

Bakalářská práce



České
vysoké
učení technické
v Praze

F4

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
Katedra fyziky

Ortogonální polynomy a Askeyova–Wilsonova algebra

Daniel Gromada

Matematické inženýrství – Matematická fyzika

červen 2015

Vedoucí práce: Doc. Ing. Severin Pošta, PhD.



Katedra: fyziky

Akademický rok: 2014/15

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Posluchač: Daniel Gromada

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Matematická fyzika

Název práce: Ortogonální polynomy a Askeyova-Wilsonova algebra

Název práce: Orthogonal polynomials and Askey-Wilson algebra
(anglicky)

Osnova:

1. Na speciálních případech Askeyovy-Wilsonovy algebry, konkrétně na algebrách $sl(2)$, $Uq(sl(2))$ resp. $Uq'(so(3))$, ukažte, jak lze díky dostupné klasifikaci reprezentací a znalostí o automorfismech dané algebry nagenarovat některé konkrétní řady ortogonálních polynomů z Askeyova schématu. K tomu využijte informace z [2] a [3]. Určete, kterým konkrétním řadám polynomů odpovídají tyto podalgebry.
2. Pokuste se stejný způsob aplikovat i na obecnější podalgebry Askeyovy-Wilsonovy algebry, než je $Uq'(so(3))$. K tomu nejprve zjistěte příslušné informace o reprezentacích a automorfismech [4].

Doporučená literatura:

- [1] Koekoek R., Lesky P. A., Swarttouw R., Hypergeometric orthogonal polynomials and their q -analogues, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2010
- [2] Klimyk A., Schmudgen K., Quantum groups and their representations, Springer-Verlag, Heidelberg, 1997
- [3] Havlíček M., Pošta S., On the classification of irreducible finite-dimensional representations of $Uq'(so_3)$ algebra, J. Math. Phys. 42 (2001), No. 1, 472-500
- [4] Terwilliger P., The Universal Askey-Wilson Algebra, SIGMA 7 (2011), 069

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

doc. Ing. Severin Pošta, Ph.D., FJFI ČVUT

Do bakalářské práce se vkládá zadání a dále na stranu předcházející obsahu abstrakt a klíčová slova. Součástí zadání bakalářské práce je její uložení na webové stránky katedry fyziky a zaslání abstraktu a klíčových slov ve formátu WORD na e-mailovou adresu katedry fyziky: kf@fjfi.cvut.cz

Datum zadání bakalářské práce: 16.10.2014

Termín odevzdání bakalářské práce: 07.07.2015


.....
Vedoucí katedry




.....
Děkan

Poděkování / Prohlášení

Chtěl bych poděkovat zejména svému vedoucímu práce doc. Severinu Poštovi za návrh tohoto tématu, vedení práce, rady a konzultace.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Nymburce dne 3. 7. 2015

.....

Abstrakt / Abstract

V práci nejprve předneseme základní poznatky z teorie ortogonálních polynomů a reprezentací algeber. Poté na příkladech ukážeme, jak spolu souvisí reprezentace algeber, Leonardovy páry a ortogonální polynomy. Z reprezentací Lieovy algebry $\mathfrak{sl}_2$ odvodíme vlastnosti obecných Kravčukových polynomů a z reprezentací kvantové algebry $U'_q(\mathfrak{so}_3)$ odvodíme vlastnosti speciálního případu q -Racahových polynomů. Naším hlavním výsledkem pak bude klasifikace reprezentací Askeyovy–Wilsonovy algebry za předpokladu, že q není odmocnina z jedné a jisté hodnoty nejsou vlastními čísly generujícího elementu. Tím budeme schopni nage-nerovat obecné q -Racahovy polynomy pro téměř libovolnou volbu argumentů. Dále ve speciálním případě volby parametrů Askeyovy–Wilsonovy algebry klasifikujeme reprezentace za slabších předpokladů.

Klíčová slova: ortogonální polynomy, Leonardovy páry, Askeyova–Wilsonova algebra, reprezentace, automorfismy

In the beginning of the bachelor thesis introduction to the theory of orthogonal polynomials and algebra representations is presented. Then the connection between algebra representations, Leonard pairs and orthogonal polynomials is established and illustrated. Properties of the Krawtchouk polynomials of general form are derived from representations of the Lie algebra $\mathfrak{sl}_2$ and properties of a special form of q -Racah polynomials are derived from representations of quantum algebra $U'_q(\mathfrak{so}_3)$. Our main result is classification of representations of the Askey–Wilson algebra, where q is not a root of unity and certain numbers are not eigenvalues of a generating element. Using that result properties of q -Racah polynomials for almost all possible parameters are derived. Then for certain parameters of Askey–Wilson algebra representations are classified with weaker assumptions.

Keywords: orthogonal polynomials, Leonard pairs, Askey–Wilson algebra, representations, automorphisms

Title translation: Orthogonal polynomials and Askey–Wilson algebra

/ Obsah

1 Úvod	1
2 Základní definice a poznatky	2
2.1 Důležitá tvrzení lineární algebry	2
2.1.1 Zobecnění skalárního součinu	2
2.2 Hypergeometrické funkce a q -analogie	5
2.2.1 Hypergeometrické funkce	6
2.2.2 q -analogie	6
2.3 Ortogonální polynomy	8
2.3.1 Definice ortogonálních polynomů a důležitá tvrzení	8
2.3.2 Askeyovo schéma	15
2.4 Algebry a reprezentace	17
2.4.1 Reprezentace Lieových algeber	18
2.4.2 Algebra definovaná množinou generátorů	20
2.4.3 Reprezentace asociativních algeber s jednotkou	21
3 Reprezentace algeber a ortogonální polynomy	25
3.1 Leonardovy páry a ortogonální polynomy	25
3.2 Algebra sl_2 a Kravčukovy polynomy	28
3.3 Algebra $U'_q(so_3)$ a q -Racahovy polynomy	29
4 Askeyova–Wilsonova algebra	33
4.1 Klasifikace konečněrozměrných reprezentací AW	34
4.1.1 Obecné reprezentace	36
4.1.2 Reprezentace pro $A_1 = A_2 = 0$	40
4.2 Duální reprezentace	43
4.3 Algebra AW a q -Racahovy polynomy	45
5 Závěr	47
Literatura	48
Seznam použitých symbolů	50

Kapitola 1

Úvod

Obsahem této bakalářské práce je vztah ortogonálních polynomů a reprezentací algeber. Jak ortogonální polynomy, tak i Lieovy nebo kvantové algebry mají široké uplatnění v matematice i fyzice. Vztah speciálních tříd ortogonálních polynomů z tzv. Askeyova schématu s Lieovými algebrami je znám již delší dobu (viz např. [1]). Jak se ukázalo, tento vztah užitečný zejména tím, že pomocí něj lze velmi jednoduše vyjádřit důležité vlastnosti daných ortogonálních polynomů.

Později byla rovněž zkoumána souvislost polynomů z tzv. q -Askeyova schématu s kvantovými algebrami. Pokaždé však bylo možné zkonstruovat pouze určitý speciální typ ortogonálních polynomů. Nakonec v roce 1991 Alexej Žedanov představil q -komutátorovou algebru, ze které se dají zkonstruovat ty nejobecnější q -Racahovy polynomy s libovolnými parametry [2]. Algebru na počest Richarda Askeye a Jamese Wilsona pojmenoval Askeyova–Wilsonova a označil $AW(3)$.

Ačkoliv již v práci [2] byla přednesena reprezentace této algebry, pomocí které pak byl nalezen vztah s q -Racahovými polynomy, kompletní klasifikace reprezentací Askeyovy–Wilsonovy algebry byla přednesena teprve nedávno v [3].

Jako vhodný mezi články spojující nejen ortogonální polynomy a reprezentace algeber, ale i jiné oblasti matematiky se později ukázaly tzv. Leonardovy páry [4].

Cíl této práce je popsat nejprve obecně a poté na speciálních případech souvislost mezi reprezentacemi algeber, Leonardovými páry a ortogonálními polynomy. Ukážeme, že známe-li kompletní klasifikaci reprezentací dané algebry a důležité automorfismy na této algebře, můžeme získat některé třídy polynomů z Askey–Wilsonova schématu, včetně některých důležitých vlastností, takřka bez práce. Náš přístup předvedeme na algebrách sl_2 a $U'_q(so_3)$, pro které je kompletní reprezentace známa [5].

Dalším krokem je pak totéž zopakovat pro Askeyovu–Wilsonovu algebru. Za tím účelem se pokusíme provést úplnou klasifikaci reprezentací této algebry přímou konstrukcí, tj. podobným způsobem jako v případě algebry $U'_q(so_3)$ v [5] a rozhodnout tak, zda neexistují ještě jiné reprezentace, než byly předneseny v [2].

Bakalářská práce je rozdělena na pět kapitol. Po úvodu následuje kapitola, kde uvedeme základní poznatky z oblastí, kterými se v práci zabýváme, tj. zejména z teorie ortogonálních polynomů a teorie reprezentací. Další dvě kapitoly jsou věnovány úkolům, které jsme si vytyčili. Ve třetí kapitole popíšeme souvislost ortogonálních polynomů a reprezentací algeber a ve čtvrté kapitole prostudujeme reprezentace Askeyovy–Wilsonovy algebry. Pátou kapitolu bude již tvořit závěr práce.

Všechny definice, věty, poznámky a další číslované odstavce budeme číslovat dohromady v rámci jednotlivých kapitol. Rovnice budeme rovněž číslovat v rámci jednotlivých kapitol, přičemž zde zpravidla nebudeme uvádět číslo kapitoly, neboť budeme většinou odkazovat na rovnice v téže kapitole. Budeme-li odkazovat na rovnici v jiné kapitole, uvedeme to za číslem rovnice (například Kravčukovy polynomy definuje rovnost (24), kap. 2). Konec důkazu budeme tradičně označovat čtverečkem $\square$.

Pro výpočty a úpravy komplikovaných výrazů, zejména ve čtvrté kapitole, jsme velmi využívali výpočetního programu Mathematica [6].

Kapitola 2

Základní definice a poznatky

V této kapitole zopakujeme základní poznatky z teorie ortogonálních polynomů a teorie reprezentací. Nejprve však shrneme některá důležitá tvrzení lineární algebry.

2.1 Důležitá tvrzení lineární algebry

V práci budeme využívat spoustu tvrzení z lineární algebry, které zde nebudeme opakovat. Uvedeme pouze důležitou větu, která nám dále při zkoumání reprezentací algeber usnadní důkazy ireducibility jednotlivých reprezentací. Dále se budeme podrobněji věnovat skalárnímu součinu.

Protože se práce týká ortogonálních polynomů, budeme se zajímat zejména o vektorové prostory polynomů. Vektorový polynomů $\mathcal{P}$ má sice nekonečnou dimenzi, ale spočetnou Hamelovu bázi. Pod pojmem báze vektorového prostoru budeme mít vždy na mysli právě Hamelovu bázi. Naším hlavním zájmem však budou konečné podprostory polynomů stupně nejvýše n , které budeme značit $\mathcal{P}_n$.

Věta 2.1. Buď V vektorový prostor nad tělesem T a A diagonalizovatelný lineární operátor na V s vzájemně různými vlastními čísly. Pak libovolný A -invariantní podprostor $W \subset V$, tj. takový, že pro každé $w \in W$ je $Aw \in W$, je obalem některých vlastních vektorů A . Jinými slovy zúžení A na W je také diagonalizovatelné.

Důkaz. Protože ve V existuje báze z vlastních vektorů, můžeme libovolný $w \in W$ psát jako kombinaci

$$w = \sum_{i=1}^k v_i, \quad \text{kde } Av_i = \lambda_i v_i.$$

Stačí ukázat, že všechna v_i z této kombinace jsou také prvky W . Snadno se ale dá ověřit, že

$$v_i = \left(\prod_{j \neq i} \frac{A - \lambda_j I}{\lambda_i - \lambda_j} \right) w \in W. \quad \square$$

2.1.1 Zobecnění skalárního součinu

Definice ortogonality na prostoru polynomů může být v jistém smyslu obecnější než běžná definice z lineární algebry. Protože nás však zajímá souvislost ortogonálních polynomů s reprezentacemi algeber, což jsou obecné vektorové prostory, bude vhodné tento typ skalárního součinu zavést na obecných vektorových prostorech.

Nejprve ujasníme některé známé pojmy. Vše definujeme pouze nad tělesem $\mathbb{C}$.

Definice 2.2. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$. Formu $h: V \times V \rightarrow T$ nazveme *seskvilineární hermitovská forma*, jsou-li splněny podmínky:

1. pro každé $\alpha \in T$ a $x, y, z \in V$ je $h(x, \alpha y + z) = \alpha h(x, y) + h(x, z)$ a
2. pro každé $x, y \in V$ je $h(y, x) = \overline{h(x, y)}$.

Hermitovskou formu nazveme pozitivně definitní, platí-li pro každý vektor $x \neq 0$ $h(x, x) > 0$. Pozitivně definitní hermitovskou formu budeme rovněž nazývat *skalární součin* a značit $(\cdot, \cdot)$.

Definice 2.3. Necht V je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$. Formu $f: V \times V \rightarrow T$ nazveme *bilineární symetrická forma*, je-li splněno.

1. pro každé $\alpha \in T$ a $x, y, z \in V$ je $f(x, \alpha y + z) = \alpha f(x, y) + f(x, z)$ a
2. pro každé $x, y \in V$ je $f(y, x) = f(x, y)$.

Ačkoliv se nad tělesem komplexních čísel často pod symetrií myslí právě hermitovskost, zde budeme mezi těmito pojmy důsledně rozlišovat. Podobně budeme rozlišovat mezi symetrickou a hermitovskou maticí

Definice 2.4. Necht $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Matici A^T nazveme transponovaná matice k A , je-li pro každé $i, j \in \hat{n}$ splněno $A_{ij}^T = A_{ji}$. Matici A^H nazveme hermitovsky sdružená k A , je-li pro každé $i, j \in \hat{n}$ splněno $A_{ij}^H = \overline{A_{ji}}$.

Definice 2.5. Matici $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ nazveme

1. normální, je-li $AA^H = A^H A$, symetricky normální, je-li $AA^T = A^T A$,
2. hermitovská, je-li $A = A^H$, symetrická, je-li $A = A^T$,
3. ortogonální, je-li $AA^H = I$ a symetricky ortogonální, je-li $AA^T = I$.

Poznámka 2.6. Seskvilineární i bilineární forma je vždy určena svým působením na bázi. Na prostorech s konečnou dimenzí tak můžeme definovat matici seskvilineární formy h v bázi $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$, respektive matici bilineární formy f v bázi $\mathcal{X}$ jako

$$h_{ij}^{\mathcal{X}} = h(x_i, x_j), \quad \text{resp.} \quad f_{ij}^{\mathcal{X}} = f(x_i, x_j).$$

Působení na vektory $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ a $y = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i$ se pak dá vyjádřit jako

$$h(x, y) = (\bar{\alpha}_1 \cdots \bar{\alpha}_n) h^{\mathcal{X}} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad f(x, y) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) f^{\mathcal{X}} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Je-li forma hermitovská, respektive symetrická, je i její matice hermitovská, resp. symetrická.

Nyní zobecníme pojem skalárního součinu.

Definice 2.7. Necht V je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$. Bilineární symetrickou formu $(\cdot, \cdot)$ na V nazveme *symetrický skalární součin*, existuje-li báze $\mathcal{X} = (x_1, x_2, \dots)$, pro kterou platí $(x_i, x_j) = h_i \delta_{ij}$, přičemž pro každé i je $h_i \neq 0$. Bázi $\mathcal{X}$ pak nazveme *ortogonální* vzhledem k symetrickému skalárnímu součinu $(\cdot, \cdot)$. Je-li navíc pro každé i splněno $h_i = 1$, nazveme tuto bázi *ortonormální*.

Dále budeme psát pouze „ $\mathcal{H}$ je prostor se (symetrickým) skalárním součinem“, pod čímž myslíme, že $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ a je na něm definován (symetrický) skalární součin $(\cdot, \cdot)$. Pod označením $\mathcal{H}_n$ budeme mít navíc na mysli, že má tento prostor dimenzi $n \in \mathbb{N}$.

Je jasné, že každou ortogonální bázi lze normalizovat (ovšem jen díky tomu, že pracujeme nad $\mathbb{C}$ a že požadujeme symetrii místo hermitovskosti). V každém prostoru se symetrickým skalárním součinem tedy existuje ortonormální báze.

Na prostoru $\mathbb{C}^n$ zavedeme *standardní symetrický skalární součin* jako součet součinů odpovídajících složek. Ortonormální bázi tam bude tvořit standardní báze.

Nyní formulujeme důležitou větu o souřadnicích v ortogonální bázi.

Věta 2.8. Buď $\mathcal{H}$ prostor se symetrickým skalárním součinem. Pak lze libovolný vektor $x \in \mathcal{H}$ vyjádřit v ortonormální bázi $\mathcal{X} = (x_1, x_2, \dots)$ jako

$$x = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i, x)}{(x_i, x_i)} x_i = \sum_{i=1}^n \frac{(x, x_i)}{(x_i, x_i)} x_i. \quad (1)$$

Důkaz. Libovolný vektor lze rozvinout do báze $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$. Po skalárním vynásobení vektorem x_j zleva (či zprava) již dospějeme k vyjádření koeficientu α_j

$$(x_j, x) = \sum_{i=1}^n \alpha_j (x_j, x_i) = \alpha_j (x_j, x_j) \Rightarrow \alpha_j = \frac{(x_j, x)}{(x_j, x_j)}. \quad \square$$

Je-li báze $\mathcal{X}$ ortonormální, je ve jmenovateli jednička a dostáváme analogii Fourierových koeficientů.

Prostor všech lineárních funkcíonálů na vektorovém prostoru V budeme značit V^* . Prostor všech lineárních operátorů na V budeme značit $\mathcal{L}(V)$. Matici operátoru $A \in \mathcal{L}(V)$ v bázi $\mathcal{X}$ budeme značit $A^{\mathcal{X}}$. Nyní uvedeme definice a několik vět týkajících sružených operátorů. Fakt, že stejná tvrzení platí i pro běžný skalární součin naznačíme tím, že v předpokladech budeme slovo „symetrický“ psát v závorce. Tvrzení pro obyčejný skalární součin jsou však známy z lineární algebry, důkazy tedy provedeme pouze pro symetrický skalární součin. Začneme analogií Rieszovy věty.

Věta 2.9. Buď $\mathcal{H}_n$ prostor se (symetrickým) skalárním součinem. Pak pro každý lineární funkcíonál $\varphi \in \mathcal{H}_n^*$ existuje právě jeden vektor $y \in \mathcal{H}_n$ takový, že pro každé $x \in \mathcal{H}_n$ platí $\varphi(x) = (y, x)$.

Důkaz. Necht $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$ je ortonormální báze v $\mathcal{H}_n$ se symetrickým skalárním součinem. Označme $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$. Souřadnice vektoru y jsou již určeny jednoznačně působením funkcíonálu φ na bazické vektory

$$\varphi(x_i) = (y, x_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_j (x_j, x_i) = \alpha_i. \quad \square$$

Definice 2.10. Buď $\mathcal{H}_n$ prostor se (symetrickým) skalárním součinem, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Splňuje-li $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ pro každé $x, y \in \mathcal{H}_n$ rovnost

$$(y, Ax) = (By, x),$$

nazveme B sružený operátor k A a budeme značit A^* .

Věta 2.11. Buď $\mathcal{H}_n$ prostor s obyčejným, respektive symetrickým skalárním součinem. Pak pro libovolný $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ existuje právě jeden sružený operátor A^* a platí

$$(A^*)^{\mathcal{X}} = (A^{\mathcal{X}})^H, \quad \text{resp.} \quad (A^*)^{\mathcal{X}} = (A^{\mathcal{X}})^T.$$

Důkaz. Necht $\mathcal{X}$ je ortonormální báze prostoru se symetrickým skalárním součinem. Matice sruženého operátoru v bázi $\mathcal{X}$ je opět již jednoznačně určena. Při výpočtu využijeme vyjádření souřadnic vektoru pomocí Fourierových koeficientů:

$$(A^*)_{ij}^{\mathcal{X}} = (A^* x_j, x_i) = (x_j, A x_i) = A_{ji}^{\mathcal{X}} \quad \square$$

Věta 2.12. Buď $\mathcal{H}_n$ prostor s obyčejným, respektive symetrickým skalárním součinem. Pak pro libovolné $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ platí

1. $(\alpha A + B)^* = \bar{\alpha}A^* + B^*$, resp. $(\alpha A + B)^* = \alpha A^* + B^*$
2. $(AB)^* = B^*A^*$
3. $(A^*)^* = A$
4. $I^* = I$ a $O^* = O$

Důkaz. První tři body lze snadno dokázat z maticového vyjádření sdruženého operátoru, poslední bod pak plyne přímo z definice. $\square$

Definice 2.13. Buď $\mathcal{H}_n$ prostor se (symetrickým) skalárním součinem. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$.

1. Jestliže $AA^* = A^*A$, pak A nazveme normální,
2. jestliže $A = A^*$, pak A nazveme samosdružený,
3. jestliže $AA^* = I$, pak A nazveme ortogonální.

Nyní připomeneme klasickou větu o vlastnostech normálních operátorů. Její analogii ukážeme pouze pro samosdružené operátory.

Věta 2.14. Buď $\mathcal{H}_n$ prostor se skalárním součinem. Operátor $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ je normální, právě když je splněno pro každé $x \in \mathcal{H}_n$ $\|Ax\| = \|A^*x\|$. Je-li tato podmínka splněna, platí dále, že

1. x je vlastní vektor A příslušný vlastnímu číslu λ , právě když je x vlastní vektor A^* příslušný vlastnímu číslu $\bar{\lambda}$,
2. vlastní vektory příslušné vzájemně různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.

Věta 2.15. Buď $\mathcal{H}_n$ prostor se symetrickým skalárním součinem. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ je samosdružený. Pak

1. x je vlastní vektor A příslušný vlastnímu číslu λ , právě když je x vlastní vektor A^* příslušný vlastnímu číslu λ ,
2. vlastní vektory příslušné vzájemně různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.

Důkaz. První bod plyne snadno z rovnosti $A - tI = A^* - tI$. Nechť λ a μ jsou různá vlastní čísla a x a y jim příslušné vlastní vektory. Pak

$$\lambda(y, x) = (y, \lambda x) = (y, Ax) = (A^*y, x) = (\mu y, x) = \mu(y, x) \Rightarrow (y, x) = 0. \quad \square$$

Důsledek 2.16. Buď $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ symetrická matice. Pak jsou vlastní vektory matice A kolmé vůči standardnímu symetrickému skalárnímu součinu.

Důkaz. Matice A působí na $\mathbb{C}^n$ jako samosdružený operátor. $\square$

2.2 Hypergeometrické funkce a q -analogie

Ortogonální polynomy z tzv. Askeyova schématu, kterých se tato práce týká, jsou vyjádřeny v řeči speciálních funkcí, které jsou řešením jistých diferenciálních rovnic druhého řádu. S těmito tzv. hypergeometrickými funkcemi však nebudeme příliš pracovat a postačí předneseme-li v této podkapitole pouze potřebné definice.

Mnoho pojmů z různých oblastí matematiky jako faktoriály, binomické koeficienty, derivace či integrály mají tzv. q -analogie. Stejně je tomu u hypergeometrických funkcí, a tedy i ortogonálních polynomů. V dalších částech této podkapitoly tak předneseme definice q -analogií některých pojmů, potřebná tvrzení o nich a nakonec definici q -hypergeometrických funkcí.

Uvedené poznatky jsme čerpali z [7] a [8].

2.2.1 Hypergeometrické funkce

Definice 2.17. Buď a komplexní číslo. Definujeme

$$(a)_0 := 1, \quad (a)_k = \prod_{j=1}^k (a + j - 1), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Číslo $(a)_k$ pak nazýváme *posunutý faktoriál* nebo *Pochhammerův symbol*. Definujeme navíc zkrácený zápis

$$(a_1, \dots, a_r)_k := (a_1)_k \cdots (a_r)_k. \quad (3)$$

Poznámka 2.18. Binomický koeficient lze nejobecněji definovat pomocí gama funkce jako

$$\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(\alpha - \beta + 1)},$$

kde α a β jsou vhodná komplexní čísla, aby měl tento výraz smysl. Pro přirozený spodní argument lze pak kombinační číslo vyjádřit pomocí posunutého faktoriálu

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdots (\alpha - k + 1)}{k!} = \frac{(-\alpha)_k}{k!} (-1)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Definice 2.19. Buďte $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s$ a z komplexní čísla. Mocninnou řadu

$${}_rF_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} \middle| z \right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1, \dots, a_r)_k}{(b_1, \dots, b_s)_k} \frac{z^k}{k!} \quad (4)$$

nazveme *hypergeometrická řada*. Hypergeometrickou řadu jako funkci z na poloměru konvergence nazveme *hypergeometrická funkce*.

Pod pojmem hypergeometrická funkce se často myslí tzv. *Gaussovská* nebo *obyčejná* hypergeometrická funkce, kde $r = 2$ a $s = 1$. Námi definovaný pojem se pak často nazývá *zobecněná* hypergeometrická funkce.

Aby měla hypergeometrická řada smysl, nesmí se samozřejmě v žádném ze sčítanců objevit nula ve jmenovateli. Znamená to tedy, že žádné z čísel $b_1, \dots, b_s$ nesmí být záporné celé. Je-li naopak jedno z čísel $a_1, \dots, a_r$ záporné celé, jedná se o konečný součet a hypergeometrická funkce je tedy polynom. V opačném případě pro poloměr konvergence hypergeometrické řady platí

$$\varrho = \begin{cases} \infty & \text{pro } r < s + 1, \\ 1 & \text{pro } r = s + 1, \\ 0 & \text{pro } r > s + 1. \end{cases} \quad (5)$$

2.2.2 q -analogie

V teorii q -analogií se zobecňují jisté pojmy tak, aby pro limitu $q \rightarrow 1$ přecházely v ty klasické. V následujícím textu budeme uvažovat q komplexní číslo různé od nuly a od jedničky. Pro $q = 1$ definice nemají smysl a pro $q = 0$ degenerují. Často je nutné předpokládat, že q není odmocnina z jedné (tj. pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $q^n \neq 1$) nebo dokonce $q \in (0, 1)$. Nejjednodušším příkladem q -analogie je q -číslo.

