České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Superintegrabilní Hamiltoniány ve 2 a 3 rozměrech

Superintegrable 2D and 3D Hamiltonians

Bakalářská práce

Autor: **Libor Martínek**
Vedoucí práce: **doc. Ing. Libor Šnobl, Ph.D.**
Konzultantka: **Antonella Marchesiello, Ph.D.**

Akademický rok: 2015/2016

Zadání práce

Cílem práce je seznámit se s vlastnostmi superintegrabilních hamiltonovských systémů, tj systémů, jejichž dynamika povoluje existenci více nezávislých integrálů pohybu než je počet stupňů volnosti.

Úkolem je

1) prostudovat a pochopit základní definice týkající se dané problematiky, tj. pojmy superintegrabilita, separabilita a jejich vzájemnou souvislost,

2) prověřit základní výsledky týkající se kvadraticky superintegrabilních systémů se skalárním potenciálem ve 2 rozměrech a seznámit se se známými výsledky ve 3 rozměrech ohledně klasifikace takových systémů, zejména se strukturou 11 tříd kvadraticky integrabilních potenciálů separabilních v různých ortogonálních souřadnicích,

3) prostudovat publikované výsledky týkající se integrabiliních a superintegrabilních systémů s magnetickým polem,

4) pokusit se zobecnit případy třírozměrně kvadraticky integrabilních systémů s vektorovým potenciálem, jejichž integrály pohybu mají obecnější tvar než integrály odpovídající výše zmíněným 11 třídám.

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze literaturu uvedenou v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne............................... ....

Poděkování:

Rád bych zde poděkoval svému školiteli doc. Ing. Liboru Šnoblovi, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce a za jeho cenné rady a připomínky, které ji obohatily.

Také bych rád poděkoval svým rodičům; mají to se mnou někdy těžký.

Libor Martínek

Název práce:
Superintegrabilní Hamiltoniány ve 2 a 3 rozměrech

Autor: Libor Martínek

Obor: Matematická fyzika
Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: doc. Ing. Libor Šnobl, Ph.D. Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze
Konzultantka: Antonella Marchesiello, Ph.D. Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

Abstrakt: V této práci zkoumáme podmínky na strukturu kvadratických integrálů pohybu pro nabitou částici pohybující se ve statickém elektrickém a magnetickém poli. Po shrnutí pojmů z klasické a kvantové mechaniky odvodíme podmínky na separabilitu Hamiltoniánu se skalárním potenciálem ve 2 rozměrech a poté se soustředíme na superintegrabilitu ve 3 rozměrech za přítomnosti jak skalárního, tak vektorového potenciálu.

Klíčová slova: integrabilita, klasická a kvantová mechanika, magnetické pole, superintegrabilita

Title:
Superintegrable 2D and 3D Hamiltonians

Author: Libor Martínek

Abstract: In this work we investigate the conditions on the structure of quadratic integrals of motion of a charged particle moving in a static electric and magnetic field. After a brief summary of classical and quantum mechanics we derive the conditions for separability of Hamiltonians with scalar potential in 2D and then focus our efforts on superintegrability in 3D when scalar as well as vector potentials are present.

Keywords: classical and quantum mechanics, integrability, magnetic field, superintegrability

Obsah

Úvod

Integrabilní a superintegrabilní systémy hrají ve fyzice důležitou roli; jako jedny z mála jsou exaktně řešitelné, čímž nám poskytují nejen detailní pohled na daný systém a jeho vývoj v čase, ale též slouží jako základ mnoha dalších modelů.

Lineární harmonický oscilátor a Kepler-Coulombův systém jsou příkladem superintegrabilních systémů a oba jsou řešitelné analyticky i algebraicky, čímž si zasloužily jak své stále místo ve všech standardních kurzech fyziky, tak i intenzivní výzkum a další zobecnění.

V této práci se po zopakování pojmů s těmito systémy seznámíme, odvodíme jejich základní vlastnosti a posléze zkusíme zobecnit některé výsledky, které byly publikovány v nedávném článku [1].

1 Úvodní pojmy

V této kapitole vyložíme nutné pojmy nejprve z klasické a kvantové mechaniky, které jsou potřebné pro pochopení dané problematiky, a posléze definujeme ústřední pojem celé práce - superintegrabilitu.

1.1 Klasická mechanika

Ač by to možná bylo efektivnější (určitě však efektnější [2]), nebudeme zde většinou používat jazyk diferenciální (symplektické) geometrie, protože ho později ani nevyužijeme. Fázový prostor pro nás tedy bude $\mathbb{R}^{2n}$ s n souřadnicemi polohy q_j a n souřadnicemi hybnosti p_j. Systém popisujeme Hamiltoniánem - funkcí na fázovém prostoru mající fyzikální význam celkové energie. Dynamika systému je dána *Hamiltonovými rovnicemi*

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \qquad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \qquad j = 1, \ldots, n$$

Řešení těchto rovnic udává trajektorii systému.

Pro studium klasické mechaniky má zásadní význam zavedení následující operace.

Definice 1.1 (Poissonova závorka) ***Poissonova závorka*** *dvou funkcí* $f(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$, $g(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ *je operace přiřazující funkci*

$$\{f, g\}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \Big).$$

Tvrzení 1.1 (Vlastnosti Poissonovy závorky) *Poissonova závorka je bilineární a antikomutativní a navíc splňuje*

$$\begin{aligned} \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} &= 0 \qquad \textit{Jacobiho identitu}, \\ \{f, gh\} &= g\{f, h\} + \{f, g\}h \qquad \textit{Leibnizovo pravidlo}, \end{aligned}$$

pro všechny funkce f, g, h.

Naše výchozí souřadnice splňují komutační relace

$$\{q_j, q_k\} = 0, \quad \{p_j, p_k\} = 0, \quad \{q_j, p_k\} = \delta_{jk},$$

což nás motivuje k následující definici.

Definice 1.2 (Kanonické souřadnice) *Soubor* $2n$ *souřadnicových funkcí* $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ *nazveme* ***kanonickým****, splňují-li tytéž komutační relace, neboli*

$$\{Q_j, Q_k\} = 0, \quad \{P_j, P_k\} = 0, \quad \{Q_j, P_k\} = \delta_{jk}.$$

Kanonické souřadnice jsou skutečnými souřadnicemi na fázovém prostoru, tj. můžeme (alespoň lokálně) vyjádřit $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ jako funkce $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$. Důležitou vlastností Poissonovy závorky je její invariance vůči kanonické transformaci. Jakákoliv transformace $\mathbf{q'}(\mathbf{q}),\ \mathbf{p'}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ taková, že q'_j závisí pouze na $\mathbf{q}$ a p'_j má předpis

$$p'_l = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_j}{\partial q'_l} p_j$$

je vždy kanonická.

Hamiltonovy rovnice můžeme nyní přepsat jako

$$\frac{dq_j}{dt} = \{H, q_j\}, \qquad \frac{dp_j}{dt} = \{H, p_j\}$$

a pro libovolnou funkci $F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ podél trajektorie $\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)$ bude platit

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\Big)$$
$$= \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}.$$

Definice 1.3 (Integrál pohybu) *O funkci F řekneme, že je **integrálem pohybu**, pokud podél trajektorie $\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t)$ platí*

$$\frac{dF}{dt} = 0.$$

Hledání integrálů pohybu je v klasické mechanice velmi záslužná činnost; snižuje nám dimenzi variety, na kterou je pohyb vázán (čímž vlastně máme odhad na maximální počet integrálů pohybu, a to $2n - 1$) a vynucuje také nějakou symetrii zkoumaného systému. Stěžejní poznatek, že to platí i obráceně, tedy že ze symetrie plyne existence integrálu pohybu, je znám podle své autorky jako *teorém Noetherové.*

V celé práci budeme uvažovat Hamiltoniány, které jsou na čase nezávislé, čímž automaticky dostáváme náš první integrál pohybu. Stejně tak další integrály budeme hledat na čase nezávislé, budeme tím pádem často (vlastně pořád) využívat následující tvrzení.

Tvrzení 1.2 (O integrálech pohybu) *Funkce $F(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ je integrálem pohybu, právě když platí $\{F, H\} = 0$.*

Snadno se z vlastností Poissonovy závorky ukáže, že máme-li 2 integrály pohybu, pak lineární kombinace a dokonce i jejich Poissonova závorka jsou integrály pohybu. Nic nám ovšem nezaručuje, že takhle nalezené integrály pohybu budou nezávislé nebo přinesou něco nového. Nezávislost myslíme v následujícím smyslu.

Definice 1.4 (Funkcionální nezávislost) *Mějme množinu* $\mathcal{F} = \big(f_1(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),\ldots,f_N(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\big)$ *N hladkých funkcí definovaných na nějaké oblasti* $2n$*-rozměrného fázového prostoru. Řekneme, že* $\mathcal{F}$ *je* ***funkcionálně nezávislá****, má-li matice* $N \times 2n$ $\big(\frac{\partial f_l}{\partial q_j}, \frac{\partial f_l}{\partial p_j}\big)$ *hodnost* N *na celé oblasti. Má-li matice hodnost nižší než* N*, řekneme, že* $\mathcal{F}$ *je* ***funkcionálně závislá****.*

Je-li teda množina f. závislá, existuje nenulová hladká funkce F N proměnných, že $F(f_1,\ldots,f_N) = 0$ identicky na dané oblasti. Obráceně platí, že existuje-li taková F, je hodnost příslušné matice nižší než N. Je zřejmé, že množina, kde $N > 2n$, je funkcionálně závislá.

Definice 1.5 (Integrabilita) *Systém s Hamiltoniánem* H *nazveme* ***integrabilním****, pokud povoluje* n *integrálu pohybu* $F_1 = H, F_2, \ldots, F_n$*, které jsou funkcionálně nezávislé a navzájem v* ***involuci****, tj.*

$$\{F_i, F_j\} = 0$$

Je-li nějaký systém integrabilní, jsme schopni přislušné pohybové rovnice vyřešit přímo integrací (tj. nejhorší, co se může stát, je řešení v kvadraturách).

