České Vysoké Učení Technické
v Praze

Fakulta Jaderná a Fyzikálně
Inženýrská

Katedra Fyziky

Diplomová práce

Dualizovatelnost sigma modelů v prostředí pp-vln

Bc. Adam Brus

2014

Školitel: prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.

Thesis tittle: **Dualizability of sigma models in the pp-wave background**

Author: Bc. Adam Brus

Department: Department of Physics FNSPE CTU in Prague

Branch of study: Mathematical Physics

Kind of thesis: Diploma thesis

Supervisor: prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.

Abstract: We study the Killing algebra of plane paralel wave metric and application of such metric in the Poisson-Lie T-duality. We find out the complete Killing algebra of general plane paralel wave metric. We construct such algebras for special cases and look for their 4-dimensional subalgebras which acts freely and transityvly on spacetime. Such subalgebras are needed to construct Drinfeld double which is fundamental for T-duality.

Keywords: Plane paralel waves, Poisson-Lie T-duality, Sigma-models, Killing vectors, Symetries of metric, Drinfeld double

Název práce: **Dualizovatelnost sigma modelů v prostředí pp-vln**
Autor: Bc. Adam Brus

Katedra: Katedra Fyziky FJFI ČVUT v Prahe
Obor : Matematická fyzika
Druh práce: Diplomová práce

Školitel: prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.

Abstrakt: Studujeme Killingovu algebru metriky rovnoběžných rovinných vln a aplikaci takovýchto metrik užitím Poisson-Lie T-duality. Nacházíme tvar úplné Killingovy algebry obecné metriky rovnoběžné rovinné vlny. Pro speciální případy tuto algebru konstruujeme a hledáme její čtyřdimenzionální podalgebry, které působí volně a tranzitivně na časoprostoru. Takovéto podalgebry jsou potřebné při konstrukci Drinfeldových doublů, které jsou fundamentální pro T-dualitu.

Klíčová slova: Rovnoběžné rovinné vlny, Poisson-Lie T-dualita, Sigma-modely, Killingovy vektory, Symetrie metriky, Drinfeldův double

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd....) uvedené v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu §60 Zákona č.121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů(autorský zákon).

V Praze dne ....

Adam Brus

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucímu mé diplomové práce za trpělivé vedení, přínosné konzultace a za kontrolu výsledků.

Obsah

Úvod

Sigma-modely se objevují v strunové teorii při práci ze zakřivenými a na čase závislými pozadími. Protože řešení těchto modelů bývá problematické, existuje snaha převést tyto modely na jiné, jejichž řešení je známo. Tento převod lze zprostředkovat například užitím Poisson-Lieovy T-duality

V první kapitole jsou shrnuty poznatky z teorie Sigma-modelů a podmínka na případnou dualizovatelnost. Následně se zabýváme teorii Poisson-Lie T-duality, kde zásadní roli hraje Drinfeldův double-Lieova Algebra se speciálními vlastnostmi. Konstrukce Drinfeldova doublu využívá čtyřrozměrné algebry symetrií daného modelu. Potřebujeme tedy, aby model, který dualizujeme měl dostatečný počet symetrií (Pokud existuje symetrií větší počet, pak volíme z čtyřrozměrných podalgeber symetrií). Přičemž využíváme poznatky z prací [1, 4]

V druhé kapitole se zajímáme o rovnoběžné rovinné vlny [5], které mohou produkovat přesné řešení pro modely strunové teorie. Hledáme tvar kompletní algebry symetrií obecné rovnoběžné rovinné vlny.

V třetí kapitole aplikujeme znalosti z předešlých kapitol na výpočet algebry symetrií pro některé speciální případy rovnoběžných rovinných vln a následně zkoumáme existenci čtyřrozměrných podalgeber, které působí volně a tranzitivně na časoprostoru.

Kapitola 1

Dualizovatelnost sigma-modelů

1.1 Sigma-modely

Sigma-modely slouží jako modely strunové teorie ze zakřiveným a na čase závislým pozadím. Přímé řešení takovéhoto modelu bývá ale často velmi náročné.