Definice 2.20. Buď α komplexní číslo. Pak definujeme q -číslo

$$[\alpha]_q := \frac{q^\alpha - q^{-\alpha}}{q - q^{-1}}. \quad (6)$$

Skutečně vidíme, že $\lim_{q \rightarrow 1} [\alpha]_q = \alpha$. Uvedený příklad navíc ilustruje, že definice q -analogií nejsou jednoznačné. Zde jsme použili definici z [8], která se liší od té v [7], kde jsou q -čísla definována jako $[\alpha]_q = (1 - q^\alpha)/(1 - q)$. I tato definice však splňuje limitní podmínku. Námi uvedená definice se více hodí k definici a popisu tzv. q -deformovaných algeber.

Pro další práci budeme potřebovat umět charakterizovat, kdy se daná dvě q -čísla rovnají. Na to nám odpoví následující lemma, které jsme převzali z [5].

Lemma 2.21. Nechť q není odmocnina z jedné. Pak

1. Je-li $q^\alpha = i\varepsilon q^{l/2}$ pro nějaké $l \in \mathbb{Z}$ a $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, pak je pro $j, k \in \mathbb{Z}$ různá $[\alpha - j]_q = [\alpha - k]_q$, právě když $j + k = l$.
2. Platí-li naopak, $[\alpha - j]_q = [\alpha - k]_q$ pro nějaké $\alpha \in \mathbb{C}$ a $j, k \in \mathbb{Z}$ různá, znamená to, že $q^\alpha = i\varepsilon q^{(j+k)/2}$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.
3. Pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ existuje $\alpha \in \mathbb{C}$ takové, že $\lambda = [\alpha]_q$ a čísla $[\alpha]_q, [\alpha + 1]_q, [\alpha + 2]_q, \dots$ jsou vzájemně různá.

Důkaz. První dva body plynou z toho, že lze upravit

$$[\alpha - j]_q = [\alpha - k]_q \Leftrightarrow (q^{\alpha-(j+k)/2} + q^{-\alpha+(j+k)/2})(q^{-(j-k)/2} - q^{(j-k)/2}) = 0.$$

Protože q není odmocnina z jedné, je pravá závorka rovna nule tehdy a jen tehdy, když $j = k$. Jsou-li j a k různé, pak je rovnost splněna právě tehdy, když je nulová levá závorka, což lze upravit na rovnost $q^\alpha = i\varepsilon q^{(j+k)/2}$, kde $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

V posledním bodě je zřemé, že vždy existuje α takové, aby byla splněna rovnost $\lambda = [\alpha]_q$ (hledáme vlastně vzor sinu hyperbolického). Podle prvního bodu může pro nějaké $j, k \in \mathbb{N}_0, j \neq k$ nastat $[\alpha + j]_q = [\alpha + k]_q$, právě když $q^\alpha = i\varepsilon q^{l/2}$, $l = j + k \in \mathbb{N}$, tj. $\lambda = i\varepsilon(q^{l/2} + q^{-l/2})/(q - q^{-1})$. Pak stačí volit $q^\alpha = i\varepsilon q^{-l/2}$, které rovnici $\lambda = [\alpha]_q$ také splňuje. $\square$

Nyní definujeme analogii Pochhammerova symbolu

Definice 2.22. Buď a komplexní číslo. Pak definujeme pro $k \in \mathbb{N}_0$

$$(a; q)_k := \prod_{j=1}^k (1 - aq^{j-1}), \quad (7)$$

přičemž pod prázdným součinem máme na mysli jedničku, tedy $(a; q)_0 = 1$. Opět definujeme zkrácený zápis

$$(a_1, \dots, a_r; q)_k := (a_1; q)_k \cdots (a_r; q)_k. \quad (8)$$

Zde má limitní přechod tvar

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{(q^\alpha; q)_k}{(1 - q)^k} = (\alpha)_k.$$

Dále bychom mohli definovat q -analogii gama funkce nebo třeba binomických koeficientů. Nic z toho však nebudeme potřebovat, a tak rovnou přejdeme k analogii hypergeometrické funkce.

Definice 2.23. Buďte $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s$ a z komplexní čísla. Mocninnou řadu

$${}_r\varphi_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} \middle| q; z \right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1, \dots, a_r; q)_k}{(b_1, \dots, b_s; q)_k} (-1)^{(1+s-r)k} q^{(1+s-r)\binom{k}{2}} \frac{z^k}{(q; q)_k} \quad (9)$$

nazveme *základní hypergeometrická řada* a tuto řadu jako funkci z na poloměru konvergence *základní hypergeometrická funkce*.

Opět samozřejmě platí, že aby měla základní hypergeometrická řada smysl, nesmí se v žádném ze sčítanců objevit nula ve jmenovateli. Znamená to tedy, že žádné z čísel $b_1, \dots, b_s$ se nesmí rovnat q^{-n} pro $n \in \mathbb{N}$. Je-li naopak jedno z čísel $a_1, \dots, a_r$ rovno q^{-n} , jedná se o konečný součet.

Nakonec ještě uvedeme bez důkazu následující užitečnou sumační formuli. Podobné vztahy se pochopitelně dají formulovat i pro obyčejné hypergeometrické funkce.

Lemma 2.24 (Jacksonova sumační formule). Buďte $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Pak

$$\begin{aligned} {}_6\varphi_5 \left(\begin{matrix} q\sqrt{a}, -q\sqrt{a}, a, b, c, d \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, ab^{-1}q, ac^{-1}q, ad^{-1}q \end{matrix} \middle| q; \frac{aq}{bcd} \right) = \\ = \frac{(aq, ab^{-1}c^{-1}q, ab^{-1}d^{-1}q, ac^{-1}d^{-1}q; q)_\infty}{(ab^{-1}q, ac^{-1}q, ad^{-1}q, ab^{-1}c^{-1}d^{-1}q; q)_\infty} \quad \text{pro } \left| \frac{aq}{bcd} \right| < 1. \end{aligned} \quad (10)$$

V případě, že řada na levé straně představuje konečný součet, pravá strana jakožto limita podílu q -posunutých faktoriálů představuje konečný součin a již ke konvergenci není potřeba předpoklad $|aq/(bcd)| < 1$. Pro $n \in \mathbb{N}_0$ tedy platí

$${}_6\varphi_5 \left(\begin{matrix} q\sqrt{a}, -q\sqrt{a}, a, b, c, q^{-n} \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, ab^{-1}q, ac^{-1}q, aq^{n+1} \end{matrix} \middle| q; \frac{aq^{n+1}}{bc} \right) = \frac{(aq, ab^{-1}c^{-1}q; q)_n}{(ab^{-1}q, ac^{-1}q; q)_n}. \quad (11)$$

2.3 Ortogonální polynomy

V první části této podkapitoly definujeme posloupnost ortogonálních polynomů a uvedeme nejdůležitější tvrzení o ortogonálních polynomech, které následně budeme potřebovat. Dojdeme až k Favardově větě, která říká, že posloupnost ortogonálních polynomů charakterizuje tzv. tříčlenná rekurence. V práci budeme popisovat ortogonální polynomy z tzv. Askeyova schématu, o kterém se krátce zmíníme ve druhé části. V té pak definujeme třídy ortogonálních polynomů, se kterými budeme dále pracovat.

2.3.1 Definice ortogonálních polynomů a důležitá tvrzení

Množina všech polynomů $\mathcal{P}$ tvoří vektorový prostor, na kterém se dá zadefinovat různými způsoby skalární součin. Z pohledu lineární algebry bychom pak pod pojmem *soubor ortogonálních polynomů* rozuměli libovolný soubor z prostoru polynomů, který by byl ortogonální vzhledem k danému skalárnímu součinu.

Mnohdy je však výhodné hledat takové posloupnosti ortogonálních polynomů P_n , které navíc pro libovolné $n \in \mathbb{N}_0$ splňují $\text{st } P_n = n$. Takové polynomy dostaneme Gramovou–Schmidtovou ortogonalizací souboru monomů $(1, x, x^2, \dots)$. Soubor s touto vlastností nejen že tvoří ortogonální (Hamelovu) bázi všech polynomů, ale rovněž je z něj možné vybrat podsoubor prvních $n + 1$ polynomů $(P_i)_{i=0}^n$, které budou tvořit ortogonální bázi prostoru $\mathcal{P}_n$ polynomů stupně nejvýše n . Z toho dále plyne, že každý polynom P_n je kolmý na všechny vektory báze $\mathcal{P}_{n-1}$, a tedy na celý podprostor polynomů nižšího stupně.

Dalším běžným požadavkem je, aby skalární součin dvou polynomů závisel pouze na jejich běžném součinu. Pak totiž jde tento skalární vyjádřit klasickým způsobem jako hodnotu Lebesgueova–Stieltjesova integrálu ze součinu polynomů. Plyne z toho však například, že samotný soubor monomů nemůže tvořit posloupnost ortogonálních polynomů.

Naopak lze někdy využít jistého zobecnění pojmu ortogonalit, jaké jsme uvedli v sekci 2.1.1.

Přístup k definici ortogonálních polynomů je více. My se budeme držet postupu z [9], nicméně budeme využívat obecných definic a poznatků uvedených v sekci 2.1.1. Přesto bude následující text z velké části pouhým shrnutím důležitých tvrzení z kapitol 1.2 – 1.4 knihy [9].

V celé práci budeme uvažovat prostor všech polynomů $\mathcal{P}$ jako komplexní vektorový prostor a označíme $e_0, e_1, \dots$ monomy $e_i(x) = x^i$. Pod komplexně sdruženým polynomm k polynomu p budeme mít na mysli polynom $\bar{p}$ s komplexně sdruženými koeficienty.

Naším hlavním zájmem v dalších kapitolách budou konečné posloupnosti ortogonálních polynomů, nicméně uvedené věty budou platit i pro ty nekonečné. V celé sekci tedy budeme zkoumat posloupnosti $(P_n)_{n=0}^N$, kde N je přirozené číslo nebo nekonečno. Ani v důkazech ale většinou nebude potřeba tyto dva případy rozlišovat. Pro pohodlnost ještě označme $\hat{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots, N\}$, $\hat{N} = \{1, 2, \dots, N\}$. Je-li $N = +\infty$, pak máme na mysli $\hat{N}_0 = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ a $\hat{N} = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

Definice 2.25. Buď $(\mu_n)_{n=0}^{2N}$ komplexní posloupnost a necht $\mathcal{L}$ je lineární funkcionál na prostoru polynomů stupně nejvýše $2N$ splňující

$$\mathcal{L}e_n = \mu_n. \quad (12)$$

Pak $\mathcal{L}$ nazveme *momentový funkcionál* určený formální *momentovou posloupností* (μ_n) . Každé číslo μ_n nazveme *moment řádu n* .

Definice 2.26. Momentový funkcionál $\mathcal{L} \in \mathcal{P}_{2N}^*$ nazveme *pozitivně definitní*, platí-li $\mathcal{L}\pi > 0$ pro každý polynom stupně nejvýše $2N$, který je nezáporný na reálné ose a není identicky nulový.

Definice 2.27. Posloupnost $(P_n)_{n=0}^N$ nazveme *posloupnost ortogonálních polynomů* vzhledem k momentovému funkcionálu $\mathcal{L} \in \mathcal{P}_{2N}^*$, platí-li pro všechna nezáporná čísla m a n

1. st $P_n = n$
2. $\mathcal{L}(P_m P_n) = h_n \delta_{mn}$, přičemž $h_n \neq 0$.

Platí-li pro každé n navíc $h_n = 1$, nazveme tuto posloupnost *ortonormální*. Koeficient u nejvyšší mocniny P_n budeme většinou značit k_n . Jsou-li všechny k_n jednotkové, budeme polynomy nazývat *monické*.

Dále, nebude-li řečeno jinak, budeme vždy uvažovat posloupnost $N+1$ ortogonálních polynomů $(P_n) \equiv (P_n)_{n=0}^N$ a momentový funkcionál působící na prostoru $\mathcal{P}_{2N}$. Pro přehlednost budeme v textu značit písmeny p, q polynomy stupně nejvýše N a písmenem π polynom stupně nejvýše $2N$.

Z definice momentového funkcionálu je hned jasné, že na libovolný polynom stupně nejvýše $2N$ tvaru $\pi(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ bude působit jako

$$\mathcal{L}\pi = \sum_{k=0}^n c_k \mu_k. \quad (13)$$

Nyní by nás mohlo zajímat, zda momentový funkcionál odpovídá nějakému skalárnímu součinu a jestli tím pádem souhlasí uvedená definice ortogonálních polynomů s běžným pojmem ortogonalit. Odpověď na tuto otázku zformulujeme v následujících dvou větách.

Věta 2.28. Necht (P_n) je posloupnost ortogonálních polynomů vzhledem k momentovému funkcionálu $\mathcal{L}$. Pak $\mathcal{L}$ určuje symetrický skalární součin na $\mathcal{P}_N$ rovnicí

$$(p, q) = \mathcal{L}(pq). \quad (14)$$

Důkaz. Bilinearita a symetrie je zřejmá a ortogonální bázi tvoří právě posloupnost (P_n) . $\square$

Důsledek 2.29. Buď (P_n) posloupnost ortogonálních polynomů vzhledem k $\mathcal{L}$. Pak pro libovolný polynom p stupně $n \leq N$ platí

$$p = \sum_{k=0}^n c_k P_k, \quad \text{kde} \quad c_k = \frac{\mathcal{L}(pP_k)}{P_k^2}. \quad (15)$$

Důkaz. Jde pouze o aplikaci věty 2.8. $\square$

Věta 2.30. Necht je $\mathcal{L}$ pozitivně definitní momentový funkcionál. Pak $\mathcal{L}$ určuje na $\mathcal{P}_N$ běžný skalární součin rovnicí

$$(p, q) = \mathcal{L}(\bar{p}q). \quad (16)$$

Důkaz. Linearita ve druhém argumentu je zřejmá. Pro ověření hermitovskosti nejprve ukážeme, že momenty pozitivně definitního momentového funkcionálu jsou reálné. Zřejmě platí

$$\mu_{2k} = \mathcal{L}e_{2k} > 0,$$

dále definujeme $\pi_k(x) := (x+1)^{2k}$. Pak také platí

$$0 < \mathcal{L}\pi_k = \sum_{i=0}^{2k} \binom{k}{i} \mu_i$$

a indukci se snadno dokáže, že i liché momenty jsou reálné.

Pak pro libovolný polynom $\pi = \sum_{i=0}^n \alpha_i e_i$ musí platit

$$\mathcal{L}\bar{\pi} = \sum_{i=0}^n \bar{\alpha}_i \mu_i = \overline{\sum_{i=0}^n \alpha_i \mu_i} = \overline{\mathcal{L}\pi}.$$

Ověření hermitovskosti je pak již snadné:

$$(q, p) = \mathcal{L}(\bar{q}p) = \overline{\mathcal{L}(\bar{p}q)} = \overline{(p, q)}.$$

Pozitivní definitnost skalárního součinu plyne přímo z pozitivní definitnosti momentového funkcionálu. Pro nenulový polynom $p(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i$ je totiž $(\bar{p}p)(x) = \sum_{i=0}^n |\alpha_i|^2 x^{2i}$ na reálné ose větší nebo rovno nule, takže

$$(p, p) = \mathcal{L}(\bar{p}p) > 0. \quad \square$$

Důsledek 2.31. Necht $\mathcal{L}$ je pozitivně definitní momentový funkcionál. Pak existuje posloupnost reálných ortogonálních polynomů vzhledem k $\mathcal{L}$.

Důkaz. Vzhledem k tomu, že $\mathcal{L}$ určuje obyčejný skalární součin, je možné použít Gramovu–Schmidtovu ortogonalizaci souboru monomů. Ze způsobu konstrukce vyplývá, že tak opět dostaneme reálné polynomy. $\square$

Věta 2.32. Buď $\mathcal{L}$ momentový funkcionál a (P_n) posloupnost polynomů taková, že $\text{st } P_n \leq n$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:

1. (P_n) je posloupnost ortogonálních polynomů vzhledem k $\mathcal{L}$;
2. pro každé $n \in \hat{N}_0$ platí, že pro libovolný polynom $p \in \mathcal{P}_n$ platí $\mathcal{L}(pP_n) = 0$, jestliže $\text{st } p < n$, zatímco $\mathcal{L}(pP_n) \neq 0$, jestliže $\text{st } p = n$;
3. pro každé $n \in \hat{N}_0$ a $m \in \{0, \dots, n\}$ platí $\mathcal{L}(e_m P_n) = K_n \delta_{mn}$, kde $K_n \neq 0$.

Důkaz.

(1 $\Rightarrow$ 2): Vyjádříme polynom p v ortogonální bázi $p = \sum_{k=0}^m c_k P_k$, kde $m = \text{st } p$. Je-li $m < n$, pak

$$\mathcal{L}(pP_n) = \sum_{k=0}^m c_k (P_k, P_n) = 0.$$

Je-li $m = n$ musí být $c_n \neq 0$, pak je tedy

$$\mathcal{L}(pP_n) = \sum_{k=0}^m c_k (P_k, P_n) = c_n h_n \neq 0.$$

(2 $\Rightarrow$ 3): Dosadíme $p := e_m$.

(3 $\Rightarrow$ 1): Indukcí dokážeme, že pro každé k je $\text{st } P_k = k$. Předpokládejme tedy, že to platí pro všechna $k < n$. Kdyby $\text{st } P_n < n$, pak by byl na ostatních lineárně závislý a šel by vyjádřit jako $P_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k P_k$, pak by ovšem pro každé j bylo

$$0 = \mathcal{L}(e_j P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \mathcal{L}(e_j P_k) = c_j K_j \quad \Rightarrow \quad c_j = 0.$$

Z toho však plyne, že P_n je nulový polynom, a to je spor.

Nyní můžeme zapsat libovolné P_m jako $P_m = \sum_{k=0}^m \alpha_{mk} e_k$ a snadno vyjádříme

$$\mathcal{L}(P_m P_n) = \sum_{k=0}^m \alpha_{mk} \mathcal{L}(e_k P_n) = 0 \quad \text{a}$$

$$\mathcal{L}(P_n^2) = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \mathcal{L}(e_k P_n) = \alpha_{nn} K_n \neq 0. \quad \square$$

Důsledek 2.33. Existuje-li posloupnost ortogonálních polynomů vzhledem k $\mathcal{L}$, pak je až na normalizaci určena jednoznačně.

Důkaz. Necht (P_n) a (Q_n) jsou posloupnosti ortogonálních vektorů vzhledem k $\mathcal{L}$. Z věty 2.32 plyne

$$\mathcal{L}(P_k Q_n) = 0 \quad \text{pro } k < n.$$

Vyjádříme-li Q_n pomocí Fourierova rozvoje, vidíme

$$Q_n = \sum_{k=0}^n \frac{\mathcal{L}(Q_n P_k)}{\mathcal{L}(P_k^2)} P_k = \frac{\mathcal{L}(Q_n P_n)}{\mathcal{L}(P_n^2)} P_n. \quad \square$$

Definice 2.34. Momentový funkcionál $\mathcal{L}$ příslušný momentové posloupnosti (μ_n) nazveme *kvazidefinitní*, je-li pro každé $n \in \hat{N}_0$ splněno

$$\Delta_n := \det(\mu_{i+j})_{i,j=0}^n \neq 0. \quad (17)$$

Věta 2.35. Buď $\mathcal{L}$ momentový funkcional. Nutnou a postačující podmínkou existence posloupnosti ortogonálních polynomů je, aby $\mathcal{L}$ byl kvazidefinitní.

Důkaz. Podle věty 2.32 je nutné a stačí, aby existovaly polynomy $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} x^k$ splňující

$$\mathcal{L}(e_m P_n) = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \mu_{k+m} = K_n \delta_{mn} \quad \text{pro } K_n \neq 0 \text{ a } m \leq n.$$

Koeficienty polynomu P_n jsou tedy řešením soustavy

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{n0} \\ \alpha_{n1} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ K_n \end{pmatrix}.$$

Víme, že existuje-li posloupnost ortogonálních polynomů, je určena jednoznačně až na normalizaci. Protože platí $\mathcal{L}(P_n^2) = \alpha_{nn} K_n$, určují konstanty K_n posloupnost (P_n) již zcela jednoznačně. Posloupnost ortogonálních polynomů tedy existuje, právě když má uvedená soustava právě jedno řešení, a to je splněno právě tehdy, když je determinant matice soustavy Δ_n nenulový. $\square$

Věta 2.36. Buď (P_n) posloupnost ortogonálních polynomů příslušná $\mathcal{L}$. Pak pro libovolný polynom p_n stupně $n \leq N$ platí

$$\mathcal{L}(p_n P_n) = a_n \mathcal{L}(e_n P_n) = \frac{a_n k_n \Delta_n}{\Delta_{n-1}}, \quad (18)$$

kde $\Delta_{-1} = 1$, a_n je koeficient u nejvyšší mocniny p_n a k_n je koeficient u nejvyšší mocniny P_n .

Důkaz. Napišme $p_n = a_n e_n + p_{n-1}$, kde $\deg p_{n-1} = n-1$. Pak je již jasná první rovnost

$$\mathcal{L}(p_n P_n) = \mathcal{L}(a_n e_n P_n + p_{n-1} P_n) = a_n \mathcal{L}(e_n P_n).$$

Z Cramerova pravidla můžeme vyjádřit koeficient k_n pro $n \in \mathbb{N}$ v předchozím důkaze označený jako α_{nn} . Determinant matice $(\mu_{i+j})_{i,j=0}^n$ se po nahrazení posledního sloupce vektorem pravé strany vypočítá jako $K_n \Delta_{n-1}$. Platí tedy

$$k_n = \alpha_{nn} = \frac{K_n \Delta_{n-1}}{\Delta_n} = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \mathcal{L}(e_n P_n).$$

Tím je věta dokázána. Snadno totiž vidíme, že tvrzení platí i pro $n = 0$. $\square$

Věta 2.37. Momentový funkcional $\mathcal{L}$ je pozitivně definitní, právě když má všechny momenty μ_n reálné a zároveň pro všechna $n \in \hat{\mathbb{N}}_0$ platí $\Delta_n > 0$.

Důkaz. Již jsme dokázali v rámci věty 2.30, že pozitivně definitní funkcional má reálné momenty a definuje běžný skalární součin. Matice tohoto skalárního součinu omezeného na $\mathcal{P}_n$ v bázi $(e_0, \dots, e_n)$ je právě (μ_{i+j}) . Ze Sylvestrova kritéria tedy musí být $\Delta_n > 0$.

Naopak předpokládejme, že máme reálné momenty a kladné determinanty Δ_n . Pak můžeme pro libovolné $n \leq N$ definovat hermitovskou formu na $\mathcal{P}_n$ předpisem $h_n(p, q) = \mathcal{L}(\bar{p}q)$. Seskvilinearita této formy je zřejmá a hermitovskost se ověří stejně jako v důkazu věty 2.30. Matice této formy v bázi monomů bude zase (μ_{i+j}) , ze Sylvestrova kritéria tedy bude h_n pozitivně definitní.

Vezměme nyní libovolný nenulový polynom π , jež nabývá na reálné ose nezáporných hodnot. Tento polynom je určitě reálný, má sudý stupeň $\text{st } \pi = 2k$ a všechny jeho reálné kořeny jsou sudé násobnosti. Dá se tedy zapsat ve tvaru

$$\pi(x) = \prod_{i=1}^k (x - x_i)(x - \bar{x}_i) = p\bar{p}.$$

Platí tedy

$$\mathcal{L}\pi = \mathcal{L}(\bar{p}p) = h_{2k}(p, p) > 0.$$

□

Důležitou vlastností ortogonálních polynomů je to, že je charakterizuje tzv. tříčlenná rekurence.

Věta 2.38. Buď $\mathcal{L}$ kvazidefinitní momentový funkcionál a (P_n) odpovídající monická posloupnost ortogonálních polynomů. Pak pro každé $n \in \hat{N}$ existují konstanty c_n a $\lambda_n \neq 0$ takové, že

$$P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x), \quad (19)$$

kde definujeme $P_{-1} = 0$. Je-li navíc $\mathcal{L}$ pozitivně definitní, pak jsou pro všechna $n \in \hat{N}$ c_n reálné a pro $n > 1$ také $\lambda_n > 0$ (na hodnotě λ_1 nezáleží). Tyto konstanty lze vyjádřit jako

$$c_n = \frac{\mathcal{L}(e_1 P_{n-1}^2)}{\mathcal{L}(P_{n-1}^2)}, \quad \lambda_{n+1} = \frac{\mathcal{L}(P_n^2)}{\mathcal{L}(P_{n-1}^2)} = \frac{\Delta_n \Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}^2}. \quad (20)$$

Dále platí, že

$$\mathcal{L}(P_n^2) = \prod_{k=1}^{n+1} \lambda_k, \quad \text{zvolíme-li } \lambda_1 = \mu_0, \quad (21)$$

a že koeficient u x^{n-1} v polynomu P_n je roven $-\sum_{k=1}^n c_k$.

