý.

kde $N = \dim(M)$, $\Omega^n(M)$ je prostor hladkých n-forem a d_n je operátor vnější derivace. O něm je známo že splňuje $d_{n+1} \circ d_n = 0$, a tedy $(\Omega^\bullet(M), d)$ definuje[2] kořetězcový **de Rhamův** komplex.

Podgrupu Z^n tvoří **uzavřené n-formy** a B^n **exaktní n-formy**. Příslušná kohomologie $H^n(M)$ se nazývá **de Rhamova kohomologie variety** M.

Příklad 3.1.2 (**Kohomologie přímky**). Uvažujme $M = \mathbb{R}$. Máme $\Omega^0(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R})$. Pro $f \in \Omega^0(\mathbb{R})$ je $df = f'(x)dx$ a tedy Z^0 jsou konstantní funkce, $Z^0 = \mathbb{R}$. Navíc $B^0 = 0$ a tedy $H^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Jelikož $\dim(\mathbb{R}) = 1$, máme nutně $Z^1 = \Omega^1(\mathbb{R})$. Nechť $\alpha = \alpha(x)dx$ je libovolná (uzavřená) 1-forma. Definujeme $f(x) = \int_0^x \alpha(t)dt$. Potom $df = f'(x)dx = \alpha(x)dx$. Každá exaktní forma je uzavřená, odkud dostáváme tvrzení

$$H^n(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pro } n = 0, \\ 0 & \text{pro } n = 1. \end{cases} \tag{3.4}$$

Mírnou modifikací, která ovšem může mít zajímavé odlišnosti, je uvažovat pouze speciální n-formy na M. Připomeňme, že **funkce s kompaktním nosičem na** M jsou takové, že

$$\mathrm{Supp}(f) = \mathrm{Cl}\{x \in M \mid f(x) \neq 0\} \tag{3.5}$$

je kompaktní množina (nosič funkce f) v M. Analogicky lze definovat prostor **n-forem s kompaktním nosičem** $\Omega^n_c(M)$. Z vlastností derivací plyne, že $\mathrm{Supp}(d\alpha) \subseteq \mathrm{Supp}(\alpha)$. Uzavřená podmnožina kompaktní množiny je kompaktní a restrikcí d tedy dostáváme **kompaktní de Rhamův komplex**

$$0 \longrightarrow \Omega^0_c(M) \xrightarrow{d_0} \Omega^1_c(M) \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{N-1}} \Omega^N_c(M) \xrightarrow{d_N} 0, \tag{3.6}$$

a příslušnou **kompaktní de Rhamovu kohomologii** $H^\bullet_c(M)$.

Příklad 3.1.3 (**Kompaktní kohomologie přímky**). Tentokrát je Z^0 prostor konstantních funkcí *s kompaktním nosičem*, t.j. zřejmě $Z^0 = 0$. Protože ji $B^0 = 0$, máme $H^0_c(\mathbb{R}) = 0$.

Můžeme definovat lineární zobrazení ψ z $\Omega^1_c(\mathbb{R})$ do $\mathbb{R}$ pomocí integrálu:

$$\psi[\alpha(x)dx] := \int_{\mathbb{R}} \alpha(x)dx \tag{3.7}$$

Integrál konverguje z důvodu kompaktnosti nosiče α. Zobrazení je zjevně surjektivní. Ukážeme, že jeho jádro jsou právě exaktní 1-formy s kompaktním nosičem. Nechť tedy $\alpha(x) = f'(x)dx$ pro $f \in \Omega^0_c(\mathbb{R})$. Nosič f je kompaktní a tedy celý v nějakém otevřeném intervalu (a, b). Potom

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)dx = \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) = 0. \tag{3.8}$$

Opačně, nechť $\alpha(x)dx$ leží v jádru ψ . Definujeme funkci f vztahem $f(x) = \int_{-\infty}^x \alpha(y)dy$. Z nulovosti integrálu přes celé $\mathbb{R}$ plyne, že f má kompaktní nosič. Navíc $\alpha(x)dx = df = f'(x)dx$ a tedy každá forma z jádra ψ je exaktní. Potom

$$H^1_c(\mathbb{R}) = \Omega^1_c(\mathbb{R})/B^1 = \Omega^1_c(\mathbb{R})/\ker(\psi) \cong \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

Souhrnem tedy dostáváme následující tvrzení:

$$H^n_c(\mathbb{R}) = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 0, \\ \mathbb{R} & \text{pro } n = 1. \end{cases} \tag{3.10}$$

[2] Často nebudeme psát dolní index u d_n.

Na závěr si ujasněme, že nultá de Rhamova kohomologie má podobně jako nultá singulární homologie přímý geometrický význam. Vskutku, máme $H^0(M) = \{f \in C^\infty(M) \mid df = 0\}$. Takovým funkcím se říká lokálně konstantní. Každá taková je konstantní na každé komponentě křivkové souvislosti. Lokálně konstantní funkci tedy určíme zadáním konstanty na každé komponentě křivkové souvislosti. Odtud

$$H^0(M) = \prod_\alpha \mathbb{R}, \tag{3.11}$$

kde α probíhá komponenty křivkové souvislosti.

Poznámka 3.1.4. De Rhamův komplex i příslušné kohomologie mají ve skutečnosti navíc extra strukturu oproti např. singulární homologii. Tvoří totiž vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Toho můžeme a budeme využívat v následujícím.

3.2 Mayer-Vietorisova posloupnost

Klíčovou dovedností je pochopitelně možnost počítat de Rhamovu kohomologii větších prostorů ze znalosti de Rhamovy kohomologie jeho součástí. Nejprve je třeba si uvědomit jednu základní vlastnost de Rhamovy kohomologie - její chování vzhledem k hladkým zobrazením.

Tvrzení 3.2.1. *Pro každé variety M a N a hladké zobrazení $\varphi : M \to N$ máme pullback diferenciálních forem $f^* : \Omega^n(N) \to \Omega^n(M)$, který komutuje s vnější derivací, $\varphi^* \circ d = d \circ \varphi^*$. Definuje tedy* ***kořetězcové zobrazení*** *a předpis $\varphi^*[\alpha] = [\varphi^*\alpha]$ definuje* ***indukovaný homomorfismus kohomologických grup****. Platí*

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*, \quad \mathbf{1}^* = \mathbf{1}. \tag{3.12}$$

Jinými slovy, přiřazení $M \mapsto \Omega^\bullet(M)$ je kontravariantní[3] *funktor z kategorie hladkých variet* $\mathbf{Man}^\infty$ *do kategorie abelovských grup* $\mathbf{Ab}$.

Důsledek 3.2.2. *Difeomorfní variety mají izomorfní kohomologické grupy.*

Klíčovou vlastností variet pro následující tvrzení bude existence tzv. rozkladu jedničky Připomeňme si tedy jeho definici.

Definice 3.2.3 (**Rozklad jedničky**). Nechť $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je libovolné otevřené pokrytí variety M. Nechť $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je kolekce hladkých funkcí na M, které splňují:

(i) $\mathrm{Supp}(\rho_\alpha) \subseteq U_\alpha$, $0 \leq \rho_\alpha \leq 1$;

(ii) Každý bod $x \in M$ má okolí, které má neprázdný průnik pouze s konečně mnoho množinami $\mathrm{Supp}(\rho_\alpha)$. Jinými slovy, systém $\{\mathrm{Supp}(\rho_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ je tzv. lokálně konečný.

(iii) Pro každé $x \in M$ platí $\sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha(x) = 1$. Podle (ii) je tato suma pro každé x konečná.

Dá se ukázat, že rozklad jedničky existuje pro libovolné otevřené pokrytí M.

[3] Kontravariantní funktor je stejný jako obyčejný, ale indukované zobrazení a pravidlo skládání jsou opačně.

Nyní uvažujme situaci, kde $M = U \cup V$ pro dvě otevřené podmnožiny. Dostáváme následující dvojici posloupností variet a jejich hladkých zobrazení:

$$M \longleftarrow U \sqcup V \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\leftleftarrows}} U \cap V \ , \tag{3.13}$$

kde levá šipka je kanonické surjektivní zobrazení z disjunktního zobrazení na sjednocení opravdové a ∂_0 (respektive ∂_1) je vnoření $U \cap V$ do kopie V (respektive U) v disjunktním sjednocení $U \sqcup V$. Dostáváme tedy dvojici prostorů forem s šipkami naopak:

$$\Omega^\bullet(M) \longrightarrow \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V) \underset{\partial_1^*}{\overset{\partial_0^*}{\rightrightarrows}} \Omega^\bullet(U \cap V) \tag{3.14}$$

Připomeňme, že například ∂_0^* zobrazuje dvojici $(\omega, \tau) \in \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V)$ na formu $\hat{\tau} \in \Omega^\bullet(U \cap V)$, která je fakticky pouze restrikcí τ na otevřenou podmnožinu $U \cap V$. Pomocí těchto zobrazení definujeme posloupnost

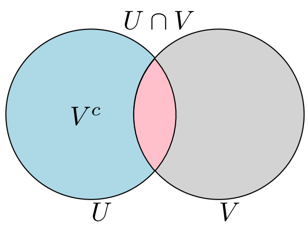
$$0 \longrightarrow \Omega^\bullet(M) \longrightarrow \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V) \xrightarrow{\ \eta\ } \Omega^\bullet(U \cap V) \longrightarrow 0, \tag{3.15}$$

kde $\eta(\omega, \tau) := (\partial_0^* - \partial_1^*)(\omega, \tau) = \hat{\tau} - \hat{\omega}$. První šipka zobrazí formu $\omega \in \Omega^\bullet(M)$ na dvojici jejich restrikcí $(\omega_U, \omega_V) \in \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V)$. Právě jsme dostali **Mayer-Vietorisovu posloupnost**.

Tvrzení 3.2.4. *Mayer-Vietorisova posloupnost je exaktní.*

Důkaz. Je-li $(\omega_U, \omega_V) = 0$, zjevně je $\omega = 0$ na celém $M = U \cup V$. Levá šipka je tedy injektivní zobrazení. Dál $(\omega, \tau) \in \ker(\eta)$ právě tehdy když ω a τ splývají na průniku $U \cap V$. Potom ale definují formu $\alpha \in \Omega^\bullet(M)$, že $(\omega, \tau) = (\alpha_U, \alpha_V)$. Jádro η je tedy přesně obraz levé šipky. Zbývá ukázat, že η je surjektivní zobrazení.

Nechť $\omega \in \Omega^\bullet(U \cap V)$. Nechť $\{\rho_U, \rho_V\}$ je rozklad jedničky příslušný pokrytí $\{U, V\}$. Stačí si uvědomit, že můžeme dobře definovat formu $\rho_V \omega$ na U. Protože $U = (U \cap V) \sqcup V^c$, viz. obrázek,



stačí si uvědomit, že $\mathrm{Supp}(\rho_V) \subseteq V$ a tedy $\rho_V \omega$ je hladké a dobře definované na $U \cap V$ a nula na V^c. Obdobně $\rho_U \omega \in \Omega^\bullet(V)$. Potom ale

$$\eta(-\rho_V \omega, \rho_U \omega) = (\rho_U + \rho_V)\omega = \omega. \tag{3.16}$$

Tím jsme dokázali, že zobrazení η je surjektivní. ∎

Důsledek 3.2.5. *Je-li $M = U \cup V$, dostáváme dlouhou exaktní posloupnost kohomologií:*

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H^n(M) \arrow[r] & H^n(U) \oplus H^n(V) \arrow[r, "\eta_*"] & H^n(U \cap V) \arrow[dll, "\delta"'] \\ & H^{n+1}(M) \arrow[r] & H^{n+1}(U) \oplus H^{n+1}(V) \arrow[r, "\eta_*"] & H^{n+1}(U \cap V) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} \tag{3.17}$$

Spojující homomorfismus δ můžeme explicitně definovat následovně. Nechť $[\omega] \in H_n(U \cap V)$. Máme $\omega = \eta(-\rho_V \omega, \rho_U \omega)$. Potom ale $\eta(-d(\rho_V \omega), d(\rho_U \omega)) = d\omega = 0$. To ale znamená, že existuje forma $\alpha \in \Omega^{n+1}(M)$, že $(\alpha_U, \alpha_V) = (-d(\rho_V \omega), d(\rho_U \omega))$. Tato forma je uzavřená a definujeme $\delta[\omega] = [\alpha]$.