Uvažujme nyní integrabilní Hamiltonián H s integrály pohybu F_j s příslušnými konstantami c_j. Z funkcionální nezávislosti platí, že jsme schopni vždy nalézt kanonické souřadnice takové, pro něž $\det(\frac{\partial F_j}{\partial p_l}) \neq 0$, takže z věty o inverzní funkci můžeme vyřešit n rovnic $F_j(\mathbf{q},\mathbf{p}) = c_j$ pro hybnosti a dostaneme $p_j = p_j(\mathbf{q},\mathbf{p})$. Znamená to, že pro částici s polohou $\mathbf{q}$ ležící na průsečíků nadrovin $F_j = c_j$ je hybnost plně určena. Existuje tak funkce S (typicky se ji říká akce nebo hlavní funkce Hamiltonova), pro kterou platí $p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}$. Když dosadíme do integrálů, máme $F_j(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}) = c_j$, přičemž po označení $E = c_1$ dostaneme tzv. *Hamilton-Jacobiho rovnici*

$$H\Big(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}\Big) = E.$$

Tato rovnice je zajímavá (nejen) tím, že narozdíl od Hamiltonových pohybových rovnic, což je soustava $2n$ obyčejných lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu, představuje H.-J. rovnice nelineární parciální 1. řádu, lze na ni tedy použít zase jiné metody, které třeba mohou přínest lepší výsledky.

Řešení H.-J. rovnice, které závisí netriviálně na parametrech $\mathbf{c}$, se nazývá *úplný integrál.* Můžeme na to jít z druhé strany a zjístíme, že úplný integrál H.-J. rovnice určuje n integrálů pohybu, které jsou v involuci, což lze vyjádřit ve formě následujícího tvrzení.

Tvrzení 1.3 (Souvislost integrability a úplného integrálu) *Systém s Hamiltoniánem* H *je integrabilní, právě když k* H *existuje úplný integrál.*

Jednou z mocných metod, jak ukázat, že je nějaký Hamiltonián integrabilní, je zkonstruovat úplný integrál pomocí aditivní separace proměnných, tj. ve tvaru

$$S(\mathbf{q},t) = S_1(q_1) + \ldots S_n(q_n) + S_0(t)$$

1.2 Kvantová mechanika

V této podkapitole podáme přehled těch nejzákladnějších principů a poznatků nutných k pochopení kvantových integrabilních systémů.

Fyzikální stav je v kvantové mechanice reprezentován jako jednorozměrný podprostor Hilbertova prostoru nad tělesem $\mathbb{C}$. Standardně se Hilbertův prostor systému s n stupni volnosti bere $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$, na kterém máme skalární součin definový jako

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{f(\mathbf{x})} g(\mathbf{x})\, d^n x.$$

Fyzikálním veličinám (pozorovatelným) přiřazujeme samosdružené operátory (ty mají reálné spektrum, což potřebujeme, jelikož naše měřící přistroje neumí měřit komplexně [3]). Pro teorii je též důležité určit definiční obor příslušného operátoru, což zde ovšem rozebírat nebudeme a vždy budeme předpokládat, že operátory jsou definované všude tam, kde potřebujeme.

Nejvíce zajímavé pro nás jsou pozorovatelné poloha resp. hybnost, kterým v kvantové mechanice přiřazujeme operátory násobení příslušnou souřadnicí resp. derivace podle příslušné souřadnice, tedy

$$q_j \to \hat{X}_j = x_j, \qquad p_j \to \hat{P}_j = -\imath\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Bereme-li klasický Hamiltonián ve tvaru $H = \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + V(\mathbf{q})$, pak kvantový Hamiltonián vytvoříme podle principu korespondence ("ostříškujeme")

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \hat{V}(\mathbf{x}).$$

Na množině operátorů můžeme definovat bilineární operaci zvanou *komutátor* $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A} \circ \hat{B} - \hat{B} \circ \hat{A}$, kde $\circ$ značí skládání operátorů. Operátory polohy a hybnosti splňují stejné komutační relace jako jejich klasické protějšky, tzn.

$$[\hat{X}_j, \hat{X}_k] = 0, \qquad [\hat{P}_j, \hat{P}_k] = 0, \qquad [\hat{X}_j, \hat{P}_k] = \imath\hbar\delta_{jk}.$$

Abychom mohli současně měřit různé veličiny s libovolnou přesností, musí spolu operátory veličinám přiřazené komutovat.

Časový vývoj kvantového systému je dán tzv. *časovou Schrödingerovou rovnicí*

$$\imath\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) = \hat{H}\Psi(t)$$

Hamiltonián je samosdružený operátor, z funkcionální analýzy [4] tedy víme, že evoluční operátor definovaný jako

$$\hat{U}(t) = \exp\frac{\imath\hat{H}t}{\hbar}$$

je vlastně silně spojitá jednoparametrická grupa unitárních operátorů určená operátorem $\hat{H}$. Stav v libovolném čase t je pak určen pomocí stavu v čase 0 vztahem $\Psi(t) = \hat{U}(t)\Psi(0)$. Jsme-li schopni najít bázi vlastní vektory Hamiltoniánu, můžeme libovolný vektor spolu s jeho časovým vývojem rozepsat v bázi a dostaneme tím časový vývoj systému. Příslušná rovnice pro vlastní čísla

$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

se nazývá *bezčasová Schrödingerova rovnice* a má stěžejní význam v kvantové mechanice.

V kvantové mechanice můžeme také definovat integrály pohybu. Budeme ovšem uvažovat pouze operátory na čase nezávislé, pro ty s explicitní časovou závislostí bychom museli zavést čas. derivaci operátoru, nebudeme si to však zbytečně komplikovat. (Časově závislé se i v praxi vyskytují jen velmi zřídka)

Definice 1.6 (Kvantový integrál pohybu) *Operátor $\hat{A}$ nazveme **integrálem pohybu**, platí-li*

$$[\hat{H}, \hat{A}] = 0.$$

Pokud operátor komutuje s Hamiltoniánem, můžeme v Hilbertově prostoru zvolit takovou bázi, která bude obsahovat společné vlastní funkce operátorů $\hat{H}$ a $\hat{A}$. Pro popis systému je důležité najít největší množinu komutujících pozorovatelných, nazývanou *úplná množina pozorovatelných*, což nás přirozeně vede ke kvantové integrabilitě.

Definice 1.7 (Kvantová integrabilita) *Kvantověmechanický systém v n dimenzích je **integrabilní**, existuje-li n integrálů pohybu $\hat{F}_j,\ j = 1, \ldots, n$, které splňují následující podmínky.*

- *Jsou to dobře definováné samosdružené operátory v obalové algebře Heisenbergovy algebry H_n nebo jsou to konvergentní řady v bazických vektorech $\hat{X}_j, \hat{P}_j$.*

- *Jsou algebraický nezávislé v tom smyslu, že každý úplně symetrický polynom je identicky nulový.*

- *Po dvou spolu komutují.*

Tato definice vyžaduje narozdíl od klasické integrability dodatečný komentář (až na 3. bod, ten je jasný). První bod nám jednoduše říká, že bereme polynomy tvořené $\hat{X}_j, \hat{P}_j$ (stále máme na paměti, že na pořádí operátorů obecně záleží) nebo operátory definované jako "mocninné řady" z poloh a hybností, např. (již tedy výše bez pořádné definice zmíněný) exponenciální operátor

$$\exp X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}.$$

Funkcionální nezávislost je u klasické integrability dobře zdůvodněný požadavek, je ovšem obtížné tento koncept přenést do kvantové mechaniky. V této práci se budeme držet algebraické nezávislosti [5]. Úplně symetrický polynom je takový, který když obsahuje monom aS_iS_j, obsahuje i monom aS_jS_i a my chceme, aby každý takový polynom v integrálech pohybu byl identicky nulový.

1.3 Superintegrabilita

Nyní ke klíčovému pojmu této práce - superintegrabilitě.

V celém textu budeme uvažovat *polynomiální (super-)integrabilitu*, tj. všechny integrály pohybu budou polynomy v hybnostech. Kvantová analogie tohoto pojmu je *(super-)integrabilita konečného řádu*, u které požadujeme integrály pohybu jako diferenciální operátory konečného řádu. Od nynějška nebudeme mezi nimi rozlišovat a stejně tak budeme přívlastky vynechávat, takže bude-li řeč o (super-)integrabilitě, máme tím vždy na mysli polynomiální nebo konečného řádu. Pro takovéto integrály můžeme definovat *řád*, čímž myslíme řád daného polynomu v hybnostech.

Definice 1.8 (Superintegrabilita) *Systém nazveme* ***superintegrabilním,*** *je-li integrabilním a navíc povoluje dalších $k = 1, \dots n-1$ nezávislých integrálů pohybu.*

Po integrálech pohybu, které jsou tam navíc, žádáme jen to, aby komutovali s Hamiltoniánem - již nemusí být v involuci s ostatními. Je-li k z předchozí definice rovno 1, systém se nazývá *minimálně superintegrabilní*, je-li rovno $n-1$, nazveme ho *maximálně integrabilním.* Vlastností maximálně integrabilních systémů je jejich algebraická řešitelnost bez nutnosti integrace; každý integrál pohybu definuje nadplochu a pohyb musí ležet na průsečíku všech těchto nadploch, tedy na křivce. Je-li křivka uzavřená, musí být pohyb nutně periodický - Keplerův problém je příklad max. superintegrabilního systému.

Zajímavou otázkou, kterou zde ovšem nebudeme rozebírat, je struktura poissonovské algebry integrálů pohybu, která bude jistě netriviální, protože nepožadujeme involuci, ale na rozbor zatím nemáme potřebný aparát.