Důkaz. Uvažme $0 \leq n < N$ a rozepišme

$$e_1 P_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\mathcal{L}(e_1 P_n P_k)}{\mathcal{L}(P_k^2)} P_k.$$

Pro $k < n-1$ je $\text{st } e_1 P_k = k+1 < n = \text{st } P_n$, a tím pádem $\mathcal{L}(e_1 P_n P_k) = 0$. Protože $e_1 P_n$ i P_{n+1} jsou monické, musí být koeficient u P_{n+1} jednička. Zbývající dva koeficienty označíme

$$c_{n+1} := \frac{\mathcal{L}(e_1 P_n^2)}{\mathcal{L}(P_n^2)}, \quad \lambda_{n+1} := \frac{\mathcal{L}(e_1 P_{n-1} P_n)}{\mathcal{L}(P_{n-1} P_{n-1})} = \frac{\Delta_n / \Delta_{n-1}}{\Delta_{n-1} / \Delta_{n-2}} = \frac{\Delta_n \Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}^2},$$

kde jsme ve vyjádření λ_{n+1} využili na čitatel i jmenovatel větu 2.36. Tím jsme přímo dostali vyjádření vztahu (20). Získali jsme tak rekurenci

$$xP_n(x) = \lambda_{n+1}P_{n-1} + c_{n+1}P_n + P_{n+1}.$$

Vztah (19) již získáme záměnou $n+1 \mapsto n$.

Z vyjádření koeficientu λ_{n+1} je vidět, že je nenulový a při pozitivně definitním $\mathcal{L}$ kladný. Je-li $\mathcal{L}$ pozitivně definitní vidíme, že monické ortogonální polynomy musejí být reálné, neboť se bude jednat o reálné násobky reálných polynomů, o jejichž existenci jsme se zmínili v důsledku 2.31. Z toho pak plyne reálnost koeficientů c_n .

Ze vztahu (20) lze získat rekurenci $\mathcal{L}(P_n^2) = \lambda_{n+1}\mathcal{L}(P_{n-1}^2)$, jejím vyřešením a volbou $\lambda_1 := \mu_0 = \mathcal{L}(P_0^2)$ dospějeme k rovnici

$$\mathcal{L}(P_n^2) = \prod_{k=1}^n \lambda_{k+1} \cdot \mathcal{L}(P_0^2) = \prod_{k=0}^n \lambda_{k+1}.$$

Stejně tak můžeme vyjádřit rekurenci pro koeficient u x^{n-1} v polynomu P_n . Označíme-li ho d_n , platí

$$d_n = d_{n-1} - c_n = - \sum_{k=1}^n d_k.$$

□

Věta 2.39 (Favard). Budte $(c_n)_{n=1}^N$ a $(\lambda_n)_{n=1}^N$ libovolné posloupnosti komplexních čísel a necht $(P_n)_{n=0}^N$ je posloupnost polynomů definovaná rekurencí (19)

$$P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x),$$

s počátečními podmínkami $P_{-1}(x) = 0$ a $P_0(x) = 1$. Pak existuje právě jeden momentový funkcionál $\mathcal{L}$ splňující

$$\mathcal{L}e_0 = \lambda_1 \quad \text{a} \quad \mathcal{L}(P_m P_n) = 0 \quad \text{pro } m \neq n.$$

Funkcionál $\mathcal{L}$ je kvazidefinitní a (P_n) je k němu příslušná posloupnost monických ortogonálních polynomů tehdy a jen tehdy, když pro každé $n \in \hat{N}$ je $\lambda_n \neq 0$. Funkcionál $\mathcal{L}$ je pozitivně definitní, právě když je (c_n) reálná a (λ_n) kladná posloupnost.

Důkaz. Momentový funkcionál definujeme induktivně

$$\mathcal{L}e_0 = \mu_0 = \lambda_1, \quad \mathcal{L}P_n = 0 \quad \text{pro } n \in \hat{N},$$

tj. moment μ_0 je roven λ_1 , moment μ_1 je určen rovnicí $\mathcal{L}P_1 = \mu_1 - c_1\mu_0 = 0$, moment μ_2 rovnicí $\mathcal{L}P_2 = \mu_2 - (c_1 + c_2)\mu_1 + (\lambda_2 - c_1c_2)\mu_0 = 0$ a podobně. Nyní ověříme, že pro každé $n \in \hat{N}_0$ a $m \leq n$ je $\mathcal{L}(e_m P_n) = 0$, čímž podle věty 2.32 ověříme, že se skutečně jedná o momentový funkcionál jemuž přísluší posloupnost ortogonálních polynomů (P_n) . Přepíšme proto rekurenci do tvaru

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + c_{n+1}P_n(x) + \lambda_{n+1}P_{n-1}(x) \quad n \geq 1.$$

Zapůsobíme-li funkcionálem $\mathcal{L}$ na obě strany, získáme pro $n \geq 2$ rovnost $\mathcal{L}(e_1 P_n) = 0$. Vynásobíme-li rovnost x a opět zapůsobíme funkcionálem $\mathcal{L}$, získáme pro $n \geq 3$ rovnost $\mathcal{L}(e_2 P_n) = 0$. Indukcí pak ukážeme

$$\mathcal{L}(e_k P_n) = 0 \quad \text{pro } 0 \leq k < n,$$

$$\mathcal{L}(e_n P_n) = \lambda_{n+1}\mathcal{L}(e_{n-1} P_{n-1}) \quad \text{pro } n \geq 1,$$

přitom platí

$$\mathcal{L}P_n^2 = \mathcal{L}(e_n P_n) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1},$$

takže $\mathcal{L}$ je kvazidefinitní, právě když jsou všechna $\lambda_n \neq 0$. Jsou-li všechny c_n a λ_n reálné, jsou jistě i všechny momenty reálné. Jsou-li navíc všechny λ_n kladné, jsou podle věty 2.36 i všechny Δ_n kladné. Podle věty 2.37 je tedy $\mathcal{L}$ pozitivně definitní. Opačnou implikaci jsme již dokázali ve větě 2.38. □

Poznámka 2.40. Často budeme pracovat s ortogonálními polynomy, které nejsou monické. Relaci rekurence pak lze psát ve tvaru

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 0. \quad (22)$$

Označíme-li $P_n(x) = k_n \tilde{P}_n(x)$, kde k_n je koeficient u nejvyšší mocniny P_n , a $\tilde{P}_n$ jsou tedy monické, můžeme vyjádřit

$$A_n = k_n^{-1} k_{n+1}, \quad B_n = -c_{n+1} k_n^{-1} k_{n+1}, \quad C_n = \lambda_{n+1} k_{n-1}^{-1} k_{n+1}.$$

Užitečná nám pak bude rovnost (21), která nabude tvaru

$$\mathcal{L}P_n^2 = \mu_0 \prod_{k=1}^n \frac{A_{k-1} C_k}{A_k}. \quad (23)$$

■ 2.3.2 Askeyovo schéma

Askeyovo schéma obsahuje třídy polynomů, jež jsou zobecněním klasických ortogonálních polynomů (Jacobiho, Laguerrových a Hermitových). Nejobecnější třídou polynomů Askeyova schématu tvoří Wilsonovy a Racahovy polynomy. Ostatní polynomy z Askeyova schématu lze získat limitním přechodem z jedné z těchto nejobecnějších tříd.

Níže některé třídy z Askeyova schématu uvedeme i s jejich vlastnostmi. Polynomy z Askeyova schématu se vyznačují tím, že se jedná o řešení jisté diferenciální nebo diferenční rovnice druhého řádu. S tím je spojeno to, že je lze vyjádřit v řeci hypergeometrických funkcí. Další vlastností je tříčlenná rekurence, kterou podle věty 2.38 splňuje každá posloupnost ortogonálních polynomů. Poslední vlastností, kterou budeme zkoumat je relace ortogonality, která popisuje skalární součin nebo momentový funkcionál, vůči kterému jsou polynomy ortogonální, a normu těchto polynomů. Uvádí se tedy většinou ve tvaru $\mathcal{L}(P_n P_m) = \delta_{nm} h_n$.

V naší práci se budeme zabývat pouze posloupnostmi tzv. diskrétních ortogonálních polynomů. Takové posloupnosti budou konečné, budou splňovat diferenční rovnici a skalární součin bude představovat suma s vahou, tj. relace ortogonality bude ve tvaru

$$\sum_{x=0}^N P_n(x) P_m(x) w(x) = \delta_{nm} h_n.$$

Nejobecnějšími diskrétními ortogonálními polynomy z Askeyova schématu jsou Racahovy. Naopak Wilsonovy patří ke spojitým ortogonálním polynomům.

Zobecněním Askeyova schématu ve smyslu q -analogie je q -Askeyovo schéma, kde nejobecnější třídy polynomů představují spojitě Askeyovy–Wilsonovy polynomy a diskrétní q -Racahovy polynomy. Od těch lze k původním polynomům přejít limitou $q \rightarrow 1$.

Přehled tříd polynomů z (q -)Askeyova schématu s nejdůležitějšími vlastnostmi lze najít v [7]. Jeden z příkladů, na který se ve třetí kapitole zaměříme bude souviset s tzv. Kravčukovými polynomy. Dále už budeme pracovat pouze s nejobecnější třídou diskrétních ortogonálních polynomů, jíž jsou q -Racahovy polynomy. Obě třídy v následujících odstavcích definujeme a uvedeme jejich důležité vlastnosti.

Kravčukovy polynomy

Explicitní tvar n -tého Kravčukova polynomu s parametry p a N lze napsat ve tvaru

$$K_n(x; p, N) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, -x \\ -N \end{matrix} \middle| \frac{1}{p} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (24)$$

Kravčukovy polynomy splňují relaci ortogonality (pro $0 < p < 1$)

$$\sum_{x=0}^N \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x} K_m(x; p, N) K_n(x; p, N) = \frac{(-1)^n n!}{(-N)_n} \left(\frac{1-p}{p} \right)^n \delta_{mn}, \quad (25)$$

rekurentní relaci

$$\begin{aligned} -x K_n(x; p, N) &= p(N-n) K_{n+1}(x; p, N) \\ &\quad - [p(N-n) + n(1-p)] K_n(x; p, N) + n(1-p) K_{n-1}(x; p, N) \end{aligned} \quad (26)$$

a diferenční rovnici

$$-ny(x) = p(N-x)y(x+1) - [p(N-x) + x(1-p)]y(x) + x(1-p)y(x-1), \quad (27)$$

kde jsme označili $y(x) = K_n(x; p, N)$.

q -Racahovy polynomy

Explicitní tvar n -tého q -Racahova polynomu s parametry α, β, γ a δ lze psát ve tvaru

$$R_n(\mu(x); \alpha, \beta, \gamma, \delta \mid q) = {}_4\varphi_3 \left(\begin{matrix} q^{-n}, \alpha\beta q^{n+1}, q^{-x}, \gamma\delta q^{x+1} \\ \alpha q, \beta\delta q, \gamma q \end{matrix} \middle| q; q \right) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (28)$$

kde

$$\mu(x) = q^{-x} + \gamma\delta q^{x+1} \quad \text{a} \quad (29)$$

$$\alpha q = q^{-N} \quad \text{nebo} \quad \beta\delta q = q^{-N} \quad \text{nebo} \quad \gamma q = q^{-N}, \quad \text{kde } N \in \mathbb{N}_0, \quad (30)$$

přičemž se uvažuje $q \in (0, 1)$. Pro zkrácení zápisu budeme již od počátku značit $R_n(\mu(x)) = R_n(\mu(x); \alpha, \beta, \gamma, \delta \mid q)$.

Tyto polynomy splňují relaci ortogonality

$$\sum_{x=0}^N \frac{(\alpha q, \beta\delta q, \gamma q, \gamma\delta q; q)_x}{(q, \alpha^{-1}\gamma\delta q, \beta^{-1}\gamma q, \delta q; q)_x} \frac{1 - \gamma\delta q^{2x+1}}{(\alpha\beta q)^x (1 - \gamma\delta q)} R_m(\mu(x)) R_n(\mu(x)) = h_n \delta_{mn}, \quad (31)$$

kde

$$h_n = \frac{(\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma, \alpha^{-1}\delta, \beta^{-1}, \gamma\delta q^2; q)_\infty}{(\alpha^{-1}\beta^{-1}q^{-1}, \alpha^{-1}\gamma\delta q, \beta^{-1}\gamma q, \delta q; q)_\infty} \frac{(1 - \alpha\beta q)(\gamma\delta q)^n}{(1 - \alpha\beta q^{2n+1})} \frac{(q, \alpha\beta\gamma^{-1}q, \alpha\delta^{-1}q, \beta q; q)_n}{(\alpha q, \alpha\beta q, \beta\delta q, \gamma q; q)_n},$$

přičemž první zlomek je třeba brát jakožto celek jako limitu podílů q -posunutých faktoriálů, kterou díky podmínce (30) představuje konečný součin. Dále q -Racahovy polynomy splňují relaci rekurence

$$-(1 - q^{-x})(1 - \gamma\delta q^{x+1}) R_n(\mu(x)) = A_n R_{n+1}(\mu(x)) - (A_n + C_n) R_n(\mu(x)) + C_n R_{n-1}(\mu(x)), \quad (32)$$

kde

$$A_n = \frac{(1 - \alpha q^{n+1})(1 - \alpha\beta q^{n+1})(1 - \beta\delta q^{n+1})(1 - \gamma q^{n+1})}{(1 - \alpha\beta q^{2n+1})(1 - \alpha\beta q^{2n+2})}, \quad (33)$$

$$C_n = \frac{q(1 - q^n)(1 - \beta q^n)(\gamma - \alpha\beta q^n)(\delta - \alpha q^n)}{(1 - \alpha\beta q^{2n})(1 - \alpha\beta q^{2n+1})}, \quad (34)$$

a diferenční rovnici

$$q^{-n}(1 - q^n)(1 - \alpha\beta q^{n+1})y(x) = B(x)y(x+1) - [B(x) + D(x)]y(x) + D(x)y(x-1), \quad (35)$$

kde jsme označili $y(x) = R_n(\mu(x))$ a

$$B(x) = \frac{(1 - \alpha q^{x+1})(1 - \beta \delta q^{x+1})(1 - \gamma q^{x+1})(1 - \gamma \delta q^{x+1})}{(1 - \gamma \delta q^{2x+1})(1 - \gamma \delta q^{2x+2})}, \quad (36)$$

$$D(x) = \frac{q(1 - q^x)(1 - \delta q^x)(\beta - \gamma q^x)(\alpha - \gamma \delta q^x)}{(1 - \gamma \delta q^{2x})(1 - \gamma \delta q^{2x+1})}. \quad (37)$$

Nakonec ještě upozorníme na symetrii v parametrech q -Racahových polynomů. Zaměníme-li

$$\alpha \mapsto \beta \delta, \quad \beta \mapsto \frac{\alpha}{\delta}, \quad \gamma \mapsto \alpha, \quad \delta \mapsto \frac{\gamma \delta}{\alpha},$$

zůstanou zachovány součiny $\alpha\beta$ a $\gamma\delta$ a zamění se $\alpha \mapsto \beta\delta$, $\beta\delta \mapsto \gamma$ a $\gamma \mapsto \alpha$. Dostaneme tak stejné polynomy.

2.4 Algebry a reprezentace

V této podkapitole předneseme obecnou definici algebry a Lieovy algebry, základní poznatky teorie reprezentací a definice a konkrétní tvary reprezentací použitých algeber. Tvzení o Lieových algebrách jsme čerpali z [10], zatímco tvzení o asociativních algebrách z [11] a speciálně o kvantových algebrách z [8].

Definice 2.41. Mějme vektorový prostor V nad tělesem T a bilineární operaci $m: V \times V \rightarrow V$. Uspořádanou dvojici $\mathcal{A} = (V, m)$ nazveme *algebra*. Je-li navíc m asociativní nebo komutativní, nazveme také $\mathcal{A}$ asociativní nebo komutativní. Existuje-li ve V prvek e splňující pro každé $x \in V$ $m(e, x) = x = m(x, e)$, nazveme ho *jednotka* a $\mathcal{A}$ nazveme algebra s jednotkou.

Definice 2.42. Algebru $L = (V, [\cdot, \cdot])$ nazveme *Lieova algebra*, je-li příslušná operace antisymetrická a splňuje tzv. *Jacobiho identitu*, tj. pro každé $x, y, z \in V$ je splněno

$$[x, y] = -[y, x], \quad (38)$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0. \quad (39)$$

Operaci $[\cdot, \cdot]$ pak nazveme *Lieova závorka*.

Lemma 2.43. Buď $\mathcal{A} = (V, \cdot)$ asociativní algebra. Pak komutátor definovaný pro každé $x, y \in V$ jako

$$[x, y] = xy - yx$$

splňuje axiomy Lieovy závorky. $L = (V, [\cdot, \cdot])$ tedy tvoří Lieovu algebru.

Důkaz. Obě vlastnosti se ověří dosazením. □

Prostor všech lineárních operátorů na vektorovém prostoru V spolu s operací skládání tvoří asociativní algebru s jednotkou. Lineární operátory spolu s komutátorem tedy tvoří Lieovu algebru, tu nazýváme *obecná lineární algebra* a značíme $\text{gl}(V)$. Maticovým vyjádřením je Lieova algebra všech čtvercových matic nad tělesem T , kterou budeme značit $\text{gl}(n, T)$. Protože se budeme zabývat pouze komplexními algebrami, zavedeme zkrácené označení $\text{gl}_n \equiv \text{gl}(n, \mathbb{C})$.

Nyní přirozeným způsobem zavedeme pojmy podalgebry a algebraického homomorfismu.

Definice 2.44. Buď $\mathcal{A} = (V, m)$ algebra a $W \subset \subset V$, tj. W je vektorový podprostor V . Je-li W uzavřený na operaci m , pak $\mathcal{B} = (W, m)$ tvoří algebru, o které řekneme, že je *podalgebrou* algebry $\mathcal{A}$, a budeme značit $\mathcal{B} \subset \subset \mathcal{A}$.

Významnou podalgebrou maticové obecné lineární algebry $\mathrm{gl}(n, T)$ je *speciální lineární algebra* $\mathrm{sl}(n, T)$ matic s nulovou stopou. Uzavřenost bezestopých matic na komutátor stačí ověřit pro jejich bázi, kterou tvoří matice e_{ij} pro $i \neq j$ společně s maticemi $e_{ii} - e_{i+1, i+1}$ pro $1 \leq i < n$, kde pod označením e_{ij} máme na mysli matici s jedničkou na pozici (i, j) a nulami jinde. Bezestopé matice však nejsou uzavřeny na prosté násobení, netvoří tedy podalgebru asociativní algebry čtvercových matic. I zde zavedeme zkrácené označení $\mathrm{sl}_n \equiv \mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$.

Definice 2.45. Lineární zobrazení $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ nazveme *homomorfismus* algeber $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, je-li pro každé $x, y \in \mathcal{A}$ splněno

$$\varphi(m(x, y)) = m(\varphi(x), \varphi(y)).$$

Je-li navíc φ bijekce, nazveme jej *izomorfismus*. Izomorfismus algebry na sebe samu nazveme *automorfismus*.

Od teď již nebudeme rozlišovat mezi algebrou a jejím nosičem. Pod označením *Lieova algebra* L budeme mít na mysli Lieovu algebru v souladu s definicí 2.42 a příslušnou operaci budeme značit vždy $[\cdot, \cdot]$. Pod označením *algebra* $\mathcal{A}$ budeme mít od teď na mysli vždy asociativní algebru s jednotkou a příslušnou operaci budeme značit jako násobení.

■ 2.4.1 Reprezentace Lieových algeber

Definice 2.46. Necht L je Lieova algebra a V vektorový prostor nad tělesem T . Homomorfismus $\varphi: L \rightarrow \mathrm{gl}(V)$ nazveme *reprezentace* Lieovy algebry L . Homomorfismus do $\mathrm{gl}(n, T)$ nazveme *maticová reprezentace*. Je-li reprezentace prostá, nazveme ji *věrnou*.

Definice 2.47. Buď L Lieova algebra nad tělesem T . Konečnědimenzionální vektorový prostor V nad tělesem T spolu s bilineárním zobrazením $L \times V \rightarrow V$, $(x, v) \mapsto x \cdot v$ splňujícím pro každé $x, y \in L$ a $v \in V$

$$[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v) \quad (40)$$

nazveme *Lieův modul* pro L nebo jenom *L -modul*. Zmíněné zobrazení nazveme *akce* algebry L na V .

Následující dvě lemmata ukazují, že reprezentace algebry a Lieův modul jsou různá vyjádření téže struktury.

Lemma 2.48. Reprezentace $\varphi: L \rightarrow \mathrm{gl}(V)$ definuje L -modul nad V rovnicí

$$x \cdot v = \varphi(x)(v) \quad \text{pro každé } x \in L \text{ a } v \in V. \quad (41)$$

Důkaz. Linearita v levém argumentu plyne z linearitu φ , linearita v pravém argumentu z linearitu $\varphi(x)$ jakožto lineárního zobrazení. Vlastnost (40) nakonec plyne z toho, že φ je homomorfismus a z definice Lieovy závorky na $\mathrm{gl}(V)$:

$$\begin{aligned} [x, y] \cdot v &= \varphi([x, y])(v) = [\varphi(x), \varphi(y)](v) = \\ &= \varphi(x)(\varphi(y)(v)) - \varphi(y)(\varphi(x)(v)) = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v). \quad \square \end{aligned}$$

Lemma 2.49. Necht V je L -modul. Pak můžeme definovat reprezentaci L do $\text{gl}(V)$ opět pomocí rovnice (41). Tedy $\varphi(x)$ bude pro každé $x \in L$ představovat zobrazení $v \mapsto x \cdot v$.

Důkaz. Linearita φ plyne z linearitu akce L v levém argumentu. Linearita $\varphi(x)$ plyne z linearitu akce L v pravém argumentu. Vlastnost homomorfismu se ověří podobně jako v předchozím lemmatu

$$\varphi([x, y])(v) = [x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v) = [\varphi(x), \varphi(y)](v). \quad \square$$

Definice 2.50. Buď V Lieův modul pro algebru L . Podprostor $W \subset V$, který je invariantní vůči akci L , tj. pro každé $x \in L$ a každé $w \in W$ je $x \cdot w \in W$, nazveme *podmodul* V . V jazyce reprezentací bychom hovořili o *podreprezentaci*.

Definice 2.51. Lieův modul V , který nemá žádné podmoduly kromě $\{0\}$ a V nazveme *ireducibilní*. Stejně nazveme i příslušnou reprezentaci.

Definice 2.52. Buďte V a W L -moduly. Lineární zobrazení $\vartheta: V \rightarrow W$ splňující pro každé $v \in V$ a $x \in L$

$$\vartheta(x \cdot v) = x \cdot \vartheta(v) \quad (42)$$

nazveme *homomorfismus* L -modulů. Jsou-li φ_V a φ_W příslušné reprezentace, lze podmínku (42) vyjádřit ve tvaru

$$\vartheta \circ \varphi_V(x) = \varphi_W(x) \circ \vartheta. \quad (43)$$

Je-li ϑ navíc bijektivní, nazveme ji *izomorfismus* L -modulů a o příslušných reprezentacích φ_V a φ_W řekneme, že jsou *ekvivalentní*.

Pro každou Lieovu algebru je důležitá otázka klasifikace jejích reprezentací, to jest najít všech ireducibilních vzájemně neekvivalentních reprezentací pro danou algebru. Co se týče Lieových algeber budeme potřebovat klasifikaci reprezentací Lieovy algebry $\mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Její bázi tvoří tři prvky

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (44)$$

které splňují komutační relace

$$[e, f] = h, \quad [f, h] = 2f, \quad [h, e] = 2e. \quad (45)$$

Věta 2.53. Lineární zobrazení $\varphi_N: \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \text{gl}_{N+1}$ definované působením na bázi jako

$$\varphi_N(e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_N(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ N & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & N-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (46)$$

$$\varphi_N(h) = \text{diag}(N, N-2, \dots, -N+2, -N) \quad (47)$$

tvoří ireducibilní reprezentaci $\mathfrak{sl}_2$.

Důkaz. Snadno ověříme, že jsou splněny potřebné komutační relace. Necht $W \neq \{0\}$ je podmodul $\mathbb{C}^{N+1}$. Vidíme, že h působí diagonálně a má různá vlastní čísla. Vlastní podprostory jsou obaly vektorů standardní báze (e_i) . Podle věty 2.1 musí i ve W ležet některý z bazických vektorů e_i . Z toho, že e a f působí na bázi jako

$$e \cdot e_j = j e_{j-1}, \quad f \cdot e_j = (N-j) e_{j+1},$$

vidíme, že ve W musejí ležet i všechny ostatní bazické vektory, tedy $W = V$. $\square$

Je jasné, že tyto reprezentace nemohou být vzájemně ekvivalentní, neboť má pro každou reprezentaci příslušný modul jinou dimenzi. Nicméně platí:

Věta 2.54. Každá konečnědimenzionální ireducibilní reprezentace $\mathfrak{sl}_2$ je ekvivalentní jedné z reprezentací φ_N .

Důkaz této věty je proveden v [10].

2.4.2 Algebra definovaná množinou generátorů

Často budeme potřebovat asociativní algebru s jednotkou definovat abstraktním způsobem tak, že stanovíme množinu generátorů a relace, které tyto generátory musejí splňovat. Dále budeme požadovat pouze to, aby se daly mezi sebou formálně násobit a sčítat. Za tím účelem sestojíme tzv. volnou algebru, kterou budou tvořit formální lineární kombinace konečných slov utvořených z generujících prvků jakožto symbolů. Tu pak stačí faktorizovat oboustranným ideálem generovaným požadovanými relacemi.

Definice 2.55. Buď $\mathcal{A}$ algebra. Vektorový podprostor $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ uzavřený na násobení libovolnými prvky algebry zprava, respektive zleva, tj. pro každé $a \in \mathcal{A}$ a každé $b \in \mathcal{I}$ je také $ba \in \mathcal{I}$, respektive $ab \in \mathcal{I}$, nazveme *levý*, respektive *pravý ideál* algebry $\mathcal{A}$. Je-li $\mathcal{I}$ levý a zároveň pravý ideál, nazveme ho *oboustranný ideál*.

Definice 2.56. Buď $\mathcal{A}$ algebra a $\mathcal{I}$ její oboustranný ideál. Faktorprostor $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ s bilineární operací $[a][b] \mapsto [ab]$, kde $[a]$ a $[b]$ jsou třídy ekvivalencí prvků $a, b \in \mathcal{A}$, tvoří algebru, kterou nazveme *faktoralgebra* $\mathcal{A}$ podle $\mathcal{I}$.