Nechť G je Lieova grupa a g její Lieova Algebra. Sigma model na grupě G je dán klasickou akcí

$$S_F(\phi) = \int d^2\sigma \partial_- \phi^\mu F_{\mu\nu}(\phi) \partial_+ \phi^\nu, \tag{1.1}$$

kde F je tenzorové pole druhého řádu na Lieově grupě G. ϕ^μ je zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$, $\mu = 1, 2, ..., \dim(G)$ definované vztahem $\phi^\mu = x^\mu \circ g$, kde $g : \mathbb{R} \ni (\sigma_+, \sigma_-) \mapsto g(\sigma_+, \sigma_-) \in G$ a $x^\mu : \mathbf{U}_g \mapsto \mathbb{R}$ jsou souřadnice okolí $\mathbf{U}_g$ prvku $g(\sigma_+, \sigma_-) \in G$.

Alternativně je možné možné model definovat pomocí pravo-invariantních vektorových polí jako

$$S_F(g) = \int d^2x R_-(g)^a E_{ab} R_+(g)^b, \tag{1.2}$$

kde $R_\pm(g)$ jsou pravo-invariantní pole $R_\pm(g) = (\partial_\pm g g^{-1})^a T_a \in G$. Přechod mezi $F_{\mu\nu}$ a E_{ab} je pak

$$F_{\mu\nu}(x) = e^a_\mu(g(x)) E_{ab}(g(x)) e^b_\nu(g(x)), \tag{1.3}$$

kde e^a_μ jsou složky pravo-invariantní formy $e^a_\mu = ((dg)g^{-1})^a_\mu$. Pohybové rovnice plynoucí z takovéto akce pak jsou

$$\partial_- \partial_+ \phi^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \partial_- \phi^\nu \partial_+ \phi^\lambda = 0, \tag{1.4}$$

kde $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ jsou Christoffellovy symboly příslušící tenzorovému poli F. Toto pole je složeno z metriky (symetrická část) a torzního potenciálu (antisymetrická část).

Dualizovatelnost takovéhoto sigma-modelu je dána podmínkou

$$\mathcal{L}_{v_i} F_{\mu\nu} = F_{\mu\kappa} v_j^\kappa \tilde{c}_i^{jk} v_k^\lambda F_{\lambda\nu}, \tag{1.5}$$

kde $\tilde{c}_i^{jk}$ jsou strukturní koeficienty na $\tilde{G}$ a v_i jsou levo-invariantní vektorová pole na Lieově grupě G. Algebry G a $\tilde{G}$ pak definují Drinfeldův double $\mathcal{D}$, který umožní konstrukci tenzorového pole F.

1.2 Poisson-Lie T-dualita

V předešlé sekci jsme se seznámili s Sigma-modely strunové teorie a nyní si ukážeme jak je „oklikou“ řešit. Zásadní roli pro neabelovskou dualizovatelnost hraje Drinfeldův double, který se obvykle hledá ze symetrií dané metriky. Pokud má daný model dostatečný počet symetrií pak se jako jedna podgrupa Drinfeldova doublu bere čtyř rozměrná Algebra (podalgebra) Killingových vektoru dané metriky.

Drinfeldův double je souvislá Lieova grupa $\mathcal{D}$ jejíž Lieova algebra, může byt rozložena na dvojici podalgeber $\mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}}$ maximálně izotropní vhledem k symetrické, ad-invariantní, nedegenerované formě $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Při splnění podmínky 1.5 lze polní rovnici 1.4 pro sigma-model přepsat jako rovnici pro zobrazení $l(\sigma_+, \sigma_-)$ z $\mathbb{R}^2$ do Drinfeldova doublu $\mathcal{D}$ jako

$$\langle (\partial_\pm l) l^{-1}, \xi^\mp \rangle = 0, \tag{1.6}$$

kde podprostory $\xi^+ = \mathrm{span}(T^i + E^{ij}(e)\tilde{T}_j), \xi^- = \mathrm{span}(T^i - E^{ij}(e)\tilde{T}_j)$ jsou ortogonální vzhledem k $\langle \cdot, \cdot \rangle$. $\{T^i\}$,$\{\tilde{T}_j\}$ jsou báze G a $\tilde{G}$.