2 Integrály pohybu

V této kapitole se budeme věnovat hlavně integrálům pohybu 2. řádu - kvadratických v hybnostech. Odvodíme podmínky pro integrabilitu a zároveň tedy separabilitu ve 2 rozměrech a stručně se zmíníme o stejné problematice ve 3 rozměrech.

2.1 Kvadratické integrály na dvourozměrném plochém prostoru

Uvažujme obecný Hamiltonián se skalárním potenciálem na dvourozměrné varietě s plochou metrikou $ds^2 = \lambda(x,y)(dx^2+dy^2)$ tvaru

$$H = \frac{1}{\lambda(x,y)}(p_1^2+p_2^2) + V(x,y).$$

Hamiltonián je sudý v hybnostech, jakákoliv funkce, která s ním poissonovsky komutuje, může být volena jako sudá nebo lichá v hybnostech (pro nás to tedy znamená, že integrál pohybu nebude mít lineární příspěvky). Můžeme tedy obecný integrál 2. řádu vyjádřit jako

$$X = \sum_{i,j=1,2} \alpha^{ij}(x,y)p_ip_j + W(x,y)$$

Podmínka $\{X,H\}=0$ po roznásobení vypadá následovně

$$\frac{1}{\lambda}\big[p_1(\alpha_x^{ij}p_ip_j+W_x)+p_2(\alpha_y^{ij}p_ip_j+W_y)\big]-\big(-\frac{\lambda_x}{\lambda^2}(p_1^2+p_2^2)+V_x\big)\big(\alpha^{11}p_1+\alpha^{12}p_2\big)-$$

$$\big(-\frac{\lambda_y}{\lambda^2}(p_1^2+p_2^2)+V_y\big)\big(\alpha^{22}p_1+\alpha^{22}p_2\big)=0,$$

kde dolní indexy u všeho kromě hybností značí parciální derivace.
Když dáme k sobě členy 0. až 3. řádu, dostaneme sadu rovnic zvaných *Killingovy*

$$\begin{aligned} \alpha_i^{ii} &= -\frac{\lambda_1}{\lambda}\alpha^{i1} - \frac{\lambda_2}{\lambda}\alpha^{i2}, \qquad i=1,2 \\ 2\alpha_i^{ij}+\alpha_j^{ii} &= -\frac{\lambda_1}{\lambda}\alpha^{j1} - \frac{\lambda_1}{\lambda}\alpha^{j2}, \qquad i,j=1,2,\ i\neq j \end{aligned}$$

a rovnici pro W_j

$$W_j = \sum_{k=1}^{2}\alpha^{jk}V_k.$$

Funkce W je dostatečně hladká, takže musí splňovat podmínku kompatibility $\partial_x W_y = \partial_y W_x$ ze které plyne *Bertrand-Darbouxova rovnice*

$$(V_{yy}-V_{xx})\alpha^{12}-V_{xy}(\alpha^{11}-\alpha^{22}) = \left[\frac{(\lambda\alpha^{12})_x-(\lambda\alpha^{11})_y}{\lambda}\right]V_x+\left[\frac{(\lambda\alpha^{22})_x-(\lambda\alpha^{12})_y}{\lambda}\right]V_y.$$

Budeme-li nyní uvažovat kvantový Hamiltonián

$$\hat{H} = \frac{1}{\lambda(x,y)}\left(\hat{P}_1^2 + \hat{P}_2^2\right) + \hat{V}(x,y),$$

obecný integrál 2. řádu můžeme zapsat jako kvantový analog klasického, tedy bez linárních členů jako

$$\hat{X} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\left\{\hat{\alpha}^{ij}(x,y), \hat{P}_i\hat{P}_j\right\} + \hat{W}(x,y),$$

kde $\{\ ,\ \}$ je antikomutátor a operátory $\hat{\alpha}^{ij}$, $\hat{W}$ interpretujeme jako násobení příslušnou funkcí.

Po přímém výpočtu zjistíme, že podmínka $[\hat{H}, \hat{X}] = 0$ je splněna právě tehdy, když platí Killingovy a Bertrand-Darbouxova rovnice, z čehož dostáváme tvrzení.

Tvrzení 2.1 (Klasická a kvantová korespondence) *Je-li X integrál 2. řádu pro Hamiltonián H, potom diferenciální operátor $\hat{X}$ komutuje s kvantovým Hamiltoniánem $\hat{H}$. Speciálně, je-li H superintegrabilní pro potenciál V, bude $\hat{H}$ superintegrabilní pro stejný potenciál $\hat{V}$.*

Předchozí tvrzení obecně neplatí pro integrály vyšších řádů [6] a to je taky jeden z důvodů, proč jsou integrály 2. řádu nejvíce prozkoumány. V následující podkapitole se ale trochu o integrálech n-tého řádu zmíníme, protože některá tvrzení pro ně zůstávají v platnosti.

2.2 Integrály n-tého řádu ve 2 rozměrech

Naše úvahy budou probíhat na dvourozměrném euklidovském prostoru a náš Hamiltonián bude tvaru

$$H = p_1^2 + p_2^2 + V(x,y),$$

čímž se nám drasticky zjednoduší rovnice odvozené v minulé podkapitole. Nebudeme se zde vůbec zabývat kvantovými integrály pohybu, protože kvůli absenci klas. a kvant. korespondence je jejich zkoumání mnohem náročnější [7].

Tvrzení 2.2 (Klasický integrál n-tého řádu) *Klasický integrál n-tého řádu pro náš Hamiltonián má tvar*

$$X = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\sum_{j=0}^{n-2l} f_{j,2l}(x,y)p_1^j p_2^{n-j-2l},$$

a platí následující

- *Funkce $f_{j,2l}$ a potenciál V splňují rovnice*

$$0 = 2\frac{\partial f_{j-1,2l}}{\partial x} + 2\frac{\partial f_{j,2l}}{\partial y} - (j+1)\frac{\partial V}{\partial x} f_{j+1,2l-2} - (N-2l+2-j)\frac{\partial V}{\partial y} f_{j,2l-2}.$$

- $f_{j,k} = 0, \qquad\qquad j < 0, k < 0,\ j + k > n,\ k$ *liché.*
- *Všechny polynomy v X mají stejnou paritu.*
- *Řídící členy (řádu n pro $l = 0$) jsou polynomy řádu n v obalové algebře euklidovské algebry $\mathfrak{e}_2$ s bází (p_1, p_2, L_3).*

L_3 zde bereme jako 3. složku momentu hybnosti, tj. $L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k$. 1. bod plyne z rozšíření Killingových rovnic na integrály vyšších řádů, 2. a 3. jsou jasné a 4. bod, klíčový pro naše nadcházející úvahy, dostaneme jako důsledek řešení Killingových rovnic pro $l = 0$.

2.3 Separabilita ve 2 rozměrech

V této podkapitole si jako příklad odvodíme separabilitu ve 2 rozměrech. Z předchozího víme, že máme 2 sady rovnic; první požaduje, aby vedoucí členy byly v obalové algebře $\mathfrak{e}_2$, tj.

$$0 = \frac{\partial f_{j-1,0}}{\partial x} + \frac{\partial f_{j,0}}{\partial y}, \qquad j = 0, \ldots, 3.$$

Druhá sada je dána rovnicemi pro $j = 0, 1$

$$0 = 2\frac{\partial f_{j-1,2}}{\partial x} + 2\frac{\partial f_{j,2}}{\partial y} - (j+1)\frac{\partial V}{\partial x} f_{j+1,0} - (2-j)\frac{\partial V}{\partial y} f_{j,0}.$$

Integrál pohybu můžeme rozepsat jednak následovně

$$X = f_{2,0} p_1^2 + f_{1,0} p_1 p_2 + f_{0,0} p_2^2 + f_{0,2},$$

druhak ho podle předchozí tvrzení můžeme napsat jako (bez újmy na obecnosti lze jednu z konstant, např $A_{0,0,2}$, položit rovnu 0)

$$X = A_{2,0,0} L_3^2 + 2A_{1,1,0} p_1 L_3 + 2A_{1,0,1} p_2 L_3 + A_{0,2,0}(p_1^2 - p_2^2) + 2A_{0,1,1} p_1 p_2 + f_{0,2}.$$

Tím dostaneme ztotožnění

$$\begin{aligned}
f_{2,0} &= A_{2,0,0} y^2 - 2A_{1,1,0} y + A_{0,2,0},\\
f_{0,0} &= A_{2,0,0} x^2 + 2A_{1,0,1} x - A_{0,2,0},\\
f_{1,0} &= 2\big(- A_{2,0,0} xy + A_{1,1,0} x - A_{1,0,1} y + A_{0,1,1}\big).
\end{aligned}$$

a pro funkci $f_{0,2}$ platí rovnice

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f_{0,2}}{\partial x} &= f_{2,0}V_x + \frac{f_{1,0}}{2}V_y,\\
\frac{\partial f_{0,2}}{\partial y} &= \frac{f_{1,0}}{2}V_x + f_{0,0}V_y.
\end{aligned}
$$

Z čehož po dosazení dostaneme rovnici kompatibilty

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_{0,2}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_{0,2}}{\partial y \partial x} &= \big(- A_{2,0,0}xy + A_{1,1,0}x - A_{1,0,1}y + A_{0,1,1}\big)\big(V_{xx} - V_{yy}\big)\\
&+ \big(A_{2,0,0}(x^2 - y^2) + 2A_{1,0,1}x + 2A_{1,1,0}y - 2A_{0,2,0}\big)V_{xy}\\
&+ 3(-A_{2,0,0}y + A_{1,1,0})V_x + 3(A_{2,0,0}x + A_{1,0,1})V_y = 0.
\end{aligned}
$$