*Posloupnost (3.17) se rovněž nazývá **Mayer-Vietorisova posloupnost**.*

Důkaz. Aplikace hadího lemma na posloupnost (3.14) která je exaktní podle předchozího tvrzení. Všimněte si, že v kohomologiích spojující homomorfismus zvyšuje stupeň. ■

Příklad 3.2.6 (Kohomologie kružnice). Mayer-Vietoris se dá snadno použít na výpočet de Rhamovy kohomologie kružnice $H^\bullet(\mathbb{S}^1)$. Zjevně $\mathbb{S}^1 = U \cup V$, kde U a V jsou otevřené oblouky co se na dvou koncích kružnice překrývají. Máme tedy $U, V \cong \mathbb{R}$ a $U \cap V \cong \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$. Mayer-Vietorisova posloupnost má tvar

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(\mathbb{S}^1) \arrow[r] & H^0(\mathbb{R}) \oplus H^0(\mathbb{R}) \arrow[r, "\eta_*"] & H^0(\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}) \arrow[dll, "\delta"] & \\
& H^1(\mathbb{S}^1) \arrow[r] & H^1(\mathbb{R}) \oplus H^1(\mathbb{R}) \arrow[r, "\eta_*"] & H^1(\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd} \tag{3.18}$$

Po dosazení známých věcí tedy dostáváme posloupnost

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\eta_*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\delta} H^1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 0 \tag{3.19}$$

Už jsme si ujasnili, že $H^0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$, protože $\mathbb{S}^1$ je křivkově souvislá varieta. Protože první šipka je injektivní, máme $\dim(\ker \eta_*) = 1$. Odtud ale nutně $\dim(\operatorname{im} \eta_*) = 1$ ze standardní lineární algebry. Z exaktnosti ale také $\dim(\ker(\delta)) = \dim(\operatorname{im} \eta_*) = 1$. Protože δ je surjektivní, máme $\dim(H^1(\mathbb{S}^1)) = \dim(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) - \dim(\ker(\delta)) = 1$. A tedy $H^1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{R}$.

Ve skutečnosti můžeme přímo zkonstruovat uzavřenou 1-formu reprezentující generátor $H^1(\mathbb{S}^1)$. Uvažujme uzavřenou 0-formu $\alpha \in \Omega^0(U \cap V)$ definovanou jako konstanta 1 na jedné komponentě $U \cap V$ a 0 na druhé. Aby $\delta[\alpha] \in H^1(\mathbb{S}^1)$ tvořilo bázi, stačí aby $[\alpha] \notin \ker(\delta) = \operatorname{im}(\eta_*)$. Nesmí tedy existovat dvojice konstantních 0-forem $(\omega, \tau) \in \Omega^0(U) \oplus \Omega^0(V)$, že $\alpha = \eta(\omega, \tau)$. Ale to je zřejmé, protože $\eta(\omega, \tau)$ musí být na obou komponentách $U \cap V$ rovno stejné konstantě $(\tau - \omega)(x)$.

Nyní na $[\alpha]$ stačí aplikovat proces popsaný výše. Máme $\alpha = \eta(-\rho_V \alpha, \rho_U \alpha)$. Potom dvojice $(-d(\rho_V \alpha), d(\rho_U \alpha))$ 1-forem na U a V souhlasí na $U \cap V$ a pocházejí tedy z restrikce jedné uzavřené 1-formy $\omega \in \Omega^1(\mathbb{S}^1)$. Snadno lze vidět, že ω je forma s kompaktním nosičem uvnitř jedné z komponent $U \cap V$, takovým se říká „bump formy“. Z konstrukce $[\omega] = \delta[\alpha]$ generuje de Rhamovu kohomologii $H^1(\mathbb{S}^1)$.

Poznámka 3.2.7. Existuje i Mayer-Vietorisova posloupnost pro kompaktní kohomologii. Kupodivu se výrazně liší, protože obecně pullback φ^* nezachovává kompaktnost nosiče. Použije se následujícího triku. Je-li $i : U \to M$ inkluze otevřené množiny, můžeme vzít formu $\omega \in \Omega_c^\bullet(U)$ a dodefinovat ji nulou na zbytku M, čímž dostaneme $i_*(\omega) \in \Omega_c^\bullet(M)$. Dostáváme tedy homomorfismus opačně než pro normální kohomologie: $i_* : H_c^\bullet(U) \to H_c^\bullet(M)$. Potom dostáváme posloupnost

$$0 \longrightarrow \Omega_c^\bullet(U \cap V) \longrightarrow \Omega_c^\bullet(U) \oplus \Omega_c^\bullet(V) \longrightarrow \Omega_c^\bullet(M) \longrightarrow 0. \tag{3.20}$$

První šipka je „orientovaná inkluze“, druhá šipka sečte rozšíření obou forem v M. Dá se ukázat, že tato posloupnost je exaktní a tedy naprosto analogicky indukuje dlouhou exaktní posloupnost na kompaktních kohomologiích.

3.3 Poincarého lemma

V této části si ukážeme zásadní tvrzení o de Rhamových topologiích. Uvažujme následující dvojici zobrazení hladkých variet:

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \underset{s}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}^n \ , \tag{3.21}$$

kde $\pi(x,t) = x$ je projekce a $s(x) = (x,0)$ je nulový řez. Na úrovni forem tedy dostáváme diagram

$$\Omega^\bullet(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \underset{s^*}{\overset{\pi^*}{\leftrightarrows}} \Omega^\bullet(\mathbb{R}^n) \tag{3.22}$$

Zjevně platí rovnost $\pi \circ s = \mathbf{1}$ a tedy i $s^* \circ \pi^* = \mathbf{1}$. Opačně máme $(s \circ \pi)(x,t) = (x,0)$, což není identita. Ani na úrovni forem neplatí, že $\pi^* \circ s^* = \mathbf{1}$, protože například $s^*(dt) = 0$. Na úrovni kohomologií jsme však úspěšnější, jak si nyní dokážeme:

Tvrzení 3.3.1. *Zobrazení $\pi^* : H^\bullet(\mathbb{R}^n) \to H^\bullet(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ je izomorfismus.*

Důkaz. Pro důkaz tvrzení stačí nalézt zobrazení $K : \Omega^\bullet(R^n \times \mathbb{R}) \to \Omega^\bullet(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ splňující

$$\mathbf{1} - \pi^* \circ s^* = \pm(K \circ d \pm d \circ K). \tag{3.23}$$

Pravá strana zobrazuje všechny uzavřené formy na exaktní a tedy definuje nulové zobrazení kohomologických grup. Každá forma ω na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ je unikátní lineární kombinace forem z jedné z následujících dvou tříd

(i) $f(x,t) \cdot (\pi^*\phi)$,

(ii) $f(x,t) \cdot (\pi^*\phi) \wedge dt$,

kde $\phi \in \Omega^\bullet(\mathbb{R}^n)$ je forma na bázi $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. Zobrazení $K : \Omega^q(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \to \Omega^{q-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ definujeme zvlášť na každém z obou typů:

(i) $K[f(x,t) \cdot (\pi^*\phi)] = 0$,

(ii) $K[f(x,y) \cdot (\pi^*\phi) \wedge dt] = (\int_0^t f(x,s) ds) \cdot \pi^*(\phi)$.

Zbývá ověřit, že K splňuje rovnici (3.23). Nechť ω je q-forma typu (i). Potom

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} - \pi^* \circ s^*)(\omega) &= f(x,t) \cdot (\pi^*\phi) - \pi^*(f(x,0) \cdot \phi) \\ &= \{f(x,t) - f(x,0)\} \cdot (\pi^*\phi). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Na druhou stranu, několikerým použitím definice K dostáváme

$$\begin{aligned} (K \circ d - d \circ K)(\omega) &= K(\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \cdot \{dt \wedge (\pi^*\phi)\}) \\ &= (-1)^q (\int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(x,s)) \cdot (\pi^*\phi) \\ &= (-1)^q \{f(x,y) - f(x,0)\} \cdot (\pi^*\phi). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Vidíme, že na formách typu (i) platí rovnost $\mathbf{1} - \pi^* \circ s^* = (-1)^q (K \circ d - d \circ K)$. Na formách typu (ii) máme $s^*(\omega) = 0$ a tedy $(\mathbf{1} - \pi^* \circ s^*)(\omega) = \omega$. Potom máme

$$d\omega = f(x,t) \cdot (\pi^* d\phi) \wedge dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x,t) dx^i \wedge (\pi^* \phi) \wedge dt, \tag{3.26}$$

a působením K tedy dostáváme

$$K(d\omega) = (\int_0^t f(x,s)ds) \cdot (\pi^* d\phi) + \sum_{i=1}^{n} (\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(x,s)ds) \cdot dx^i \wedge (\pi^* \phi). \tag{3.27}$$

Na druhou stranu, působením operátoru d na $K(\omega)$ dostáváme

$$\begin{aligned} -d(K(\omega)) = & -d((\int_0^t f(x,s)ds) \cdot (\pi^* \phi)) \\ = & -f(x,t) \cdot (dt \wedge (\pi^* \phi)) - \sum_{i=1}^{n} (\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(x,s)) \cdot dx^i \wedge (\pi^* \phi) \\ & - (\int_0^t f(x,s)ds) \cdot (\pi^* d\phi). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Sečtením obou výrazů opravdu dostáváme $K(d\omega) - d(K(\omega)) = (-1)^q \omega$. ■

Toto tvrzení má několik zásadně důležitých důsledků, přičemž jeden z nich je slavné Poincarého lemma, které počítá kohomologie eukleidovského prostoru.

Věta 3.3.2 (Poincarého lemma). *Platí následující:*

$$H^k(\mathbb{R}^n) = H^k(\{*\}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{pro } k = 0, \\ 0 & \textit{pro } k \neq 0. \end{cases} \tag{3.29}$$

Jinými slovy, každá uzavřená k-forma na $\mathbb{R}^n$ je exaktní (pro $k > 0$).

Důkaz. Indukcí podle k. ■

Důsledek 3.3.3. *Snadnou modifikací důkazu tvrzení 3.3.1 zjistíme, že pro projekci $\pi : M \times \mathbb{R} \to M$, kde M je libovolná hladká varieta, je zobrazení $\pi^* : H^\bullet(M) \to H^\bullet(M \times \mathbb{R})$ izomorfismus.*

Důsledek 3.3.4. *Nechť $f, g : M \to N$ jsou dvě hladká homotopická zobrazení. Potom $f^* = g^*$ jako zobrazení de Rhamových kohomologií.*

De Rhamova kohomologie je tedy invariantem homotopické ekvivalence. Pro každou kontraktibilní varietu M v důsledku platí $H^0(M) = \mathbb{R}$ a $H^k(M) = 0$ pro $k \neq 0$.

Důkaz. Hladká homotopie f a g je hladké zobrazení $H : M \times \mathbb{R} \to N$, takové, že $H(x,t) = f(x)$ pro $t \leq 0$ a $H(x,t) = g(x)$ pro $t \geq 1$. Nechť $s_0 : M \to M \times \mathbb{R}$ a $s_1 : M \to M \times \mathbb{R}$ je nulový (respektive jednotkový) řez, takže platí $H \circ s_0 = f$ a $H \circ s_1 = g$. Potom

$$f^* = s_0^* \circ H^*, \quad g^* = s_1^* \circ H^*. \tag{3.30}$$

Na úrovni kohomologií ale máme $s_0^* = (\pi^*)^{-1} = s_1^*$ a obě zobrazení tedy splývají. ■

Příklad 3.3.5 (de Rhamova kohomologie sfér). Uvažujme $M = \mathbb{S}^n$. Napíšeme $M = U \cup V$, kde U a V jsou kontraktibilní a $U \cap V$ je difeomorfní $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Indukcí podle n dokážeme, že

$$H^k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pro } k = 0, \\ \mathbb{R} & \text{pro } k = n, \\ 0 & \text{pro } k \notin \{0, n\}. \end{cases} \tag{3.31}$$

Pro $n \in \{0, 1\}$ už máme dokázáno. Pro $n > 1$, s použitím Mayer-Vietorisovy posloupnosti dostáváme $H^1(\mathbb{S}^n) = 0$ a protože $\mathbb{S}^n$ je křivkově souvislý, máme $H^0(\mathbb{S}^n) = \mathbb{R}$. Pro $k > 1$ pak platí $H^k(\mathbb{S}^n) = H^{k-1}(\mathbb{S}^{n-1})$. Použitím indukčního předpokladu dostáváme výsledek.

Poznámka 3.3.6 (**Poincarého Lemma pro kompaktní nosiče**). Podobnými úvahami jako předtím se dá dokázat kompaktní verze Poincarého lemma:

$$H^k_c(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pro } k = n, \\ 0 & \text{pro } k \neq n. \end{cases} \tag{3.32}$$

To mimochodem ukazuje, že kompaktní de Rhamova kohomologie není invariant homotopické ekvivalence. Při difeomorfismech se ale zachovává.