Pochopitelně by bylo potřeba nejprve ověřit korektnost takové definice. Dále je možné ověřit, že průnik dvou ideálů je také ideál, což nás opravňuje zavést následující definici.

Definice 2.57. Oboustranným ideálem generovaným množinou $M \in \mathcal{A}$ rozumíme nejmenší oboustranný ideál obsahující M .

Nyní již přejdeme k samotné konstrukci algebry určené množinou generátorů a relací.

Definice 2.58. Nechtě $\{x_i\}_{i \in I}$ je indexovaná množina generátorů. Pak algebru formálních lineárních kombinací konečných slov utvořených ze symbolů x_i nad $\mathbb{C}$ spolu s bilineární operací, která na slova působí tak, že je sloučí (tj. $(x_{i_1} \dots x_{i_r}) \cdot (x_{j_1} \dots x_{j_s}) = x_{i_1} \dots x_{i_r} x_{j_1} \dots x_{j_s}$), nazveme *volná algebra* a budeme značit $\mathbb{C}\langle x_i \rangle_{i \in I}$.

Jedná se vlastně o algebru formálních polynomů nad $\mathbb{C}$ v proměnných x_i .

Definice 2.59. Buď $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_r \rangle$ volná algebra a $f_1, \dots, f_s$ její prvky. Algebrou generovanou prvky $x_1, \dots, x_r$ a relacemi $f_k = 0$, $k = 1, \dots, s$ rozumíme faktoralgebru volné algebry $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_r \rangle$ podle oboustranného ideálu generovaného množinou $\{f_k\}_{k=1}^s$.

Typickým příkladem takto definované algebry je tzv. *univerzální obalová algebra* Lieovy algebry, kde generátory tvoří báze Lieovy algebry a relace tvoří komutační relace pro danou bázi. Univerzální obalová algebra Lieovy algebry L se běžně značí $U(L)$. Naším hlavním zájmem však budou tzv. q -deformace obalových algeber, které, podobně jako jiné q -analogie, přecházejí v limitě $q \rightarrow 1$ ke klasickému případu.

Uvažme generátory $x_1, \dots, x_r$, označme množinu indexů $I := \{1, \dots, r\}$ a množinu multiindexů $I^\infty := \bigcup_{k=0}^{+\infty} I^k$ a monomy $x_\alpha := x_{i_1} \dots x_{i_n}$ pro $\alpha = (i_1, \dots, i_n) \in I^\infty$. Je jasné, že bázi volné algebry $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_r \rangle$ bude tvořit množina všech monomů $\mathcal{X} = \{x_\alpha \mid \alpha \in I^\infty\}$. Otázka je, jak vypadá báze faktoralgebry popsané v předchozí definici. Je jasné, že kvůli generujícím relacím již nebude množina tříd ekvivalencí prvků $\mathcal{X}$ lineárně nezávislá. V následujících odstavcích formulujeme tzv. diamantové lemma (lemma 4.8 [8]), které určí, jaká podmnožina $\mathcal{X}$ tvoří bázi dané algebry.

Uvažme na množině monomů $\mathcal{X}$ uspořádání $\leq$, které bude monomy porovnávat podle délky a monomy stejné délky uspořádá lexikograficky podle indexů. Uvažme dále, že

generující relace $x_{\alpha_k} = f_k$, kde $x_{\alpha_k} \in \mathcal{X}$ a $f_k \in \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_r \rangle$, jsou ve tvaru *kompatibilním s uspořádáním* $\leq$, tj. f_k jsou lineární kombinací monomů menších než x_{α_k} . Pro každé $x, y \in \mathcal{X}$ a $k \in I$ definujeme zobrazení r_{xky} , které zobrazuje $xx_{\alpha_k}y \mapsto xf_ky$ a na ostatní prvky báze působí identicky. Taková zobrazení nazveme *redukce* a monom x , na který všechny redukce působí identicky nazveme *redukovaný*. Označme R množinu všech různých složení redukci. Řekneme, že monomy x_{α_k} a x_{α_l} tvoří *překryvnou nejednoznačnost*, jestliže $x_{f_k} = xy$ a $x_{f_l} = yz$. Takovou nejednoznačnost nazveme *řešitelnou*, existují-li $r, r' \in R$ takové, že $r(f_kz) = r'(xf_l)$. Řekneme, že x_{α_k} a x_{α_l} tvoří *inkluzní nejednoznačnost*, jestliže $x_{\alpha_l} = xx_{\alpha_k}y$. Tu označíme jako *řešitelnou*, jestliže existují $r, r' \in R$ takové, že $r(f_l) = r'(xf_ky)$. Bez důkazu nyní formulujeme zmíněné lemma.

Lemma 2.60 (Diamantové). Označme $\mathcal{A}$ algebru generovanou prvky $x_1, \dots, x_r$ a relacemi ve tvaru $x_{\alpha_k} = f_k$, $k = 1, \dots, s$ kompatibilním s uspořádáním $\leq$. Jsou-li všechny nejednoznačnosti řešitelné, pak bázi $\mathcal{A}$ jakožto vektorového prostoru tvoří množina všech redukovaných monomů.

Aplikací diamantového lemmatu na obalové algebry bychom mohli odvodit Poincaré–Birkhoff–Wittovu větu, která říká, že bázi obalové algebry generované prvky $x_1, \dots, x_r$ je množina uspořádaných monomů $\{x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_r^{k_r} \mid k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}_0\}$.

2.4.3 Reprezentace asociativních algeber s jednotkou

Připomeňme, že pro zkrácení formulací máme pod pojmem algebra na mysli asociativní algebru s jednotkou.

Definice 2.61. Buď $\mathcal{A}$ libovolná algebra a V vektorový prostor. Homomorfismus $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(V)$ nazveme *reprezentace* algebry $\mathcal{A}$.

Definice 2.62. Buď $\mathcal{A}$ libovolná algebra nad tělesem T . Vektorový prostor V nad tělesem T spolu s bilineárním zobrazením $\mathcal{A} \times V \rightarrow V$, $(a, v) \mapsto a \cdot v$ splňujícím pro každé $a, b \in \mathcal{A}$ a $v \in V$

$$(ab) \cdot v = a \cdot (b \cdot v) \quad \text{a} \quad 1 \cdot v = v \quad (48)$$

nazveme $\mathcal{A}$ -*modul*.

Opět je snadné ověřit, že mezi těmito dvěma strukturami existuje jednoznačný vztah popsaný rovnicí

$$a \cdot v = \varphi(a)v. \quad (49)$$

Uvedené definice jsou pouze zobecněním pojmů pro Lieovy algebry uvedených v části 2.4.1. Snadno se totiž ověří, že reprezentace Lieovy algebry je totéž, co reprezentace její obalové algebry. Ve stejném duchu si budou odpovídat i definice podmodulu, podreprezentace, ireducibilního modulu či reprezentace a homomorfismu či izomorfismu modulů či reprezentací. Pro pořádek je tedy znovu formulujeme.

Definice 2.63. Buď V $\mathcal{A}$ -modul. Podprostor $W \subset V$, který je invariantní vůči akci $\mathcal{A}$, tj. pro každé $x \in \mathcal{A}$ a každé $w \in W$ je $x \cdot w \in W$, nazveme *podmodul* V . V jazyce reprezentací bychom hovořili o *podreprezentaci*.

Definice 2.64. Modul V , který nemá žádné podmoduly kromě $\{0\}$ a V nazveme *ireducibilní*. Stejně nazveme i příslušnou reprezentaci.

Definice 2.65. Buďte V a W $\mathcal{A}$ -moduly. Lineární zobrazení $\vartheta: V \rightarrow W$ splňující pro každé $v \in V$ a $x \in \mathcal{A}$

$$\vartheta(x \cdot v) = x \cdot \vartheta(v) \quad (50)$$

nazveme *homomorfismus* $\mathcal{A}$ -modulů. Jsou-li φ_V a φ_W příslušné reprezentace, lze podmínku (50) vyjádřit ve tvaru

$$\vartheta \circ \varphi_V(x) = \varphi_W(x) \circ \vartheta. \quad (51)$$

Je-li ϑ navíc bijektivní, nazveme ji *izomorfismus* a o příslušných reprezentacích řekneme, že jsou *ekvivalentní*.

Nyní ještě předneseme tzv. Schurovo lemma a jeho důležitý důsledek. Podobná tvrzení by se dala formulovat i pro Lieovy algebry, tam je však nebudeme potřebovat.

Lemma 2.66. Buď $\mathcal{A}$ algebra, V a W $\mathcal{A}$ -moduly. Jádru libovolného homomorfismu $\vartheta: V \rightarrow W$ je podmodul V .

Důkaz. Víme, že jádro libovolného lineárního zobrazení je podprostor, zbývá tedy ukázat, že je jádro ϑ invariantní vůči akci $\mathcal{A}$. Buď $x \in \mathcal{A}$, pak pro libovolný $v \in \ker \vartheta$ je $\vartheta(x \cdot v) = x \cdot \vartheta(v) = x \cdot 0 = 0$. $\square$

Lemma 2.67 (Schur). Nechť $\mathcal{A}$ je komplexní algebra a V konečněrozměrný ireducibilní $\mathcal{A}$ -modul. Pak libovolný homomorfismus modulů $\vartheta: V \rightarrow V$ působí jako násobek identity.

Důkaz. Je jasné, že naopak libovolný násobek identity je homomorfismus $V \rightarrow V$. Homomorfismus ϑ je lineární operátor na konečněrozměrném vektorovém prostoru V nad $\mathbb{C}$, existuje tedy alespoň jedno jeho vlastní číslo λ . Zobrazení $\vartheta - \lambda \text{id}$ musí být také homomorfismus $V \rightarrow V$. Jádro $\vartheta - \lambda \text{id}$ je podmodul V , který určitě obsahuje nějaký nenulový vlastní vektor operátoru ϑ . Z ireducibility V tedy musí být $\ker(\vartheta - \lambda \text{id}) = V$, takže $\vartheta = \lambda \text{id}$. $\square$

Definice 2.68. Nechť $\mathcal{A}$ je algebra. Množinu $Z(\mathcal{A})$ prvků $z \in \mathcal{A}$, které komutují s každým $x \in \mathcal{A}$ (tj. $xz = zx$) nazveme *centrum* algebry $\mathcal{A}$.

Lemma 2.69. Nechť $\mathcal{A}$ je komplexní algebra a V konečněrozměrný ireducibilní $\mathcal{A}$ -modul. Pak libovolný prvek centra $\mathcal{A}$ působí na V jako násobení konstantou.

Důkaz. Stačí ukázat, že pro každé $z \in Z(\mathcal{A})$ je $\vartheta: V \rightarrow V$ $v \mapsto z \cdot v$ homomorfismus. Vezměme libovolné $x \in \mathcal{A}$, pak

$$\vartheta(x \cdot v) = z \cdot x \cdot v = (zx) \cdot v = (xz) \cdot v = x \cdot z \cdot v = x \cdot \vartheta(v). \quad \square$$

Nyní předneseme úplnou klasifikaci reprezentací algebry $U'_q(\mathfrak{so}_3)$, jež byla představena v [5]. Tato algebra představuje nestandardní deformaci Lieovy algebry $\mathfrak{so}_3$ antisymetrických matic $n \times n$.

Definice 2.70. Algebra $U'_q(\mathfrak{so}_3)$ je komplexní asociativní algebra generovaná třemi prvky I_1, I_2 a I_3 a relacemi

$$q^{1/2} I_1 I_2 - q^{-1/2} I_2 I_1 = I_3, \quad (52)$$

$$q^{1/2} I_2 I_3 - q^{-1/2} I_3 I_2 = I_1, \quad (53)$$

$$q^{1/2} I_3 I_1 - q^{-1/2} I_1 I_3 = I_2. \quad (54)$$

Věta 2.71. Libovolná $N + 1$ -dimenzionální ireducibilní reprezentace $U'_q(\mathfrak{so}_3)$, kde q není odmocnina z jedné je ekvivalentní jedné z pěti neekvivalentních ireducibilních reprezentací. Jen jedna z nich je tzv. *klasická*, tj. umožňuje provést limitu $q \rightarrow 1$, přičemž získáme ireducibilní reprezentaci Lieovy algebry $\mathfrak{so}_3$.

Pro další práci se budou více hodit tvary reprezentací podobné těm publikovaným v [12]. (Použijeme nicméně jiné značení bazických vektorů a v neklasickém případě se zbavíme zbytečných imaginárních jednotek. V klasickém případě značíme $x_j = |l - j\rangle$ a v neklasickém $x_j = i^j |n - j\rangle$.)

Věta 2.72. Reprezentace $\varphi: U'_q(\mathfrak{so}_3) \rightarrow \mathcal{L}(V)$, kde V je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ dimenze $N+1$, působící na bázi $\mathcal{X} = (x_0, \dots, x_N)$ jako

$$\varphi(I_1)x_j = \frac{1}{q^{-M+j} + q^{M-j}}(-[j]_q x_{j-1} + [N-j]_q x_{j+1}), \quad (55)$$

$$\varphi(I_2)x_j = \frac{iq^{1/2}}{q^{-M+j} + q^{M-j}}(q^{M-j}[j]_q x_{j-1} + q^{-M+j}[N-j]_q x_{j+1}), \quad (56)$$

$$\varphi(I_3)x_j = i[-M+j]_q x_j, \quad 0 \leq j \leq N, \quad x_{-1} = x_{N+1} = 0 \quad (57)$$

kde $M = N/2$, je klasická ireducibilní reprezentace algebry $U'_q(\mathfrak{so}_3)$.

Důkaz. Je potřeba ověřit komutační relace. Dále vidíme, že $\varphi(I_3)$ působí diagonálně a z lematu 2.21 je vidět, že má vzájemně různá vlastní čísla, takže opět z věty 2.1 musí být v každém nenulovém invariantním podmodulu nějaký prvek báze $\mathcal{X}$. Z $\varphi(I_1)$ a $\varphi(I_2)$ lze snadno sestavit „posunovací operátory“ pro bázi $\mathcal{X}$: $(\varphi(I_1) - iq^{j-M-1/2}\varphi(I_2))x_j$ je násobek x_{j+1} a $(\varphi(I_1) + iq^{M-j-1/2}\varphi(I_2))x_j$ je násobek x_{j-1} . Z toho je už vidět, že libovolný nenulový podmodul je celé V . Nakonec vidíme, že reprezentace umožňuje limitu $q \rightarrow 1$, patří tedy mezi klasické reprezentace. $\square$

Věta 2.73. Reprezentace $\varphi_{\varepsilon, \varepsilon'}: U'_q(\mathfrak{so}_3) \rightarrow \mathcal{L}(V)$, kde V je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ dimenze $N+1$ a $\varepsilon, \varepsilon' \in \{1, -1\}$, působící na bázi $\mathcal{X} = (x_0, \dots, x_N)$ jako

$$\varphi(I_1)x_j = \frac{\varepsilon}{q^{-N+j-1/2} - q^{N-j+1/2}}([j]_q x_{j-1} - [2N-j+1]_q x_{j+1}), \quad (58)$$

$$\varphi(I_2)x_j = \frac{1}{q^{-N+j-1/2} - q^{N-j+1/2}}(q^{N-j+1}[j]_q x_{j-1} - q^{-N+j}[2N-j+1]_q x_{j+1}), \quad (59)$$

$$\varphi(I_3)x_j = \varepsilon \frac{q^{-N+j-1/2} + q^{N-j+1/2}}{q - q^{-1}}x_j, \quad (60)$$

kde $j = 0, \dots, r-1$ a označili jsme $x_{N+1} = \varepsilon' x_N$ a $x_{-1} = 0$, tvoří čtveřici neekvivalentních neklasických ireducibilních reprezentací algebry $U'_q(\mathfrak{so}_3)$.

Důkaz. Pro ověření, že se jedná o reprezentace je potřeba opět ověřit komutační relace. Ireducibilita se dokáže stejně jako v předchozí větě. Žádná z těchto reprezentací není ekvivalentní té klasické, neboť v nich má operátor $\varphi(I_3)$ jiná vlastní čísla. Ze stejného důvodu je zřejmé, že nemohou být ekvivalentní ani reprezentace s různým ε . U reprezentací s různým ε' se pak liší stopy operátorů $\varphi(I_1)$ (viz následující lemma). Ekvivalentní reprezentace téhož prvku však musejí působit jako podobné matice, a tedy musejí mít stejnou stopu. Tím je tvrzení dokázáno. $\square$

Protože budeme dále potřebovat při dané reprezentaci určit, se kterou z pěti uvedených reprezentací je izomorfní, bude se nám hodit následující lemma, ve kterém vypočítáme stopy všech tří operátorů. Bude nám pak stačit určit stopu u dvou operátorů neznámé reprezentace, abychom určili hodnoty parametrů ε a ε' a zjistili, se kterou z uvedených je neznámá reprezentace ekvivalentní. Lemma formulujeme pouze pro neklasické reprezentace, u klasických je evidentní, že mají všechny operátory nulovou stopu.

Lemma 2.74. Buď $\varphi_{\varepsilon, \varepsilon'}$ reprezentace z předchozí věty. Pak platí

$$\text{Tr } \varphi_{\varepsilon, \varepsilon'}(I_1) = \frac{-\varepsilon \varepsilon' [N+1]_q}{q^{1/2} - q^{-1/2}}, \quad \text{Tr } \varphi_{\varepsilon, \varepsilon'}(I_2) = \frac{-\varepsilon' [N+1]_q}{q^{1/2} - q^{-1/2}}, \quad \text{Tr } \varphi_{\varepsilon, \varepsilon'}(I_3) = \frac{\varepsilon [N+1]_q}{q^{1/2} - q^{-1/2}}. \quad (61)$$

Důkaz. Stopa reprezentací I_1 a I_2 se vypočítá snadno, neboť mají na diagonále jen jeden nenulový člen. Stopa I_3 se vypočítá s využitím vzorce pro částečný součet geometrické posloupnosti jako

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N \varepsilon \frac{q^{-N+j-1/2} + q^{N-j+1/2}}{q - q^{-1}} x_j &= \frac{\varepsilon}{q - q^{-1}} \left(q^{-N-1/2} \frac{q^{N+1} - 1}{q - 1} + q^{N+1/2} \frac{q^{-N-1} - 1}{q^{-1} - 1} \right) \\ &= \frac{\varepsilon(q^{N+1} - q^{-N-1})}{(q^{1/2} - q^{-1/2})(q - q^{-1})} = \frac{\varepsilon[N+1]_q}{q^{1/2} - q^{-1/2}}. \quad \square \end{aligned}$$

Kapitola 3

Reprezentace algeber a ortogonální polynomy

Mezičlánek ve vztahu reprezentací algeber a ortogonálních polynomů budou tvořit tzv. Leonardovy páry. Úvod do teorie Leonardových párů, který popisuje i vztah s různými oblastmi matematiky, mezi jimiž jsou právě i reprezentace algeber nebo ortogonální polynomy, lze najít např. v článku [4].

Postup, který zde popíšeme jsme již aplikovali na konkrétní případy algeber sl_2 a $U'_q(so_3)$ v [13]. Zde však popíšeme korespondenci Leonardových párů a ortogonálních polynomů nejprve obecně. Dále na konkrétních případech některých algeber ukážeme, jak lze Leonardovy páry snadno konstruovat, známe-li úplnou klasifikaci reprezentací dané algebry a její důležité automorfismy, a dostaneme tak velmi jednoduše důležité vlastnosti některých sad ortogonálních polynomů z Askeyova schématu.

Nejprve se tedy podíváme na algebru sl_2 a odvodíme vlastnosti Kravčukových polynomů. Na rozdíl od [13] zde použijeme obecnější automorfismus, kterým budeme schopni nagenarovat obecné Kravčukovy polynomy. Podrobnější analýzu vztahu algebry sl_2 , Leonardových párů a Kravčukových polynomů lze najít v [14].

Z kvantové deformace $U_q(sl_2)$ této algebry by šlo získat Leonardův pár, jež by souvisel s q -Kravčukovými polynomy. V tomto případě však neexistuje vhodný automorfismus, kterým by tento Leonardův pár šel nagenarovat, a tak se tímto případem nebudeme zabývat. (V [8] je k uvedena přímo grupa automorfismů na této algebře a žádný z automorfismů nezobrazuje diagonálně působící element K na nějaký nediagonální.) Souvislost $U_q(sl_2)$ s Leonardovými páry je popsána v [15].

Dále uvedeme příklad algebry $U'_q(so_3)$ jež generuje q -Racahovy polynomy s jistými parametry. Kromě klasické reprezentace uvedené algebry prozkoumáme navíc případ neklasické reprezentace. Leonardovy páry související s obecnými q -Racahovými polynomy jsou zkoumány v [16]. Takové Leonardovy páry lze získat z reprezentací tzv. Askeyovy–Wilsonovy algebry, kterou podrobněji prozkoumáme v kapitole 4.

Ještě upozorníme na možná nestandardní značení. Vzhledem k tomu, že se budeme zabývat souvislostí s prostory polynomů, bude výhodné vše indexovat od nuly, nikoliv od jedničky. Nebude-li tedy řečeno jinak, budeme pracovat s bázemi $\mathcal{X} = (x_j)_{j=0}^N$, s maticemi $\mathbb{A} = (\mathbb{A}_{jk})_{j,k=0}^N \in T^{N+1,N+1}$ a podobně.

3.1 Leonardovy páry a ortogonální polynomy

Definice 3.1. Buď $\mathbb{A} \in T^{N+1,N+1}$ matice nad tělesem T . Její *horní diagonálou* nazveme posloupnost prvků $(\mathbb{A}_{j-1,j})_{j=1}^N$ a její *spodní diagonálou* posloupnost prvků $(\mathbb{A}_{j,j-1})_{j=1}^N$. Matici nazveme *tridiagonální*, leží-li všechny její nenulové prvky na diagonále, horní diagonále nebo spodní diagonále. Tridiagonální matici nazveme *ireducibilní*, jsou-li všechny její prvky na horní i spodní diagonále nenulové.

Definice 3.2. Necht V je konečněrozměrný vektorový prostor nad tělesem T . Dvojici lineárních operátorů $A, B \in \mathcal{L}(V)$ nazveme *Leonardův pár*, existují-li báze $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ takové, že

1. matice $A^{\mathcal{X}}$ je ireducibilní tridiagonální a matice $B^{\mathcal{X}}$ je diagonální,
2. matice $A^{\mathcal{Y}}$ je diagonální a matice $B^{\mathcal{Y}}$ je ireducibilní tridiagonální.

Věta 3.3. Necht V je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ dimenze $N+1 \in \mathbb{N}$ a operátory $A, B \in \mathcal{L}(V)$ tvoří Leonardův pár. Označme $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ báze jako v definici 3.2 a $\mathbb{P}$ matici přechodu od báze $\mathcal{Y}$ k bázi $\mathcal{X}$. Označme prvky matic operátorů A a B jako

$$A^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} c_0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & c_1 & b_1 & & 0 \\ 0 & a_2 & c_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_N \end{pmatrix}, \quad A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} d_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_N \end{pmatrix},$$

$$B^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \tilde{d}_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{d}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{d}_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \tilde{d}_N \end{pmatrix}, \quad B^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_0 & \tilde{a}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{b}_0 & \tilde{c}_1 & \tilde{a}_2 & & 0 \\ 0 & \tilde{b}_1 & \tilde{c}_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \tilde{c}_N \end{pmatrix},$$

přičemž dodefinujeme $a_0 = \tilde{a}_0 = b_N = \tilde{b}_N = 0$. Necht je dále posloupnost d_k aritmetická nekonstantní, označme tedy

$$d_k = d_0 + dk, \quad (1)$$

a necht

$$\tilde{a}_k + \tilde{b}_k + \tilde{c}_k = \tilde{d}_0 \quad (2)$$

pro každé $k \in \{0, \dots, n\}$. Definujme posloupnost polynomů $(P_j)_{j=0}^N$ stupně nejvýše N pomocí funkčních hodnot v $N+1$ bodech jako

$$P_j(k) = \mathbb{P}_{jk}. \quad (3)$$

Takto definovaná posloupnost je konečná posloupnost ortogonálních polynomů splňujících pro každé $j, k \in \{0, \dots, N\}$ rovnici

$$a_j P_{j-1}(k) + c_j P_j(k) + b_j P_{j+1}(k) = (d_0 + dk) P_j(k), \quad (4)$$

kde lze pro $j < N$ přejít od diskrétní proměnné k ke spojitě $x \in \mathbb{C}$ a dostáváme tak tříčlennou rekurenci pro posloupnost ortogonálních polynomů (P_j) . Dále splňuje rovnici

$$\tilde{a}_k P_j(k-1) + \tilde{c}_k P_j(k) + \tilde{b}_k P_j(k+1) = \tilde{d}_j P_j(k), \quad (5)$$

která odpovídá diferenční rovnici pro danou posloupnost ortogonálních polynomů. Tyto polynomy splňují relaci ortogonality

$$\sum_{k=0}^N P_j(k) P_l(k) w_k = h_j \delta_{jl}, \quad \text{kde} \quad w_k = \prod_{i=1}^k \frac{\tilde{b}_{i-1}}{\tilde{a}_i}, \quad h_j = h_0 \prod_{i=1}^j \frac{a_i}{b_{i-1}}, \quad h_0 = \mathbb{P}_{00} \sum_{k=1}^N w_k, \quad (6)$$

tj. jsou ortogonální vůči momentovému funkcionálu

$$\mathcal{L}\pi = \sum_{k=0}^N \pi(k) w_k. \quad (7)$$

Důkaz. Podobnostní relace definující matici $\mathbb{P}$ se dají napsat ve tvaru

$$A^{\mathcal{X}}\mathbb{P} = \mathbb{P}A^{\mathcal{Y}}, \quad B^{\mathcal{X}}\mathbb{P} = \mathbb{P}B^{\mathcal{Y}}.$$

Rozepíšeme-li tyto rovnosti ve složkách a dosadíme-li definici polynomů (3), dostaneme přímo rekurenci (4) a diferenční rovnici (5). Pro $j < N$ je rovnice (4) rovností polynomů stupně menšího než N v $N+1$ bodech. Tyto polynomy se tedy musejí rovnat a můžeme k nahradit libovolným $x \in \mathbb{C}$.