Díky Drinfeldově doublu existuje pro libovolný prvek l z $\mathcal{D}$ jednoznačný rozklad (alespoň na nějakém okolí jednotky) na produkt prvků z G a $\tilde{G}$. Řešení rovnice 1.6 a řešení $\psi^\mu(\sigma_+, \sigma_-) = (x^\mu \circ g)(\sigma_+, \sigma_-)$ rovnice 1.4 jsou poté ve vztahu

$$l(\sigma_+, \sigma_-) = g(\sigma_+, \sigma_-)\tilde{h}(\sigma_+, \sigma_-), \tag{1.7}$$

kde $g \in G$,$\tilde{h} \in \tilde{G}$ je řešením soustavy

$$\begin{aligned} (\partial_+ \tilde{h}\tilde{h}^{-1})_a &= -(\partial_+ g g^{-1}) E_{cb}(g) d_a^c(g), \\ (\partial_- \tilde{h}\tilde{h}^{-1})_a &= (\partial_- g g^{-1}) E_{bc}(g) d_a^c(g). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Matice $E(g)$ dualizovatelného sigma modelu má tvar

$$E(g) = \left[E_0^{-1} + \Pi(g)\right]^{-1}, \tag{1.9}$$

kde E_0 je konstantní matice a $\Pi(g)$ je definována vztahem

$$\Pi(g) = b(g)a(g)^{-1} = -\Pi^t(g), \tag{1.10}$$

kde ^{t} značí transpozici matice.

Matice $a(g), b(g), d(g)$ jsou generovány pomocí adjungované reprezentace Lieovy podalgebry G v Lieově algebře $\mathcal{D}$ v bázi $\{T^i, \tilde{T}_j\}$

$$Ad(g)^t = \begin{pmatrix} a(g) & 0 \\ b(g) & d(g) \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Duální model lze nyní získat následující záměnou

$$G \leftrightarrow \tilde{G}, \mathcal{G} \leftrightarrow \tilde{\mathcal{G}}, \Pi(g) \leftrightarrow \tilde{\Pi}(\tilde{g}), E_0 \leftrightarrow E_0^{-1}. \tag{1.12}$$

Řešení pohybových rovnic jsou následně svázány vztahem

$$l(\sigma_+, \sigma_-) = g(\sigma_+, \sigma_-)\tilde{h}(\sigma_+, \sigma_-) = \tilde{g}(\sigma_+, \sigma_-)h(\sigma_+, \sigma_-). \tag{1.13}$$

Příklady aplikace této teorie jsou uvedeny v [4].

Kapitola 2

Rovnoběžné rovinné vlny

Rovnoběžné rovinné vlny jsou zajímavé z hlediska dualizovatelnosti, protože produkují přesně řešitelné, zakřivené a časově závislé pozadí pro strunovou teorii a vyskytují se jako Penrosova limita různých systémů v teorii supergravitace. Pro aplikaci neabelovské T-dualizovaty je nezbytné nalézt symetrie dané metriky a tedy algebru Killingových vektorů.

2.1 Základní vlastnosti rovnoběžné rovinné vlny

Rovnoběžná rovinná vlna v Brinkmannových souřadicích (u, v, x_1, x_2) je

$$ds^2 = K_{ij}(u)x_i x_j du^2 + 2dudv + dx_1^2 + dx_2^2, \tag{2.1}$$

kde x_1, x_2 značí transverzální souřadnice, tenzor $K_{ij}(u)$ je symetrická matice a $dx_1^2 + dx_2^2$ je plochá metrika na transverzálním podprostoru.

Tato metrika je charakterizována existencí Killingova vektoru $X_2 = \partial_v$ a euklidovskou symetrií na transverzálním podprostoru. Tuto euklidovskou symetrii lze odvodit při užití Rosenových souřadnic, kde rovnoběžná rovinná vlna má tvar

$$ds^2 = 2d\tilde{u}d\tilde{v} + C_{ij}(u)dy_i dy_j, \tag{2.2}$$

kde x_1, x_2 značí transverzální souřadnice a symetrická matice $C_{ij}(u)$ je pozitivní, nedegenerovaná na oblasti, kde Rosenovy souřadnice mají smysl. Přechod mezi Brinkamannovými a Rosenovými souřadnicemi je uveden v [5]

Rovnoběžná rovinná vlna má obecně pětirozměrnou Heisenbergovu algebru symetrií:

$$\left[X_3^{(J)}, X_3^{(K)}\right] = \mathrm{const}^{JK} \cdot X_2.$$

2.2 Výpočet Killingových vektorů rovnoběžných rovinných vln

Mějme rovnoběžnou rovinnou vlnu v Brinkmannových souřadnicích (u, v, x_1, x_2):

$$ds^2 = K_{ij}(u)x_i x_j du^2 + 2dudv + dx_1^2 + dx_2^2, \tag{2.3}$$

tedy

$$g = \begin{pmatrix} K(u, x_i) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

kde g je matice odpovídající této metrice.