3.4 Čechova-de Rhamova kohomologie

V této sekci si ukážeme, jak lze v jistých případech převést výpočet de Rhamovy kohomologie na kombinatorický problém (v tomhle ohledu to připomíná simpliciální homologii). Nejprve musíme uvažovat pokrytí (analog triangulace) speciálním druhem otevřených množin.

Definice 3.4.1. Nechť $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je otevřené pokrytí n-rozměrné variety M. Řekneme, že $\mathcal{U}$ je **dobré pokrytí**, je-li každý *neprázdný* konečný průnik $U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_k}$ otevřených množin z $\mathcal{U}$ difeomorfní $\mathbb{R}^n$.

Hlavní idea za dobrými pokrytími je přirozeně ta, že z Poincarého lemmatu přesně víme, jak vypadají kohomologie množin z $\mathcal{U}$, všech jejich průniků a chytrým užíváním Mayer-Vietorisovy posloupnosti i jejich jistých sjednocení. Připomeňme, že pro dvě pokrytí $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ a $\mathcal{B} = \{V_\beta\}_{\beta \in J}$ řekneme, že $\mathcal{B}$ je **zjemnění** $\mathcal{U}$, psáno $\mathcal{U} < \mathcal{B}$, pokud existuje zobrazení $\phi : J \to I$, takové, že $V_\beta \subseteq U_{\phi(\beta)}$.

Věta 3.4.2. *Nechť M je libovolná varieta. Potom každé otevřené pokrytí $\mathcal{U}$ má zjemnění $\mathcal{B}$, které je dobrým pokrytím M. Zejména každá kompaktní varieta má konečné dobré pokrytí.*

Jako jeden příklad aplikace této definice si ukážeme následující jednoduché tvrzení.

Tvrzení 3.4.3. *Má-li M konečné dobré pokrytí, je příslušná de Rhamova kohomologie $H^\bullet(M)$ konečně-rozměrná.*

Důkaz. Z exaktnosti Mayer-Vietorisovy posloupnosti

$$\cdots \longrightarrow H^{n-1}(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^n(U \cup V) \xrightarrow{r} H^n(U) \oplus H^n(V) \longrightarrow \cdots \tag{3.33}$$

plyne, že $H^n(U \cup V) \cong \mathrm{im}(\delta) \oplus \mathrm{im}(r)$. Jsou-li tedy de Rhamovy kohomologie U, V i $U \cap V$ konečněrozměrné, nutně je i kohomologie $U \cup V$. Budeme postupovat indukcí na počet množin tvořící otevřené pokrytí M. Varieta s dobrým pokrytím jedinou množinou je difeomorfní $\mathbb{R}^n$ a $H^q(M)$ je konečněrozměrná z Poincarého lemma.

Pro indukční krok předpokládejme, že každá varieta s dobrým pokrytím nejvýše k množinami má konečněrozměrnou de Rhamovu kohomologii. Nechť $\{U_0, \dots, U_k\}$ je dobré pokrytí M pomocí $k+1$ množin. Potom varieta $(U_0 \cup \dots \cup U_{k-1}) \cap U_k$ má dobré pokrytí k množinami, a tedy konečněrozměrou de Rhamovu kohomologii z indukčního předpokladu. Stejné lze říct o $U_0 \cup \dots \cup U_{k-1}$ a U_k a tvrzení plyne z předchozího odstavce. ■

Nyní předpokládejme, že $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je libovolné otevřené pokrytí variety M, kde I js spočetná a uspořádaná množina (klidně může být konečná). Zavedeme označení

$$U_{\alpha_1 \dots \alpha_k} := U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_k} \tag{3.34}$$

a uvažujme (obecně nekonečnou) posloupnost inkluzí

$$M \longleftarrow \coprod U_\alpha \;\substack{\xleftarrow{\partial_0} \\ \xleftarrow{\partial_1}}\; \coprod_{\alpha_0<\alpha_1} U_{\alpha_0\alpha_1} \;\substack{\xleftarrow{\partial_0} \\ \xleftarrow{\partial_1} \\ \xleftarrow{\partial_2}}\; \coprod_{\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2} U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \;\substack{\longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow}\; \dots, \tag{3.35}$$

kde $\partial_i : U_{\alpha_0 \dots \alpha_k} \to U_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_k}$ „vynechá“ i-tou množinu. Například pro $k = 2$ máme

$$\partial_0 : U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \to U_{\alpha_1\alpha_2}, \;\; \partial_1 : U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \to U_{\alpha_0\alpha_2}, \;\; \partial_2 : U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \to U_{\alpha_0\alpha_1}. \tag{3.36}$$

Funktor přiřazující de Rhamovy kořetězcové komplexy nám přiřadí opačnou posloupnost.

$$\Omega^\bullet(M) \xrightarrow{\;r\;} \prod \Omega^\bullet(U_\alpha) \;\substack{\xrightarrow{\delta_0} \\ \xrightarrow{\delta_1}}\; \prod_{\alpha_0<\alpha_1} \Omega^\bullet(U_{\alpha_0\alpha_1}) \;\substack{\xrightarrow{\delta_0} \\ \xrightarrow{\delta_1} \\ \xrightarrow{\delta_2}}\; \prod_{\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2} \Omega^\bullet(U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}) \;\substack{\longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow}\; \dots, \tag{3.37}$$

kde δ_i jsou restrikce indukované vnořeními výše. Připomeňme, obecný element prostoru

$$\omega \in \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} \Omega^\bullet(U_{\alpha_0 \dots \alpha_k}) \tag{3.38}$$

je posloupnost $\omega = (\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_k})_{\alpha_0 < \dots < \alpha_k}$, kde $\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_k} \in \Omega^\bullet(U_{\alpha_0 \dots \alpha_k})$. Výsledek působení $\delta_i \omega$ je tedy opět posloupnost, jejíž element $(\delta_i \omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{k+1}}$ má tvar

$$(\delta_i \omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{k+1}} = \omega_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_{k+1}}|_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_{k+1}}}. \tag{3.39}$$

Pro zjednodušení značení *nebudeme* explicitně psát restrikce na otevřené podmnožiny. Podobně jako při důkazu Mayer-Vietorisovy posloupnosti nyní z několika šipek vyrobíme jednu.

Definice 3.4.4. Nechť $\omega \in \prod \Omega^\bullet(U_{\alpha_0 \dots \alpha_k})$ má komponenty $\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_k} \in \Omega^\bullet(U_{\alpha_0 \dots \alpha_k})$. Definujeme element $\delta\omega \in \prod \Omega^\bullet(U_{\alpha_0 \dots \alpha_{k+1}})$ pomocí příslušných komponent jako

$$(\delta\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{k+1}} = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i (\delta_i \omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{k+1}} \equiv \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \omega_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_{k+1}}, \tag{3.40}$$

Jak si operátor δ představit? Předpokládejme, že $M = U_0 \cup U_1 \cup U_2$. Potom například $\omega \in \prod \Omega^\bullet(U_{\alpha_0})$ je trojice $(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$, kde $\omega_i \in \Omega(U_i)$. Prostor $\prod \Omega^\bullet(U_{\alpha_0\alpha_1})$ je tvořen trojicemi $(\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{12})$, kde $\omega_{ij} \in \Omega^\bullet(U_i \cap U_j)$ pro $i < j$. Potom

$$\delta(\omega)_{01} = \omega_1 - \omega_0, \;\; \delta(\omega)_{02} = \omega_2 - \omega_0, \;\; \delta(\omega)_{12} = \omega_2 - \omega_1, \tag{3.41}$$

kde na pravých stranách jsou implicitně myšleny restrikce na společné průniky definičních oborů jednotlivých forem. Přestože restrikce nepíšeme, je potřeba si uvědomit, že průniky mohou být prázdné. Pokud je například $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, bude $\delta(\omega)_{01} = 0$! Klíčovou vlastností δ je následující

Lemma 3.4.5. *Platí rovnost* $\delta^2 = 0$.

Důkaz. Důkaz je stejný jako vždycky - výsledek je dvojná suma, kde se po dvojicích odečtou členy kvůli rozdílným znaménkům. ■

Poznámka 3.4.6. Často se pro komponenty $\omega_{\alpha_0 \ldots \alpha_k}$ užívá konvence, kde se povolí libovolné uspořádání indexů, přičemž platí

$$\omega_{\ldots\alpha\ldots\beta\ldots} = -\omega_{\ldots\beta\ldots\alpha\ldots}. \tag{3.42}$$

Například pro $I = \mathbb{N}_0$ máme $\omega_{021} = -\omega_{012} = \omega_{102}$ nebo $\omega_{001} = 0$.

Tvrzení 3.4.7 (Zobecněná Mayer-Vietorisova posloupnost). *Pro každou varietu M a její otevřené pokrytí $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, kde I je uspořádaná spočetná množina, dostáváme dlouhou exaktní posloupnost*

$$0 \longrightarrow \Omega^\bullet(M) \xrightarrow{r} \prod_{\alpha_0} \Omega^\bullet(U_\alpha) \xrightarrow{\delta} \prod_{\alpha_0 < \alpha_1} \Omega^\bullet(U_{\alpha_0\alpha_1}) \xrightarrow{\delta} \prod_{\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2} \Omega^\bullet(U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}) \xrightarrow{\delta} \cdots . \tag{3.43}$$

Řečeno jinak, posloupnost výše je kořetězcový komplex s triviální kohomologií.

Důkaz. Injektivita r je zřejmá, diferenciální forma je nula právě tehdy když je nula každá její restrikce na pokrývající množiny. Exaktnost v dalším členu je také zřejmá. Uspořádaná kolekce $\omega = (\omega_\alpha)_{\alpha \in I}$ pochází z restrikce globální formy na M, souhlasí-li jednotlivé dvojice na průnicích, t.j. $\delta(\omega)_{\alpha\beta} = \omega_\beta - \omega_\alpha = 0$.

V obecném stupni je konstrukce podobná důkazu obyčejné Mayer-Vietorisovy posloupnosti. Nechť $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je rozklad jednotky příslušný pokrytí $\mathcal{U}$ a nechť $\omega \in \prod \Omega^\bullet(\omega_{\alpha_0 \ldots \alpha_k})$. Definujeme lineární operátor $K : \prod \Omega^\bullet(\omega_{\alpha_0 \ldots \alpha_k}) \to \prod \Omega^\bullet(\omega_{\alpha_0 \ldots \alpha_{k-1}})$ vztahem

$$K(\omega)_{\alpha_0 \ldots \alpha_{k-1}} = \sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha \cdot \omega_{\alpha\alpha_0 \ldots \alpha_{k-1}}. \tag{3.44}$$

Můžeme tedy psát následující:

$$\begin{aligned} K(\delta\omega)_{\alpha_0 \ldots \alpha_k} &= \sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha \cdot (\delta\omega)_{\alpha\alpha_0 \ldots \alpha_k} = \sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha \cdot \{\omega_{\alpha_0 \ldots \alpha_k} - \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \omega_{\alpha\alpha_0 \ldots \hat{\alpha}_i \ldots \alpha_k}\} \\ &= \omega_{\alpha_0 \ldots \alpha_k} - (\delta K(\omega))_{\alpha_0 \ldots \alpha_k}. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Platí tedy identita $K\delta + \delta K = \mathbf{1}$. A každý δ-kocyklus ω můžeme psát jako δ-kohranici, protože $\omega = \delta(K(\omega))$. Tím je důkaz exaktnosti hotový. ■

Vidíme, že máme kořetězcový komplex (byť s triviální kohomologií), jehož stupně tvoří násobnosti průniků okolí z pokrytí $\mathcal{U}$. Zároveň však máme původní stupně forem a vnější diferenciály d. Pro každé $p, q \geq 0$ tedy definujeme vektorový prostor

$$K^{p,q} \equiv C^p(\mathcal{U}, \Omega^q) = \prod_{\alpha_0 < \cdots < \alpha_p} \Omega^q(U_{\alpha_0 \ldots \alpha_p}). \tag{3.46}$$

Z definice dostáváme komutativní diagram obsahující všechny tyto prostory:

$$
\begin{tikzcd}
 & & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & \Omega^2(M) \arrow[r, "r"] & K^{0,2} \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & K^{1,2} \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \Omega^1(M) \arrow[r, "r"] & K^{0,1} \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & K^{1,1} \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \Omega^0(M) \arrow[r, "r"] & K^{0,0} \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & K^{1,0} \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \cdots
\end{tikzcd}
\tag{3.47}
$$

Kolekci vektorových prostorů vybavených $K^{p,q}$ a dvou *komutujících* diferenciálů $\delta : K^{p,q} \to K^{p+1,q}$ a $d : K^{p,q} \to K^{p,q+1}$ se říká **dvojný kořetězcový komplex**. Pro případ $K^{p,q} = C^p(\mathcal{U}, \Omega^q)$ se nazývá **Čechův-de Rhamův dvojný komplex**.