Hamiltonián je invariantní vůči euklidovským transformacím, můžeme se tedy podívat, co se stane po transformaci

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \phi \in [0, 2\pi),\ a, b \in \mathbb{R}.
$$

Integrál pohybu zapíšeme v bázi (p'_1, p'_2, L'_3)

$$
X = A'_{2,0,0}L_3'^2 + 2A'_{1,1,0}p'_1L'_3 + 2A'_{1,0,1}p'_2L'_3 + A'_{0,2,0}p_1'^2 + A'_{0,0,2}p_2'^2 + 2A'_{0,1,1}p'_1p'_2 + f'_{0,2},
$$

přičemž převodní vztahy vypadají následovně

$$
\begin{aligned}
A'_{2,0,0} &= A_{2,0,0}\\
A'_{1,1,0} &= bA_{2,0,0} + \cos\phi A_{1,1,0} - \sin\phi A_{1,0,1},\\
A'_{1,0,1} &= -aA_{2,0,0} + \sin\phi A_{1,1,0} + \cos\phi A_{1,0,1},\\
A'_{0,1,1} &= -abA_{2,0,0} + (b\sin\phi - a\cos\phi)A_{1,1,0} + (a\sin\phi + b\cos\phi)A_{1,0,1}\\
&\quad + \cos 2\phi A_{0,1,1} + \sin 2\phi A_{0,2,0},\\
A'_{0,2,0} &= b^2A_{2,0,0} + 2b(\cos\phi A_{1,1,0} - \sin\phi A_{1,0,1}) - \sin 2\phi A_{0,1,1} + \cos 2\phi A_{0,2,0},\\
A'_{0,0,2} &= a^2A_{2,0,0} - 2a(\sin\phi A_{1,1,0} + \cos\phi A_{1,0,1}) + \sin 2\phi A_{0,1,1} - \cos 2\phi A_{0,2,0}.
\end{aligned}
$$

Při této transformaci existují 2 invarianty; jeden není těžké uhádnout: $I_1 = A_{2,0,0}$. Druhý už není na první pohled vidět a zabere nám trochu počítání

$$
I_2 = 4\big(A_{2,0,0}A_{0,1,1} - A_{1,1,0}A_{1,0,1}\big)^2 + \big(2A_{2,0,0}A_{0,2,0} - A_{1,1,0}^2 + A_{1,0,1}^2\big)^2.
$$

Můžeme tedy řešit pro různé hodnoty I_1, I_2 a dostaneme 4 možnosti:

Kartézské souřadnice: $I_1 = I_2 = 0$ dostaneme rovnici kompatibility $V_{xy} = 0$, takže potenciál je separovatelný jako $V_C = f(x) + g(y)$, kde f, g jsou libovolné funkce.

Polární souřadnice: $I_1 = 1,\ I_2 = 0$ nám dá rov. kompatibility

$$-xy(V_{xx} - V_{yy}) + (x^2 - y^2)V_{xy} - 3yV_x + 3xV_y = 0,$$

která při přechodu do polárních souřadnic $x = \cos\phi,\ y = \sin\phi$ nabude tvaru

$$\frac{2}{r}V_\phi + V_{\phi r} = 0,$$

kterou jsme schopni vyřešit jako

$$V_R = f(r) + \frac{1}{r^2}g(\phi).$$

Parabolické souřadnice: $I_1 = 0,\ I_2 = 0$ s rov. kompatibility

$$x(V_{xx} - V_{yy}) + 2yV_{xy} + 3V_x = 0,$$

jenž v parabolických souřadnicích $x = \frac{\xi^2-\eta^2}{2},\ y = \xi\eta$ vypadá

$$\frac{1}{2}\left(V_{\xi\xi} - V_{\eta\eta}\right) + \frac{2(\xi V_\xi - \eta V_\eta)}{\xi^2 + \eta^2} = 0,$$

a tu řeší funkce

$$V_P = \frac{f(\xi) + g(\eta)}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Eliptické souřadnce: $I_1 = 1,\ I_2 = l^2 \neq 0$ a rovnice kompatibility

$$-xy(V_{xx} - V_{yy}) + (x^2 - y^2 - l^2)V_{xy} - 3yV_x + 3xV_y = 0,$$

kterou můžeme separovat v eliptických souřadnicích

$$x = l\cosh\rho\cos\phi,$$
$$y = l\sinh\rho\sin\phi,$$

na výraz

$$V_E = \frac{f(\rho) + g(\phi)}{-\cosh^2(\rho) + \cos^2(\phi)}.$$

Pokud existuje další integrál pohybu, systém je superintegrabilní a je separovatelný ve více souřadných systémech.

2.4 Separabilita ve 3 rozměrech

Velmi podobným způsobem bychom postupovali ve třech rozměrech, jen bychom generátorů euklidovské algebry $\mathfrak{e}_3$ měli 6 - $(p_1, p_2, p_3, L_1, L_2, L_3)$ a transformace souřadnic by měla tvar

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbb{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A} \in SO(3),\ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Dostali bychom tak 11 souřadných systémů, ve kterých je Hamiltonián separovatelný [8]. Zajímavé je, že těchto 11 systémů je totožných s těmi, ve kterých je možná separace Helmholtzovy (rov. na vlastní funkce Laplaciánu) rovnice [5].

3 Hamiltoniány ve 3 rozměrech za přítomnosti statického magnetického pole

V článcích [1, 9] se nedávno začaly hledat superintegrabilní Hamiltoniány, které neobsahují pouze skalární potenciál, ale i vektorový. Nejdříve zde shrneme základní výsledky a vztahy a poté se pokusíme o mírné zobecnění dvou případů uvedených v prvním článku.

3.1 Magnetické pole

Uvažujme částici pohybující se pod vlivem statického elektromagnetického pole popsaného Hamiltoniánem

$$H = \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{A}(\vec{x}))^2 + V(\vec{x})$$

kde $\vec{A}(\vec{x})$ a $V(\vec{x})$ jsou pouze funkcemi souřadnic a jednotky jsou voleny tak, aby hmotnost částice byla 1 a její náboj -1. Pohybové rovnice plynoucí z tohoto Hamiltoniánu jsou kalibračně invariantní, tedy stejné pro všechny potenciály tvaru

$$\vec{A}'(\vec{x}) = \vec{A}(\vec{x}) + \nabla\Lambda(\vec{x}), \qquad V'(\vec{x}) = V(\vec{x}),$$

pro libovolnou funkci $\Lambda(\vec{x})$. Což znamená, že výhodnější je místo potenciálu počítat s intenzitou mag. pole

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}.$$

V kvantovém případě vypadá Hamiltonián následovně ($\hat{P}_j = -i\hbar\frac{\partial}{x_j}$ a $\hat{X}_j = x_j$)

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}(\hat{P}_j\hat{P}_j + \hat{P}_j\hat{A}_j(\vec{x}) + \hat{A}_j(\vec{x})\hat{P}_j + \hat{A}_j(\vec{x})\hat{A}_j(\vec{x})) + \hat{V}(\vec{x})$$

přičemž operátory $\hat{A}_j(\vec{x})$ a $\hat{V}(\vec{x})$ působí na vlnové funkce jako násobení funkcemi $A_j(\vec{x})$ a $V(\vec{x})$. Na kvantové úrovni se kalibrační invariance projeví jako unitární transformace Hilbertova prostoru. Berme

$$\hat{U}\psi(\vec{x}) = \exp(\frac{i}{\hbar}\Lambda(\vec{x})) \cdot \psi(\vec{x}).$$

Aplikujeme-li tuto trasnformaci na stavy a pozorovatelné, dostaneme ekvivalentní popis téže fyzikální reality v řeči

$$\psi \to \psi' = \hat{U}\psi, \qquad \hat{O} \to \hat{O}' = \hat{U}\hat{O}\hat{U}^\dagger.$$

Což tedy znamená, že se následující pozorovatelné transformují kovariantně, neboli

$$(\hat{P}_j + \hat{A}_j) \to \hat{U}(\hat{P}_j + \hat{A}_j)\hat{U}^\dagger = \hat{P}_j + \hat{A}_j{}', \qquad \hat{V} \to \hat{U}\hat{V}\hat{U}^\dagger = \hat{V}.$$

Dynamika kvantového systému nemusí záviset pouze na intenzitě $\vec{B}$. Při netriviální topologii konfiguračního prostoru (ne, že bychom zde na takový případ narazili, ale je dobré na to upozornit) nemusí být všechny potenciály $\vec{A}(\vec{x})$ indukující stejné magnetické pole $\vec{B}$ kalibračně ekvivalentní [10]. Tomuto jevu se říká Aharonov-Bohmův efekt.

Uvažujme nyní integrály pohybu, které jsou nejvýše 2. řádu v hybnostech. Jelikož je náš systém kalibračně invariantní, bude pro nás lepší pracovat s kalibračně kovariantními výrazy

$$p_j^A = p_j + A_j, \qquad \hat{P}_j^A = \hat{P}_j + \hat{A}_j.$$

Operátory spolu nekomutují, ale splňují komutační relace

$$[\hat{P}_j^A, \hat{P}_k^A] = -i\hbar\epsilon_{jkl}\hat{B}_l, \qquad [\hat{P}_j^A, \hat{X}_k] = -i\hbar\delta_{jk}$$

stejně jako jejich klasické protějšky splňují analogické relace pro Poissonovy závorky.