Hledáme-li nyní Killingovy vektory ve tvaru

$$X = f_u \partial_u + f_v \partial_v + f_{x_1} \partial_{x_1} + f_{x_2} \partial_{x_2}, \tag{2.5}$$

pak Killingova rovnice pro fixní indexy a, b má tvar

$$\mathcal{L}_X g_{ab} = X^c \partial_c g_{ab} + \partial_a X^c g_{cb} + \partial_b X^c g_{ac} = 0, \tag{2.6}$$

kde indexy (a, b, c) probíhájí souřadnicemi (u, v, x_1, x_2).

Dostáváme tedy rovnice:

$$(f_u \partial_u + f_{x_i} \partial_{x_i})K + 2\partial_u f_v + 2K\partial_u f_u = 0, \tag{2.7}$$

$$\partial_u f_u + \partial_v f_v = 0, \tag{2.8}$$

$$2\partial_v f_u = 0, \tag{2.9}$$

$$\partial_u f_{x_i} + \partial_{x_i} f_v + K\partial_{x_i} f_u = 0, \tag{2.10}$$

$$\partial_v f_{x_i} + \partial_{x_i} f_u = 0, \tag{2.11}$$

$$\partial_{x_i} f_{x_j} + \partial_{x_i} f_{x_j} = 0, \tag{2.12}$$

z rovnic 2.8, 2.9, 2.11, 2.12 a jejich derivací dostáváme podmínky na funkce $f_u, f_v, f_{x_1}, f_{x_2}$, které pak musí vypadat jako

$$\begin{aligned} f_u &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0(u), \\ f_v &= -\partial_u a_0(u) v - b(u, x_i), \\ f_{x_1} &= -a_1 v + c(u) x_2 + c_1(u), \\ f_{x_2} &= -a_2 v - c(u) x_1 + c_2(u), \end{aligned} \tag{2.13}$$

přičemž rovnice 2.7 a 2.10 nejsou splněny. Dosadíme-li tento tvar Killingova vektoru do rovnic 2.10 dostáváme rovnice

$$a_1 K + \partial_u c(u) x_2 + \partial_u c_1(u) + \partial_{x_1} b(u, x_i) = 0, \tag{2.14}$$

$$a_1 K - \partial_u c(u) x_1 + \partial_u c_2(u) + \partial_{x_2} b(u, x_i) = 0. \tag{2.15}$$

Nyní předpokládejme, že alespoň jedna z konstant a_1, a_2 je různá od 0. Derivováním a algebraickými úpravami získáváme rovnici, kterou musí splňovat neznámé funkce K z metriky

$$(a_1 \partial_{x_1} - a_2 \partial_{x_2}) K = -2 \partial_u c(u). \tag{2.16}$$

Tuto parciální diferenciální rovnici pro K jako funkci (x_1, x_2) lze řešit transformací souřadnic

$$\begin{aligned} x_1 &= -a_2 y_1 + a_1 y_2, \\ x_2 &= a_1 y_1 + a_2 y_2. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Tuto transformaci lze použít, je-li splněn výše uvedený předpoklad. Rovnice pak přejde do tvaru

$$\partial_{y_1} G = -2 \partial_u c(u), \tag{2.18}$$

kde

$$G(u, y_i) = K(u, x_i). \tag{2.19}$$

Řešením rovnice je pak funkce

$$G(u, y_i) = -2 \partial_u c(u) y_1 + G_2(u, y_2). \tag{2.20}$$

Provedeme-li inverzní transformaci souřadnic dostáváme

$$K(u, x_i) = -2 \partial_u c(u) \frac{a_2 x_2 - a_1 x_2}{a_1^2 + a_2^2} + K_2(u, \frac{a_1 x_2 + a_2 x_2}{a_1^2 + a_2^2}). \tag{2.21}$$

Dosadíme-li takovýto tvar K do metriky a užijeme nalezený tvar

Killingova vektoru, pak z lineárních členu ve v z rovnice 2.7 dostáváme rovnici

$$-2\partial_u^2 a_0(u) - 4\frac{a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2}\partial_u c(u) - \partial_2 K_2(u, \frac{a_1 x_2 + a_2 x_2}{a_1^2 + a_2^2}) = 0, \tag{2.22}$$

kde ∂_2 značí derivaci podle druhé proměnné. K_2 je tedy maximálně lineární v druhé proměnné a je tedy možné K přepsat do tvaru

$$K = \tilde{K_1}(u)x_1 + \tilde{K_2}(u)x_2 + \tilde{K_0}(u) \tag{2.23}$$

Spočítáme-li Riemannův tenzor metriky s takovýmto K zjistíme, že se jedná o plochou metriku zapsanou v „nevhodných“ souřadnicích. Killingovy vektory plochého prostoročasu jsou známy a tato varianta je tedy nezajímavá. Budeme tedy předpokládat, že $a_1 = a_2 = 0$.