Z požadavku (2) a diferenční rovnice (5) snadno indukci ukážeme, že polynom P_0 je konstantní, má tedy stupeň 0. Z rekurentní rovnice (4) dále indukci snadno ověříme, že každý polynom P_j je stupně nejvýše j . Protože $\mathbb{P}$ je regulární matice, musejí být její řádky, které představují souřadnice polynomů P_j , lineárně nezávislé. Platí tedy dokonce $P_j = j$.

Zbývá ukázat, že P_j jsou ortogonální vůči momentovému funkcionalu definovanému rovnicí (6). Snadno najdeme bázi $\mathcal{Z}$ takovou, že matice $B^{\mathcal{Z}}$ bude symetrická. Bude nám na to dokonce stačit diagonální matice přechodu. Označme tedy $\mathbb{T} = \text{diag}(t_0, \dots, t_N)$ matici přechodu od báze $\mathcal{Z}$ k bázi $\mathcal{Y}$. Požadavek symetrie $B^{\mathcal{Z}}$ pak bude znamenat

$$[\mathbb{T}^{-1}B^{\mathcal{Y}}\mathbb{T}]_{jk} = [\mathbb{T}^{-1}B^{\mathcal{Y}}\mathbb{T}]_{kj}, \quad \text{tedy} \quad t_j^2 = t_{j-1}^2 \frac{B_{j,j-1}^{\mathcal{Y}}}{B_{j-1,j}^{\mathcal{Y}}} = t_{j-1} \frac{\tilde{b}_{j-1}}{\tilde{a}_j}.$$

Zvolíme-li $t_0 = 1$, budou prvky $\mathbb{T}$ tvaru $t_k^2 = \prod_{j=1}^k \tilde{b}_{j-1}/\tilde{a}_j$.

Můžeme tedy psát $B^{\mathcal{Z}} = \mathbb{T}^{-1}B^{\mathcal{Y}}\mathbb{T} = \mathbb{T}^{-1}\mathbb{P}^{-1}B^{\mathcal{X}}\mathbb{P}\mathbb{T}$. Matice $(\mathbb{P}\mathbb{T})^{-1}$ tedy diagonalizuje $B^{\mathcal{Z}}$, její sloupce tedy musejí být vlastní vektory $B^{\mathcal{Z}}$ příslušné vzájemně různým vlastním číslům $\tilde{d}_0, \dots, \tilde{d}_N$. Z důsledku 2.16 víme, že jsou tyto vlastní vektory vzájemně symetricky kolmé. Tento fakt můžeme zapsat jako

$$[(\mathbb{P}\mathbb{T})^{-1}]^T(\mathbb{P}\mathbb{T})^{-1} = \tilde{\mathbb{H}},$$

kde $\tilde{\mathbb{H}}$ je diagonální matice. Matice vlevo je regulární, můžeme tedy označit $\mathbb{H} = \tilde{\mathbb{H}}^{-1} = \text{diag}(h_0, \dots, h_N)$ a vztah invertovat.

$$\mathbb{P}\mathbb{T}(\mathbb{P}\mathbb{T})^T = \mathbb{H}, \quad \text{tedy} \quad \sum_{k=0}^N P_j(k)P_l(k)t_k^2 = h_j\delta_{jl}.$$

Z regularity $\mathbb{H}$ plyne nenulovost posloupnosti $(h_j)_{j=0}^N$. Označíme-li $w_k = t_k^2$, dostaneme tak přímo relaci ortogonality (6). Snadno tak vidíme, že P_j tvoří posloupnost ortogonálních polynomů vzhledem k momentovému funkcionalu (7). Ten je již podle Favardovy věty 2.39 určen jednoznačně až na multiplikativní konstantu. Tvar posloupnosti h_j tak můžeme určit ze vzorce (23), kap. 2, užitím rekurence (4). Nultý moment se totiž spočítá jako $\mu_0 = \sum_{k=0}^N P_0(k)w_k = \mathbb{P}_{00} \sum_{k=0}^N w_k$. $\square$

Z rekurentní a diferenční rovnice je vidět, že matice $\mathbb{P}$, a tedy i polynomy P_j jsou určeny jednoznačně až na multiplikativní konstantu. Většinou volíme $\mathbb{P}_{00} = 1$, aby byl $P_0(x) = 1$.

Často budeme korespondenci mezi Leonardovým párem a ortogonálními polynomy hledat v komplikovanějším tvaru než (3). Buď Leonardův pár nebude splňovat podmínky (1) a (2), takže by relace (3) vůbec neurčovala posloupnost ortogonálních polynomů, nebo prostě jen hledáme souvislost s již existujícími ortogonálními polynomy, které jsou třeba jinak normované.

Změnu normování zajistí úprava $C_j P_j(k) = \mathbb{P}_{jk}$. Ta patřičným způsobem ovlivní relaci rekurence (4) a relaci ortogonality. Není-li splněna podmínka (2), může pomoci oprava na $\tilde{C}_j P_j(k) = \mathbb{P}_{jk}$, která ovlivní diferenční rovnici (5), a tím i podmínku (2), která nabude tvaru

$$\tilde{a}_k \tilde{C}_{k-1} + \tilde{c}_k \tilde{C}_k + \tilde{b}_k \tilde{C}_{k+1} = \tilde{d}_0 \tilde{C}_k.$$

Touto úpravou se rovněž změní i relace ortogonality. Není-li splněna podmínka (1), pomůže substituce v nezávisle proměnné $P_j(f(k)) = \mathbb{P}_{jk}$. Podmínka pak přejde na tvar

$$d_k = d_0 + df(k).$$

Funkce f se pak samozřejmě objeví v argumentech P i v rekurenci a diferenční rovnici.

Snadno nahlédneme, že je-li váhová posloupnost w_j kladná, představuje $\mathcal{L}$ pozitivně definitní momentový funkcionál.

3.2 Algebra $\mathfrak{sl}_2$ a Kravčukovy polynomy

Lemma 3.4. Na Lieově algebře $\mathfrak{sl}_2$ existuje pro $p \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ automorfismus σ_p působící na bázi jako

$$h \mapsto (1-2p)h + 2(1-p)e + 2pf, \quad e \mapsto (1-p) \left(h - \frac{1-p}{p}e + \frac{p}{1-p}f \right), \quad f \mapsto p(h+e-f).$$

Důkaz. Nejprve je třeba ověřit, že se jedná o homomorfismus. Je vidět, že jde o lineární zobrazení, stačí pak pro prvky báze pouze ověřit

$$\begin{aligned} [\sigma_p(e), \sigma_p(f)] &= \sigma_p(h) = \sigma_p([e, f]), \\ [\sigma_p(h), \sigma_p(e)] &= 2\sigma_p(e) = \sigma_p([h, e]), \\ [\sigma_p(f), \sigma_p(h)] &= 2\sigma_p(f) = \sigma_p([f, h]). \end{aligned}$$

Nakonec stačí spočítat, že pro každé p je $\det \sigma_p = 1$, z čehož plyne, že jde o izomorfismus. $\square$

Dále se nám bude hodit inverze tohoto automorfismu. Ta působí jako

$$h \mapsto (1-2p)h + 2pe + 2(1-p)f, \quad e \mapsto p(h-e+f), \quad f \mapsto (1-p) \left(h + \frac{p}{1-p}e - \frac{1-p}{p}f \right).$$

Lemma 3.5. Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ dimenze $N+1$ a $\mathcal{X}$ jeho báze. Definujme operátory $A, B \in \mathcal{L}(V)$ pomocí matic v bázi $\mathcal{X}$ jako

$$A^{\mathcal{X}} = \varphi_N(\sigma_p^{-1}(h)) = (1-2p)\varphi_N(h) + 2p\varphi_N(e) + 2(1-p)\varphi_N(f), \quad B^{\mathcal{X}} = \varphi_N(h), \quad (8)$$

kde pod φ_N máme na mysli reprezentaci $\mathfrak{sl}_2$ z věty 2.53. Pak existuje báze $\mathcal{Y}$ taková, že

$$A^{\mathcal{Y}} = \varphi_N(h), \quad B^{\mathcal{Y}} = \varphi_N(\sigma(h)) = (1-2p)\varphi_N(h) + 2(1-p)\varphi_N(e) + 2p\varphi_N(f). \quad (9)$$

Operátory A a B tak tvoří Leonardův pár.

Důkaz. Zobrazení $\varphi_N \circ \sigma_p$ je jistě, stejně jako samotné φ_N , ireducibilní reprezentace $\mathfrak{sl}_2$ do $\mathfrak{gl}_{N+1}$. Tyto reprezentace tedy podle věty 2.54 musejí být ekvivalentní, což znamená, že existuje izomorfismus na $\mathbb{C}^{N+1}$ splňující definici 2.52. Izomorfismy na $\mathbb{C}^{N+1}$ působí prostřednictvím regulárních matic, označíme-li tedy příslušnou regulární matici $\mathbb{P}$, můžeme psát

$$\begin{aligned} A^{\mathcal{X}} \mathbb{P} &= \varphi_N(\sigma_p^{-1}(h)) \mathbb{P} = \mathbb{P} \varphi_N(h) = \mathbb{P} B^{\mathcal{X}}, \\ B^{\mathcal{X}} \mathbb{P} &= \varphi_N(h) \mathbb{P} = \mathbb{P} \varphi_N(\sigma_p(h)) = \mathbb{P} A^{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

Matici $\mathbb{P}$ stačí interpretovat jako matici přechodu od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$. $\square$

Tvrzení 3.6. Při označení z tvrzení a důkazu předchozího lemmatu a při volbě $\mathbb{P}_{00} = 1$ platí

$$\mathbb{P}_{jk} = \binom{N}{j} K_j(k; p, N). \quad (10)$$

Věta 3.3 nám říká, že takto definované polynomy určitě budou ortogonální. Nyní ukážeme, že se jejich vlastnosti shodují s vlastnostmi Kravčukových polynomů. Kravčukovy polynomy s parametry p a N budeme dále značit zkráceně pouze $K_j(x)$.

Pro přehlednost si vypíšeme posloupnosti odpovídající Leonardovu páru podle označení z věty 3.3

$$a_j = 2(1-p)(N-j+1), \quad b_j = 2p(j+1), \quad c_j = (1-2p)(N-2j), \quad d_k = N-2k,$$

$$\tilde{a}_k = 2(1-p)k, \quad \tilde{b}_k = 2p(N-k), \quad \tilde{c}_k = (1-2p)(N-2k), \quad \tilde{d}_j = N-2j.$$

Dosazením do (4) a vydělením $2\binom{N}{j}$ získáme relaci rekurence

$$(1-p)jK_{j-1}(x) - (pN+j-2pj)K_j(x) + p(N-j)K_{j+1}(x) = -xK_j(x),$$

která již odpovídá rekurenci (26), kap. 2.

Dosazením do (5) a vydělením dvěma dostaneme rovnici

$$(1-p)kK_j(k-1) - (k+pN-2pk)K_j(k) + p(N-k)K_j(k+1) = (N-2j)K_j(k),$$

která odpovídá diferenční rovnici (27), kap. 2.

Nakonec zkonstruujeme kladnou váhovou posloupnost a posloupnost h_n (přičemž do jedné z nich je potřeba promítnout změnu normování)

$$w_k = \prod_{j=1}^k \frac{p(N-j+1)}{(1-p)j} = \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \binom{N}{k},$$

$$h_n = \binom{N}{n}^{-2} \left(\sum_{k=0}^N \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \binom{N}{k} \right) \cdot \prod_{j=1}^n \frac{(1-p)(N-j+1)}{pj} = \binom{N}{n}^{-1} (1-p)^{n-N} p^{-n}.$$

Dosazením se tedy můžeme přesvědčit, že rekurentní relace i diferenční rovnice budou vycházet v souladu se vzorci pro q -Racahovy polynomy.

Vynásobením výsledné relace ortogonality $(1-p)^N$ dostaneme tvar (25), kap. 2. Jestliže $p \in (0, 1)$, je daný skalární součin pozitivně definitní. V celém výpočtu však stačilo předpokládat pouze $p \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

3.3 Algebra $U'_q(\mathfrak{so}_3)$ a q -Racahovy polynomy

V našich výpočtech nyní budeme uvažovat, že q není kořen jedničky (tj. q nemusí nutně ležet v intervalu $(0, 1)$).

Lemma 3.7. Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ dimenze $N+1$ a $\mathcal{X}$ jeho báze. Definujeme operátory $A, B \in \mathcal{L}(V)$ působením na bázi $\mathcal{X}$ jako

$$Ax_k = \varphi(I_2)x_k = \frac{iq^{1/2}}{q^{-M+k} + q^{M-k}} (q^{M-k}[k]_q x_{k-1} + q^{-M+k}[N-k]_q x_{k+1}), \quad (11)$$

$$Bx_k = \varphi(I_3)x_k = i[-M+k]_q x_k, \quad (12)$$

kde φ je reprezentace $U'_q(\mathfrak{so}_3)$ z věty 2.72. Pak existuje báze $\mathcal{Y}$, kde operátory A a B působí jako

$$Ay_k = \vartheta\varphi(I_3)\vartheta^{-1} = i[-M+k]_q y_k, \quad (13)$$

$$By_k = \vartheta\varphi(I_1)\vartheta^{-1} = \frac{1}{q^{-M+k} + q^{M-k}}(-[k]_q y_{k-1} + [N-k]_q y_{k+1}), \quad (14)$$

kde $\vartheta: x_j \mapsto y_j$. Operátory A a B tak tvoří Leonardův pár.

Důkaz. Tentokrát využijeme cyklického automorfismu ϱ :

$$I_1 \mapsto I_2, \quad I_2 \mapsto I_3, \quad I_3 \mapsto I_1.$$

Opět platí, že $\varphi \circ \sigma$ je stejně jako φ ireducibilní klasická reprezentace, která tedy musí být izomorfní s φ . Existuje tedy izomorfismus ϑ na V splňující

$$\varphi(I_2)\vartheta = \vartheta\varphi(\sigma(I_2)) = \vartheta\varphi(I_3), \quad \varphi(I_3)\vartheta = \vartheta\varphi(\sigma(I_3)) = \vartheta\varphi(I_1).$$

Nakonec stačí bázi $\mathcal{Y}$ definovat jako $y_j = \vartheta(x_j)$. □

Tvrzení 3.8. Leonardův pár z předchozího lemmatu odpovídá q -Racahovým polynomům s parametry

$$\alpha = \beta = -\gamma = -\delta = iq^{\frac{-N-1}{2}} \quad (15)$$

prostřednictvím korespondence

$$\mathbb{P}_{jk} = r_j(-i)^k R_j(\mu(k)), \quad \text{kde} \quad r_j = \frac{(q^{-N}, -q^{-N}; q)_j}{(q, -q; q)_j} \frac{1 + q^{-N+2j}}{1 + q^{-N}} q^{\frac{j}{2}(N+j)}. \quad (16)$$

Opět vypíšeme konstanty odpovídající Leonardovu páru

$$a_j = \frac{iq^{-M+j-1/2}[N-j+1]_q}{q^{-M+j-1} + q^{M-j+1}}, \quad b_j = \frac{iq^{M-j-1/2}[j+1]_q}{q^{-M+j-1} + q^{M-j+1}}, \quad c_j = 0, \quad d_k = i[-M+k]_q,$$

$$\tilde{a}_k = \frac{-[k]_q}{q^{-M+k} + q^{M-k}}, \quad \tilde{b}_k = \frac{[N-k]_q}{q^{-M+k} + q^{M-k}}, \quad \tilde{c}_k = 0, \quad \tilde{d}_j = i[-M+j]_q.$$

Protože platí

$$d_k = \frac{-iq^M}{q - q^{-1}}\mu(k) \quad \text{a} \quad \tilde{a}_k - \tilde{b}_k = i\tilde{d}_0,$$

což odpovídá podmínkám (1) a (2), víme podle věty 3.3, že jsme takto definovali posloupnost ortogonálních vektorů a můžeme získat jejich vlastnosti. Relace rekurence vyjde

$$-(q^{-N+x} - q^{-x})R_j(\mu(x)) = \frac{-q^{-N}(1 - q^{2j})}{1 + q^{-N+2j}}R_{j-1}(\mu(x)) + \frac{1 - q^{-2N+2j}}{1 + q^{-N+2j}}R_{j+1}(\mu(x)),$$

diferenční rovnice v diskretních bodech

$$-(q^{-N+j} - q^{-j})R_j(\mu(k)) = \frac{-q^{-N}(1 - q^{2k})}{1 + q^{-N+2k}}R_j(\mu(k-1)) + \frac{1 - q^{2N-2k}}{1 + q^{-N+2k}}R_j(\mu(k+1))$$

a relace ortogonalit

$$\sum_{k=0}^N \frac{(q^{-N}, -q^{-N}; q)_k}{(q, -q; q)_k} \frac{1 + q^{-N+2k}}{(-q^{-N})^k(1 + q^{-N})} R_j(\mu(k)) R_l(\mu(k)) = h_j \delta_{jl}.$$

Uvedené relace odpovídají obecným vzorcům (32), (35) a (31), kap. 2. Pro q kladné, různé od jedničky jsou koeficienty v relaci ortogonalit kladné, a tedy určují pozitivně definitní momentový funkcionál.

Nyní prozkoumejme polynomy, které vzejdou z neklasické reprezentace algebry $U'_q(\mathfrak{so}_3)$. Ukáže se, že pouze pro jednu z neklasických reprezentací se přejde použitím rotačního automorfismu do téže reprezentace.

Lemma 3.9. Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ dimenze $N+1$ a $\mathcal{X}$ jeho báze. Definujeme operátory $A, B \in \mathcal{L}(V)$ působením na bázi $\mathcal{X}$ jako

$$Ax_k = \varphi_{1,-1}(I_2)x_k = \frac{1}{q^{-N+k-1/2} - q^{N-k+1/2}}(q^{N-k+1}[k]_q x_{k-1} - q^{-N+k}[2N-k+1]_q x_{k+1}), \quad (17)$$

$$Bx_k = \varphi_{1,-1}(I_3)x_k = \frac{q^{-N+k-1/2} + q^{N-k+1/2}}{q - q^{-1}}x_k, \quad (18)$$

kde $\varphi_{\varepsilon, \varepsilon'}$ je reprezentace $U'_q(\mathfrak{so}_3)$ z věty 2.73 a značíme $x_{N+1} = -x_N$, $x_{-1} = 0$. Pak existuje báze $\mathcal{Y}$, kde operátory A a B působí jako

$$Ay_k = \vartheta \varphi_{1,-1}(I_3)\vartheta^{-1} = \frac{q^{-N+k-1/2} + q^{N-k+1/2}}{q - q^{-1}}y_k, \quad (19)$$

$$By_k = \vartheta \varphi_{1,-1}(I_1)\vartheta^{-1} = \frac{1}{q^{-N+k-1/2} - q^{N-k+1/2}}([k]_q y_{k-1} - [2N-k+1]_q y_{k+1}) \quad (20)$$

kde $\vartheta: x_j \mapsto y_j$. Operátory A a B tak tvoří Leonardův pár.

Důkaz. Opět využijeme rotačního automorfismu ϱ

$$I_1 \mapsto I_2, \quad I_2 \mapsto I_3, \quad I_3 \mapsto I_1.$$

Ukážeme-li, že $\varphi_{1,-1} \circ \sigma$ je izomorfní s $\varphi_{1,-1}$, bude tvrzení lemmatu plynout ze stejného důvodu jako u analogického 3.7. Využijeme zde lemmatu 2.74. Díky němu snadno ověříme

$$\mathrm{Tr}(\varphi_{1,-1} \circ \sigma)(I_2) = \mathrm{Tr} \varphi_{1,-1}(I_3) = \mathrm{Tr} \varphi_{1,-1}(I_2),$$

$$\mathrm{Tr}(\varphi_{1,-1} \circ \sigma)(I_3) = \mathrm{Tr} \varphi_{1,-1}(I_1) = \mathrm{Tr} \varphi_{1,-1}(I_3).$$

Podle poznámky před lemmatem 2.74 to už stačí, abychom usoudili, že jsou uvažované dvě reprezentace izomorfní. $\square$

Tvrzení 3.10. Leonardův pár z předchozího lemmatu odpovídá q -Racahovým polynomům s parametry

$$\alpha = \beta = -\gamma = -\delta = -q^{-N-1} \quad (21)$$

prostřednictvím korespondence

$$\mathbb{P}_{jk} = r_j R_j(\mu(k)), \quad r_j = \frac{(q^{-2N-1}, -q^{-2N-1}; q)_j}{(q, -q; q)_j} \frac{1 - q^{-2N-1+2j}}{1 - q^{-2N-1}} q^{\frac{j}{2}(2N+1+j)}. \quad (22)$$

Vypíšme opět ony důležité konstanty určené Leonardovým párem:

$$a_0 = \tilde{a}_0 = b_N = \tilde{b}_N = 0, \quad c_N = \tilde{c}_N = \frac{[N+1]_q}{q^{1/2} - q^{-1/2}}$$

a pro ostatní indexy

$$a_j = \frac{-q^{-N+j-1}[2N-j+2]_q}{q^{-N+j-3/2} - q^{N-j+3/2}}, \quad b_j = \frac{q^{N-j}[j+1]_q}{q^{-N+j+1/2} - q^{N-j-1/2}}, \quad c_j = 0,$$

$$\tilde{a}_k = \frac{[k]_q}{q^{-N+k-1/2} - q^{N-k+1/2}}, \quad \tilde{b}_k = \frac{-[2N-k+1]_q}{q^{-N+k-1/2} - q^{N-k+1/2}}, \quad \tilde{c}_k = 0,$$

$$d_j = \tilde{d}_j = \frac{q^{-N+j-1/2} + q^{N-j+1/2}}{q - q^{-1}}.$$

Není těžké ověřit, že platí

$$d_k = \frac{q^{N+1/2}}{q - q^{-1}} \mu(k), \quad \tilde{a}_k + \tilde{c}_k + \tilde{b}_k = \tilde{d}_0,$$

je tedy jasné, že jsme takto definovali posloupnost ortogonálních polynomů. Dál můžeme psát zjištěné relace.

Relace rekurence

$$(q^{-x} + q^{-2N-1+x})R_j(\mu(x)) = \frac{q^{-2N-1}(1 - q^{2j})}{1 - q^{-2N-1+2j}} R_{j-1}(\mu(x)) + \frac{1 - q^{-4N-2+2j}}{1 - q^{-2N-1+2j}} R_{j+1}(\mu(x))$$

diferenční rovnice v bodech $k \in \{0, \dots, N-1\}$ vyjde

$$(q^{-j} + q^{-2N-1+j})R_j(\mu(k)) = \frac{q^{-2N-1}(1 - q^{2k})}{1 - q^{-2N-1+2k}} R_j(\mu(k-1)) + \frac{1 - q^{-4N-2+2k}}{1 - q^{-2N-1+2k}} R_j(\mu(k+1))$$

a pro $k = N$

$$(q^{-j} + q^{-2N-1+j})R_j(\mu(N)) = \frac{q^{-2N-1}(1 - q^{2N})}{1 - q^{-1}} R_j(\mu(N-1)) + \frac{1 - q^{-2N-2}}{1 - q^{-1}} R_j(\mu(N))$$

a relace ortogonality

$$\sum_{k=0}^N \frac{(q^{-2N-1}, -q^{-2N-1}; q)_k}{(q, -q; q)_k} \frac{1 - q^{-2N-1+2k}}{(q^{-2N-1})^k (1 - q^{-2N-1})} R_j(\mu(k)) R_l(\mu(k)) = h_j \delta_{jl}.$$

Momentový funkcionál určený touto relací ortogonalit je na rozdíl od předchozího případu pozitivně definitní pro záporná q . Všechny vzorce opět vycházejí ve shodě s těmi obecnými. Ani „anomálie“ u diferenční rovnice není ve sporu s obecnými vzorci, neboť pro q -Racahovy polynomy s takto zvolenými parametry je $R_j(\mu(N)) = R_j(\mu(N+1))$.

Kapitola 4

Askeyova–Wilsonova algebra

Definice 4.1. Askeyova–Wilsonova algebra $AW_q(A_1, A_2, A_3)$ je komplexní asociativní algebra generovaná třemi elementy I_1, I_2, I_3 a relacemi

$$q^{1/2}I_1I_2 - q^{-1/2}I_2I_1 = I_3 + A_3, \quad (1)$$

$$q^{1/2}I_2I_3 - q^{-1/2}I_3I_2 = I_1 + A_1, \quad (2)$$

$$q^{1/2}I_3I_1 - q^{-1/2}I_1I_3 = I_2 + A_2, \quad (3)$$

kde čísla A_1, A_2 a A_3 jsou komplexní parametry. Značení budeme většinou zkracovat a psát pouze AW.

Definici Askeyovy–Wilsonovy algebru přednesl Alexej Žedanov v článku [2], kde rovněž přednesl tzv. žebříkovou reprezentaci. Později Paul Terwilliger v [17] přednesl tzv. *univerzální* Askeyovu–Wilsonovu algebru, která je rovněž definována pomocí třech generujících prvků, které splňují stejné komutační relace, ale o A_1, A_2 a A_3 se nepředpokládá, že jsou to komplexní parametry, nýbrž prvky centra dané algeby.

Článek [17] dále pojednává o okruhových vlastnostech univerzální Askeyovy–Wilsonovy algeby a klasifikaci reprezentací ponechává stranou. Ta byla provedena později v [3]. Reprezentace byly nalezeny pomocí surjektivního homomorfismu algeby $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Nám se však nezávisle podařilo klasifikovat reprezentace původní Askeyovy–Wilsonovy algeby splňující jisté požadavky stejným způsobem jako v případě algeby $U'_q(\mathfrak{so}_3)$ v článku [5].