Každý dvojný kořetězcový komplex $(K^{p,q}, d, \delta)$ zadarmo poskytuje další kořetězcovou strukturu, takzvaný **totální kořetězcový komplex** $(K^\bullet, D)$, kde

$$K^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}, \tag{3.48}$$

a **totální diferenciál** $D : K^n \to K^{n+1}$ je na každé komponentě $K^{p,q}$ definovaný jako $D = \delta + (-1)^p d$. Někdy budeme psát $D = \delta + D''$. Znaménko $(-1)^p$ před diferenciálem d je důležité, protože potom platí:

Lemma 3.4.8. *$(K^\bullet, D)$ je kořetězcový komplex, t.j. $D^2 = 0$. Výsledná kohomologie $H_D^\bullet(K)$ se nazývá **totální kohomologie dvojného komplexu**.*

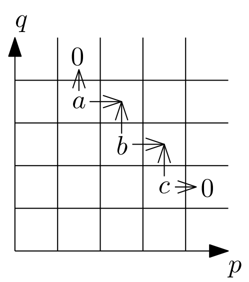
Důkaz. Nechť $\omega \in K^{p,q}$. Potom platí následující:

$$
\begin{aligned}
D^2(\omega) &= D(\delta\omega + (-1)^p d\omega) = \delta(\delta\omega + (-1)^p d\omega) + (-1)^{p+1} d(\delta\omega) + d(d\omega) \\
&= (\delta^2 + (-1)^p \delta d + (-1)^{p+1} d\delta + d^2)(\omega) = 0.
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

■

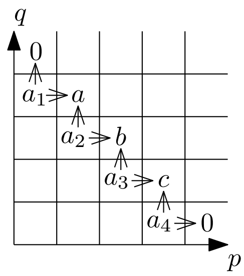
Poznámka 3.4.9. Jak vypadá příklad typického D-kocyklu ϕ v komplexu $K^\bullet$? Je to suma členů $\phi = a + b + c$, každý z nich v jiné komponentě $K^{p,q}$, a platí soustava rovnic

$$da = 0, \quad \delta a = -D''b, \quad \delta b = -D''c, \quad \delta c = 0. \tag{3.50}$$



Typická D-kohranice $\phi = a + b + c$ je taková, že existuje suma členů $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, taková že

$$a = \delta a_1 + D'' a_2, \quad b = \delta a_2 + D'' a_3, \quad c = \delta a_3 + D'' a_4. \tag{3.51}$$



Čech- de Rhamův komplex ovšem není úplně obyčejný. Každý jeho řádek je *exaktní* zobecněná Mayer-Vietorisova posloupnost. To mu propůjčuje jisté neobvyklé vlastnosti. Nejprve je třeba uvědomit si, že pro každé $n \geq 0$ máme zobrazení $r : \Omega^n(M) \to C^0(\mathcal{U}, \Omega^n) = K^{0,n} \subset K^n$.

Navíc pro každou n-formu ω platí $D(r(\omega)) = \delta(r(\omega)) + (-1)^0 dr(\omega) = 0 + r(d(\omega))$, kde jsme použili exaktnost zobecněné Mayer-Vietorisovy posloupnosti a komutativnosti diagramu (3.47). To dokazuje, že $r : \Omega^\bullet(M) \to K^\bullet$ je **kořetězcové zobrazení** a indukuje tedy **homomorfismus** $r^* : H^\bullet(M) \to H^\bullet_D(K)$. Z exaktnosti řádků Čechova-de Rhamova komplexu pak plyne následující pozoruhodné tvrzení:

Věta 3.4.10 (**Zobecněný Mayer-Vietorisův princip**). *Zobrazení r^* je izomorfismus. Jinými slovy, de Rhamova kohomologie M a Čechova-de Rhamova kohomologie odpovídající libovolnému nejvýše spočetnému pokrytí $\mathcal{U}$ jsou izomorfní, $H^n(M) \cong H^n_D(C^\bullet(U, \Omega^\bullet))$.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že r^* **je surjektivní**. Nechť $[\phi]_D$ je třída v $H^n_D(K)$ reprezentovaná D-kocyklem ϕ. Ukážeme si, že $[\phi]_D = [\phi']_D$, kde ϕ' má nenulovou jen komponentu v $K^{0,n}$.

Nechť $a \in K^{n-q,q}$ je nenulová komponenta ϕ s nejnižším q. Protože ϕ je D-kocyklus, je $\delta(a) = 0$. Z exaktnosti zobecněné Mayer-Vietorisovy posloupnosti existuje $b \in K^{n-q-1,q}$, že $a = \delta(b)$. Interpretujeme-li b jako element K^{n-1}, máme $[\phi]_D = [\phi - D(b)]_D$, ale $\phi - D(b)$ má již komponentu v $K^{n-q,q}$ nulovou. Iterací tohoto kroku dostaneme ϕ'.

Jelikož $\phi' \in K^{0,n} \subset K^n$ je D-kocyklus, máme $\delta\phi' = 0$ a $d\phi' = 0$. Z exaktnosti zobecněné Mayer-Vietorisovy posloupnosti je tedy $\phi' = r(\omega)$ pro nějakou globální n-formu $\omega \in \Omega^n(M)$. Jelikož je každá její restrikce na otevřené okolí $U_\alpha \in \mathcal{U}$ uzavřená, je i ω uzavřená a

$$r^*[\omega] = [\phi']_D = [\phi]_D. \tag{3.52}$$

Tím jsme dokázali surjektivitu, pojďme ukázat **injektivitu** r^*. Nechť $r^*[\omega] = [0]_D$. Vidíme, že $r(\omega) \in K^{0,n}$ je D-exaktní. Máme tedy $\phi \in K^{n-1}$, že $r(\omega) = D\phi$. Protože $D\phi \in K^{0,n}$, každá nenulová komponenta ϕ je δ-uzavřená. Stejným argumentem jako výše tedy můžeme od ϕ odečíst D-kohranici a tím vynulovat všechny komponenty až na $K^{0,n-1}$. Dostaneme $r(\omega) = D\phi'$, kde $\phi' \in K^{0,n-1}$. Zejména $\delta\phi' = 0$ a $d\phi' = r(\omega)$. Z exaktnosti zobecněné Mayer-Vietorisovy posloupnosti $\phi' = r(\alpha)$ pro $\alpha \in \Omega^{n-1}(M)$. Máme tedy $r(d\alpha) = D(r(\alpha)) = D\phi' = r(\omega)$ a z injektivity r potom $\omega = d\alpha$, t.j. $[\omega] = 0$. ■

Ve skutečnosti jsme použili velmi obecný argument, který závisel jen na exaktnosti horizontálních posloupností. Můžeme uvažovat následující augmentaci Čechova-de Rhamova komplexu, kde tentokrát přidáme nový řádek:

$$
\begin{tikzcd}
 & & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & \Omega^1(M) \arrow[r, "r"] & K^{0,1} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & K^{1,1} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \Omega^0(M) \arrow[r, "r"] & K^{0,0} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & K^{1,0} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & \cdots, \\
 & & C^0(\mathcal{U},\mathbb{R}) \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\delta"] & C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\delta"] & \cdots \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
\tag{3.53}
$$

kde $C^p(\mathcal{U},\mathbb{R}) \equiv \ker(d) \subseteq K^{p,0}$ je prostor lokálně konstantních funkcí na $(p+1)$-násobných průnicích $U_{\alpha_0 \ldots \alpha_p}$, který zdědí diferenciál δ z $K^{p,0}$ (restrikce lokálně konstantních funkcí jsou lokálně konstantní). Dostáváme tedy kořetězcový komplex

$$C^0(\mathcal{U},\mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathcal{U},\mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} \cdots \tag{3.54}$$

Příslušná kohomologie $H^\bullet(\mathcal{U},\mathbb{R})$ se nazývá **Čechova kohomologie** pokrytí $\mathcal{U}$.

Z důkazu zobecněného Mayer-Vietorisova principu je zřejmé, že pokud budou všechny sloupce augmentovaného dvojitého komplexu (3.53) exaktní, bude i indukovat izomorfimus $i^* : H^n(\mathcal{U},\mathbb{R}) \to H^n_D(K)$. To nám dá okamžitě i izomorfismus $H^n(\mathcal{U},\mathbb{R}) \cong H^n(M)$. Jak zajistit exaktnost sloupců? Připomeňme, že $K^{p,q} = \prod_{\alpha_0 < \cdots < \alpha_p} C^q(U_{\alpha_1 \ldots \alpha_p})$. Exaktnost p-tého sloupce tedy měří kohomologické grupy

$$\prod_{\alpha_0 < \cdots < \alpha_p} H^q(U_{\alpha_0 \ldots \alpha_p}). \tag{3.55}$$

Vidíme, že $U_{\alpha_0 \ldots \alpha_p}$ musí mít triviální de Rhamovu kohomologii. Z Poincarého lemma tedy stačí předpokládat, že $\mathcal{U}$ je dobré pokrytí.

Věta 3.4.11. *Je-li $\mathcal{U}$ dobré pokrytí, je $i^* : H^\bullet(\mathcal{U},\mathbb{R}) \to H^\bullet_D(K)$ izormofismus.*

Uvažovat dobré pokrytí má i následující výhodu. Prostory $C^p(\mathcal{U},\mathbb{R})$ i působení diferenciálu δ je velmi jednoduché. Protože všechny prostory $U_{\alpha_0 \ldots \alpha_p}$ jsou křivkově souvislé, jsou lokálně konstantní funkce na nich ve skutečnosti konstantní. Odtud

$$C^p(\mathcal{U},\mathbb{R}) = \prod_{\alpha_0 < \cdots < \alpha_p} \mathbb{R}, \tag{3.56}$$

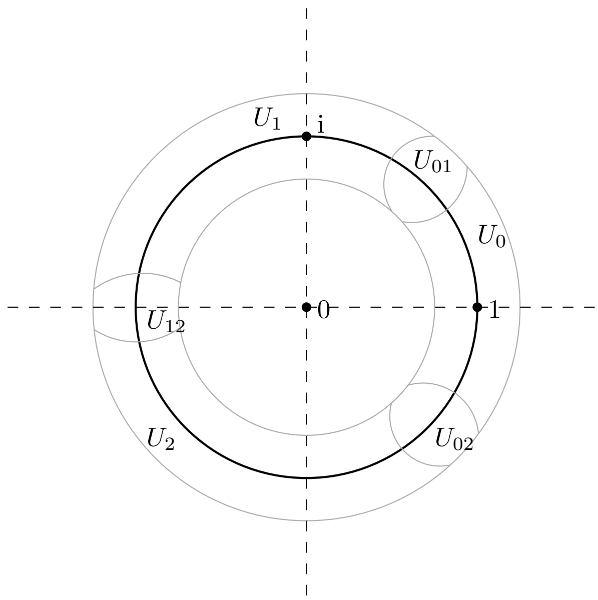
Každý element $\lambda \in C^p(\mathcal{U},\mathbb{R})$ je tedy kolekce $\{\lambda_{\alpha_0 \ldots \alpha_p}\}$ reálných konstant a

$$(\delta\lambda)_{\alpha_0 \ldots \alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \lambda_{\alpha_0 \ldots \hat{\alpha}_i \ldots \alpha_{p+1}}. \tag{3.57}$$

Tato notace je mírně nepřesná, protože v případě, že $U_{\alpha_0 \ldots \alpha_{p+1}} = \emptyset$, je pravá strana automaticky nula. Jinak jde ale o čistě kombinatorický výpočet, jen řešíme, zda se nějaké pokrývající množiny protínají! Mimo jiné dostáváme následující tvrzení.

Tvrzení 3.4.12. *Čechova kohomologie $H^\bullet(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ je stejná pro všechna dobrá pokrytí M.*

Příklad 3.4.13 (Dobré pokrytí $\mathbb{S}^1$)**.** Uvažujme dobré pokrytí kružnice jako na obrázku:



Máme tedy pouze dva netriviální členy Čechova komplexu

$$C^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^3 = \{(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}, \quad C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^3 = \{(\lambda_{01}, \lambda_{02}, \lambda_{12}) \mid \lambda_{ij} \in \mathbb{R}\}. \tag{3.58}$$

Zajímá nás tedy pouze operátor $\delta : C^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \to C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Pro $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in C^0(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ máme

$$(\delta\lambda)_{01} = \lambda_1 - \lambda_0, \quad (\delta\lambda)_{02} = \lambda_2 - \lambda_0, \quad (\delta\lambda)_{12} = \lambda_2 - \lambda_1. \tag{3.59}$$

Snadno vidíme, že $\ker(\delta) = \{(\lambda, \lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$. Odtud zřejmě $H^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Dále $\dim(H^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})) = \dim(C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})/\operatorname{im}(\delta)) = \dim(C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})) - \dim(\operatorname{im}(\delta)) = 3 - (3 - 1) = 1$. Odtud $H^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. Zřejmě $H^n(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = 0$ pro $n > 0$. Dostáváme tedy

$$H^n(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pro } n = 0, \\ \mathbb{R} & \text{pro } n = 1, \\ 0 & \text{pro } n > 1. \end{cases} \tag{3.60}$$

Vidíme, že Čechova kohomologie je opravdu izomorfní de Rhamově kohomologii.