Užitím rovnice 2.10 dostáváme očekávaný tvar koeficientů Killingova vektoru

$$\begin{aligned} f_u &= a_{01}u + a_{00}, \\ f_v &= -a_{01}v - \partial_u b_1(u)x_1 - \partial_u b_2(u)x_2 - \partial_u b_0(u), \\ f_{x_1} &= b_1(u) + f x_2, \\ f_{x_2} &= b_2(u) - f x_1. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Nyní není splněna jen rovnice 2.7. Předpokládáme-li dále, že $K(u, x_i) = K_{ij}x_i x_j$ pak tato rovnice tato je ve tvaru

$$(a_{01}u + a_{00})(x_1^2\partial_u K_{11} + 2x_1 x_2 \partial_u K_{12} + x_2^2 \partial_u a_{22}) +$$

$$+2a_{01}(K_{11}x_1^2 + 2K_{12}x_1x_2 + K_{22}x_2^2) + (2K_{11}x_1 + 2K_{12}x_2)(fx_2 + b_1(u)) +$$

$$+(2K_{22}x_2 + 2K_{12}x_1)(-fx_1 + b_2(u)) - 2\partial_u^2 b_1(u)x_1 - 2\partial_u^2 b_2(u)x_2 - 2\partial_u^2 b_0(u) = 0. \tag{2.25}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x_i dostáváme rovnice

$$\partial_u^2 b_1(u) = K_{11}b_1(u) + K_{12}b_2(u), \tag{2.26}$$

$$\partial_u^2 b_2(u) = K_{12}b_1(u) + K_{22}b_2(u), \tag{2.27}$$

$$\partial_u^2 b_0(u) = 0, \tag{2.28}$$

$$2a_{01}K_{11} - 2fK_{12} + (a_{01}u + a_{00})\partial_u K_{11} = 0, \tag{2.29}$$

$$4a_{01}K_{12} + 2fK_{11} - 2fK_{22} + 2(a_{01}u + a_{00})\partial_u K_{12} = 0, \tag{2.30}$$

$$2a_{01}K_{22} + 2fK_{12} + (a_{01}u + a_{00})\partial_u K_{22} = 0, \tag{2.31}$$

předpokládáme-li koeficienty $b_0 = b_1 = b_2 = 0$, pak dostáváme třídu Killingových vektorů

$$X_1 = (a_{01}u + a_{00})\partial_u - a_{01}v\partial_v + fx_2\partial_{x_1} - fx_1\partial_{x_2}, \tag{2.32}$$

kde koeficienty a_{01}, a_{00} a f splňují rovnice 2.29, 2.30, 2.31.

Z rovnice 2.28 plyne existence Killingova vektoru

$$X_2 = \partial_v. \tag{2.33}$$

Rovnice 2.26 a 2.27 tvoří soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu. Tato soustava má 4 řešení, které označíme $b_i^{(J)}(u), J = 1, 2, 3, 4$, z nichž dostáváme 4 Killingovy vektory

$$X_3^{(J)} = (-\partial_u b_1^{(J)}(u)x_1 - \partial_u b_2^{(J)}(u)x_2)\partial_v + b_1^{(J)}(u)\partial_{x_1} + b_2^{(J)}(u)\partial_{x_2}. \tag{2.34}$$

Komutační relace dvou vektoru typu X_3 jsou

$$\left[X_3^{(J)}, X_3^{(K)}\right] = (\partial_u b_i^{(J)}(u)b_i^{(K)}(u) - \partial_u b_i^{(K)}(u)b_i^{(J)}(u))\partial_v. \tag{2.35}$$

Jelikož $(\partial_u b_i^{(J)}(u)b_i^{(K)}(u) - \partial_u b_i^{(K)}(u)b_i^{(J)}(u))$ je Wronskián soustavy, jedná se o konstatní veličinu. Killingovy vektory $X_2, X_3^{(J)}$ tvoří tedy pětirozměrnou Heisenbergovu algebru.