Obecný integrál 2. řádu můžeme klasicky zapsat jako

$$X = \sum_{j=1}^{3} h_j(\vec{x})p_j^A p_j^A + \frac{1}{2}\sum_{j,k,l=1}^{3} |\epsilon_{jkl}| n_j(\vec{x}) p_k^A p_l^A + \sum_{j=1}^{3} s_j(\vec{x}) p_j^A + m(\vec{x}).$$

Z podmínky, že integrál poissonovsky komutuje s Hamiltoniánem, dostaneme rovnice 3., 2., 1. a 0. řádu v hybnostech, které vypadají následovně:
Třetí řád:

$$\begin{aligned}
&\partial_x h_1 = 0, \qquad \partial_y h_1 = -\partial_x n_3, \qquad \partial_z h_1 = -\partial_x n_2,\\
&\partial_x h_2 = -\partial_y n_3, \qquad \partial_y h_2 = 0, \qquad \partial_z h_2 = -\partial_y n_1,\\
&\partial_x h_3 = -\partial_z n_2, \qquad \partial_y h_3 = -\partial_z n_1, \qquad \partial_z h_3 = 0,\\
&\nabla \cdot \vec{n} = 0.
\end{aligned}$$

Druhý řád:

$$\begin{aligned}
&\partial_x s_1 = n_2 B_2 - n_3 B_3,\\
&\partial_y s_2 = n_3 B_3 - n_1 B_1,\\
&\partial_z s_3 = n_1 B_1 - n_2 B_2,\\
&\partial_y s_1 + \partial_x s_2 = n_1 B_2 - n_2 B_1 + 2(h_1 - h_2)B_3,\\
&\partial_z s_1 + \partial_x s_3 = n_3 B_1 - n_1 B_3 + 2(h_3 - h_1)B_2,\\
&\partial_y s_3 + \partial_z s_2 = n_2 B_3 - n_3 B_2 + 2(h_2 - h_3)B_1.
\end{aligned}$$

Odsud snadno plyne, že

$$\nabla \cdot \vec{s} = 0.$$

První řád:

$$\begin{aligned}
\partial_x m &= 2h_1 \partial_x V + n_3 \partial_y V + n_2 \partial_z V + s_3 B_2 - s_2 B_3, \\
\partial_x m &= n_3 \partial_x V + 2h_2 \partial_y V + n_1 \partial_z V + s_1 B_3 - s_3 B_1, \\
\partial_x m &= n_2 \partial_x V + n_1 \partial_y V + 2h_3 \partial_z V + s_2 B_1 - s_1 B_2.
\end{aligned}$$

Nultý řád:

$$\vec{s} \cdot \nabla V = 0.$$

Rovnice pro třetí řád se nezmění, nebude-li magnetické pole vůbec přítomno, můžeme tudíž použít výsledků, kterých jsme dosáhli ve 2. kapitole. Ty říkají (resp. říkaly pro dimenzi 2, ale zobecnění do dimenze 3 je nasnadě), že členy nejvyššího řádu v integrálu jsou rovny lineární kombinaci součinů generátorů euklidovské grupy. Vyjádříme-li náš integrál explicitně v kovariantních výrazech, dostaneme

$$X = \sum_{1 \leq a \leq b \leq 6} \alpha_{ab} Y_a^A Y_b^A + \sum_{j=1}^{3} s_j(\vec{x}) p_j^A + m(\vec{x}),$$

kde $Y^A = (p_1^A, p_2^A, p_3^A, l_1^A, l_2^A, l_3^A)$, $l_j^A = \sum_{k,l} \epsilon_{jkl} x_k p_l^A$ a $\alpha_{ab} \in \mathbb{R}$. Funkce $\vec{h}$, $\vec{n}$ vyjádříme pomocí konstant α_{ab} následovně

$$\begin{aligned}
h_1 &= \alpha_{66} y^2 + (-\alpha_{56} z - \alpha_{16}) y + \alpha_{55} z^2 + \alpha_{15} z + \alpha_{11}, \\
h_2 &= \alpha_{66} x^2 + (-\alpha_{46} z + \alpha_{26}) x + \alpha_{44} z^2 - \alpha_{24} z + \alpha_{22}, \\
h_3 &= \alpha_{55} x^2 + (-\alpha_{45} y - \alpha_{35}) x + \alpha_{44} y^2 + \alpha_{34} y + \alpha_{33}, \\
n_1 &= -\alpha_{56} x^2 + (\alpha_{46} y + \alpha_{45} z - \alpha_{25} + \alpha_{36}) x + (-2\alpha_{44} z + \alpha_{24}) y - \alpha_{34} z + \alpha_{23}, \\
n_2 &= (\alpha_{56} y - 2\alpha_{55} z - \alpha_{15}) x - \alpha_{46} y^2 + (\alpha_{45} z - \alpha_{36} + \alpha_{14}) y + \alpha_{35} z + \alpha_{13}, \\
n_3 &= (-2\alpha_{66} y + \alpha_{16} + \alpha_{56} z) x + (\alpha_{46} z - \alpha_{26}) y - \alpha_{45} z^2 + (\alpha_{25} - \alpha_{14}) z + \alpha_{12}.
\end{aligned}$$

Kvantový integrál pohybu bude symetrizovaný analog klasického, tj.

$$\hat{X} = \sum_{j=1}^{3} \{h_j(\vec{x}), \hat{P}_j^A \hat{P}_j^A\}_S + \frac{1}{2} \sum_{j,k,l=1}^{3} |\epsilon_{jkl}| \{n_j(\vec{x}), \hat{P}_k^A \hat{P}_l^A\}_S + \sum_{j=1}^{3} \{s_j(\vec{x}), \hat{P}_j^A\}_S + m(\vec{x}),$$

kde $h_j(\vec{x})$, $n_j(\vec{x})$, $s_j(\vec{x})$, $m(\vec{x})$ bereme jako násobení příslušnou funkcí a $\{\ ,\ \}_S$ značí symetrizaci

$$\{\hat{F}, \hat{G}\}_S = \frac{1}{2}(\hat{F}\hat{G} + \hat{G}\hat{F}).$$

Aby skutečně byl integrálem pohybu, musí komutovat s kv. Hamiltoniánem, z čehož dostaneme téměř shodné podmínky jako pro ten klasický, které zde již nebudeme vypisovat, jen stručně popíšeme.

Zaprvé, podmínky pro 3. řád budou úplně stejné, tudíž členy nejvyššího řádu zase budou lineární kombinací součinů polohy, hybnosti a momentu hybnosti. Po použití tohoto poznatku na podmínky pro 2. řád dostaneme, že jsou totožné s klasickými. Stejně tak pro podmínky 1. řádu. Situace bude ovšem odlišná pro podmínky 0. řádu, kde dostaneme $\hbar^2$-proporciální korekce, jejichž finální podoba nabude tvar

$\vec{s}\cdot\nabla V + \frac{\hbar^2}{4}(\partial_z n_1 \partial_z B_1 - \partial_y n_1 \partial_y B_1 + \partial_x n_2 \partial_x B_2 - \partial_z n_2 \partial_z B_2 + \partial_y n_3 \partial_y B_3 - \partial_x n_3 \partial_x B_3 + \partial_x n_1 \partial_y B_2 - \partial_y n_2 \partial_x B_1) = 0.$

Nyní se budeme zabývat otázkou, zda vůbec existují integrabilní systémy pro náš Hamiltonián , a jdou-li vůbec rozšířit na superintegrabilní.
Zvolíme zhruba následující přístup:

Budeme předpokládat, že již 2 integrály pohybu máme, a to integrály 1. řádu. Po různých transformacích souřadnic dospějeme ke 3 možnostem (každá z nich je nějaká podalgebra euklidovské algebry transformací, přičemž jsou navzájem neizomorfní), jak mohou vypadat.

1. možnost (L_3, P_3):

$$X_1 = l_3^A + m_1(\vec{x}), \qquad X_2 = p_3^A + m_2(\vec{x}).$$

2. možnost (P_1, P_2):

$$X_1 = p_1^A + m_1(\vec{x}), \qquad X_2 = p_2^A + m_2(\vec{x}).$$

3. možnost (L_1, L_2, L_3):

$$X_1 = l_3^A + m_1(\vec{x}), \qquad X_2 = l_1^A + m_2(\vec{x}).$$

My se zde budeme zabývat 1. a 2. možností.

3.2 Superintegrabilita pro integrály (L_3, P_3)

Uvažujme tedy Hamiltonián tvaru

$$H = \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{A}(\vec{x}))^2 + V(\vec{x})$$

a k němu 2 integrály pohybu

$$X_1 = l_3^A + m_1(\vec{x}), \qquad X_2 = p_3^A + m_2(\vec{x}).$$

3.2.1 Integrály jsou v involuci

Berme nyní, že integrály jsou v involuci, máme tedy rovnou integrabilní systém, který musí splňovat následující:
z involuce

$$xB_1 + yB_2 + x\partial_y m_2 - y\partial_x m_2 - \partial_z m_1 = 0$$

a z komutace s Hamiltoniánem

$$\begin{aligned} &\partial_x m_1 = -xB_3, \qquad \partial_y m_1 = -yB_3, \qquad \partial_z m_1 = yB_2 + xB_1, \\ &\partial_x m_2 = B_2, \qquad \partial_y m_2 = -B_1, \qquad \partial_z m_2 = 0. \end{aligned}$$

Jelikož v následující podkapitole budeme řešit o něco obecnější případ těchto rovnic, jakýkoliv komentář k jejich řešení si tedy necháme až tam a zde jen vypíšeme výsledky, abychom později mohli srovnávat

$$\begin{aligned} m_1(\vec{x}) = -G(r), \qquad m_2 = F(r), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \vec{B} = (-\frac{y}{r}F', \frac{x}{r}F', \frac{1}{r}G'), \\ \vec{A} = (-\frac{x}{r^2}G, \frac{y}{r^2}G, -F), \qquad V(\vec{x}) = V(r). \end{aligned}$$

Po dosazení zjistíme, že v naší volbě kalibrace mají velice jednoduchý tvar

$$X_1 = l_3, \qquad X_2 = p_3.$$

V kvantovém případě jsou výpočty prakticky totožné, dostaneme tak stejné potenciály a integrály

$$\hat{X}_1 = \hat{L}_3, \qquad \hat{X}_2 = \hat{P}_3.$$

Bezčasová Schrödingerova rovnice je separovatelná v cylindrických souřadnicích

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi, \qquad z = z.$$

následovně

$$\begin{aligned} &\psi(\vec{x}) = \rho(r)\exp(\imath l\phi)\exp(\imath kz), \\ &\hbar^2\ddot{\rho} = -\hbar^2\frac{\dot{\rho}}{r} + (F - \hbar k)^2\rho + 2V\rho + \frac{1}{r^2}(G + \hbar l)^2\rho - 2E\rho. \end{aligned}$$

Chceme-li ovšem najít další integrál pohybu 2. řádu nejvýše, po delších, ale poměrně přímočarých výpočtech zjistíme, že pro nekonstantní funkce F a/nebo G žádný další integrál, který by nebyl závislý na Hamiltoniánu nebo X_1 a X_2, neexistuje.