Důsledek 3.4.14 (Kohomologie vektorových bandlů)**.** *Nechť $\pi : E \to M$ je libovolný vektorový bandl nad varietou M. Potom $H^\bullet(M) \cong H^\bullet(E)$.*

Důkaz. Ukažme si důkaz pomocí Čechovy kohomologie. Nechť $\mathcal{V}$ je trivializační pokrytí M. Ukázali jsme, že $\mathcal{V} < \mathcal{U}$, kde $\mathcal{U}$ je dobré pokrytí. Potom $\widehat{\mathcal{U}} = \{\pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ je otevřené pokrytí E. Protože $U_\alpha \subseteq V_{\phi(\alpha)}$, máme $\widehat{U}_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \equiv \pi^{-1}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) \cong U_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Tedy $\widehat{\mathcal{U}}$ je dobré pokrytí E. Navíc zřejmě $\widehat{U}_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \neq \emptyset \Leftrightarrow U_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \neq \emptyset$. Z obou pozorování plyne

$$H^\bullet(E) \cong H^\bullet(\widehat{\mathcal{U}}, \mathbb{R}) \cong H^\bullet(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \cong H^\bullet(M). \tag{3.61}$$

A máme dokázáno. ■

Poznámka 3.4.15. Tvrzení lze dokázat snadno i jinak, protože M je deformační retrakt E, a tedy homotopicky ekvivalentní. Jejich de Rhamovy kohomologie musí být tedy nutně izomorfní.

3.5 Kohomologie Lieových algeber

Aplikace teorie kohomologií sahají mnohem dál než do diferenciální geometrie. Ukazuje se, že představují užitečný nástroj i při studiu algebraických objektů. Příkladem nám budou kohomologie (reprezentací) Lieových algeber.

Následující definice fungují nad libovolným tělesem (pro jistotu s charakteristikou 0) a pro libovolnou (tedy i nekonečnou) dimenzi.

Definice 3.5.1. Nechť $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ je libovolná Lieova algebra a nechť (V, ρ) je její reprezentace. Potom prostor k-kořetězců **Chevalley-Eilenbergova kořetězcového komplexu** $\mathfrak{c}^k(\mathfrak{g}, \rho)$ definujeme jako prostor **k-lineárních totálně antisymetrických zobrazení z $\mathfrak{g}$ do V**.

Poznámka 3.5.2. Pro konečně-rozměrné $\mathfrak{g}$ můžeme ztotožnit $\mathfrak{c}^k(\mathfrak{g}, \rho)$ s prostorem $\Lambda^k \mathfrak{g}^* \otimes V$.

Definice 3.5.3. Diferenciál $\Delta : \mathfrak{c}^k(\mathfrak{g}, \rho) \to \mathfrak{c}^{k+1}(\mathfrak{g}, \rho)$ definujeme pro $\omega \in \mathfrak{c}^k(\mathfrak{g}, \rho)$ vztahem

$$\begin{aligned}\Delta(\omega)(x_1, \ldots, x_{k+1}) = &\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \rho(x_i) \cdot \omega(x_1 \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_{k+1}) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([x_i, x_j]_\mathfrak{g}, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_{k+1}).\end{aligned} \tag{3.62}$$

Apriori není vůbec zřejmé, že Δ je dobře definovaný (výsledek nemusí být nutně totálně antisymetrický) a už vůbec ne, že $\Delta^2 = 0$. Dokážeme si pouze první z vlastností.

Lemma 3.5.4. *Pro každé $k \geq 0$ a $\omega \in \mathfrak{c}^k(\mathfrak{g}, \rho)$ máme $\Delta(\omega) \in \mathfrak{c}^{k+1}(\mathfrak{g}, \rho)$.*

Důkaz. Díky polarizaci stačí ukázat, že pravá strana (3.62) je nula, kdykoliv jsou nějaké dva vstupní vektory stejné. Nechť $x_p = x_q = x$ pro nějaké $1 \leq p < q \leq k+1$. Z první sumy zbudou právě dva členy, a to pro $i = p$ a $i = q$, jinak budou dva stejné vektory x. vstupovat do totálně antisymetrického zobrazení ω. Dostaneme tedy součet

$$(-1)^{p+1} \rho(x) \cdot \omega(x_1, \ldots, \widehat{x}_p, \ldots, x, \ldots, x_{k+1}) + (-1)^{q+1} \rho(x) \cdot \omega(x_1, \ldots, x, \ldots, \widehat{x}_q, \ldots, x_{k+1}). \tag{3.63}$$

V prvním z nich musíme prohodit x právě $(q-p-1)$-krát s jeho sousedem, abychom dostali výraz v druhém členu. To nám dodá znaménko $(-1)^{q-p-1}$ a oba se navzájem odečtou.

Dvojitá suma v (3.62) bude obsahovat jen členy, kde právě jeden z vektorů v $[\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}$ bude x. Dostaneme čtveřici jednoduchých sum, dvě pro případ kdy i trefí jeden z dvojice (p, q) a dvě pro případ, kdy je trefí j. Máme tedy součet

$$\begin{aligned}&\sum_{j>q} (-1)^{q+j} \omega([x, x_j]_\mathfrak{g}, \ldots, x, \ldots, \widehat{x}_q, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_{k+1}) \\ &\quad + \sum_{\substack{j>p \\ j \neq q}} (-1)^{p+j} \omega([x, x_j]_\mathfrak{g}, \ldots, \widehat{x}_p, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_{k+1}) \\ &+ \sum_{i<p} (-1)^{i+p} \omega([x_i, x]_\mathfrak{g}, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, \widehat{x}_p, \ldots, x, \ldots, x_{k+1}) \\ &\quad + \sum_{\substack{i<q \\ i \neq p}} (-1)^{i+q} \omega([x_i, x]_\mathfrak{g}, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, \widehat{x}_q, \ldots, x_{k+1}).\end{aligned} \tag{3.64}$$

Obě složitější sumy lze psát jako součet dvou podle polohy indexu j vzhledem ke q (resp. i vzhledem k p). Například první z nich lze psát jako součet

$$\begin{aligned}&\sum_{j>q}(-1)^{p+j}\omega([x,x_j]_{\mathfrak{g}},\dots,\widehat{x}_p,\dots,x,\dots,\widehat{x}_j,\dots,x_{k+1})\\ +&\sum_{p<j<q}(-1)^{p+j}\omega([x,x_j]_{\mathfrak{g}},\dots,\widehat{x}_p,\dots,\widehat{x}_j,\dots,x,\dots,x_{k+1}).\end{aligned} \tag{3.65}$$

První suma se odečte s první sumou výše, protože transpozicemi x dostaneme znaménko $(-1)^{q-p-1}$ které to zařídí. Stejná situace nastane v druhých dvou součtech a dostaneme součet dvou sum:

$$\begin{aligned}&\sum_{p<j<q}(-1)^{p+j}\omega([x,x_j]_{\mathfrak{g}},\dots,\widehat{x}_p,\dots,\widehat{x}_j,\dots,x,\dots,x_{k+1})\\ +&\sum_{p<i<q}(-1)^{i+q}\omega([x_i,x]_{\mathfrak{g}},\dots,x,\dots,\widehat{x}_i,\dots,\widehat{x}_q,\dots,x_{k+1}).\end{aligned} \tag{3.66}$$

Transpozicí x v druhé sumě (transpozic je tentokrát $q-p-2$) a prohozením v závorce $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ dostáváme kýžené znaménko a oba součty se odečtou. ■

Tvrzení 3.5.5. *Platí $\Delta^2=0$. $(\mathfrak{c}^\bullet(\mathfrak{g},\rho),\Delta)$ tedy tvoří kořetězcový komplex.*

*Příslušná kohomologie $H^k(\mathfrak{g},\rho)$ se nazývá **Chevalley-Eilenbergova kohomologie Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ vzhledem k reprezentaci** ρ.*

Důkaz. Důkaz provedeme uvěřením pro $k=0$. Zřejmě $\mathfrak{c}^0(\mathfrak{g},\rho)=V$. Nechť $v\in V$ a $x\in\mathfrak{g}$. Máme $\Delta(v)(x)=\rho(x)\cdot v$. Pro $x_1,x_2\in\mathfrak{g}$ potom

$$\begin{aligned}\Delta(\Delta(v))(x_1,x_2)&=\rho(x_1)\cdot\Delta(v)(x_2)-\rho(x_2)\cdot\Delta(v)(x_1)-\Delta(v)([x_1,x_2]_{\mathfrak{g}})\\ &=\rho(x_1)\cdot(\rho(x_2)\cdot v)-\rho(x_2)\cdot(\rho(x_1)\cdot v)-\rho([x_1,x_2]_{\mathfrak{g}})\cdot v\\ &=([\rho(x_1),\rho(x_2)-\rho([x_1,x_2]_{\mathfrak{g}}))\cdot v=0.\end{aligned} \tag{3.67}$$

Použili jsme fakt, že $\rho:\mathfrak{g}\to\mathrm{End}(V)$ je reprezentace $\mathfrak{g}$. ■

První tři kohomologické grupy mají jednoduchou algebraickou interpretaci. Nejprve máme

$$H^0(\mathfrak{g},\rho)=Z^0(\mathfrak{g},\rho)=\{v\in V\mid\rho(x)\cdot v=0\ \ \forall x\in\mathfrak{g}\}\equiv V^{\mathfrak{g}}. \tag{3.68}$$

Prvkům $V^{\mathfrak{g}}$ se říká **invarianty reprezentace** ρ. Je-li totiž ρ odvozená z reprezentace $\widetilde{\rho}$ (souvislé) Lieovy grupy G integrující $\mathfrak{g}$, jsou $V^{\mathfrak{g}}$ opravdu invarianty $\widetilde{\rho}$. Připomeňme, že $\mathfrak{c}^1(\mathfrak{g},\rho)=\mathrm{Hom}(\mathfrak{g},V)$. Prostor 1-kocyklů má potom tvar

$$Z^1(\mathfrak{g},\rho)=\{\alpha\in\mathrm{Hom}(\mathfrak{g},V)\mid\alpha([x_1,x_2]_{\mathfrak{g}})=\rho(x_1)\cdot\alpha(x_2)-\rho(x_2)\cdot\alpha(x_1)\}\equiv\mathrm{Der}(\mathfrak{g},\rho), \tag{3.69}$$

kde zobrazení z $\mathrm{Der}(\mathfrak{g},\rho)$ se nazývají **derivace $\mathfrak{g}$-modulu** (V,ρ). 1-kohranice potom mají tvar

$$B^1(\mathfrak{g},\rho)=\{\alpha\in\mathrm{Hom}(\mathfrak{g},V)\mid\alpha(x)=\rho(x)\cdot v\text{ pro nějaké }v\in V\}\equiv\mathrm{IDer}(\mathfrak{g},\rho) \tag{3.70}$$

a nazývají se **vnitřní derivace $\mathfrak{g}$-modulu** (V,ρ). První Chevalley-Eilenbergova kohomologie $H^1(\mathfrak{g},\rho)$ tedy měří kolik derivací není vnitřních:

$$H^1(\mathfrak{g},\rho)=\mathrm{Der}(\mathfrak{g},\rho)/\,\mathrm{IDer}(\mathfrak{g},\rho). \tag{3.71}$$

Příklad 3.5.6. Uvažujme $(V,\rho) = (\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$. Máme $H^0(\mathfrak{g},\rho) = \{y \in \mathfrak{g} \mid [x,y]_{\mathfrak{g}} = 0 \;\; \forall x \in \mathfrak{g}\} \equiv \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, nultá kohomologie příslušná adjungované reprezentaci není nic jiného než centrum Lieovy algebry. Derivace a vnitřní derivace osvětlují původ svého jména:

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{g},\mathrm{ad}) = \{\alpha \in \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \mid \alpha([x_1,x_2]_{\mathfrak{g}}) = [\alpha(x_1),x_2]_{\mathfrak{g}} + [x_1,\alpha(x_2)]_{\mathfrak{g}}\}, \tag{3.72}$$

$$\mathrm{IDer}(\mathfrak{g},\mathrm{ad}) = \{\alpha \in \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \mid \alpha(x) = [x,y]_{\mathfrak{g}} \text{ pro nějaké } y \in \mathfrak{g}\}. \tag{3.73}$$