Máme tedy 3 třídy Killingových vektorů

$$\begin{aligned}
X_1 &= (a_{01}u + a_{00})\partial_u - a_{01}v\partial_v + fx_2\partial_{x_1} - fx_1\partial_{x_2}, \\
X_2 &= \partial_v, \\
X_3^{(J)} &= (-\partial_u b_1^{(J)}(u)x_1 - \partial_u b_2^{(J)}(u)x_2)\partial_v + b_1^{(J)}(u)\partial_{x_1} + b_2^{(J)}(u)\partial_{x_2},
\end{aligned} \tag{2.36}$$

kde koeficienty a_{01}, a_{00} a f splňují rovnice 2.29, 2.30, 2.31 a $b_i^{(J)}(u), J = 1, 2, 3, 4$ je řešením soustavy rovnic 2.26, 2.27.

Celkem dostáváme potenciálně osmi rozměrnou algebru Killingových vektoru, ale podmínky na koeficienty a_{01}, a_{00}, f nám dimenzi sníží.

2.3 Analýza Heisenbergovy algebry symetrií

V předešlé části byla nalezena algebra symetrií rovnoběžné rovinné vlny, která měla jako podalgebru pětirozměrnou Heisenbergovu algebru $X_2, X_3^{(J)}$ J=1,2,3,4:

$$\left[X_3^{(J)}, X_3^{(K)}\right] = (\partial_u b_i^{(J)}(u) b_i^{(K)}(u) - \partial_u b_i^{(K)}(u) b_i^{(J)}(u))\partial_v = \mathrm{const}^{JK} \cdot X_2, \tag{2.37}$$

kde $b^{(J)}(u), J = 1, 2, 3, 4$ je řešením soustavy rovnic 2.26, 2.27.

Jelikož je $(\partial_u b_i^{(J)}(u) b_i^{(K)}(u) - \partial_u b_i^{(K)}(u) b_i^{(J)}(u)) = W(b^{(J)}, b^{(K)})$ je konstantní můžeme docílit rozdělení na dva typy řešení $b_i^{(k)}$ a $b_i^{*(k)}$ $k = 1, 2$ volbou počátečních podmínek

$$\begin{aligned} b_i^{(k)}(u_0) &= \delta_{ik},\ \partial_u b_i^{(k)}(u_0) = 0, \\ b_i^{*(k)}(u_0) &= 0,\ \partial_u b_i^{*(k)}(u_0) = \delta_{ik}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Označíme-li nyní $X_3^{(k)} = X_3(b_i^{(k)})$ a $X_5^{*(k)} = X_3(b_i^{*(k)})$ pak dostáváme komutační relace

$$\begin{aligned} \left[X_3^{(j)}, X_3^{(k)}\right] &= \left[X_5^{*(j)}, X_5^{*(k)}\right] = 0, \\ \left[X_3^{(j)}, X_3^{*(k)}\right] &= -\delta_{jk} X_4, \\ \left[X_3^{(j)}, X_2\right] &= \left[X_5^{*(j)}, X_4\right] = 0. \end{aligned} \tag{2.39}$$

2.4 Killingova algebra rovnoběžné rovinné vlny

Nyní se budeme podrobněji zajímat o algebru Killingových vektoru nalezených v sekci 2.2,

$$\begin{aligned} X_1 &= (a_{01}u + a_{00})\partial_u - a_{01}v\partial_v + fx_2\partial_{x_1} - fx_1\partial_{x_2}, \\ X_2 &= \partial_v, \\ X_3^{(J)} &= (-\partial_u b_1^{(J)}(u)x_1 - \partial_u b_2^{(J)}(u)x_2)\partial_v + b_1^{(J)}(u)\partial_{x_1} + b_2^{(J)}(u)\partial_{x_2}, \end{aligned} \tag{2.40}$$

kde koeficienty a_{01}, a_{00} a f splňují rovnice 2.29, 2.30, 2.31 a $b_i^{(J)}(u), J = 1, 2, 3, 4$ je řešením soustavy rovnic 2.26, 2.27.