3.2.2 Integrály nejsou v involuci

Uvažujme nyní o něco obecnější případ, kdy integrály sice nejsou v involuci, ale komutují na nějakou nenulovou konstantu

$$\{X_2, X_1\} = C, \qquad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

takže, podobně jako v předchozí podkapitole

$$xB_1 + yB_2 + x\partial_y m_2 - y\partial_x m_2 - \partial_z m_1 = C,$$

kde vztahy pro komutaci zůstanou zachovány

$$\begin{aligned} &\partial_x m_1 = -xB_3, \qquad \partial_y m_1 = -yB_3, \qquad \partial_z m_1 = yB_2 + xB_1, \\ &\partial_x m_2 = B_2, \qquad \partial_y m_2 = -B_1, \qquad \partial_z m_2 = 0. \end{aligned}$$

První, co uděláme, je, že se podíváme, zda vůbec existují nekonstantní potenciály, které by takovou strukturu integrálů pohybu umožňovaly. Ve druhém kroce se poté pokusíme najít další integrál pohybu, který bude komutovat alespoň s jedním dalším, čímž by se systém dokonce stal superintegrabilním.

Z předchozích rovnic na první pohled plyne, že

$$m_2(\vec{x}) = m_2(x, y), \quad xB_1 + yB_2 = -C \;\Rightarrow\; m_1 = G(x, y) - Cz$$

Z podmínek pro 0. řád integrálů $X_1,\ X_2$ dostaneme 2 rovnice

$$-yV_x + xV_y = 0, \qquad V_z = 0$$

což po převedení do cylindrických souřadnic dává výsledek $V(\vec{x}) = V(r)$. Nyní použijeme podmínek kompatibility (nezáleží na pořadí derivace) a vyjde

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{x}) = \vec{B}(x, y), \quad & y\frac{\partial B_3}{\partial x} = x\frac{\partial B_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial B_2}{\partial y} = -\frac{\partial B_1}{\partial x} \\ 0 = {} & x\frac{\partial B_1}{\partial x} + y\frac{\partial B_2}{\partial x} + B_1 \\ 0 = {} & x\frac{\partial B_1}{\partial y} + y\frac{\partial B_2}{\partial y} + B_2 \end{aligned}$$

Poslední 2 rovnice jsou závislé, nicméně použijeme 3. rovnici a vztah

$$B_2 = -\frac{C}{y} - \frac{x}{y}B_1$$

z čehož dostaneme parciální diferenciální rovnici pro B_1. Poznamejme ještě, že jediné, v čem se liší výpočet zde od výpočtu v předchozí podkapitole, je přítomnost prvního členu.

$$-\frac{C}{y} - \frac{x}{y}B_1 + x\frac{\partial B_1}{\partial y} - y\frac{\partial B_1}{\partial x} = 0$$

kterou převedeme do cylindrických souřadnic a vyřešíme

$$B_1 = -\frac{y}{r}F'(r) - C\frac{x}{r^2} \;\Rightarrow B_2 = \frac{x}{r}F'(r) - C\frac{y}{r^2}$$

Dále se všimneme, že $x\partial_y m_1 - y\partial_x m_1 = 0$, tudíž

$$m_1 = -G(r) - Cz \;\Rightarrow B_3 = \frac{1}{r}G'(r)$$

kde funkce $G(r)$ je libovolná a implikace plyne z 2. rovnice pro kompatibilitu. Rovnice $\partial_x m_2 = B_2,\ \partial_y m_2 = -B_1$ vyřešíme a vyjde

$$m_2 = F(r) + C\arctan\frac{y}{x}$$

přičemž $F(r)$ je libovolná. Vektorové potenciály již snadno dořešíme a dostaneme následující

$$\begin{aligned} m_1(\vec{x}) &= -G(r) - Cz, \qquad m_2 = F(r) + C\arctan\frac{y}{x}, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2},\\ \vec{B} &= (-\frac{y}{r}F' - C\frac{x}{r^2}, \frac{x}{r}F' - C\frac{y}{r^2}, \frac{1}{r}G'),\\ \vec{A} &= (-\frac{y}{r^2}G, \frac{x}{r^2}G, -F - C\arctan\frac{y}{x}), \qquad V(\vec{x}) = V(r). \end{aligned}$$

Integrály $X_1,\ X_2$ mají stále velmi příjemný tvar

$$X_1 = l_3 - Cz, \qquad X_2 = p_3.$$

Dříve, než se pustíme do hledání dalšího integrálu, zmiňme pár postřehů k právě provedenému výpočtu. Není nikterak překvapující, že některé složky vektorů, jmenovitě A_1, A_2 a B_3 zůstaly nezměněny. Za povšimnutí též stojí, že obě funkce m_1, m_2 obsahují kromě (zatím) libovolné funkce poloměru též lineární příspěvky zbylých dvou souřadnic, jelikož $\phi = \arctan\frac{y}{x}$.

Přistupme nyní k hledání dalšího integrálu. Začneme s obecným integrálem 1. řádu tvaru

$$\begin{aligned} X_3 &= \sum_{i=1}^{2}(\gamma^i l_i^A + \beta^i p_i^A) + m_3(\vec{x})\\ &= (\beta^1 + \gamma^2 z)p_1^A + (\beta^2 - \gamma^1 z)p_2^A + (\gamma^1 y - \gamma^2 x)p_3^A + m_3(\vec{x}) \end{aligned}$$

V integrálu nemusíme vůbec uvažovat p_3^A a l_3^A, protože lineární kombinace integrálů pohybu je stále integrál pohybu.
Komutace s Hamiltoniánem nám pro 1. řád v hybnostech dává, jelikož máme integrál pouze 1. řádu, podstatně jednodušší podmínky ve tvaru

$$\partial_x m_3 = s_3 B_2 - s_2 B_3, \qquad \partial_y m_3 = s_1 B_3 - s_3 B_1, \qquad \partial_z = s_2 B_1 - s_1 B_2.$$

Což pro naše s_i znamená

$$\begin{aligned}\partial_x m_3 &= (\gamma^1 y - \gamma^2 x)B_2 - (\beta^2 - \gamma^1 z)B_3,\\ \partial_y m_3 &= (\beta^1 + \gamma^2 z)B_3 - (\gamma^1 y - \gamma^2 x)B_1,\\ \partial_z m_3 &= (\beta^2 - \gamma^1 z)B_1 - (\beta^1 + \gamma^2 z)B_2\end{aligned}$$

Máme též podmínku pro 0. řád $\vec{s}\cdot\nabla V = 0$, neboli

$$(\beta^1 + \gamma^2 z)\frac{x}{r}V' + (\beta^2 - \gamma^1 z)\frac{y}{r}V' = 0,$$

kde jsme již využili toho, že funkce V je pouze funkcí poloměru. Tohoto faktu využijeme i nyní, protože to znamená, že koeficient u z musí být 0, tj.

$$z(\gamma^2 x - \gamma^1 y)\frac{V'}{r} = 0 \quad \wedge \quad (\beta^1 x + \beta^2 y)\frac{V'}{r} = 0,$$

což nastane, jsou-li závorky nulové nebo je skalární potenciál konstantní.
V případě nulovosti závorek to znamená, že

$$\beta^1 = \beta^2 = \gamma^1 = \gamma^2 = 0 \quad \wedge \quad m(\vec{x}) = m \in \mathbb{R},$$

takže integrál pohybu je pouze konstanta, což nepřináší nic nového.

Je-li skalární potenciál nulový, použijeme podmínky kompatibility pro funkci m_3, které nám dají 3 rovnice

$$\begin{aligned}\gamma^1 B_2 - \gamma^2 B_1 + (\gamma^1 y - \gamma^2 x)(\partial_x B_1 + \partial_y B_2) - (\beta^2 - \gamma^1 z)\partial_y B_3 - (\beta^1 + \gamma^2 z)\partial_x B_3 &= 0,\\ \gamma^2 B_3 - (\beta^2 - \gamma^1 z)\partial_y B_1 + (\beta^1 + \gamma^2 z)\partial_y B_2 &= 0,\\ \gamma^1 B_3 - (\beta^2 - \gamma^1 z)\partial_x B_1 + (\beta^1 + \gamma^2 z)\partial_x B_2 &= 0.\end{aligned}$$

Výrazy u z musí být nulové, máme tak rovnice, které po upravení vypadají následovně

$$\gamma^1 \frac{y}{r^2}\big(G'' - \frac{G'}{r}\big) = 0 \quad \wedge \quad \gamma^2 \frac{x}{r^2}\big(G'' - \frac{G'}{r}\big) = 0,$$
$$\frac{1}{r^2}\Big(\big(-\gamma^1 y^2 + \gamma^2 xy\big)F'' - \big(\gamma^1 x^2 + \gamma^2 xy\big)\frac{F'}{r} + \big(2\gamma^1 xy - \gamma^2(x^2 + y^2)\big)\frac{C}{r^2}\Big) = 0.$$

Porovnáním koeficientů u různých monomů z x, y zjístíme, že $\gamma^1 = \gamma^2 = 0$.
Rovnice pro bety se nám tím redukují po dosazení na

$$\frac{1}{r^2}\Big(\big(\beta^2 y^2 + \beta^1 xy\big)F'' + \big(\beta^2 x^2 - \beta^1 xy\big)\frac{F'}{r} - \big(2\beta^2 xy + \beta^1(x^2 + y^2)\big)\frac{C}{r^2}\Big) = 0,$$

které musí být ze stejných důvodů také nulové. Integrálem pohybu je v tomto případě také konstanta, takže jsme nic nového nezískali.