Interpretace $H^2(\mathfrak{g},\rho)$ je neméně zajímavá. Nejprve připomeňme následující pojem:

Definice 3.5.7. Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra a (V,ρ) její reprezentace. Potom **abelovské rozšíření $\widetilde{\mathfrak{g}}$ algebry $\mathfrak{g}$ modulem** (V,ρ) je krátká exaktní posloupnost homomorfismů Lieových algeber

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V \arrow[r, shift left, "j"] & \widetilde{\mathfrak{g}} \arrow[l, dashed, shift left, "t"] \arrow[r, shift left, "r"] & \mathfrak{g} \arrow[l, dashed, shift left, "s"] \arrow[r] & 0, \end{tikzcd} \tag{3.74}$$

přičemž V interpretujeme jako abelovskou Lieovu algebru. Navíc musí platit vztah

$$[x, j(v)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}} = j(\rho(r(x)) \cdot v), \tag{3.75}$$

pro všechny $x \in \widetilde{\mathfrak{g}}$ a $v \in V$. Je-li $\widetilde{\mathfrak{g}}'$ jiné abelovské rozšíření $\mathfrak{g}$ stejným modulem, řekneme, že isomorfismus $\phi \in \mathrm{Hom}(\widetilde{\mathfrak{g}},\widetilde{\mathfrak{g}}')$ je **ekvivalence abelovských rozšíření**, pokud diagram

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\mathbf{1}_V"] & \widetilde{\mathfrak{g}} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\phi"] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d, "\mathbf{1}_{\mathfrak{g}}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & V \arrow[r, "j'"] & \widetilde{\mathfrak{g}}' \arrow[r, "r'"] & \mathfrak{g} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{3.76}$$

komutuje. **Rozštěpením** krátké exaktní posloupnosti myslíme lineární zobrazení $s \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g},\widetilde{\mathfrak{g}})$ takové, že $r \circ s = \mathbf{1}_{\mathfrak{g}}$.

Nějaké rozštěpení existuje pro každou posloupnost vektorových prostorů nad nekonečným tělesem. Ne nutně je však s homomorfismus algeber! Pro každé takové s můžeme sestrojit unikátní zobrazení $t \in \mathrm{Hom}(\widetilde{\mathfrak{g}}, V)$ splňující $\ker(t) = \mathrm{im}(s)$ a $t \circ j = \mathbf{1}_{\mathfrak{g}}$. Jelikož je j monomorfismus, můžeme definovat t vztahem

$$j(t(x)) = (\mathbf{1} - s \circ r)(x), \tag{3.77}$$

pro všechny $x \in \widetilde{\mathfrak{g}}$. Snadno se ověří, že t má požadované vlastnosti a je unikátní.

Zobrazení $\phi : V \oplus \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$ definované vztahem $\phi(v,y) = j(v) + s(y)$ pro každé $(v,y) \in V \oplus \mathfrak{g}$ je izomorfismus vektorových prostorů. Jeho inverze je $\phi^{-1}(x) = (t(x), r(x))$. Vskutku, máme

$$(\phi \circ \phi^{-1})(x) = j(t(x)) + s(r(x)) = x, \tag{3.78}$$

kde jsme použili definici (3.77). Opačný směr je podobně jednoduchý:

$$(\phi^{-1} \circ \phi)(v,y) = (t(j(v) + s(y)), r(j(v) + s(y))) = (v,y). \tag{3.79}$$

Pomocí ϕ můžeme na $\mathfrak{h} = V \oplus \mathfrak{g}$ indukovat strukturu Lieovy algebry $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}}$. Snadno se ukáže, že závorka má pro $(v,y),(v',y') \in \mathfrak{h}$ tvar

$$[(v,y),(v',y')]_{\mathfrak{h}} = (\rho(y)\cdot v' - \rho(y')\cdot v + \omega(v,v'), [y,y']_{\mathfrak{g}}), \tag{3.80}$$

kde $\omega \in \mathfrak{c}^2(\mathfrak{g},\rho)$ je definovaná vztahem $\omega(y,y') = t([s(y),s(y')]_{\widetilde{\mathfrak{g}}})$. Lieova algebra $\mathfrak{h}$ je zřejmě rovněž abelovským rozšířením Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ modulem (V,ρ) a $\phi \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{h},\widetilde{\mathfrak{g}})$ je ekvivalence abelovských rozšíření. Volbou jiného rozštěpení s' dostanu jiné abelovské rozšíření $\mathfrak{h}' = V \oplus \mathfrak{g}$, které je ale nutně ekvivalentní $\mathfrak{h}$.

Lemma 3.5.8. *ω je 2-kocyklus, $\omega \in Z^2(\mathfrak{g},\rho)$.*

Důkaz. Závorka $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}}$ z definice musí splňovat Jacobiho identitu. Máme tedy

$$\begin{aligned} 0 &= [(0,x),[(0,y),(0,z)]_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{h}} + cyclic(x,y,z) \\ &= [(0,x),(\omega(y,z),[y,z]_{\mathfrak{g}})]_{\mathfrak{h}} + cyclic(x,y,z) \\ &= (\rho(x)\cdot\omega(y,z) + \omega(x,[y,z]_{\mathfrak{g}}),[x,[y,z]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}}) + cyclic(x,y,z) \\ &= (\Delta(\omega)(x,y,z),0). \end{aligned} \tag{3.81}$$

pro libovolné $x,y,z \in \mathfrak{g}$, a tedy $\Delta(\omega) = 0$. ∎

Každé abelovské rozšíření a volba rozštěpení tedy určuje unikátní 2-kocyklus v příslušném Chevalley-Eilenbergově komplexu. Každý takový 2-kocyklus ω můžeme, jak se dá snadno ověřit, použít ke konstrukci abelovského rozšíření. Konečně, snadno ukážeme následující tvrzení.

Lemma 3.5.9. *Nechť $\mathfrak{h} = V \oplus \mathfrak{g}$ a $\mathfrak{h}' = V \oplus \mathfrak{g}$ jsou dvě Abelovská rozšíření parametrizovaná 2-kocykly ω a ω'. Potom jsou ekvivalentní právě tehdy když $\omega' - \omega \in B^2(\mathfrak{g},\rho)$, neboli $[\omega] = [\omega']$ v $H^2(\mathfrak{g},\rho)$. Jinými množina tříd ekvivalence abelovských rozšíření algebry $\mathfrak{g}$ modulem (V,ρ) je bijektivní kohomologii $H^2(\mathfrak{g},\rho)$.*

Důkaz. Z komutativity diagramu (3.76) musí mít každá ekvivalence $\phi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}'$ tvar $\phi(v,y) = (v + \alpha(y), y)$ pro nějaké $\alpha \in \mathfrak{c}^1(\mathfrak{g},\rho)$. Potom dostáváme

$$\begin{aligned} \omega'(x,y) &= \pi_V([(0,x),(0,y)]_{\mathfrak{h}'}) = pr_V\phi^{-1}([\phi(0,x),\phi(0,y)]_{\mathfrak{h}}) \\ &= \pi_V\phi^{-1}([(\alpha(x),x),(\alpha(y),y)]_{\mathfrak{h}}) \\ &= \pi_V\phi^{-1}(\rho(x)\cdot\alpha(y) - \rho(y)\cdot\alpha(x) + \omega(x,y),[x,y]_{\mathfrak{g}}) \\ &= \omega(x,y) + \{\rho(x)\cdot\alpha(y) - \rho(y)\cdot\alpha(x) - \alpha([x,y]_{\mathfrak{g}})\} \\ &= \omega(x,y) + \Delta(\alpha)(x,y). \end{aligned} \tag{3.82}$$

Tím je Lemma dokázáno. ∎

Tato interpretace je příkladem standardního postupu v matematice - tzv. hledání obstrukce. Máme totiž přesně kvantifikovaný následující problém.

Důsledek 3.5.10. *Nechť $\widetilde{\mathfrak{g}}$ je abelovské rozšíření algebry $\mathfrak{g}$ modulem (V,ρ).*

Potom existuje rozštěpení $s \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g},\widetilde{\mathfrak{g}})$ takové, že $s(\mathfrak{g}) \subseteq \widetilde{\mathfrak{g}}$ je podalgebra izomorfní $\mathfrak{g}$, právě tehdy když je odpovídající kohomologická třída v $H^2(\mathfrak{g},\rho)$ triviální.

Důkaz. Zřejmě $s(\mathfrak{g})$ je podalgebra, právě tehdy když $\omega = 0$. Je-li s rozštěpení z tvrzení věty, musím mít tedy nutně $[\omega] = [0]$. Opačně, je-li s' libovolné rozštěpení a $\omega' \in Z^2(\mathfrak{g},\rho)$ příslušný 2-kocyklus, mám z předpokladu $[\omega'] = [0]$. Existuje tedy $\alpha \in \mathfrak{c}^1(\mathfrak{g},\rho)$, takové, že $\omega' = \Delta(\alpha)$. Snadno se ukáže, že $s(y) := s'(y) - j(\alpha(y))$ splňuje tvrzení věty. ∎

Toto tvrzení je velice užitečné pro velkou třídu Lieových algeber a jejich reprezentací. Vskutku, platí následující pozoruhodné tvrzení.

Věta 3.5.11 (1. a 2. Whiteheadovo Lemma). *Je-li $\mathfrak{g}$ poloprostá Lieova algebra nad tělesem charakteristiky 0 a (V,ρ) její konečněrozměrná reprezentace. Potom $H^1(\mathfrak{g},\rho) = H^2(\mathfrak{g},\rho) = 0$.*

Důsledek 3.5.12. *Všechny derivace konečněrozměrné poloprosté algebry nad tělesem charakteristiky 0 jsou vnitřní.*

Konečně, nechť G je souvislá Lieova grupa integrující (reálnou) algebru $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. Můžeme se ptát, zda existuje nějaká souvislost mezi de Rhamovou kohomologií G a Chevalley-Eilenbergovou kohomologií. Uvažujme podprostor $\Omega_L^\bullet(G) \subseteq \Omega^\bullet(G)$ levoinvariantních diferenciálních forem. Jelikož d komutuje s pullbacky, zřejmě $d : \Omega_L^k(G) \to \Omega_L^{k+1}(G)$. Dostáváme tedy **subkomplex** de Rhamova komplexu tvořený levo-invariantními formami, $(\Omega_L^\bullet(G), d)$. Příslušné kohomologie $H_L^\bullet(G)$ definují **(levou) invariantní de Rhamovu kohomologii** G.

Lemma 3.5.13. *Nechť* $(\mathbb{R}, 0)$ *je triviální reprezentace* $\mathfrak{g}$ *na* $\mathbb{R}$. *Označme* $\mathfrak{c}^\bullet(\mathfrak{g}) \equiv \mathfrak{c}^\bullet(\mathfrak{g}, 0)$. $H^\bullet(\mathfrak{g})$ *se obvykle nazývá jednoduše* ***kohomologie Lieovy algebry*** $\mathfrak{g}$.

Potom existuje lineární izomorfismus $\varphi : \Omega_L^\bullet(G) \to \mathfrak{c}^\bullet(\mathfrak{g})$, *který tvoří kořetězcové zobrazení, t.j.* $\Delta \circ \varphi = \varphi \circ d$. *Zejména tedy* $H_L^\bullet(G) \cong H^\bullet(\mathfrak{g})$.

Důkaz. Nechť $\omega \in \Omega_L^k(G)$. Potom $\varphi(\omega) \in \mathfrak{c}^k(\mathfrak{g})$ definujeme pomocí hodnoty na $x_1, \dots, x_k \in \mathfrak{g}$:

$$\varphi(\omega)(x_1, \dots, x_k) := \omega(x_1^L, \dots, x_k^L) \in \mathbb{R}, \tag{3.83}$$

kde $x_i^L \in \mathfrak{X}(G)$ jsou levo-invariantní vektorová pole. Inverze se sestrojí výměnou vstupních a výstupních dat v této definici. Zbývá ověřit komutaci s diferenciály:

$$\begin{aligned}
\Delta(\varphi(\omega))(x_1, \dots, x_{k+1}) &= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \varphi(\omega)([x_i, x_j]_{\mathfrak{g}}, \dots, \widehat{x}_i, \dots, \widehat{x}_j, \dots) \\
&= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([x_i, x_j]_{\mathfrak{g}}^L, \dots, \widehat{x}_i^L, \dots, \widehat{x}_j^L, \cdots) \\
&= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([x_i^L, x_j^L], \dots, \widehat{x}_i^L, \dots, \widehat{x}_j^L, \cdots) \\
&= d\omega(x_1^L, \dots, x_{k+1}^L) = (\varphi(d\omega))(x_1, \dots, x_{k+1}).
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Zbytek tvrzení je již triviální. ■

Jelikož by nás zajímala opravdická de Rhamova kohomologie G (třeba kvůli Poincarého lemma), zbývá odpovědět na otázku, zda $H_L^\bullet(G) \cong H^\bullet(G)$.