Poznámka 4.2. Abychom dosáhli co největší podobnosti s algebrou $U'_q(\mathfrak{so}_3)$, přednesli jsme jinou prezentaci Askeyovy–Wilsonovy algeby než se vyskytuje ve zmíněných pracích. Naše definice 4.1 odpovídá definici z [2] s generátory K_0, K_1 a K_2 a parametry B, C_0, C_1, D_0, D_1 a ω prostřednictvím izomorfismu

$$I_1 = \frac{K_0}{\sqrt{C_1}}, \quad I_2 = \frac{K_1}{\sqrt{C_0}}, \quad I_3 = \frac{K_2}{\sqrt{C_0C_1}} - \frac{B}{\sqrt{C_0C_1}(q^{1/2} - q^{-1/2})},$$

$$A_1 = \frac{D_0}{C_0\sqrt{C_1}}, \quad A_2 = \frac{D_1}{C_1\sqrt{C_0}}, \quad A_3 = \frac{B}{\sqrt{C_0C_1}(q^{1/2} - q^{-1/2})}, \quad q = e^{2\omega}.$$

Definici z [17] s generátory A, B a C a parametry a, b, c a $\tilde{q} = q^{1/2}$ prostřednictvím izomorfismu

$$I_1 = -\frac{1}{q - q^{-1}}A, \quad I_2 = -\frac{1}{q - q^{-1}}B, \quad I_3 = -\frac{1}{q - q^{-1}}C$$

$$A_1 = \frac{1}{q - q^{-1}} \frac{a}{q^{1/2} + q^{-1/2}}, \quad A_2 = \frac{1}{q - q^{-1}} \frac{b}{q^{1/2} + q^{-1/2}}, \quad A_3 = \frac{1}{q - q^{-1}} \frac{c}{q^{1/2} + q^{-1/2}}.$$

Věta 4.3. Množina uspořádaných monomů $\{I_1^k I_2^m I_3^n \mid k, m, n \in \mathbb{N}_0\}$ tvoří v bázi AW.

Důkaz. Použijeme diamantové lemma 2.60. Upravíme generující relace do tvaru kompatibilního s lexikografickým uspořádáním

$$\begin{aligned} I_2 I_1 &= q I_1 I_2 - q^{1/2} (I_3 + A_3), \\ I_3 I_2 &= q I_2 I_3 - q^{1/2} (I_1 + A_1), \\ I_3 I_1 &= q^{-1} I_1 I_3 + q^{-1/2} (I_2 + A_2). \end{aligned}$$

Vidíme, že se mezi levými stranami neobjevují žádné inkluzní nejednoznačnosti a objevuje se pouze jedna překryvná nejednoznačnost – monom $I_3 I_2 I_1$ lze redukovat buď pomocí první nebo pomocí druhé relace. Ukážeme, že je tato nejednoznačnost řešitelná.

Upravíme nejprve jedním způsobem

$$\begin{aligned} I_3 I_2 I_1 &= q I_3 I_1 I_2 - q^{1/2} I_3 (I_3 + A_3) = I_1 I_3 I_2 + q^{1/2} (I_2 (I_2 + A_2) - I_3 (I_3 + A_3)) \\ &= q I_1 I_2 I_3 + q^{1/2} (-I_1 (I_1 + A_1) + I_2 (I_2 + A_2) - I_3 (I_3 + A_3)), \end{aligned}$$

a následně druhým

$$\begin{aligned} &= q I_2 I_3 I_1 - q^{1/2} I_3 (I_1 + A_1) = I_2 I_1 I_3 + q^{1/2} (-I_1 (I_1 + A_1) + I_2 (I_2 + A_2)) \\ &= q I_1 I_2 I_3 + q^{1/2} (-I_1 (I_1 + A_1) + I_2 (I_2 + A_2) - I_3 (I_3 + A_3)). \end{aligned}$$

Oba dávají tentýž výsledek, nejednoznačnost je tedy skutečně řešitelná.

Nakonec je vidět, že množina uspořádaných monomů opravdu odpovídá množině redukovaných monomů (kdyby se kdekoli vyskytla nějaká „neuspořádanost“, šlo by ji upravit pomocí jedné z generujících relací). Tím jsme větu dokázali. $\square$

Z obecných vlastností AW se nám ještě budou hodit některé izomorfismy mezi Askeyovými–Wilsonovými algebrami s různými parametry. V případě univerzální Askeyovy–Wilsonovy algebry se jedná o automorfismy.

Lemma 4.4. Mezi Askey–Wilsonovými algebrami existují následující izomorfismy

$$\varrho: \text{AW}_q(A_1, A_2, A_3) \rightarrow \text{AW}_q(A_2, A_3, A_1), \quad I_1 \mapsto I_2, \quad I_2 \mapsto I_3, \quad I_3 \mapsto I_1,$$

$$\sigma: \text{AW}_q(A_1, A_2, A_3) \rightarrow \text{AW}_q(A_2, A_1, A_3),$$

$$I_1 \mapsto I_2, \quad I_2 \mapsto I_1, \quad I_3 \mapsto I_3 + (I_2 I_1 - I_1 I_2)(q^{1/2} + q^{-1/2}),$$

$$\tau_{\varepsilon, \varepsilon'}: \text{AW}_q(A_1, A_2, A_3) \rightarrow \text{AW}_q(\varepsilon A_1, \varepsilon' A_2, \varepsilon \varepsilon' A_3), \quad I_1 \mapsto \varepsilon I_1, \quad I_2 \mapsto \varepsilon' I_2, \quad I_3 \mapsto \varepsilon \varepsilon' I_3,$$

kde $\varepsilon, \varepsilon' \in \{1, -1\}$.

4.1 Klasifikace konečněrozměrných reprezentací AW

Lemma 4.5. Lineární kombinace

$$C = q^2 I_1^2 + I_2^2 + q^2 I_3^2 - (q^{5/2} - q^{1/2}) I_1 I_2 I_3 + q(q+1) A_1 I_1 + (q+1) A_2 I_2 + q(q+1) A_3 I_3 \quad (4)$$

je prvkem centra AW.

Důkaz. Je možné ověřit dosazením. $\square$

Prvek C budeme dále nazývat *Casimirův element* algebry AW.

Definice 4.6. Pro vhodná komplexní čísla λ označme O_λ a R_λ následující lineární kombinace

$$O_\lambda := \frac{-iq^{1/2}A_1 + q^{-\lambda}A_2}{[\lambda]_q([\lambda]_q - [\lambda + 1]_q)} I_3 + iI_2 + q^{-\lambda+1/2}I_1, \quad (5)$$

$$R_\lambda := \frac{-iq^{1/2}A_1 - q^\lambda A_2}{[\lambda]_q([\lambda]_q - [\lambda - 1]_q)} I_3 + iI_2 - q^{\lambda+1/2}I_1. \quad (6)$$

V případě $A_1 = A_2 = 0$ tuto definici uvažujeme bez prvního členu a předpokládáme $\lambda \in \mathbb{C}$ libovolné. Jinak požadujeme, aby měl výraz smysl, tedy $[\lambda]_q \neq [\lambda + 1]_q$, respektive $[\lambda]_q \neq [\lambda - 1]_q$.

Budeme-li v dalším textu uvažovat nějakou reprezentaci R algebry AW na vektorovém prostoru V , budeme zobrazení $R(I_1)$, $R(I_2)$ a $R(I_3)$ obvykle značit pouze I_1 , I_2 a I_3 .

Lemma 4.7. Buď R reprezentace AW na V . Nechť $x \in \ker(I_3 + i[\lambda]_q)$ pro nějaké $q \in \mathbb{C}$. Pak

$$I_3(O_\lambda x) = -i[\lambda + 1]_q O_\lambda x, \quad (7)$$

$$I_3(R_\lambda x) = -i[\lambda - 1]_q R_\lambda x, \quad (8)$$

$$O_{\lambda-1}R_\lambda x = (\tilde{C}_{\lambda-1} - C)x, \quad (9)$$

$$R_{\lambda+1}O_\lambda x = (\tilde{C}_\lambda - C)x, \quad (10)$$

kde C je Casimirův element (4) a

$$\tilde{C}_\lambda = -q[\lambda]_q[\lambda + 1]_q - iq([\lambda]_q + [\lambda + 1]_q)A_3 - q \frac{A_1^2 + i(q^{-\lambda-1/2} - q^{\lambda+1/2})A_1A_2 + A_2^2}{([\lambda]_q - [\lambda + 1]_q)^2}.$$

Důkaz. Dosazením s využitím q -komutačních relací (1)–(3). $\square$

Lemma 4.8. Buďte $y, z \in V$ a $\lambda \in \mathbb{C}$ takové, že O_λ i R_λ jsou dobře definovány. Systém lineárních rovnic

$$O_\lambda x = y, \quad R_\lambda x = z$$

má pro vektory I_1x a I_2x jednoznačné řešení, právě když $q^\lambda \neq i\varepsilon$ pro $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Důkaz. Z rovnic (5) a (6) snadno vyjádříme $(q^{-\lambda} + q^\lambda)I_1x$. Faktor v závorce je nenulový právě tehdy, když $q^\lambda \neq i\varepsilon$. Stejně je tomu s vyjádřením I_2x . $\square$

Nyní uvážíme obecnou reprezentaci Askey–Wilsonovy algebry, zkonstruujeme bázi, ve které I_3 působí diagonálně a pokusíme se napsat explicitní tvary takto vzniklých reprezentací. Konstrukce báze je analogií věty 3 z [5], kde je totéž provedeno pro algebru $U'_q(\mathfrak{so}_3)$. Pro provedení této konstrukce je nutné o dané reprezentaci předpokládat, že $2\varepsilon/(q - q^{-1})$ pro $\varepsilon = \pm 1$ není vlastním číslem I_3 . Pro algebru $U'_q(\mathfrak{so}_3)$ lze dokázat (věta 2 v [5]), že je tento předpoklad splněn pro libovolnou ireducibilní reprezentaci. V poznámce 4.18 však ukážeme, že pro obecnou algebru AW takové reprezentace mohou existovat. Zde je navíc nutné předpokládat, že $\varepsilon/(q^{1/2} - q^{-1/2})$ není ve spektru I_3 , aby bylo možné použít posunovací operátory R_λ a O_λ . V případě $A_1 = A_2 = 0$, který rozebereme zvlášť, tento předpoklad nutný není a uvidíme, že reprezentace, které tento předpoklad nesplňují, také existují.

Reprezentace splňující oba uvedené předpoklady budeme ve shodě s [5] nazývat *klasické*, zatímco ty, které splňují pouze první, ale ne druhý nazveme *neklasické*. Neklasické reprezentace se vyznačují tím, že neumožňují provést limitu $q \rightarrow 1$ (hodnota vlastního čísla $\varepsilon/(q^{1/2} - q^{-1/2})$ by divergovala).

4.1.1 Obecné reprezentace

Věta 4.9. Buď R ireducibilní klasická (tj. splňující $\ker(I_3 - 2\varepsilon/(q - q^{-1})) = \{0\}$ a $\ker(I_3 - \varepsilon/(q^{1/2} - q^{-1/2})) \neq \{0\}$ pro $\varepsilon = \pm 1$) reprezentace $AW_q(A_1, A_2, A_3)$ na V , $\dim V = r$. Pak existuje komplexní číslo μ a nenulový vektor $v_0 \in \ker(I_3 + i[\mu]_q)$ takový, že $O_\mu v_0 = 0$ a definujeme-li

$$v_{j+1} := R_{\mu-j} v_j \quad \text{pro } j = 0, 1, \dots, r-1,$$

bude soubor $(v_0, \dots, v_{r-1})$ tvořit bázi V .

Důkaz. Necht w_0 je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $-i[\tilde{\mu}]_q$, přičemž $\tilde{\mu}$ volíme tak, že čísla $-i[\tilde{\mu}]_q, -i[\tilde{\mu}+1]_q, \dots$ jsou vzájemně různá (viz lemma 2.21). Definujme nyní

$$w_{j+1} := O_{\tilde{\mu}+j} w_j \quad \text{pro } j \geq 0$$

a označme $l \in \mathbb{N}$ takové, že $w_0, \dots, w_{l-1}$ jsou lineárně nezávislé, ale w_l je na nich již lineárně závislý. Takové l jistě existuje, neboť V má konečnou dimenzi. Z rovnice (7) plyne, že vektory w_j splňují rovnici na vlastní čísla $I_3 w_j = -i[\tilde{\mu}+j]_q w_j$, přičemž vlastní čísla jsou vzájemně různá. Protože vlastní vektory příslušné vzájemně různým vlastním číslům musejí být lineárně nezávislé, musí platit $w_l = 0$.

Označme $v_0 := w_{l-1}$ a $\mu := \tilde{\mu} + l - 1$ a definujme vektory

$$v_{j+1} := R_{\mu-j} v_j \quad \text{pro } j \geq 0. \quad (11)$$

Z rovnice (8) plyne, že opět musejí splňovat rovnice na vlastní čísla

$$I_3 v_j = -i[\mu-j]_q v_j. \quad (12)$$

Možnost, kdy $[\mu-j]_q = [\mu-j-1]_q$ pro nějaké j , a tedy $R_{\mu-j}$ není definovaný, je v rozporu s předpoklady. Ta totiž znamená $q^\mu = i\varepsilon q^{j-1/2}$ a pak by bylo $-i[\mu-j]_q = \varepsilon/(q^{1/2} - q^{-1/2})$ prvkem spektra I_3 . Opět můžeme označit $k \in \mathbb{N}$ takové, že soubor $v_0, \dots, v_{k-1}$ je lineárně nezávislý, ovšem v_k je na těchto vektorech již lineárně závislý. Z rovnice (9) pak pro $j = 1, 2, \dots, k-1$ plyne

$$O_{\mu-j} v_j = O_{\mu-j} R_{\mu-j+1} v_{j-1} = (\tilde{C}_{\mu-j} - C) v_{j-1}, \quad O_\mu v_0 = y_l = 0. \quad (13)$$

Protože uvažujeme ireducibilní reprezentaci, je podle lemmatu 2.69 Casimirův operátor C násobkem jednotky. Toto komplexní číslo budeme rovněž značit C . Jeho hodnotu nám udává rovnost $0 = R_{\mu+1} O_\mu v_0 = (\tilde{C}_\mu - C) v_0$, tedy $C = \tilde{C}_\mu$.

Rovnice (11) a (13) nám udávají soustavu

$$R_{\mu-j} v_j = v_{j+1}, \quad O_{\mu-j} v_j = (\tilde{C}_{\mu-j} - C) v_{j-1}, \quad (14)$$

která má podle lemmatu 4.8 pro $I_1 v_j$ a $I_2 v_j$ řešení, právě když $q^{\mu-j} \neq i\varepsilon$ pro $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Tato podmínka je splněna dle předpokladů, neboť jinak by $[\mu-j]_q = 2\varepsilon/(q - q^{-1})$ bylo vlastní číslo I_3 příslušné vektoru v_j . Vektory $I_1 v_j$ a $I_2 v_j$ jsme tak vyjádřili jako lineární kombinace $v_0, \dots, v_{k-1}$. Protože navíc I_3 působí diagonálně, znamená to, že lineární obal $\{v_0, \dots, v_{k-1}\}$ je invariantní podprostor a z ireducibility uvažované reprezentace to tedy musí být celé V . $\square$

Lemma 4.10. V libovolné r -rozměrné klasické ireducibilní reprezentaci je operátor I_3 diagonalizovatelný a má vzájemně různá vlastní čísla, jimž podle značení z předchozí věty přísluší vlastní vektory $v_0, \dots, v_{r-1}$. Platí navíc, že pro každé $l \in \{0, \dots, 2r-1\}$ a $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ je $q^\mu \neq i\varepsilon q^{l/2}$. Vektor $v_r = R_{\mu-r+1} v_{r-1}$ je nulový.

Důkaz. Rovnost $[\mu - j]_q = [\mu - k]_q$ pro nějaké $j, k \in \{0, \dots, r\}$ nastane podle lemmatu 2.21 právě tehdy, když $q^\mu = i\varepsilon q^{(k+j)/2}$. Kdyby nastala pro $k + j$ sudé, znamenalo by to, že $-i[\mu - (k + j)/2]_q = \varepsilon/(q - q^{-1})$ je ve spektru I_3 , což je proti předpokladům. Kdyby nastala pro $k + j$ liché, znamenalo by to, že $-i[\mu - (k + j - 1)/2]_q = \varepsilon/(q^{1/2} - q^{-1/2})$ je ve spektru I_3 , což je taktéž proti předpokladům. Nemůže tedy být $q^\mu = i\varepsilon q^{l/2}$ a vlastní čísla I_3 musejí být vzájemně různá.

Vektor v_r může být buď nulový, nebo vlastní I_3 příslušný vlastnímu číslu $-i[\mu - r]_q$, to je však vyloučeno, neboť v_r je závislý na předchozích vektorech a $-i[\mu - r]_q$ se nerovná žádnému z vlastních čísel příslušných předchozím vektorům. Proto je $v_r = 0$. $\square$

V dalším textu budeme stále uvažovat předpoklady věty 4.9. Často se budou vyskytovat rozdíly či součiny po sobě jdoucích q -čísel. Pro další práci tak můžeme odvodit různé vztahy:

$$\begin{aligned} ([\lambda + 1]_q \pm [\lambda]_q)(q^{1/2} \mp q^{-1/2}) &= q^{\lambda+1/2} \mp q^{-\lambda-1/2}, \\ [\lambda]_q[\lambda + 1]_q &= \frac{([\lambda]_q + [\lambda + 1]_q)^2 - 1}{(q^{1/2} + q^{-1/2})^2}, \\ ([\lambda]_q - [\lambda + 1]_q)^2 &= ([\lambda]_q + [\lambda + 1]_q)^2 \frac{(q^{1/2} - q^{-1/2})^2}{(q^{1/2} + q^{-1/2})^2} + \frac{4}{(q^{1/2} + q^{-1/2})^2}. \end{aligned}$$

Při vyšetřování jednotlivých reprezentací bude vždy hrát důležitou roli rozdíl $\tilde{D}_j := \tilde{C}_\mu - \tilde{C}_{\mu-j}$. Označme dále

$$\Lambda_j := [\mu - j + 1]_q + [\mu - j]_q = \frac{q^{\mu-j+1/2} - q^{-\mu+j-1/2}}{(q^{1/2} - q^{-1/2})}, \quad (15)$$

$$g_j := [\mu - j + 1]_q - [\mu - j]_q = \frac{q^{\mu-j+1/2} + q^{-\mu+j-1/2}}{(q^{1/2} + q^{-1/2})}. \quad (16)$$

S použitím výše uvedených vztahů a definice $\tilde{C}_\mu$ vidíme, že $\tilde{D}_j g_j^2$ je polynom čtvrtého stupně v proměnné Λ_j . Kořeny tohoto polynomu pak určují tvar reprezentace algebry, proto bychom jej mohli nazvat *charakteristickým polynomem* algebry $\text{AW}_q(A_1, A_2, A_3)$. (Podobně je definován charakteristický polynom této algebry také v [2].) Z definice $\tilde{D}_j$ je jasné, že $\tilde{D}_0 = 0$; jedním z kořenů charakteristického polynomu je tedy Λ_0 .

Vyřešením soustavy (14) a následnou úpravou získáme

$$I_1 v_j = \frac{-q^{-1/2}}{q^{-\mu+j} + q^{\mu-j}} (\tilde{D}_j v_{j-1} + v_{j+1}) - \frac{A_1 - i[\mu - j]_q A_2 (q^{1/2} - q^{-1/2})}{g_j g_{j+1}} v_j, \quad (17)$$

$$I_2 v_j = \frac{i}{q^{-\mu+j} + q^{\mu-j}} (q^{\mu-j} \tilde{D}_j v_{j-1} - q^{-\mu+j} v_{j+1}) - \frac{-i[\mu - j]_q A_1 (q^{1/2} - q^{-1/2}) + A_2}{g_j g_{j+1}} v_j, \quad (18)$$

Označme $\Lambda_{j_0}, \dots, \Lambda_{j_3}$ kořeny charakteristického polynomu a zvolme $j_0 = 0$. Charakteristický polynom pak můžeme rozložit na kořenové činitele. Protože snadno zjistíme koeficient u nejvyšší mocniny charakteristického polynomu, můžeme psát

$$\begin{aligned} \tilde{D}_j &= \frac{q(q^{1/2} - q^{-1/2})^2}{(q^{1/2} + q^{-1/2})^4} \frac{\prod_{k=0}^3 (\Lambda_j - \Lambda_{j_k})}{g_j^2} \\ &= q \frac{\prod_{k=0}^3 (q^{\mu-j+1/2} - q^{-\mu+j-1/2} - q^{\mu-j_k+1/2} + q^{-\mu+j_k-1/2})}{(q - q^{-1})^2 (q^{\mu-j+1/2} + q^{-\mu+j-1/2})^2} \\ &= \frac{q^{2\mu-2j+2} \prod_{k=0}^3 ((1 - q^{j-j_k})(1 + q^{-2\mu+j+j_k-1}))}{(q - q^{-1})^2 (1 + q^{-2\mu+2j-1})^2} \end{aligned} \quad (19)$$

Lemma 4.11. V libovolné r -rozměrné klasické ireducibilní reprezentaci jsou Λ_0 a Λ_r různé kořeny charakteristického polynomu. Pro žádné $k \in \{1, \dots, r-1\}$ není Λ_k kořenem charakteristického polynomu.

Důkaz. Je zřejmé, že $\tilde{D}_0 = 0$, tedy Λ_0 je kořenem. Dále je z tvarů reprezentace zřejmé, že kdyby bylo $\tilde{D}_k = 0$ pro $k \in \{1, \dots, r-1\}$, byl by lineární obal vektorů $v_k, \dots, v_{r-1}$ netriviálním invariantním podprostorem, což by byl spor s ireducibilitou reprezentace.

Dosazením (17), (18) a (12) do podmínky $(q^{1/2}I_1I_2 - q^{-1/2}I_2I_1 - I_3 - A_3)v_{r-1} = 0$ (relace (1)) získáme vztah

$$\frac{-iq^{-1}\tilde{D}_r}{q^{\mu-r+1} + q^{-\mu+r-1}}v_{r-1} = 0, \quad (20)$$

ze kterého plyne $\tilde{D}_r = 0$, tedy Λ_r je také kořenem charakteristického polynomu. Zbývá ukázat, že se nerovná Λ_0 .

Kdyby bylo $\Lambda_0 = \Lambda_r$, získáme úpravou s využitím, že q není odmocninou z jedné, tedy speciálně $q^r \neq 1$, rovnost $q^{2\mu+1} = -q^r$, tedy $q^\mu = i\varepsilon q^{(r-1)/2}$. To je ale vyloučeno podle lematu 4.10. $\square$

Tvar reprezentace pochopitelně určují parametry algebry A_1 , A_2 a A_3 , kromě toho však také ještě hodnota Casimirova elementu C , jež je určena číslem μ , respektive q^μ . Hodnotu q^μ nám nejednoznačně fixuje požadavek konečné dimenze $\tilde{D}_r = 0$. Jedná se vzhledem k proměnné q^μ o rovnici osmého stupně. Protože jsme vyloučili $\Lambda_r = \Lambda_0$, můžeme ji rozdílem $\Lambda_r - \Lambda_0$ vydělit. I poté nám však zbude těžko řešitelná rovnice šestého stupně. Možné hodnoty q^μ se tedy nebudeme pokoušet vyjadřovat.

Reprezentace s různým q^μ však mohou být ekvivalentní. Ukážeme, že pro algebru s danými parametry určuje jednoznačně třídu r -rozměrných ekvivalentních reprezentací číslo $[\mu - (r-1)/2]_q$.

Lemma 4.12. Buďte R_1 a R_2 klasické ireducibilní r -rozměrné reprezentace AW zkonstruované ve větě 4.9, $\{v_j^{(1)}\}$ a $\{v_j^{(2)}\}$ příslušné báze a μ_1 a μ_2 příslušná komplexní čísla charakterizující reprezentace. Pak jsou tyto reprezentace ekvivalentní, právě když $[\mu_1 - (r-1)/2]_q = [\mu_2 - (r-1)/2]_q$.

Důkaz. Stejně jako v případě $U'_q(\mathfrak{so}_3)$ (lemma 2.74) spočítáme stopu I_3

$$\text{Tr } I_3 = \sum_{j=0}^{r-1} -i[\mu - j]_q = -i \frac{q^{r/2} - q^{-r/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}} [\mu - (r-1)/2]_q.$$

Reprezentace s různým $[\mu - (r-1)/2]_q$ tedy mají různou stopu I_3 a nemohou být ekvivalentní.

Nechť naopak platí $[\mu_1 - (r-1)/2]_q = [\mu_2 - (r-1)/2]_q$. Rovnice $[\mu - (r-1)/2]_q = \text{Tr } I_3$ je pro $q^{\mu-(r-1)/2}$ kvadratická, a může mít tedy dvě řešení. Obecně platí $[\lambda]_q = -[-\lambda]_q$. Je-li tedy jedním řešením $q^{\mu_1-(r-1)/2}$, musí druhým být $q^{\mu_2-(r-1)/2} = -q^{-\mu_1+(r-1)/2}$. Z tohoto vztahu lze odvodit například

$$[\mu_1 - j]_q = [\mu_2 - r + 1 + j]_q, \quad q^{\mu_1-j} + q^{-\mu_1+j} = -(q^{\mu_2-r+1+j} + q^{-\mu_2+r-1-j}), \quad \Lambda_j^{(1)} = \Lambda_{r-j}^{(2)},$$

kde $\Lambda_j^{(1)}$ a $\Lambda_j^{(2)}$ odpovídají definici (15) pro μ_1 a μ_2 . Obdobně označíme i $\tilde{D}_j^{(1)}$ a $\tilde{D}_j^{(2)}$ a definujeme bázi $\{w_0, \dots, w_{r-1}\}$ rovnicí

$$v_j^{(2)} = \prod_{k=1}^j \tilde{D}_k^{(1)} \cdot w_{r-1-j}.$$

Dosazením do (17), (18) a (12) se můžeme přesvědčit, že reprezentace R_1 má v bázi $\{v_j^{(1)}\}$ stejné maticové elementy jako reprezentace R_2 v bázi $\{w_j\}$. $\square$

Pro ukázání souvislosti reprezentací s ortogonálními polynomy bude výhodnější vyjádřit reprezentaci v závislosti na číslech j_1 , j_2 a j_3 namísto parametrů algebry A_1 , A_2 a A_3 . Parametry algebry spolu s parametrem reprezentace q^μ nám již určují tvar $\tilde{D}_j$, a tak jednoznačně určují čísla Λ_{j_1} , Λ_{j_2} a Λ_{j_3} .