Naše snahy tímto končí a musíme (smutně) konstatovat, že náš systém nepovoluje žádný další integrál 1. řádu.

Podívejme se nyní na obecný integrál 2. řádu

$$X_3 = \sum_{1\leq a\leq b\leq 6} \alpha_{ab} Y_a^A Y_b^A + \sum_{j=1}^{3} s_j(\vec{x}) p_j^A + m(\vec{x}),$$

kde $Y^A = (p_1^A, p_2^A, p_3^A, l_1^A, l_2^A, l_3^A)$.

Některé z konstant ovšem můžeme položit rovny 0. Například α_{11}, protože integrál pohybu komutuje s Hamiltoniánem, který je kvadratický v hybnostech. Jelikož také platí vztah $\vec{p} \cdot \vec{l} = 0$, můžeme jednu z konstant $\alpha_{14}, \alpha_{25}, \alpha_{36}$ položit rovnu 0, takže třeba $\alpha_{14} = 0$.

Začněme nyní s případem, kdy $\{X_3, X_2\} = 0$. To nám dá velice dlouhý výčet všech podmínek, který zde nebudeme vypisovat, nicmeně vyjde z něj následující

$$\vec{s}(\vec{x}) = \vec{s}(x, y), \quad m_3(\vec{x}) = m_3(x, y)$$

a taky všechny tyto konstanty musí být rovny nule

$$\alpha_{15}, \alpha_{24}, \alpha_{25}, \alpha_{33}, \alpha_{34}, \alpha_{35}, \alpha_{36}, \alpha_{44}, \alpha_{45}, \alpha_{46}, \alpha_{55}, \alpha_{56}, \alpha_{66}.$$

Tímto se nám značně redukují funkce h_i, n_i, které mají nyní tvar

$$\begin{aligned} h_1 &= -\alpha_{16} y, & n_1 &= \alpha_{23}, \\ h_2 &= \alpha_{26} x + \alpha_{22}, & n_2 &= \alpha_{13}, \\ h_3 &= 0, & n_3 &= \alpha_{16} x - \alpha_{26} y + \alpha_{12}. \end{aligned}$$

Použijeme podmínky pro 0. a 1. řád, jmenovitě $\nabla \vec{s} = 0$ a $\vec{s} \cdot \nabla V = 0$, které nám dají

$$\partial_x s_1 + \partial_y s_2 = 0 \ \wedge s_2 = -\frac{x}{y} s_1 \ \Rightarrow \ -\frac{x}{y} s_1 + x \frac{\partial s_1}{\partial y} - y \frac{\partial s_1}{\partial x} = 0.$$

Tuto parc. dif. rovnici jsme již potkali, můžeme tedy rovnou napsat řešení

$$s_1 = -\frac{y}{r} I(r) \ \Rightarrow \ s_2 = \frac{x}{r} I(r),$$

kde $I(r)$ je libovolná funkce. Další na řadě je podmínka 2. řádu

$$\partial_z s_3 = n_1 B_1 - n_2 B_2 = \alpha_{23}(-\frac{y}{r} F' - C \frac{x}{r^2}) - \alpha_{13}(\frac{x}{r} F' - C \frac{y}{r^2}).$$

Víme, že se má rovnat 0, členy u x a y tím pádem musí vymizet a my ji můžeme řešit jako soustavu v proměnných α_{13} a α_{23}

$$\frac{x}{r}(-\alpha_{13} F' - \alpha_{23} \frac{C}{r}) + \frac{y}{r}(\alpha_{13} \frac{C}{r} - \alpha_{23} F') = 0.$$

Determinant je roven $\frac{xy}{r^2}\big((F')^2 + \frac{C^2}{r^2}\big)$, tedy (až na varietách nižší dimenze) vždy kladný, tudíž jediné řešení je

$$\alpha_{13} = \alpha_{23} = 0.$$

Následuje podmínka 1. řádu, do které již rovnou dosadíme dosavadní výsledky

$$\begin{aligned}\partial_z m_3 &= 0 \cdot \partial_x V + 0 \cdot \partial_y V + 2h_3 \cdot 0 + \frac{x}{r} I(-\frac{y}{r}F' - C\frac{y}{r^2}) + \frac{y}{r} I(\frac{x}{r}F' - C\frac{y}{r^2}) \\ &= -C\frac{I}{r},\end{aligned}$$

odkud plyne, že

$$m_3 = J(x,y) - C\frac{I(r)}{r}z.$$

Podíváme-li se nyní na výraz $\partial_x m_3$, zjístíme, že na pravé straně jsou členy závislé pouze na x a y, tudíž musí platit

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{I(r)}{r}\Big) = 0 = \frac{xI'(r) - \frac{x}{r}I(r)}{r^2} \;\Rightarrow\; x\Big(I'(r) - \frac{1}{r}I(r)\Big) = 0.$$

Což znamená, že

$$I(r) = Ir,\; I \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad s_1 = -Iy,\; s_2 = Ix,\; m_3 = J(x,y) - CIz.$$

Toho využijeme v následujícím

$$\partial_x s_1 = 0 = -n_3 B_3 = -(\alpha_{16}x - \alpha_{26}y + \alpha_{12})\frac{1}{r}G'(r),$$

takže

$$\alpha_{12} = \alpha_{16} = \alpha_{26} = 0.$$

Poslední koeficient, který musíme zjistit, je α_{22}, který vyčteme např. z

$$\partial_y s_1 + \partial_x s_2 = 0 = -2\alpha_{22}B_3 \;\Rightarrow\; \alpha_{22} = 0$$

Konstanty máme všechny, zbývá jen pár vztahů pro s_3

$$\partial_x s_3 = 0 = \partial_y s_3 \;\Rightarrow\; s_3 = S,\; S \in \mathbb{R}$$

a m_3

$$\partial_x m_3 = SB_2 - IxB_3 \;\wedge\; \partial_y m_3 = -SB_1 - IyB_3 \;\Rightarrow\; m_3 = Sm_2 + Im_1.$$

Závěr tedy je, že náš nalezený integrál pohybu má tvar

$$X_3 = IX_1 + SX_2,$$

takže se nám bohužel pro případ $\{X_3, X_2\} = 0$ nepodařilo najít nic nového, systém tedy v tomto případě nejde rozšířit na superintegrabilní.

Zkusme nyní 2. možnost, kdy $\{X_3, X_1\} = 0$. Stále máme integrál tvaru

$$X_3 = \sum_{1 \le a \le b \le 6} \alpha_{ab} Y_a^A Y_b^A + \sum_{j=1}^{3} s_j(\vec{x}) p_j^A + m(\vec{x}),$$

kde $Y^A = (p_1^A, p_2^A, p_3^A, l_1^A, l_2^A, l_3^A)$ a konstanty α_{11}, α_{14} můžeme položit rovny 0. Stejně jako v minulém případě dostaneme dosti dlouhý výčet všech podmínek, který zde opět neuvedeme, každopádně z nich plyne nulovost následujících konstant

$$\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{25}, \alpha_{33}, \alpha_{34}, \alpha_{35}, \alpha_{36}, \alpha_{45}, \alpha_{46}, \alpha_{55}, \alpha_{56}, \alpha_{66}$$

a další vztahy

$$\alpha_{16} = -\alpha_{13},\ \alpha_{24} = -\alpha_{15}, \qquad s_1 = -\frac{y}{x} s_2,\ s_3(\vec{x}) = s_3(r, z).$$

Můžeme si tedy napsat funkce h_i a n_i

$$\begin{aligned} h_1 &= \alpha_{13} y + \alpha_{15} z, & n_1 &= -\alpha_{15} y, \\ h_2 &= \alpha_{15} z, & n_2 &= -\alpha_{15} x + \alpha_{13}, \\ h_3 &= 0, & n_3 &= -\alpha_{13} x. \end{aligned}$$

Jelikož zatím víme o funkci s_3 nejvíce, začneme s ní

$$\begin{aligned} \partial_z s_3 &= -\alpha_{15}(-\frac{y}{r} F' - C\frac{x}{r^2}) + (\alpha_{15} x - \alpha_{13})(\frac{x}{r} F' - C\frac{y}{r^2}) \\ &= \alpha_{15} r F' - \alpha_{13}(\frac{x}{r} F' - C\frac{y}{r^2}), \end{aligned}$$

funkce s_3 je funkcí pouze r a z, tudíž $\alpha_{13} = 0$ a rovnici můžeme zintegrovat podle z a dostaneme

$$s_3 = \alpha_{15} r z F'(r) + I(r).$$

Víme následující

$$s_1 = \frac{-y}{x} s_2 \ \Rightarrow\ \partial_z s_1 = \frac{-y}{x} \partial_z s_2 \ \wedge\ \partial_x s_3 = \frac{x}{r} \partial_r s_3,\ \partial_y s_3 = \frac{y}{r} \partial_r s_3.$$

Napišme si pod sebe 2 již dosti zjednodušené podmínky 2. řádu

$$\begin{aligned} \partial_z s_1 + \partial_x s_3 &= -\frac{y}{x} \partial_z s_2 + \frac{x}{r} \partial_r s_3 = -n_1 B_3 - 2\alpha_{15} z B_2, \\ \partial_z s_2 + \partial_y s_3 &= \partial_z s_2 + \frac{y}{r} \partial_r s_3 = n_2 B_3 + 2\alpha_{15} z B_1. \end{aligned}$$