Komutační relace Heisenbergovy algebry $X_2, X_3^{(J)}$ byly diskutovány výše. Je zřejmé, že

$$[X_1, X_2] = a_{01}X_2. \tag{2.41}$$

Zbývá tedy určit komutační relace $\left[X_1, X_3^{(J)}\right]$. Platí následující:

$$\left[X_1, X_3(b^{(I)})\right] = X_3(c^{(I)}), \tag{2.42}$$

kde

$$c_i^{(J)} = (a_{01}u + a_{00})\partial_u b_i^{(J)} - f_{ij}b_j^{(J)}, \tag{2.43}$$

kde pro jednoduchost zápisu je užito notace: $f : f_{12} = f, f_{21} = -f$ a $f_{11} = f_{22} = 0$. Jako důsledek rovnice **??** je $c_i^{(I)}$ také řešením soustavy 2.26, 2.27. $c_i^{(I)}$ musí tedy být lineární kombinací $b_i^{(J)}$ s koeficienty m_I^Ja tedy

$$X_3(c^{(I)}) = m_I^J X_3(b^{(J)}), \tag{2.44}$$

zvolíme-li bázi $b^{(J)}$ jako v předešlé části jako $b_i^{(k)}$ a $b_i^{*(k)}$ $k = 1, 2$, pak dostáváme komutační relace

$$\begin{aligned} \left[X_1, X_3(b^{(k)})\right] &= X_3(c^{(k)}), \\ \left[X_1, X_3(b^{*(k)})\right] &= X_3(c^{*(k)}), \end{aligned} \tag{2.45}$$

kde

$$c_i^{(k)} = (a_{01}u + a_{00})\partial_u b_i^{(k)} - f_{ij}b_j^{(k)} \tag{2.46}$$

a

$$c_i^{*(k)} = (a_{01}u + a_{00})\partial_u b_i^{*(k)} - f_{ij}b_j^{*(k)} \tag{2.47}$$

z počátečních podmínek kladených na funkce $b_i^{(k)}$ a $b_i^{*(k)}$ vyplývá

$$c_i^{(k)}(u_0) = -f_{ik}, \partial_u c_1^{(k)}(u_0) = (a_{01}u + a_{00})K_{ik} \tag{2.48}$$

$$c_i^{*(k)}(u_0) = (a_{01}u + a_{00})\delta_{ik}, \partial_u c_1^{*(k)}(u_0) = a_{01}\delta_{ik} - f_{ik}. \tag{2.49}$$

Tedy

$$c_i^{(k)} = f_{kl} b_i^{(l)} + (a_{01}u + a_{00}) K_{kl} b_i^{*(l)} \tag{2.50}$$

$$c_i^{*(k)} = (a_{01}u + a_{00}) b_i^{(k)} + (a_{01}\delta_{kl} + f_{kl}) b_1^{*(l)} \tag{2.51}$$

Dostáváme tedy komutační relace

$$\begin{aligned}
&\left[X_3^{(j)}, X_3^{(k)}\right] = \left[X_5^{*(j)}, X_5^{*(k)}\right] = 0,\\
&\left[X_3^{(j)}, X_3^{*(k)}\right] = -\delta_{jk} X_4,\\
&\left[X_3^{(j)}, X_2\right] = \left[X_5^{*(j)}, X_4\right] = 0,\\
&\left[X_1, X_3^{(k)}\right] = f_{kl} X_3^{(l)} + (a_{01}u + a_{00}) K_{kl} X_3^{*(l)},\\
&\left[X_1, X_3^{*(k)}\right] = (a_{01}u + a_{00}) X_3^{(k)} + (a_{01}\delta_{kl} + f_{kl}) X_1^{*(l)},\\
&[X_1, X_2] = a_{01} X_2.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Pro další zkoumání vlastností algebry symetrií rovnoběžných rovinných vln je nutné se omezit na konkrétní volbu $K_{ij}(u)x_i x_j$. V následujícím textu budeme zkoumat metriku rovnoběžné rovinné vlny pro některé speciální případy.

Kapitola 3

Výpočet pro speciální případy

3.1 Speciální případ $K_{ij}(u)x_i x_j = -x_1^2 - x_2^2$

Mějme nyní speciální příklad rovnoběžné rovinné vlny s metrikou v Brinkmannově souřadnicích ve tvaru

$$ds^2 = (-x_1^2 - x_2^2)du^2 + 2dudv + dx_1^2 + dx_2^2, \tag{3.1}$$

tedy

$$g = \begin{pmatrix} -x_1^2 - x_2^2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Killingovu algebru příslušící této metrice najdeme aplikací obecného řešení popsaného v předešlých částech.