Tvrzení 3.5.14. *Pro kompaktní Lieovu grupu* G *tvrzení platí.*

Důkaz. Důkaz provedeme pouze jemným náznakem. Zřejmě máme inkluzi $i : \Omega_L^\bullet(G) \hookrightarrow \Omega^\bullet(G)$, která komutuje s diferenciálem. Zřejmě však není lineárním izomorfismem. Na každé Lieově grupě máme kanonickou (až na konstantu) levo-invariantní formu objemu $\mu_L \in \Omega^{\dim \mathfrak{g}}(G)$, takzvanou (levou) **Haarovu míru**. Je-li $\omega \in \Omega^k(G)$ libovolná forma, můžeme definovat formu $\mathfrak{L}(\omega)$ vztahem

$$\mathfrak{L}(\omega)(X_1, \dots, X_k) = \frac{1}{\mathrm{vol}(G)} \int_G (L_g^* \omega)(X_1, \dots, X_k) \cdot \mu_L, \tag{3.85}$$

pro všechny $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{G}$, kde integrál konverguje protože G je kompaktní a $\mathrm{vol}(G) = \int_G \mu_L$. Nyní se dá relativně snadno ukázat, že $\mathfrak{L} : \Omega^\bullet(G) \to \Omega_L^\bullet(G)$ a $\mathfrak{L}$ komutuje s diferenciálem a indukované zobrazení $\mathfrak{L}_* : H^\bullet(G) \to H_L^\bullet(G)$ je izomorfismus inverzní k i_*. ■

3.6 Svazky a jejich Čechova kohomologie

Nechť X je libovolný topologický prostor. Označme $\mathbf{Op}(X)$ následující kategorii. Jejími objekty jsou otevřené podmnožiny X. Pro libovolné dva objekty $U, V \in \mathbf{Op}(X)$ existuje právě jeden morfismus $i_V^U : V \to U$, právě tehdy když $V \subseteq U$.

Lze si představit jako graf, jehož vrcholy jsou otevřené podmnožiny X a přidáme do něj orientovanou hranu (šipku), je-li jedna podmnožina obsažena v druhé.

Definice 3.6.1. Nechť $\mathbf{C}$ je libovolná kategorie. Kontravariantní funktor $\mathcal{F} : \mathbf{Op}(X) \to \mathbf{C}$ se nazývá **předsvazek** (presheaf) na X s hodnotami v $\mathbf{C}$. Explicitně:

(i) pro každé $U \in \mathbf{Op}(X)$ máme objekt $\mathcal{F}(U) \in \mathbf{C}$;

(ii) je-li $V \subseteq U$, existuje **morfismus restrikce** $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ v kategorii $\mathbf{C}$ a platí

$$\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U, \ \ \rho_U^U = 1_{\mathcal{F}(U)}, \tag{3.86}$$

pro libovolné $W \subseteq V \subseteq U$ otevřené podmnožiny.

Příklad 3.6.2. Nechť $\mathbf{C} = \mathbf{Ab}$ je kategorie abelovských grup. Nechť $G \in \mathbf{Ab}$ je fixně zvolená abelovská grupa. **Konstantní předsvazek** G_X je definovaný jako $G_X(U) := G$ pro všechny neprázdné $U \in \mathbf{Op}(X)$, a $G_X(\emptyset) := \{0\}$. Restrikce definujeme jako $\rho_V^U := 1_G$ kdykoliv $V \subseteq U$ a $V \neq \emptyset$, a $\rho_\emptyset^U$ jako nulové zobrazení.

Předsvazek typicky přiřazuje algebraickou strukturu (určenou výběrem $\mathbf{C}$) topologickým datům (otevřeným podmnožinám). Přičemž víme co se děje, když si bereme *menší množiny*. Co ale opačná procedura - říct něco „globálně“ na základě lokálních dat? Tento požadavek vede přesně na definici svazku. Předpokládáme, že $\mathbf{C}$ je tzv. *konkrétní kategorie*, tj. její objekty jsou množiny a morfismy jsou zobrazení mezi těmito množinami (s extra požadavky). Potom má totiž smysl mluvit o prvcích množiny $\mathcal{F}(U)$, které se nazývají **lokální řezy předsvazku $\mathcal{F}$ nad** U.

Definice 3.6.3. Nechť $\mathcal{F} : \mathbf{Op}(X) \to \mathbf{C}$ je předsvazek na X s hodnotami v $\mathbf{C}$. Řekneme, že $\mathcal{F}$ je **svazek na X s hodnotami v $\mathbf{C}$**, pokud platí následující.

Nechť $U \in \mathbf{Op}(X)$ je libovolná podmnožina a nechť $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ její libovolné pokrytí, t.j. $U = \cup_{\alpha \in I} U_\alpha$. V každém takovém případě musí platit následující dva axiomy:

(i) **axiom lokality**: nechť $s, t \in \mathcal{F}(U)$ splňují $\rho_{U_\alpha}^U(s) = \rho_{U_\alpha}^U(t)$. Potom $s = t$;

(ii) **axiom lepení**: nechť $\{s_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je kolekce lokálních řezů, kde $s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ a platí

$$\rho_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\alpha}(s_\alpha) = \rho_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\beta}(s_\beta) \tag{3.87}$$

pro všechny $\alpha, \beta \in I$. Potom existuje řez $s \in \mathcal{F}(U)$ splňující $\rho_{U_\alpha}^U(s) = s_\alpha$ pro všechny $\alpha \in I$.

Příklad 3.6.4. Nechť E je topologický prostor a $\pi : E \to X$ spojité surjektivní zobrazení. Definujeme **svazek** $\Gamma(E, \pi)$ **spojitých řezů** (E, π) **předpisem**:

$$\Gamma(E, \pi)(U) := \{\sigma : U \to E \mid \pi \circ \sigma = 1_U, \ \sigma \text{ je spojité}\}. \tag{3.88}$$

Takto obecně máme $\mathbf{C} = \mathbf{Set}$. Pro $V \subseteq U$ definujeme morfismus restrikce jako skutečnou restrikci $\rho_V^U(\sigma) = \sigma|_V$. Z obvyklých vlastností spojitých funkcí plyne, že platí axiomy lokality i lepení. Uvažujme nyní dva speciální příklady:

(i) $E = X \times \mathbb{R}$. Každý lokální řez $\sigma : U \to X \times \mathbb{R}$ musí mít tvar $\sigma(x) = (x, f(x))$, kde $f : U \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Dostáváme $\Gamma(E, \pi) = C^0_X$, kde C^0_X je **svazek spojitých reálných funkcí na** X, kde $C^0_X(U) := C^0(U)$ restrikce jsou restrikce.

Všimněte si, že v tomhle případě můžeme za $\mathbf{C}$ vzít i třeba vektorové prostory nad $\mathbb{R}$, abelovské grupy nebo komutativní okruhy.

(ii) Nechť $G \in \mathbf{Ab}$ je fixní abelovská grupa. Vybavme G *diskrétní topologií* a uvažujme opět $E = X \times G$. Spojité lokální řezy $\sigma : U \to X \times G$ opět odpovídají spojitým zobrazením $f : U \to G$. Nechť $x \in X$. Protože množina $\{f(x)\} \subseteq G$ je otevřená. Existuje tedy okolí $V \subseteq U$ bodu x, takové, že $f(V) \subseteq \{f(x)\}$, neboli $f(y) = f(x)$ pro všechny $y \in V$. Takovým funkcím se říká **lokálně konstantní** a dá se ukázat, že jsou vždycky spojité vzhledem k diskrétní topologii na G. Dostáváme tedy svazek lokálně konstantních funkcí $\overline{G}_X$, kde

$$\overline{G}_X(U) := \{f : U \to G \mid f \text{ je lokálně konstantní}\}, \tag{3.89}$$

kde restrikce jsou restrikce. Aby došlo ke zmatení úplně všech, $\overline{G}_X$ se nazývá **konstantní svazek s hodnotami v** G.

Tvrzení 3.6.5. *Konstantní předsvazek G_X není svazek.*

Důkaz. Uvažujme G alespoň o dvou prvcích a otevřenou podmnožinu $U = U_1 \sqcup U_2$, kde $U_1, U_2 \in \mathbf{Op}(X)$. Máme tedy otevřené pokrytí $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$. Uvažujme kolekci řezů $\{s_1, s_2\}$. Pro každé $U \neq \emptyset$ je $G_X(U) = G$, volba s_1 a s_2 je ekvivalentní volbě dvou elementů G. Předpokládejme, že $s_1 \neq s_2$. Jelikož $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, je podmínka (3.87) splněna triviálně. Musí tedy existovat řez (element G) $s \in \mathcal{F}(U)$, takový že $1_G(s) = s_1$ a $1_G(s) = s_2$, což nelze splnit. ■

Nechť $\mathcal{F} : \mathbf{Op}(X) \to \mathbf{Ab}$ je libovolný předsvazek na X s hodnotami v kategorii abelovských grup. Předpokládejme $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$. Nechť $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je libovolné otevřené pokrytí X. Budeme opět používat značení $U_{\alpha_0 \dots \alpha_k} = U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_k}$. Tentokrát však *umožníme* opakování indexů. Podobně jako při konstrukci zobecněné Mayer-Vietorisovy posloupnosti máme (tentokrát vždy nekonečnou) posloupnost množin

$$X \longleftarrow \textstyle\coprod_{\alpha_0 \in I} U_{\alpha_0} \;\underset{\overleftarrow{\partial_1}}{\overleftarrow{\partial_0}}\; \coprod_{(\alpha_0,\alpha_1) \in I^2} U_{\alpha_0\alpha_1} \;\overleftarrow{\partial_0}\,\overleftarrow{\partial_1}\,\overleftarrow{\partial_2}\; \coprod_{(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2) \in I^3} U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \;\overleftarrow{}\overleftarrow{}\overleftarrow{}\overleftarrow{}\; \dots, \tag{3.90}$$

kde $\partial_i : U_{\alpha_0 \dots \alpha_k} \to U_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha_i} \dots \alpha_k}$ „vynechá“ i-tou množinu. Opět umožňujeme opakování indexů! Na tuto posloupnost můžeme aplikovat kontravariantní funktor $\mathcal{F}$ a dostaneme posloupnost abelovských grup, kde $\delta_i := \mathcal{F}(\partial_i)$, a r je indukované inkluzemi U_α to X.

$$\mathcal{F}(X) \xrightarrow{r} \textstyle\prod_{\alpha_0 \in I} \mathcal{F}(U_\alpha) \;\underset{\xrightarrow{\delta_1}}{\xrightarrow{\delta_0}}\; \prod_{(\alpha_0,\alpha_1) \in I^2} \mathcal{F}(U_{\alpha_0\alpha_1}) \;\xrightarrow{\delta_0}\,\xrightarrow{\delta_1}\,\xrightarrow{\delta_2}\; \prod_{(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2) \in I^3} \mathcal{F}(U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}) \;\xrightarrow{}\xrightarrow{}\xrightarrow{}\xrightarrow{}\; \dots,$$

Abelovské grupy v této posloupnosti se nazývají grupy **Čechových p-řetězců** $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ příslušné předsvazku $\mathcal{F}$ a pokrytí $\mathcal{U}$, tedy

$$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in I^{p+1}} \mathcal{F}(U_{\alpha_0} \dots U_{\alpha_p}). \tag{3.91}$$

Podobně jako při konstrukci Mayer-Vietorisovy posloupnosti můžeme nyní nakombinovat jednotlivé restrikce a definovat **Čechův operátor kohranice** $\delta_{\mathcal{F}} : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ jako

$$(\delta_{\mathcal{F}}\omega)_{\alpha_0,\ldots,\alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^{i+1}\delta_i(\omega_{\alpha_0\ldots\hat{\alpha}_i\ldots\alpha_p}), \tag{3.92}$$

kde $\omega_{\alpha_0\ldots\alpha_p}$ jsou komponenty $\omega \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Opět lze snadno ukázat, že $\delta_{\mathcal{F}}^2 = 0$.

Definice 3.6.6. Kořetězcový komplex $(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \delta_{\mathcal{F}})$ se nazývá **Čechův kořetězcový komplex** příslušný předsvazku $\mathcal{F}$ a pokrytí $\mathcal{U}$. Příslušná kohomologická grupa se značí jako $\check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ a nazývá se **Čechova kohomologie** příslušná předsvazku $\mathcal{F}$ a pokrytí $\mathcal{U}$.