Vynásobíme-li 1. rovnici x, 2. rovnici y a sečteme je, dostaneme

$$\partial_r s_3 = -2\alpha_{15} z F'$$

Porovnáme-li to s výrazem a jeho derivací, které jsme dostali o pár řádku výš, dostaneme diferenciální rovnici

$$\alpha_{15} z(3F' + rF'') + I' = 0.$$

Výraz u z musí být nulový, takže F musí řešit rovnici

$$3F' + rF'' = 0$$

což nám F a I vynucuje ve tvaru

$$F(r) = \frac{\frac{-D}{2}}{r^2} + E,\ I(r) = I, \qquad D, E, I \in \mathbb{R}.$$

Tím dostaneme rovnice pro s_1, s_2

$$\begin{aligned}
\partial_x s_1 &= -\alpha_{15} D \frac{x^2}{r^4} + \alpha_{15} C \frac{xy}{r^2}, \\
\partial_y s_2 &= -\alpha_{15} D \frac{y^2}{r^4} - \alpha_{15} C \frac{xy}{r^2}
\end{aligned}$$

přičemž máme stále na paměti vztah $s_2 = -\frac{x}{y} s_1$. Rovnice jsme schopni vyřešit

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{\alpha_{15} D}{2} \Big(\frac{\arctan \frac{y}{x}}{x} + \frac{y}{x^2 + y^2} \Big) + \frac{\alpha_{15} C}{2} y \ln(x^2 + y^2), \\
s_2 &= \frac{\alpha_{15} D}{2} \Big(\frac{\arctan \frac{y}{x}}{y} - \frac{x}{x^2 + y^2} \Big) - \frac{\alpha_{15} C}{2} x \ln(x^2 + y^2).
\end{aligned}$$

s_1, s_2 tedy nebudou závislé na z, kdyby totiž jedna z nich byla, v té druhé by se závislost projevila vynásobená faktorem $\frac{-y}{x}$, tím bychom ovšem nedodrželi rovnice uvedené výše. Pokračujme nyní s

$$\begin{aligned}
\partial_y s_3 &= n_2 B_3 + 2h_2 B_1 \\
-2\alpha_{15} D \frac{y}{r^4} &= -\alpha_{15} \frac{x}{r} G' - 2\alpha_{15} z \big(- D \frac{y}{r^4} - C \frac{x}{r^2} \big)
\end{aligned}$$

po převedení na jednu stranu

$$-\alpha_{15} \frac{x}{r} G' + 2\alpha_{15} z \big(2D \frac{y}{r^4} + C \frac{x}{r^2} \big) = 0$$

což má řešení pouze pro $\alpha_{15} = 0$. Tím se po dopočtení, které zde již neuvedeme, dostaneme do totožné situace jako v prvním případě - integrál pohybu, co jsme takhle našli, je lineární kombinací již existujících integrálů.

Stejný výsledek dostaneme, vezmeme-li lineární kombinaci integrálů pohybu, tudíž závěrem musíme bohužel konstatovat, že žádné nové výsledky naše zobecnění nepřineslo.

3.3 Superintegrabilita pro integrály (P_1, P_2)

Stejný postup zkusme pro případ integrálů

$$X_1 = p_1^A + m_1(\vec{x}), \qquad X_2 = p_2^A + m_2(\vec{x}),$$

kdy povolíme jejich komutaci na konstantu

$$\{X_1, X_2\} = C, \qquad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Komutace s Hamiltoniánem vede na rovnice

$$\begin{aligned} \partial_x m_1 = 0, \qquad \partial_y m_1 = B_3, \qquad \partial_z m_1 = -B_2, \\ \partial_x m_2 = -B_3, \qquad \partial_y m_2 = 0, \qquad \partial_z m_2 = B_1. \end{aligned}$$

což nám po krátkém a velmi podobném řešení jako v předchozí podkapitole dá řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} m_1(\vec{x}) &= Cy - F(z), \qquad m_2 = -Cx + G(z), \\ \vec{B} &= (G'(z), F'(z), C), \\ \vec{A} &= (F(z) - \frac{Cy}{2}, -G(z) + \frac{Cx}{2}, C), \qquad V(\vec{x}) = V(z). \end{aligned}$$

kde F, G jsou libovolné funkce a integrály X_1, X_2 mají tvar

$$X_1 = p_1^A + Cy, \qquad X_2 = p_2^A - Cx.$$

Z klasické fyziky víme, že pro hybnosti a momenty hybnosti platí komutační relace

$$\{p_i, L_k\} = \epsilon_{ikm} p_m,$$

takže bychom se mohli pokusit najít integrál pohybu $X_3 = l_3^A + m_3(\vec{x})$, pro který by platilo

$$\{X_1, X_3\} = -p_2^A + D, \quad \{X_2, X_3\} = p_1^A + E, \qquad D, E \in \mathbb{R}.$$

Komutace s Hamiltoniánem nám dá podmínky

$$\partial_x m_3 = -Cx, \qquad \partial_y m_3 = -Cy, \qquad \partial_z m_2 = xG' + yF',$$

které jsou řešitelné (protože F, G jsou funkcemi pouze z) jen jako

$$m_3 = -\frac{C}{2}\big(x^2 + y^2\big)$$

a tím pádem všechny potenciály, integrály pohybu a jejich kom. relace vypadají

$$\begin{aligned} \vec{B} &= (0, 0, C), \qquad V(\vec{x}) = V(z), \\ \vec{A} &= (E - \frac{Cy}{2}, -D + \frac{Cx}{2}, C), \\ X_1 &= p_1^A + Cy, \quad X_2 = p_2^A - Cx, \quad X_3 = l_3^A - \frac{C}{2}\big(x^2 + y^2\big), \\ \{X_1, X_2\} &= C, \quad \{X_1, X_3\} = -p_2^A, \quad \{X_2, X_3\} = p_1^A. \end{aligned}$$

Nutno podoknout, že tímto integrálem pohybu jsme si k integrabilitě nepomohli, protože s žádným jiným nekomutuje. Pokud by se nám ale podařilo najít další, který by již se všemi komutoval, měli bychom rázem maximálně superintegrabilní systém.

Uvažujme tedy obecný integrál 2. řádu

$$X_4 = \sum_{1\le a\le b\le 6} \alpha_{ab} Y_a^A Y_b^A + \sum_{j=1}^{3} s_j(\vec{x}) p_j^A + m_4(\vec{x}),$$

kde $Y^A = (p_1^A, p_2^A, p_3^A, l_1^A, l_2^A, l_3^A)$ a rovnou pokládáme $\alpha_{11} = \alpha_{14} = 0$.

Stejně jako již několikrát, dostaneme dosti dlouhý výčet všech podmínek, ze kterého plyne nulovost všech konstant kromě α_{33} - můžeme ji tím pádem položit rovnu 1 - a také

$$\vec{s}(\vec{x}) = 0, \qquad m_4(\vec{x}) = m_4(z).$$

Jediná rovnice, která zbude, má tvar

$$m_4'(z) - 2V'(z) = 0,$$

tudíž po zanedbání aditivních konstant mají potenciál a integrál pohybu tvar

$$V(z) = kz, \qquad X_4 = p_3^2 + 2kz, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Naše hledání tedy končí úspěchem. Podařilo se nám najít (dokonce maximálně) superintegrabilní systém. Hamiltonián můžeme napsat jako kombinaci integrálů pohybu

$$H = \frac{1}{2}\big(X_1^2 + X_2^2 + X_4\big) + CX_3.$$

V kvantovém případě by se pomocí téměř totožných argumentů došlo ke stejnému výsledku.

Závěr

Během práce jsem si nejen zopakoval pojmy z klasické a kvantové mechaniky, ale zároveň se seznámil s kvadraticky integrabilními a superintegrabilními systémy a naučil se základní techniky používané při odvozování podmínek na jejich existenci a také postupy pro jejich hledání.

Aplikace těchto technik pak vyústila ve dvě zobecnění systémů navržených v článku [1]. Jedno zobecnění bohužel nic nového nepřineslo, druhé již ovšem bylo úspěšné a nalezli jsme příklad dokonce maximálně superintegrabilního systému.

Seznam použitých zdrojů

[1] A. Marchesiello, L. Šnobl, and P. Winternitz. Three-dimensional superintegrable systems in a static electromagnetic field. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 48(39):395206, 2015.

[2] V. I. Arnol'd. *Mathematical Methods of Classical Mechanics, 2nd Edition.* Springer-Verlag, 1988.

[3] P. A. M. Dirac. *Principles of Quantum Mechanics, Fourth Edition.* Oxford University Press, 1957.

[4] Jiří Blank, Pavel Exner, and Miloslav Havlíček. *Lineární operátory v kvantové fyzice.* vydavatelství Karolinum, 1993.

[5] Willard Miller Jr, Sarah Post, and Pavel Winternitz. Classical and quantum superintegrability with applications. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46(42):423001, 2013.

[6] A. Marchesiello, S. Post, and L. Šnobl. Third-order superintegrable systems with potentials satisfying nonlinear equations. arxiv:1501.00470.

[7] S. Post and P. Winternitz. General nth order integral of motion. arxiv:1501.00471.

[8] A. A. Makarov, J. A. Smorodinsky, Kh. Valiev, and P. Winternitz. A systematic search for nonrelativistic systems with dynamical symmetries. *Nuovo Cimento Series 10*, 52:1061–1084, 1967.

[9] Josée Bérubé and Pavel Winternitz. Integrable and superintegrable quantum systems in a magnetic field. *J. Math. Phys.*, 45(5):1959–1973, 2004.

[10] Y. Aharonov and D. Bohm. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev (2)*, 115:485–491, 1959.