Vyjádření čísel q^{j_1} , q^{j_2} a q^{j_3} v závislosti na parametrech algebry by představovalo řešení bikubické rovnice, které by bylo velmi komplikované a nebudeme se o něj pokoušet. Pro vyjádření tvarů reprezentací v závislosti na těchto číslech však budeme potřebovat opačný vztah – vyjádřit parametry algebry. Toho můžeme dosáhnout použitím Viětových vzorců pro polynom $\tilde{D}_j$ v proměnné Λ_j . Pro daná čísla μ , j_1 , j_2 , j_3 tak dostaneme parametry A_1 , A_2 , A_3 , pro které jsou Λ_{j_1} , Λ_{j_2} a Λ_{j_3} kořeny $\tilde{D}_j$.

Z jednoho ze vztahů snadno vyjádříme

$$A_3 = \frac{i}{(q^{1/2} + q^{-1/2})^2} (\Lambda_0 + \Lambda_{j_1} + \Lambda_{j_2} + \Lambda_{j_3}), \quad (21)$$

úpravou dalších lze pak dojít k soustavě pro A_1 a A_2

$$\begin{aligned} & (q^{1/2} - q^{-1/2})^3 (\Lambda_0 \Lambda_{j_1} \Lambda_{j_2} + \Lambda_{j_1} \Lambda_{j_2} \Lambda_{j_3} + \Lambda_{j_2} \Lambda_{j_3} \Lambda_0 + \Lambda_{j_3} \Lambda_0 \Lambda_{j_1}) \\ & - 4(q^{1/2} - q^{-1/2}) (\Lambda_0 + \Lambda_{j_1} + \Lambda_{j_2} + \Lambda_{j_3}) = i(q^{1/2} + q^{-1/2})^2 (q - q^{-1})^2 A_1 A_2, \\ & - 4(q^{1/2} - q^{-1/2})^2 (\Lambda_0 (\Lambda_{j_1} + \Lambda_{j_2} + \Lambda_{j_3}) + \Lambda_{j_1} (\Lambda_{j_2} + \Lambda_{j_3}) + \Lambda_{j_2} \Lambda_{j_3}) \\ & + (q^{1/2} - q^{-1/2})^4 \Lambda_0 \Lambda_{j_1} \Lambda_{j_2} \Lambda_{j_3} + 16 = (q^{1/2} + q^{-1/2})^2 (q - q^{-1})^2 (A_1^2 + A_2^2). \end{aligned}$$

Tato soustava lze vyřešit dosazením jedné z neznámých z první rovnice do druhé, vyřešení bikvadratické rovnice a dopočítání druhé neznámé. Má tedy celkem čtyři řešení. Ze symetrie rovnic je zřejmé, že je-li jedním z řešení dvojice (A_1, A_2) , pak jsou další řešení ve tvaru $(-A_1, -A_2)$, (A_2, A_1) a $(-A_2, -A_1)$. Explicitní tvar jednoho z řešení je následující

$$A_1 = \frac{i}{(q^{1/2} + q^{-1/2})(q - q^{-1})} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & (q^{(j_1+j_2+j_3-2\mu-1)/2} + q^{(-j_1+j_2+j_3-2\mu-1)/2} + q^{(j_1-j_2+j_3-2\mu-1)/2} + q^{(j_1+j_2-j_3-2\mu-1)/2} \\ & - q^{(2\mu+1-j_1-j_2+j_3)/2} - q^{(2\mu+1-j_1-j_2-j_3)/2} - q^{(2\mu+1+j_1-j_2-j_3)/2} - q^{(2\mu+1-j_1+j_2-j_3)/2}), \end{aligned}$$

$$A_2 = \frac{1}{(q^{1/2} + q^{-1/2})(q - q^{-1})} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & (q^{-2\mu-1+(j_1+j_2+j_3)/2} - q^{(-j_1+j_2+j_3)/2} - q^{(j_1-j_2+j_3)/2} - q^{(j_1+j_2-j_3)/2} \\ & - q^{-(j_1+j_2+j_3)/2} - q^{-(j_1-j_2+j_3)/2} - q^{-(j_1+j_2-j_3)/2} + q^{2\mu+1-(j_1+j_2+j_3)/2}). \end{aligned}$$

Našli jsme tak tvar reprezentace pro čtyři izomorfní Askeyovy–Wilsonovy algebry s různými parametry. Jsou-li splněny nutné podmínky pro r -rozměrnou klasickou ireducibilní reprezentaci dané lemmaty 4.10 a 4.11, můžeme již explicitním výpočtem ukázat, že nalezená reprezentace skutečně splňuje komutační relace (1)–(3). Protože má I_3 vzájemně různá vlastní čísla, mohli bychom dále ukázat ireducibilitu nalezené reprezentace stejně jako v případě algebry $U'_q(\mathfrak{so}_3)$ (podle věty 2.1 je v nenulovém invariantním podprostoru vlastní vektor I_3 a pomocí posunovacích operátorů O_λ a R_λ zkonstruujeme zbytek báze z vlastních vektorů). Dokázali jsme tak následující tvrzení.

Věta 4.13. Pro libovolnou klasickou ireducibilní reprezentaci Askey–Wilsonovy algebry existují komplexní čísla μ , j_1 , j_2 a j_3 taková, že je tato reprezentace ekvivalentní reprezentaci dané vzorci (12), (17)–(19). Nechť naopak komplexní čísla μ , j_1 , j_2 a j_3

splňují následující požadavky. Pro každé $l \in \{0, \dots, 2r-1\}$ a každé $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ je $q^\mu \neq i\varepsilon q^{l/2}$, jedno z čísel Λ_{j_1} , Λ_{j_2} nebo Λ_{j_3} je rovno Λ_r , naopak žádné z těchto čísel není rovno Λ_k pro žádné $k \in \{1, \dots, r-1\}$. Pak uvedené vzorce (12), (17)–(19) definují ireducibilní reprezentaci algeber $AW_q(A_1, A_2, A_3)$, $AW_q(-A_1, -A_2, A_3)$, $AW_q(A_2, A_1, A_3)$ a $AW_q(-A_2, -A_1, A_3)$, kde čísla A_1 , A_2 a A_3 jsou určena rovnicemi (21)–(23).

Dále budeme pracovat pouze s řešením (22), (23) a nebudeme již vyjadřovat působení I_2 . Pochopitelně by se jednalo o prosté dosazení, nicméně vycházely by komplikované výrazy, které pro další práci stejně nebudeme potřebovat. Dosadíme-li tedy (19), (22), (23) do (17), dostaneme reprezentaci ve tvaru

$$I_1 v_j = -q^{\mu-j+j_1+j_2+j_3-1/2} \frac{1+q^{-2\mu+2k}}{(q-q^{-1})^2} A_{j-1} C_j v_{j-1} \\ + \frac{i q^{-(2\mu+2-j_1-j_2-j_3)/2}}{(q-q^{-1})} (A_j + C_j - 1 + q^{2\mu+2-j_1-j_2-j_3}) v_j - \frac{q^{-\mu+j-1/2}}{1+q^{-2\mu+2j}} v_{j+1}, \quad (24)$$

kde

$$A_j = \frac{(1-q^{j-j_1+1})(1-q^{j-j_2+1})(1-q^{j-j_3+1})(1+q^{-2\mu+j})}{(1+q^{-2\mu+2j})(1+q^{-2\mu+2j+1})}, \quad (25)$$

$$C_j = \frac{-q^{2\mu+2-j_1-j_2-j_3}(1-q^j)(1+q^{-2\mu-1+j+j_1})(1+q^{-2\mu-1+j+j_2})(1+q^{-2\mu-1+j+j_3})}{(1+q^{-2\mu+2j-1})(1+q^{-2\mu+2j})}. \quad (26)$$

4.1.2 Reprezentace pro $A_1 = A_2 = 0$

Věta 4.14. Buď R ireducibilní reprezentace $AW_q(0, 0, A_3)$ na V , $\dim V = r$ splňující $\ker(I_3 - 2\varepsilon/(q - q^{-1})) = \{0\}$ pro $\varepsilon = \pm 1$. Pak existuje komplexní číslo μ a nenulový vektor $v_0 \in \ker(I_3 + i[\mu]_q)$ takový, že $O_\mu v_0 = 0$ a definujeme-li

$$v_{j+1} := R_{\mu-j} v_j \quad \text{pro } j = 0, 1, \dots, r-1,$$

bude soubor $(v_0, \dots, v_{r-1})$ tvořit bázi V .

Důkaz. Konstrukci je možné provést úplně stejně jako ve větě 4.9 (nyní již navíc není potřeba zajišťovat $[\mu-j]_q \neq [\mu-j-1]_q$). $\square$

Případ $A_1 = A_2 = 0$ se podle očekávání nejvíce podobá samotné algebře $U'_q(\mathfrak{so}_3)$, kde jsou všechny konstanty nulové. Nenulová konstanta A_3 však způsobí posunutí spektra reprezentací.

Vyřešením soustavy (14) získáme

$$I_1 v_j = \frac{-q^{-1/2}}{q^{-\mu+j} + q^{\mu-j}} (\tilde{D}_j v_{j-1} + v_{j+1}), \quad (27)$$

$$I_2 v_j = \frac{i}{q^{-\mu+j} + q^{\mu-j}} (q^{\mu-j} \tilde{D}_j v_{j-1} - q^{-\mu+j} v_{j+1}). \quad (28)$$

Zde využijeme, že již samotné $\tilde{D}_j$ je polynom druhého stupně v proměnné Λ_j , a tak ho můžeme rozložit na kořenové činitele. Po úpravě získáme

$$\tilde{D}_j = \frac{q}{(q^{1/2} + q^{-1/2})^2} (\Lambda_j - \Lambda_0)(\Lambda_j + \Lambda_0 + i(q^{1/2} + q^{-1/2})^2 A_3). \quad (29)$$

I v tomto konkrétním případě bude pochopitelně platit lemma 4.10, které hovoří o klasických reprezentacích. K těm neklasickým se vrátíme později. Nyní však opět

uvažujme klasickou reprezentaci, pro kterou máme $v_r = 0$ a podmínku $\tilde{D}_r = 0$. To může nastat v případě, že $\Lambda_r = \Lambda_0$ nebo $\Lambda_r = -\Lambda_0 - i(q^{1/2} + q^{-1/2})^2 A_3$. První možnost jsme již vyřadili v obecném případě.

Uvažujme tedy $\Lambda_r = -\Lambda_0 - i(q^{1/2} + q^{-1/2})^2 A_3$ a r je libovolné. Úpravou této rovnosti získáme

$$(q^{-r/2} + q^{r/2})[\mu - (r-1)/2]_q = -i(q^{1/2} + q^{-1/2})A_3. \quad (30)$$

Závorka na levé straně nemůže být nulová, protože pak by bylo $q^{2r} = 1$ a q by tak byla odmocnina z jedné. Jedná se tedy o kvadratickou rovnici pro $q^{\mu-(r-1)/2}$. V lemmatu 4.12 jsme již ukázali, že reprezentace odpovídající těmto dvěma řešením musejí být ekvivalentní.

Nakonec zbývá rozhodnout, kdy je nalezená reprezentace ireducibilní. V lemmatu 4.10 jsme již ukázali, že v případě $q^\mu = i\varepsilon q^{l/2}$, kde $l \in \{0, \dots, 2r-1\}$ nejsou splněny předpoklady klasické reprezentace. V ostatních případech má I_3 vzájemně různá vlastní čísla a ireducibilita se dokáže úplně stejně jako v obecném případě či u algebry $U'_q(\mathfrak{so}_3)$. Uvedenou podmínku v řeči parametru algebry A_3 získáme dosazením do rovnice (30):

$$\frac{(q^{r/2} + q^{-r/2})(q^{(k-r+1)/2} + q^{-(k-r+1)/2})}{q - q^{-1}} \neq -\varepsilon(q^{1/2} + q^{-1/2})A_3, \quad k \in \{0, \dots, 2r-1\}. \quad (31)$$

Finální vzorce pro nalezenou reprezentaci se dají upravit do tvaru

$$I_1 v_j = \frac{-q^{\mu-j+3/2}}{(1 + q^{-2\mu+2j})(q - q^{-1})}(1 - q^j)(1 - q^{j-r}) \quad (32)$$

$$(1 + q^{-2\mu+j-1})(1 + q^{-2\mu+j+r-1})v_{j-1} + \frac{-q^{-\mu+j-1/2}}{1 + q^{-2\mu+2j}}v_{j+1},$$

$$I_2 v_j = \frac{-iq^{2\mu-2j+2}}{(1 + q^{-2\mu+2j})(q - q^{-1})}(1 - q^j)(1 - q^{j-r}) \quad (33)$$

$$(1 + q^{-2\mu+j-1})(1 + q^{-2\mu+j+r-1})v_{j-1} + \frac{-iq^{-2\mu}}{1 + q^{-2\mu+2j}}v_{j+1},$$

$$I_3 v_j = -i \frac{q^{\mu-j} - q^{-\mu+j}}{q - q^{-1}} v_j, \quad (34)$$

kde μ je libovolné číslo splňující rovnici (30), $k \in \{0, \dots, r-1\}$ a $x_{-1} = x_r = 0$. Je vidět, že tyto reprezentace odpovídají obecným klasickým reprezentacím, nastíněným v předchozí části, pro volbu $q^{j_1} = q^r$, $q^{j_2} = -iq^{\mu+1/2}$ a $q^{j_3} = iq^{\mu+1/2}$ (přičemž na pořadí pochopitelně nezáleží).

Nyní se přesuneme ke zkoumání neklasických reprezentací.

Lemma 4.15. Uvažujme stejné značení jako ve větě 4.14. V libovolné r -rozměrné neklasické ireducibilní reprezentaci $AW_q(0, 0, A_3)$ je I_3 diagonalizovatelný a má vzájemně různá vlastní čísla, jimž přísluší vlastní vektory $v_0, \dots, v_{r-1}$. Dále platí $[\mu - r + 1]_q = [\mu - r]_q$, tj. $q^\mu = i\varepsilon q^{r-1/2}$ pro $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ a $v_r = av_{r-1}$, kde

$$a^2 = -q[r]_q^2 - \varepsilon q \frac{(q^{r/2} - q^{-r/2})^2}{q - q^{-1}} A_3. \quad (35)$$

Důkaz. Uvažujme neklasickou reprezentaci. To znamená, že existuje $k \in \{0, \dots, r-1\}$ takové, že $-i[\mu - k]_q = \varepsilon/(q^{1/2} - q^{-1/2})$, a tedy $q^\mu = i\varepsilon q^{k\pm 1/2}$, a tedy $[\mu - k]_q = [\mu - (k \pm 1)]_q$. Ekvivalentně tedy existuje $k \in \{0, \dots, r\}$ takové, že $q^\mu = i\varepsilon q^{k-1/2}$, tj.

$[\mu - k]_q = [\mu - k + 1]_q = i\varepsilon/(q^{1/2} - q^{-1/2})$. Z konstrukce báze $\{v_j\}$ je jasné, že nemůže nastat $[\mu]_q = [\mu + 1]_q$, a tedy musí být $k > 0$. Dále ukážeme, že pro $k < r$ se jedná o reducibilní reprezentaci. Podle lemmatu 2.21 pak již bude rovnost $k = r$ znamenat, že jsou čísla $[\mu]_q, \dots, [\mu - r + 1]_q$, a tedy i vlastní čísla I_3 vzájemně různá.

Uvažujme tedy $q^\mu = i\varepsilon q^{k-1/2}$, $k \in \{1, \dots, r\}$. Podle lemmatu 2.21 je $[\mu - r]_q = [\mu - l]_q$ tehdy a jen tehdy, když $l = r$ nebo $l = 2k - r - 1$. Vektor v_r tedy náleží vlastnímu podprostoru příslušnému vlastnímu číslu $-i[\mu - 2k + r + 1]_q$. Tento podprostor je pro $k > r/2$ jednorozměrný, jinak je triviální. Můžeme tedy psát $v_r = av_{2k-r-1}$, kde pro $j > 0$ $a \in \mathbb{C}$ a pro $j \leq 0$ $v_j = 0$ a pro jednoduchost dalšího zápisu zvolíme i $a = 0$.

Dosazením (27), (28) a (12) do podmínky $(q^{1/2}I_1I_2 - q^{-1/2}I_2I_1 - I_3 - A_3)v_{r-1}$ (relace (1)) získáme vztah

$$\frac{\tilde{D}_r}{q^{r-k-1/2} + q^{-r+k+1/2}} v_{r-1} + a \frac{1}{q^{r-k-1/2} - q^{-r+k+1/2}} v_{2k-r} = 0. \quad (36)$$

Ten může být splněn, když $a = 0$ nebo $2k - r = r$. Rovnost $2k - r = r$, tj. $k = r$ znamená $v_{2k-r} = v_r = av_{r-1}$ a $q^\mu = i\varepsilon q^{r-1/2}$. Dosazením do (36) získáme $a^2 = -\tilde{D}_r$. Dosazením do (29) pak získáme rovnost (35).

Nyní uvažujme $k < r$ a $a = 0$, tedy $k \in \{1, \dots, r-1\}$ a $v_k = 0$ a ukážeme, že je daná reprezentace reducibilní. Podle lemmatu 2.21 pro každé $j \in \mathbb{Z}$ pak platí $[\mu - j]_q = [\mu - 2k + j + 1]_q$. Z předchozí rovnosti je snadné ukázat $\Lambda_j = \Lambda_{2k-j}$, tedy i $\tilde{D}_j = \tilde{D}_{2k-j}$. Definujme pro $j \in \mathbb{Z}$

$$w_j = \prod_{l=1}^j \tilde{D}_l^{-1/2} \cdot v_j + \prod_{l=1}^{2k-j-1} \tilde{D}_l^{-1/2} \cdot v_{2k-j-1},$$

kde pod prázdným součinem máme na mysli jedničku a pro $j \notin \{0, \dots, r-1\}$ označíme $v_j = 0$. Jedná se o lineární kombinaci vektorů příslušných stejným vlastním číslům (nebo o nulové vektory), platí tedy

$$I_3 w_j = -i[\mu - j]_q w_j.$$

Rovněž lze odvodit

$$I_1 w_j = \frac{-i\varepsilon q^{-1/2}}{q^{-k+j+1/2} + q^{k-j-1/2}} (\tilde{D}_j^{1/2} w_{j-1} + \tilde{D}_{j+1}^{1/2} w_{j+1}),$$

$$I_2 w_j = \frac{-i}{q^{-k+j+1/2} - q^{k-j-1/2}} (q^{k-j-1/2} \tilde{D}_j^{1/2} w_{j-1} + q^{-k+j+1/2} \tilde{D}_{j+1}^{1/2} w_{j+1}).$$

Protože rovněž platí $w_j = w_{2k-j-1}$, speciálně $w_{k-1} = w_k$, a dále $w_{-1} = 0$ pro $k \geq r/2$, respektive $w_{-r} = 0$ pro $k \leq r/2$, je vidět, že lineární obal vektorů $w_{k-1}, \dots, w_0$ pro $k \geq r-1$, respektive $w_k, \dots, w_{r-1}$ pro $k \leq r-1$ tvoří invariantní podprostor dané reprezentace. $\square$

Protože a je rovnicí (35) určeno až na znaménko, našli jsme tak čtyři další reprezentace této algebry. Důkaz ireducibility a vzájemné neekvivalence bude úplně stejný jako v případě neklasických reprezentací algebry $U'_q(\mathfrak{so}_3)$. Pouze v případě, kdy $A_3 = \mp(q^{r/2} + q^{-r/2})^2$ bude pro $\varepsilon = \pm 1$ $a = 0$ a máme tak pouze tři neklasické reprezentace.

Abychom mohli psát výsledné vzorce pro reprezentace, vyjádříme ještě

$$\begin{aligned} \tilde{D}_j &= q \frac{(q^{j/2} - q^{-j/2})(q^{r-j/2} - q^{-r+j/2})}{q - q^{-1}} \left(\frac{(q^{j/2} + q^{-j/2})(q^{r-j/2} + q^{-r+j/2})}{q - q^{-1}} + \varepsilon A_3 \right) \\ &= q[j]_q [2r - j]_q + q\varepsilon \frac{(q^{j/2} - q^{-j/2})(q^{r-j/2} - q^{-r+j/2})}{q - q^{-1}} A_3. \end{aligned} \quad (37)$$

K vyjádření reprezentací využijeme první řádek, ovšem z druhého tvaru je vidět přechod k neklasickým reprezentacím $U'_q(\mathfrak{so}_3)$ pro volbu $A_3 = 0$.

$$I_1 v_j = \frac{i\varepsilon}{(1 - q^{-2r+2j+1})} \left(-q \frac{(1 - q^j)(1 - q^{-2r+j})}{q - q^{-1}} \right. \\ \left. \left(\frac{q^{r-j}(1 + q^j)(1 + q^{-2r+j})}{q - q^{-1}} + \varepsilon A_3 \right) v_{j-1} + q^{-r+j} v_{j+1} \right), \quad (38)$$

$$I_2 v_j = \frac{i}{(1 - q^{-2r+2j+1})} \left(-q^{r-j+1} \frac{(1 - q^j)(1 - q^{-2r+j})}{q - q^{-1}} \right. \\ \left. \left(\frac{q^{r-j}(1 + q^j)(1 + q^{-2r+j})}{q - q^{-1}} + \varepsilon A_3 \right) v_{j-1} - q^{-2r+2j+1} v_{j+1} \right), \quad (39)$$

$$I_3 v_j = \varepsilon \frac{q^{r-j-1/2} - q^{-r+j+1/2}}{q - q^{-1}} v_j, \quad (40)$$

kde $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, $j \in \{0, \dots, r-1\}$, $v_{-1} = 0$ a $v_r = av_{r-1}$, kde a splňuje rovnost (35).

Tímto jsme provedli klasifikaci všech reprezentací, $\text{AW}(0, 0, A_3)$ za předpokladu, že I_3 nemá vlastní číslo $2\varepsilon/(q - q^{-1})$.

Věta 4.16. Necht R je ireducibilní reprezentace algebry $\text{AW}_q(0, 0, A_3)$, ve které $2\varepsilon/(q - q^{-1})$ není vlastním číslem I_3 . Platí-li zároveň nerovnost (31), je tato reprezentace ekvivalentní jedné z pěti neekvivalentních reprezentací – klasické dané rovnicemi (32)–(34), nebo jedné ze čtyř neklasických dané rovnicemi (38)–(40). Nastává-li ve vztahu (31) pro nějaké k rovnost, musí být R ekvivalentní s neklasickou reprezentací určenou rovnicemi (38)–(40), které pro $k \neq 2r - 1$ určují opět čtveřici neekvivalentní reprezentací, ovšem pro $k = 2r - 1$ pouze trojici.

4.2 Duální reprezentace

Nejprve uvedeme ekvivalentní reprezentaci k té sestrojené v části 4.1.1, kterou získáme pouze přenormováním báze. Výsledkem bude poněkud symetričtější tvar. Definujme tedy bázi $\mathcal{X} = \{x_k\}_{k=0}^{r-1}$ jako

$$x_j = \prod_{k=0}^j i^k q^{-k+(j_1+j_2+j_3+1)/2} A_{k-1} \frac{1 + q^{-2\mu+2j}}{(q - q^{-1})} \cdot v_j.$$

Rovnice (24) pak přejde na tvar

$$I_1 x_j = -\frac{iq^\nu}{q - q^{-1}} C_j x_{j-1} + \frac{iq^\nu}{q - q^{-1}} (A_j + C_j - 1 + q^{-2\nu}) x_j - \frac{iq^\nu}{q - q^{-1}} A_j x_{j+1}, \quad (41)$$

kde $\nu = -\mu - 1 + (j_1 + j_2 + j_3)/2$. Působení I_3 se pochopitelně nezmění, tedy

$$I_3 x_j = -i[\mu - j]_q x_j. \quad (42)$$

Nyní se pokusíme se získat ekvivalentní reprezentace, jež by se daly využít ke konstrukci Leonardova páru. Uvažujme reprezentaci algebry $\text{AW}_q(A_1, A_2, A_3)$ určenou rovnicemi (41), (42) a čísla μ , j_1 , j_2 a j_3 . Naším cílem bude najít ekvivalentní reprezentaci, kde I_1 bude působit diagonálně, zatímco I_3 bude působit jako ireducibilní tridiagonální matice. K tomu využijeme reprezentaci $\text{AW}_q(A_3, A_2, A_1)$ určenou čísla $\nu = -\mu - 1 + (j_1 + j_2 + j_3)/2$, j_1 , j_2 , j_3 . Dosazením do (21)–(23) ověříme, že se skutečně jedná algebru se zaměněnými parametry A_3 a A_1 . Pomocí izomorfismu $\tilde{\sigma} = \varrho^{-1} \sigma \varrho$ zaměňujícího $I_1 \mapsto I_3$ a $I_3 \mapsto I_1$ nakonec získáme hledanou ekvivalentní reprezentaci $\text{AW}_q(A_1, A_2, A_3)$.