Nyní uvažujme kategorii $\mathbf{OpC}(X)$, jejíž objekty jsou otevřená pokrytí a právě jeden morfismus $j_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, je-li $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$, neboli $\mathcal{V}$ je zjemnění $\mathcal{U}$. Všimněte si, že pro každá dvě otevřená pokrytí $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \in \mathbf{OpC}(X)$ existuje **společné zjemnění** $\mathcal{V} \in \mathbf{OpC}(X)$ takové, že $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \prec \mathcal{V}$. Za povšimnutí stojí, že $\mathbf{OpC}(X)$ není množina.

Tvrzení 3.6.7. *Přiřazení* $\mathcal{U} \mapsto \check{\mathrm{H}}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ *definuje funktor* $\check{\mathrm{H}}(\mathcal{F}) : \mathbf{OpC}(X) \to \mathbf{Ab}$.

Důkaz. Nechť $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ a $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in J}$. Je-li $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$, existuje zobrazení $\phi : J \to I$ takové, že $V_\beta \subseteq U_{\phi(\beta)}$. Pro dané ϕ můžeme definovat morfismus abelovských grup $\hat{\phi} : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$. Pro $\omega \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ definujeme

$$(\hat{\phi}(\omega))_{\beta_1\ldots\beta_p} := \rho^{U_{\phi(\beta_1)\ldots\phi(\beta_p)}}_{V_{\beta_1\ldots\beta_p}}(\omega_{\phi(\beta_1),\ldots,\phi(\beta_p)}), \tag{3.93}$$

kde využíváme inkluze $V_{\beta_1\ldots\beta_p} \subseteq U_{\phi(\beta_1)\ldots\phi(\beta_p)}$. Nyní se dá snadno ukázat, že toto zobrazení komutuje s příslušnými Čechovými kodiferenciály a indukuje tedy zobrazení $\phi_* : \check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$. Připomeňme, že pro jedno zjemnění $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ může být mnoho zobrazení ϕ. Dá se ale ukázat (lze nalézt v literatuře) že zobrazení ϕ_* na konkrétní volbě nezávisí. ∎

Předsvazku $\mathcal{F}$ a topologickému prostoru bychom chtěli přiřadit veličinu, která by nezávisela na konkrétním otevřeném pokrytí $\mathcal{U}$. Předpokládejme, že X je takzvaný **Lindelöfův prostor**, kde každé otevřené pokrytí $\mathcal{U}$ má spočetné podpokrytí. Například každá hladká varieta je takový prostor. Označme jako $\mathbf{OpC}_{\mathbb{N}}(X)$ množinu všech spočetných pokrytí X.

Definice 3.6.8. Nechť X Lindelöfův prostor. Potom **Čechovou kohomologií prostoru** X **a předsvazku** $\mathcal{F}$ nazýváme tzv. **přímou limitu přes spočetná pokrytí**

$$\check{\mathrm{H}}^p(X, \mathcal{F}) := \varinjlim_{U \in \mathbf{OpC}_{\mathbb{N}}(X)} \check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \tag{3.94}$$

kde abelovská grupa na pravé straně je jednoznačně (až na izomorfismus) definována vlastnostmi:

(i) pro každé $\mathcal{U} \in \mathbf{OpC}_{\mathbb{N}}(X)$ máme homomorfismus $\pi_{\mathcal{U}} : \check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{\mathrm{H}}^p(X, \mathcal{F})$;

(ii) je-li $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$, platí $\pi_{\mathcal{V}} \circ \phi_* = \pi_{\mathcal{U}}$;

(iii) je-li A libovolná abelovská grupa a $\{\tau_{\mathcal{U}}\}_{\mathcal{U} \in \mathbf{OpC}_{\mathbb{N}}(X)}$ je kolekce zobrazení $\tau_{\mathcal{U}} : \check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to A$ mající vlastnost (ii), existuje *unikátní* homomorfismus $\varphi : \check{\mathrm{H}}^p(X, \mathcal{F}) \to A$ splňující $\varphi \circ \pi_{\mathcal{U}} = \tau_{\mathcal{U}}$ pro každé $\mathcal{U} \in \mathbf{OpC}_{\mathbb{N}}(X)$. Tomuto se říká **vlastnost univerzality**.

Tvrzení 3.6.9. *Taková grupa existuje.*

Důkaz. Uvažujme abelovskou grupu $G = \bigoplus_{U \in \mathbf{OpC}_{\mathbb{N}}(X)} \check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Nechť

$$M = \{[\omega] - \phi_*[\omega] \mid [\omega] \in \check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}),\ \phi_* : \check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})\}. \tag{3.95}$$

Nyní se vezme ideál $I = \langle M \rangle$ generovaný touto množinou (nejmenší ideál v A obsahující M. Potom stačí $\check{\mathrm{H}}^p(X, \mathcal{F})$ definovat jako příslušný faktorprostor G/I. Nechť $\natural : G \to G/I$ je příslušné faktorzobrazení.

Pro každé $\mathcal{U} \in \mathbf{OpC}_{\mathbb{N}}(X)$ definujeme $\pi_{\mathcal{U}} = \natural \circ i_{\mathcal{U}}$, kde $i_{\mathcal{U}} : \check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to G$ je inkluze do direktní sumy. Nechť $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ a ϕ_* je příslušné zobrazení. Pro každé $[\omega] \in \check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ máme

$$(\pi_{\mathcal{V}} \circ \phi_*)[\omega] = \natural(\phi_*[\omega]) = \natural([\omega] - ([\omega] - \phi_*[\omega])) = \pi_{\mathcal{U}}[\omega]. \tag{3.96}$$

Máme tedy splněny vlastnosti (i) a (ii). Nechť A je libovolná abelovská grupa s kolekcí zobrazení $\tau_{\mathcal{U}} : \check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to A$ mající vlastnosti (ii). Můžeme definovat zobrazení $\hat{\varphi} : G \to A$ předpisem $\hat{\varphi} \circ i_U := \tau_U$. Předpoklad zajistí, že $I \subseteq \ker(\hat{\varphi})$ a dostáváme tedy homomorfismus grup $\tau : G/I \to A$. Potom $\tau \circ \pi_U = (\tau \circ \natural) \circ i_U = \hat{\varphi} \circ i_U = \tau_U$. Z konstrukce je jasné, že neexistuje jiné zobrazení splňující $\tau \circ \pi_{\mathcal{U}} = \tau_{\mathcal{U}}$. ■

Definice 3.6.10. Pro $\mathcal{F} = G_X$ dostáváme klasickou **Čechovu kohomologii s koeficienty v** G, označujeme jednoduše jako $\check{\mathrm{H}}^p(X, G) := \check{\mathrm{H}}^p(X, G_X)$. Pro zajímavost, je-li X parakompaktní topologický prostor, máme $\check{\mathrm{H}}^p(X, G_X) \cong \check{\mathrm{H}}^p(X, \overline{G}_X)$.

Příklad 3.6.11 (První Stiefelova-Whitneyho třída). Uvažujme varietu M a její atlas $\mathcal{A} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je nejvýše spočetné dobré pokrytí. Pro každé $\alpha, \beta \in I$ pak máme Jacobiho matici $\mathbf{J}_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ příslušného přechodového zobrazení, kde $n = \dim(M)$. Pro každé $\alpha, \beta \in I$ definujeme

$$\omega_{\alpha\beta} := \mathrm{sgn}(\det(\mathbf{J}_{\alpha\beta})) \in \{-1, 1\} \equiv \mathbb{Z}_2. \tag{3.97}$$

Dostáváme tedy $\omega = (\omega_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta) \in I^2} \in C^p(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2)$. Je potřeba si uvědomit, že grupu $\mathbb{Z}_2$ zde píšeme v multiplikativní notaci (grupová operace je daná součiny čísel -1 a 1) a roli nuly v aditivní notaci plní 1. Potom

$$(\delta_{\mathbb{Z}_2}(\omega))_{\alpha\beta\gamma} = \omega_{\beta\gamma} \cdot \omega_{\alpha\gamma}^{-1} \cdot \omega_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta} \cdot \omega_{\beta\gamma} \cdot \omega_{\alpha\gamma}^{-1} = 1, \tag{3.98}$$

protože Jacobiho matice přechodových zobrazení splňují kocyklovou podmínku $\mathbf{J}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{J}_{\beta\gamma} = \mathbf{J}_{\alpha\gamma}$. To ale znamená, že $\delta_{\mathbb{Z}_2}(\omega) = 0$ a ω definuje 2-kocyklus v $C^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2)$. Můžeme tedy uvažovat příslušnou třídu $[\omega] \in \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_2)$ a její obraz $\pi_{\mathcal{U}}[\omega] \in \check{\mathrm{H}}^1(M, \mathbb{Z}_2)$. Tato třída se nazývá **první Stiefelova-Whitneyho třída** M. Lze dokázat, že nezávisí na volbě $\mathcal{U}$ a je unikátní třídou přiřazenou varietě M.

Je-li M orientovatelná, můžeme zvolit atlas $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ takový, že $\omega_{\alpha\beta} = 1$ pro všechny $\alpha, \beta \in I$. To ale znamená, že $\omega = 0$ je triviální kocyklus, a tedy i $\pi_{\mathcal{U}}[\omega] = 0$. Platí i opačné tvrzení: je-li Stiefelova-Whitneyova třída triviální, je varieta M orientovatelná. Nalezli jsme tedy obstrukci trivializovatelnosti M.

Poznámka 3.6.12. Na závěr si řekněme několik poznámek bez důkazů.

1) Je-li X hladká varieta, lze $\check{\mathrm{H}}^p(X, \mathcal{F})$ počítat jako přímou limitu pouze přes dobrá pokrytí.

2) Místo všech kořetězců můžeme uvažovat podkomplex $C'^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \subseteq C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ **alternujících p-kořetězců**, kde kdykoliv se dva indexy opakují, dostaneme nulu a platí pravidlo

$$\omega_{\dots\alpha\dots\beta\dots} = -\omega_{\dots\beta\dots\alpha\dots}. \tag{3.99}$$

Operátor $\delta_{\mathcal{F}}$ se zúží na zobrazení $\delta_{\mathcal{F}} : C'^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C'^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ a my tak můžeme spočítat kohomologii $\check{\mathrm{H}}'^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$. Dá se ukázat, že $\check{\mathrm{H}}'^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \cong \check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$, ale vyžaduje to dost znalostí teorie abstraktních simpliciálních komplexů.

3) Čechova kohomologie $H^\bullet(\mathcal{U},\mathbb{R})$ pokrytí $\mathcal{U}$ (z Čechova-de Rhamova komplexu) je Čechova kohomologie pro konstantní svazek $\overline{\mathbb{R}}_M$. Jelikož jsme ukázali, že nezávisí na volbě dobrého pokrytí $\mathcal{U}$, dostáváme z bodu 1) $\check{\mathrm{H}}^\bullet(\mathcal{U},\overline{\mathbb{R}}_M) \cong \check{\mathrm{H}}^\bullet(M,\overline{\mathbb{R}}_M)$. Jelikož je M parakompaktní, platí rovněž $\check{\mathrm{H}}^\bullet(\mathcal{U},\overline{\mathbb{R}}_M) \cong \check{\mathrm{H}}^\bullet(\mathcal{U},\mathbb{R})$.

4) Čechovy kohomologie se přirozeně objevují v diferenciální geometrii. Například, hlavní fibrované prostory $\pi : P \to M$ s abelovskou strukturní grupou G jsou klasifikovány grupou $\check{\mathrm{H}}^1(M, C^\infty_{M,G})$, kde $C^\infty_{M,G}(U) := C^\infty(U,G)$ jsou hladká zobrazení z U do G. Jinými slovy, každé třídě izomorfismů $[P]$ přísluší právě jeden element $\check{\mathrm{H}}^1(M, C^\infty_{M,G})$.

5) Třídy Čechovy kohomologie často měří obstrukci nějaké geometrické vlastnosti.

Podobně, existuje **druhá Stiefelova-Whitneyho třída** v $\check{\mathrm{H}}^2(M,\mathbb{Z}_2)$. Tato třída je triviální, právě tehdy když na M existuje spinová struktura. Množina všech neekvivalentních spinových struktur je pak přímo grupa $\check{\mathrm{H}}^1(M,\mathbb{Z}_2)$.

Literatura

[1] R. Bott and L. W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, vol. 82. Springer Science & Business Media, 2013.

[2] J. Gallier and J. Quaintance, *A gentle introduction to homology, cohomology, and sheaf cohomology*, 2016.

[3] M. Goto and F. D. Grosshans, *Semisimple lie algebras.* CRC, 1978.

[4] A. Hatcher, *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2002.