Lemma 4.17. Buďte $\mu, j_1, j_2, j_3, \nu := -\mu - 1 + (j_1 + j_2 + j_3)/2$ komplexní čísla splňující následující požadavky. Pro každé $l \in \{0, \dots, 2r - 1\}$ a každé $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ je $q^\mu \neq i\varepsilon q^{l/2}$, jedno z čísel $q^{j_1}, q^{j_2}, q^{j_3}$ je rovno q^r a naopak žádné z čísel $\Lambda_{j_1}, \Lambda_{j_2}$ nebo Λ_{j_3} není rovno Λ_k pro žádné $k \in \{1, \dots, r - 1\}$. Necht' tytéž nerovnosti platí po záměně μ a ν . Potom je klasická ireducibilní reprezentace $\text{AW}_q(A_1, A_2, A_3)$, kde parametry A_1, A_2 a A_3 jsou určeny rovnicemi (21)–(23), odvozená v části 4.1.1, ekvivalentní s reprezentací určenou stejnými rovnicemi po záměně

$$I_1 \mapsto I_3, \quad I_2 \mapsto I_2 + \frac{I_1 I_3 - I_3 I_1}{q^{1/2} + q^{-1/2}}, \quad I_3 \mapsto I_1, \quad \mu \mapsto \nu, \quad \nu \mapsto \mu.$$

Reprezentaci vzniklou touto záměnou nazveme *duální* k původní reprezentaci.

Důkaz. Je jasné, že nezáleží na tom, zda uvažujeme reprezentace ve tvaru (24) nebo (41), (42). Uvažujme tedy symetričtější tvar odvozený výše. Tvar duální reprezentace pak bude

$$I_1 y_j = -i[\nu - j]_q y_j. \quad (43)$$

$$I_3 y_j = -\frac{iq^\mu}{q - q^{-1}} D_j y_{j-1} + \frac{iq^\mu}{q - q^{-1}} (B_j + D_j - 1 + q^{-2\mu}) y_j - \frac{iq^\mu}{q - q^{-1}} B_j y_{j+1}, \quad (44)$$

kde

$$B_j = \frac{(1 - q^{j-j_1+1})(1 - q^{j-j_2+1})(1 - q^{j-j_3+1})(1 + q^{-2\nu+j})}{(1 + q^{-2\nu+2j})(1 + q^{-2\nu+2j+1})}, \quad (45)$$

$$D_j = \frac{-q^{-2\mu}(1 - q^j)(1 + q^{-2\nu-1+j+j_1})(1 + q^{-2\nu-1+j+j_2})(1 + q^{-2\nu-1+j+j_3})}{(1 + q^{-2\nu+2j-1})(1 + q^{-2\nu+2j})}. \quad (46)$$

Jak jsme již zmínili, záměnou ν a μ získáme ireducibilní reprezentaci algebry $\text{AW}_q(A_3, A_2, A_1)$. Aplikací zmíněného izomorfismu $\tilde{\sigma}$ tedy skutečně dostaneme reprezentaci algebry $\text{AW}_q(A_1, A_2, A_3)$, která bude opět ireducibilní. Je-li tato nová reprezentace klasická, musí podle věty 4.13 být ekvivalentní s některou z již nalezených reprezentací. Ty jsou podle lemmatu 4.12 již jednoznačně určeny svojí stopou. Stačí tedy ukázat, že je duální reprezentace klasická a že I_3 má v duální reprezentaci stejnou stopu jako v té původní. Přímým výpočtem lze ověřit, že stopa I_3 je v duální reprezentaci opravdu $-i(q^{r/2} - q^{-r/2})/(q^{1/2} - q^{-1/2}) [\mu - (r - 1)/2]_q$. Nyní ukážeme, že I_3 má v duální reprezentaci stejná vlastní čísla jako v té původní, tedy $-i[\mu]_q, \dots, -i[\mu - r + 1]_q$.

Nejprve ukážeme, že $-i[\mu]_q$ je vlastním číslem I_3 , což znamená $\det(I_3 + i[\mu]_q) = 0$. Pouze ze tvaru reprezentace (44) lze indukci na dimenzi r ukázat, že v duální reprezentaci je

$$\det(I_3 + i[\mu]_q) = \frac{-iq^\mu}{q - q^{-1}} \frac{\prod_{k=1}^3 (q^{1-j_k} - 1)(q^{2-j_k} - 1) \dots (q^{r-j_k} - 1)}{(1 + q^{-2\mu+r})(1 + q^{-2\mu+r+1}) \dots (1 + q^{-2\mu+2r-1})}.$$

Použijeme-li pak předpoklad, že pro nějaké k je $q^{j_k} = q^r$, dostáváme žádanou nulu.

Z konstrukce původní reprezentace je jasné, že čísla $[\mu - r]_q, [\mu - r + 1]_q, \dots, [\mu]_q, [\mu + 1]_q, \dots$ jsou všechna vzájemně různá. Můžeme tedy konstrukci báze zopakovat i pro duální reprezentaci. Vezměme $\tilde{w}_0$ vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $-i[\mu]_q$. Budeme aplikovat $O_{\mu+j}$ do té doby než dostaneme lineárně závislý vektor. Poslední lineárně nezávislý označíme $\tilde{v}_0$ a příslušné vlastní číslo $-i[\tilde{\mu}]_q$. Dále definujeme $\tilde{v}_{j+1} := R_{\tilde{\mu}-j} \tilde{v}_j$. Jak jsme již zmínili, nemůže nastat rovnost $[\tilde{\mu} - j]_q = [\tilde{\mu} - j - 1]_q$, a tak opět máme k dispozici bázi z vlastních vektorů $\{\tilde{v}_0, \dots, \tilde{v}_r\}$. Příslušnými vlastními čísly jsou $-i[\tilde{\mu}]_q, \dots, -i[\tilde{\mu} - j]_q$. Jejich sečtením můžeme spočítat stopu I_3 v duální reprezentaci a porovnáním s předchozím výpočtem získáváme $\tilde{\mu} = \mu$. $\square$

Poznámka 4.18. Ke konstrukci duální reprezentace nepotřebujeme, aby ta původní existovala. Stačí tak splnit předpoklady pro existenci klasické reprezentace dané čísly ν, j_1, j_2 a j_3 , ale může klidně být $q^\mu = i\varepsilon q^{l/2}$ pro nějaké $l \in \{0, \dots, 2r-1\}$. V takovém případě pochopitelně nemáme zajištěnu existenci báze z vlastních vektorů. Nicméně stále platí, že čísla $[\mu - \lfloor l/2 \rfloor]_q, [\mu - \lfloor l/2 \rfloor + 1]_q, \dots$ jsou vzájemně různá, takže můžeme konstrukcí $\tilde{v}_{j+1} = R_{\mu-j}\tilde{v}_j$, kde $\tilde{v}_0$ je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $-i[\mu]_q$ dojít až k $0 \neq \tilde{v}_{\lfloor l/2 \rfloor}$, jež je pro l sudé vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu $-i[\mu - l/2]_q = 2\varepsilon/(q - q^{-1})$ a pro l liché vlastním vektorem příslušným $-i[\mu - (l-1)/2]_q = \varepsilon/(q^{1/2} - q^{-1/2})$. (Kdyby $v_{\lfloor l/2 \rfloor} = 0$, byl by to spor s ireducibilitou reprezentace.)

Tento příklad tedy ukazuje, že skutečně lze volit parametry Askeyovy–Wilsonovy algebry tak, že existuje reprezentace taková, že $2\varepsilon/(q - q^{-1})$ je prvkem spektra I_3 .

4.3 Algebra AW a q -Racahovy polynomy

Lemma 4.19. Nechť čísla μ, j_1, j_2, j_3 a $\nu := -\mu - 1 + (j_1 + j_2 + j_3)/2$ splňují stejné předpoklady jako v předchozím lemmatu. Definujme operátory $A, B \in \mathcal{L}(V)$ působením na bázi $\mathcal{X}$ jako

$$Ax_k = C_k x_{k-1} - (A_k + C_k - 1 + q^{-2\nu})x_k + A_k x_{k+1}. \quad (47)$$

$$Bx_k = (q^{-k} - q^{-2\mu+k})x_k, \quad (48)$$

Pak existuje báze $\mathcal{Y}$, kde operátory A a B působí jako

$$Ay_k = (q^{-k} - q^{-2\nu+k})y_k. \quad (49)$$

$$By_k = D_k y_{k-1} - (B_k + D_k - 1 + q^{-2\mu})y_k + B_k y_{k+1}, \quad (50)$$

Operátory A a B tak tvoří Leonardův pár.

Důkaz. Uvažme reprezentaci AW ve tvaru (41), (42). Potom můžeme psát

$$A = iq^{-\nu}(q - q^{-1}), \quad B = iq^{-\mu}(q - q^{-1})I_3.$$

Báze $\mathcal{Y}$ pak odpovídá duální reprezentaci sestavené v lemmatu 4.17. $\square$

Tvrzení 4.20. Leonardův pár z předchozího lemmatu odpovídá q -Racahovým polynomům s parametry

$$\alpha = q^{-j_1}, \quad \beta = -q^{-2\mu-1+j_1}, \quad \gamma = q^{-j_3}, \quad \delta = -q^{2\mu+1-j_1-j_2}, \quad (51)$$

tedy

$$\beta\delta = q^{-j_2}, \quad \alpha\beta = -q^{-2\mu-1}, \quad \gamma\delta = -q^{-2\nu-1} \quad (52)$$

prostřednictvím korespondence

$$\mathbb{P}_{jk} = r_j R_j(\mu(k)), \quad \text{kde} \quad r_j = \prod_{k=0}^j \frac{A_{k-1}}{C_k}. \quad (53)$$

Vypíšeme maticové elementy leonardova páru

$$a_j = A_{j-1}, \quad b_j = C_{j+1}, \quad c_j = -A_j - C_j + 1 + \gamma\delta q, \quad d_k = q^{-k} + \gamma\delta q^{k+1},$$

$$\tilde{a}_k = D_k, \quad \tilde{b}_k = B_k, \quad \tilde{c}_k = -B_k - D_k + 1 + \alpha\beta q, \quad \tilde{d}_j = q^{-k} + \alpha\beta q^{j+1}.$$

Rovněž můžeme vyjádřit posloupnost A_j , C_j , B_j a D_j v řeči čísel α , β , γ a δ . Dosazením (51) do (25), (26), (45), (46), zjistíme, že tyto posloupnosti odpovídají posloupnostem z rekurentní a diferenční rovnice q -Racahových polynomů (33), (34), (36) a (37), kap. 2. Nyní spočítejme, jak vypadá relace ortogonality, využijeme při tom Jacksonovu sumační formuli (lemma 2.24).

$$\begin{aligned}
w_k &= \prod_{j=1}^k \frac{\tilde{b}_{j-1}}{\tilde{a}_j} = \prod_{j=1}^k \frac{B_{j-1}}{D_j} = \prod_{j=1}^k \frac{(1 - \alpha q^j)(1 - \beta \delta q^j)(1 - \gamma q^j)(1 - \gamma \delta q^j)(1 - \gamma \delta q^{2j+1})}{q(1 - q^j)(1 - \delta q^j)(\beta - \gamma q^j)(\alpha - \gamma \delta q^j)(1 - \gamma \delta q^{2j-1})} \\
&= \frac{(\alpha q, \beta \delta q, \gamma q, \gamma \delta q)_k}{(q, \delta q, \beta^{-1} \gamma q, \alpha^{-1} \gamma \delta q)_k} \frac{1 - \gamma \delta q^{2k+1}}{(\alpha \beta q)^k (1 - \gamma \delta q)} \\
h_0 &= \sum_{k=0}^N w_k = \sum_{k=0}^N \frac{(\alpha q, \beta \delta q, \gamma q, \gamma \delta q, q \sqrt{\gamma \delta q}, -q \sqrt{\gamma \delta q}; q)_k}{(q, \delta q, \beta^{-1} \gamma q, \alpha^{-1} \gamma \delta q, \sqrt{\gamma \delta q}, -\sqrt{\gamma \delta q}; q)_k} \frac{1}{(\alpha \beta q)^k} \\
&= {}_6\varphi_5 \left(\begin{matrix} \alpha q, \beta \delta q, \gamma q, \gamma \delta q, q \sqrt{\gamma \delta q}, -q \sqrt{\gamma \delta q} \\ \delta q, \beta^{-1} \gamma q, \alpha^{-1} \gamma \delta q, q \sqrt{\gamma \delta q}, -q \sqrt{\gamma \delta q} \end{matrix} \middle| q; \frac{1}{\alpha \beta q} \right) \\
&= \frac{(\gamma \delta q^2, \alpha^{-1} \beta \gamma, \beta^{-1}, \alpha^{-1} \delta; q)_\infty}{(\alpha^{-1} \gamma \delta q, \beta^{-1} \gamma q, \delta q, \alpha^{-1} \beta^{-1} q^{-1}; q)_\infty} \\
h_n &= h_0 \left(\prod_{j=1}^n \frac{A_{j-1}}{C_j} \right)^2 \prod_{j=1}^n \frac{a_i}{b_{i-1}} = h_0 \prod_{j=1}^n \frac{C_j}{A_{j-1}} \\
&= \prod_{j=1}^n \frac{q(1 - q^j)(1 - \beta q^j)(\gamma - \alpha \beta q^j)(\delta - \alpha q^j)(1 - \alpha \beta q^{2j-1})}{(1 - \alpha q^j)(1 - \alpha \beta q^j)(1 - \beta \delta q^j)(1 - \gamma q^j)(1 - \alpha \beta q^{2j+1})} \\
&= \frac{(q, \beta q, \alpha \beta \gamma^{-1} q, \alpha \delta^{-1} q; q)_n}{(\alpha q, \alpha \beta q, \beta \delta q, \gamma q; q)_n} \frac{(\gamma \delta q)^n (1 - \alpha \beta q)}{1 - \alpha \beta q^{2n+1}}.
\end{aligned}$$

Odhalme ještě, co znamenají předpoklady lemmatu 4.17 v řeči konstant α , β , γ a δ . Zjistíme, že se jedná o podmínky

$$\alpha q = q^{-N} \quad \text{nebo} \quad \beta \delta q = q^{-N} \quad \text{nebo} \quad \gamma q = q^{-N},$$

$$\alpha \beta q \neq q^{-l}, \quad \gamma \delta q \neq q^{-l},$$

$$\alpha \neq q^{-k}, \quad \beta \delta \neq q^{-k}, \quad \gamma \neq q^{-k},$$

$$\beta \neq q^{-k}, \quad \alpha \neq \delta q^{-k}, \quad \alpha \beta \neq \gamma q^{-k},$$

$$\gamma \delta \neq \alpha q^{-k}, \quad \gamma \neq \beta q^{-k}, \quad \delta \neq q^{-k},$$

kde $l \in \{0, \dots, 2N + 1\}$ a $k \in \{1, \dots, N\}$. První z podmínek odpovídá podmínce (30), kap. 2, z definice q -Racahových polynomů, tedy požadavku, aby se jednalo o konečnou posloupnost $N + 1$ ortogonálních polynomů. Další podmínky odpovídají tomu, že matice elementy Leonardova páru jsou dobře definované a ty na vrchní a spodní diagonále jsou nenulové (tj. dané matice jsou ireducibilní). Jedná se tedy o postačující podmínky na to, aby takto definované matice tvořily Leonardův pár a definovaly posloupnost ortogonálních polynomů. Podmínka na druhém řádku by se však dala oslabit – nevadilo by, kdyby platilo $\alpha \beta q = q^{-2\mu} = q^{-2N-1}$ nebo $\gamma \delta q = q^{-2\nu} = q^{-2N-1}$, což je případ, kdy je alespoň jedna z reprezentací neklasická.

Kapitola 5

Závěr

V práci se podařilo téměř úplně splnit oba cíle, které jsme si na počátku vytyčili. Ve třetí kapitole jsme nejprve obecně popsali, jak souvisí Leonardovy páry s ortogonálními polynomy a poté jsme na příkladech ukázali, jak lze z teorie reprezentací nagenarovat některé Leonardovy páry. Z reprezentací algebry sl_2 jsme byli schopni nagenarovat Kravčukovy polynomy pro libovolný parametr p . Dále jsme prozkoumali reprezentace algebry $U'_q(so_3)$, přičemž jsme objevili, že kromě tzv. klasické reprezentace lze použít ještě jednu ze čtveřice neklasických. Byli jsme tak schopni nagenarovat q -Racahovy polynomy pro dvě různé volby parametrů. V zadání práce byla rovněž zmíněna algebra $U_q(sl_2)$. Ačkoliv tato algebra souvisí s q -Kravčukovými polynomy podobným způsobem jako algebra sl_2 souvisí s nedeformovanými Kravčukovými polynomy [15], neexistují na této algebře vhodné automorfismy, které by umožnily zkonstruovat Leonardův pár stejným způsobem jako v ostatních diskutovaných případech. Proto jsme se touto algebrou detailněji nezabývali.

Komplikovanější byl druhý cíl naší práce, kde jsme si vytyčili zopakovat postup klasifikace algebry $U'_q(so_3)$ popsáný v [5] na Askeyovu–Wilsonovu algebru. S dodatečnými předpoklady na spektrum elementu I_3 v hledané reprezentaci se nám to podařilo. Reprezentace splňující tyto předpoklady jsme nazvali *klasické* a opět jsme pomocí jistého automorfismu nagenarovali příslušné ortogonální polynomy. Získali jsme tak vlastnosti q -Racahových polynomů pro téměř všechny možné volby parametrů. Jaké volby parametrů nám zde chybí jsme diskutovali na konci čtvrté kapitoly. Chybějící polynomy patrně budou odpovídat reprezentacím splňujícím jiné předpoklady, jež jsme nazvali *neklasické* a nebyli jsme schopni nalézt pro libovolnou volbu parametrů Askeyovy–Wilsonovy algebry.

Neklasické reprezentace jsme však našli pro speciální případ $A_1 = A_2 = 0$, který se nejvíce podobá algebře $U'_q(so_3)$. Jako směr další práce by tedy mohlo být zajímavé prozkoumat ortogonální polynomy vzešlé z těchto reprezentací a popřípadě se pokusit najít neklasické reprezentace i pro jinou volbu parametrů algebry. Rovněž by bylo zajímavé porovnat námi nalezené výsledky s prací [3], kde byla klasifikace Askeyovy–Wilsonovy algebry provedena jiným způsobem.

Literatura

- [1] GRANOVSKII, Yakov I. a Alexei S. ZHEDANOV. Orthogonal polynomials in the Lie algebras. *Soviet Physics Journal*. 1986, Vol. 29, No. 5, pp. 387–393. Dostupné na DOI 10.1007/BF00895299.
- [2] ZHEDANOV, Alexei S. “Hidden symmetry” of Askey–Wilson polynomials. *Theoretical and Mathematical Physics*. 1991, Vol. 89, No. 2, pp. 1146–1157. Dostupné na DOI 10.1007/BF01015906.
- [3] HUANG, Hau-wen. *Finite-dimensional irreducible modules of the universal Askey–Wilson algebra*. arXiv preprint.
- [4] TERWILLIGER, Paul. Introduction to Leonard pairs. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2003, Vol. 153, No. 1–2, pp. 463–475. Dostupné na DOI 10.1016/S0377-0427(02)00600-3.
- [5] HAVLÍČEK, Miloslav a Severin POŠTA. On the Classification of Irreducible Finite-Dimensional Representations of $U'_q(\mathfrak{so}_3)$ Algebra. *Journal of Mathematical Physics*. 2001, Vol. 42, No. 1, pp. 472–500. Dostupné na DOI 10.1063/1.1328078.
- [6] WOLFRAM RESEARCH, Inc. *Mathematica*. Verze 10.0.
- [7] KOEKOEK, Roelof, Peter A. LESKY a René F. SWARTTOUW. *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q -Analogues*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. Springer Monographs in Mathematics. ISBN 978-3-642-05013-8.
- [8] KLIMYK, Anatoli a Konrad SCHMÜDGEN. *Quantum Groups and Their Representations*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1997. Texts and Monographs in Physics. ISBN 978-3-642-64601-0.
- [9] CHIHARA, Theodore S. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. New York: Gordon and Breach, Science Publishers, 1978. Mathematics and Its Applications. ISBN 978-0-677-04150-0.
- [10] ERDMANN, Karin a Mark J. WILDON. *Introduction to Lie Algebras*. London: Springer-Verlag, 2006. Springer Undergraduate Mathematics Series. ISBN 978-1-84628-040-5.
- [11] ETINGOF, Pavel a kol. *Introduction to Representation Theory*. Providence: American Mathematical Society, 2011. ISBN 978-0-8218-5351-1.
- [12] HAVLÍČEK, Miloslav, Anatoliy U. KLIMYK a Severin POŠTA. Representations of the cyclically symmetric q -deformed algebra $\mathfrak{so}_q(3)$. *Journal of Mathematical Physics*. 1999, Vol. 40, No. 4, pp. 2135–2161. Dostupné na DOI 10.1063/1.532856.
- [13] GROMADA, Daniel a Severin POŠTA. Automorphisms of algebras and orthogonal polynomials. *Acta Polytechnica*. 2014, ročník 54, č. 6, s. 394–397. Dostupné na DOI 10.14311/AP.2014.54.0394.
- [14] NOMURA, Kazumasa a Paul TERWILLIGER. Krawtchouk polynomials, the Lie algebra $\mathfrak{sl}_2$, and Leonard pairs. *Linear Algebra and its Applications*. 2012, Vol. 437, No. 1, pp. 345–375. Dostupné na DOI 10.1016/j.laa.2012.02.006.

- 
- [15] TERWILLIGER, Paul. An introduction to Leonard pairs and Leonard systems (Algebraic Combinatorics). *Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku*. 1999, Vol. 1109, pp. 67–79.
- [16] TERWILLIGER, Paul. Leonard pairs and the q -Racah polynomials. *Linear Algebra and its Applications*. 2004, Vol. 387, pp. 235–276. Dostupné na DOI 10.1016/j.laa.2004.02.014.
- [17] TERWILLIGER, Paul. The Universal Askey–Wilson Algebra. *SIGMA*. 2011, Vol. 7, No. 069. Dostupné na DOI 10.3842/SIGMA.2011.069.

Seznam použitých symbolů

$(\cdot, \cdot)$	■ (Symetrický) skalární součin	3
$[\cdot, \cdot]$	■ Lieova závorka	17
$\subset\subset$	■ Algebraická podstruktura (vektorový podprostor či podalgebra)	17
$(a)_k$	■ Pochhammerův symbol	6
$[\alpha]_q$	■ q -číslo	6
$(a; q)_k$	■ q -Pochhammerův symbol	7
A^*	■ Sdružený operátor	4
$A^{\mathcal{X}}$	■ Matice operátoru A v bázi $\mathcal{X}$	4
AW	■ Askeyova–Wilsonova algebra	33
$\mathbb{A}, \mathbb{B}, \dots$	■ Matice	
$\mathbb{A}^H$	■ Hermitovsky sdružená matice	3
$\mathbb{A}^T$	■ Transponovaná matice	3
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$	■ Algebra	
$\mathcal{A}/\mathcal{I}$	■ Faktoralgebra $\mathcal{A}$ podle oboustranného ideálu $\mathcal{I}$	20
C	■ Casimirův element algebry AW.	34
$\tilde{C}_\lambda$	■	35
$\mathbb{C}$	■ Množina všech komplexních čísel	
$\mathbb{C}\langle x_i \rangle_{i \in I}$	■ Volná algebra	20
$\tilde{D}_j$	■	37
Δ_n	■ Determinant matice $(\mu_{i+j})_{i,j=0}^n$	11
e_n	■ Monom $e_n(x) = x^n$	9
$f^{\mathcal{X}}$	■ Matice formy f v bázi $\mathcal{X}$	3
${}_rF_s$	■ Hypergeometrická funkce	6
${}_r\varphi_s$	■ Základní hypergeometrická funkce	7
$\mathrm{gl}(V)$	■ Obecná lineární algebra zobrazení na vektorovém prostoru V	17
$\mathrm{gl}(n, T)$	■ Obecná lineární algebra matic $n \times n$ nad tělesem T	17
gl_n	■ Obecná lineární algebra matic $n \times n$ nad $\mathbb{C}$	17
$\mathcal{H}$	■ Vektorový prostor se (symetrickým) skalárním součinem	3
h_n	■ Posloupnost druhých mocnin norem polynomů	9, 15, 26
I	■ Jednotkový operátor	
$\mathbb{I}$	■ Jednotková matice	
K_n	■ Posloupnost Kravčukových polynomů	15
$\mathcal{L}$	■ Momentový funkcionál	9
Λ_j	■	37
$\mathcal{L}(V)$	■ Prostor lineárních operátorů na V	4
(μ_n)	■ Momentová posloupnost	9
$\mathbb{N}$	■ Množina všech přirozených čísel	
$\mathbb{N}_0$	■ Množina všech přirozených čísel s nulou	
$\hat{N}$	■ Podmnožina přirozených čísel $\{1, \dots, N\}$	9
$\hat{N}_0$	■ Podmnožina přirozených čísel s nulou $\{0, \dots, N\}$	9
O	■ Nulový operátor	

$\mathbb{O}$	■ Nulová matice	
O_λ	■	34
$p, q, \dots$	■ Polynom	
$\bar{p}$	■ Polynom s komplexně sdruženými koeficienty	9
$\mathcal{P}$	■ Prostor polynomů	8
$\mathcal{P}_n$	■ Prostor polynomů nejvýše stupně n	8
$\mathbb{R}$	■ Množina všech reálných čísel	
R_λ	■	34
R_n	■ Posloupnost q -Racahových polynomů	16
$\mathrm{sl}(n, T)$	■ Speciální lineární algebra matic $n \times n$ nad tělesem T	18
sl_n	■ Speciální lineární algebra matic $n \times n$ nad $\mathbb{C}$	18
$U(L)$	■ Univerzální obalová algebra Lieovy algebry L	20
$U'_q(\mathrm{so}_3)$	■ Nestandardní deformace Lieovy algebry so_3	22
$V, W, \dots$	■ Vektorový prostor	
V^*	■ Prostor lineárních funkcionalů na V	4
V_n	■ Vektorový prostor dimenze n	3
$w_n, w(x)$	■ Váhová posloupnost či funkce	15, 26
$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \dots$	■ Báze vektorového prostoru	
$Z(\mathcal{A})$	■ Centrum algebry $\mathcal{A}$	22