Heisenbergovu algebru pro tuto metriku získáme řešením soustavy

$$\begin{aligned} \partial_u^2 b_1(u) &= -b_1(u), \\ \partial_u^2 b_2(u) &= -b_2(u). \end{aligned} \tag{3.3}$$

S počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} b_i^{(k)}(0) = \delta_{ik},\, \partial_u b_i^{(k)}(0) = 0, \\ b_i^{*(k)}(0) = 0,\, \partial_u b_i^{*(k)}(0) = \delta_{ik}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Řešením soustavy jsou funkce $\sin(u)$ a $\cos(u)$ a volba počátečních podmínek nás omezí na

$$
\begin{aligned}
b_1^{(1)} &= \cos(u),\ b_2^{(1)} = 0, \\
b_1^{(2)} &= 0,\ b_2^{(2)} = \cos(u)
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

a

$$
\begin{aligned}
b_1^{*(1)} &= \sin(u),\ b_2^{*(1)} = 0, \\
b_1^{*(2)} &= 0,\ b_2^{*(2)} = \sin(u).
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Odtud dostáváme Killingovy vektory po dosazení do vztahu

$$
X_3^{(J)} = (-\partial_u b_1^{(J)}(u) x_1 - \partial_u b_2^{(J)}(u) x_2)\partial_v + b_1^{(J)}(u)\partial_{x_1} + b_2^{(J)}(u)\partial_{x_2} \tag{3.7}
$$

jako

$$
\begin{aligned}
X_3^{(1)} &= (\sin(u) x_1)\partial_v + \cos(u)\partial_{x_1}, \\
X_3^{(2)} &= (\sin(u) x_2)\partial_v + \cos(u)\partial_{x_2}
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

a

$$
\begin{aligned}
X_3^{*(1)} &= (-\cos(u) x_1)\partial_v + \sin(u)\partial_{x_1}, \\
X_3^{*(2)} &= (-\cos(u) x_2)\partial_v + \sin(u)\partial_{x_2}.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Přidáním Killingova vektoru $X_2 = \partial_v$ dostáváme pětirozměrnou Heisenbergovu algebru.

Pro sestavení úplné Killingovy algebry příslušící teto metrice, nám zbývá zkoumat třídu Killingových vektorů

$$
X_1 = (a_{01} u + a_{00})\partial_u - a_{01} v \partial_v + f x_2 \partial_{x_1} - f x_1 \partial_{x_2}, \tag{3.10}
$$

kde koeficienty a_{01}, a_{00}, f splňují rovnice 2.29, 2.30, 2.31 a tedy

$$
a_{01} = 0. \tag{3.11}
$$

Odtud máme tedy 2 Killingovy vektory

$$
\begin{aligned}
X_1^{(1)} &= \partial_u, \\
X_1^{(2)} &= x_2 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_2}.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Úplná Killingova Algebra této rovnoběžné rovinné vlny je tedy

$$
\begin{aligned}
X_1^{(1)} &= \partial_u, \\
X_1^{(2)} &= x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2}, \\
X_2 &= \partial_v, \\
X_3^{(1)} &= (\sin(u)x_1)\partial_v + \cos(u)\partial_{x_1}, \\
X_3^{(2)} &= (\sin(u)x_2)\partial_v + \cos(u)\partial_{x_2}, \\
X_3^{*(1)} &= (-\cos(u)x_1)\partial_v + \sin(u)\partial_{x_1}, \\
X_3^{*(2)} &= (-\cos(u)x_2)\partial_v + \sin(u)\partial_{x_2},
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

kde nenulové komutátory jsou

$$
\begin{gathered}
\left[X_1^{(1)}, X_3^{(k)}\right] = -X_3^{*(k)}, \ \left[X_1^{(1)}, X_3^{*(k)}\right] = X_3^{(k)}, \\
\left[X_1^{(2)}, X_3^{(1)}\right] = X_3^{(2)}, \ \left[X_1^{(2)}, X_3^{(2)}\right] = -X_3^{(1)}, \\
\left[X_1^{(2)}, X_3^{*(1)}\right] = X_3^{*(2)}, \ \left[X_1^{(2)}, X_3^{*(2)}\right] = -X_3^{*(1)}, \\
\left[X_3^{(k)}, X_3^{*(j)}\right] = -\delta_{kj}X_2.
\end{gathered}
\tag{3.14}
$$

Budeme-li nyní hledat čtyřrozměrné podalgebry symetrií dané metriky nalezneme podalgebry

1. (S_1): $\{X_3^{(1)} + \alpha X_3^{*(2)}, X_3^{(2)} + \beta X_3^{*(2)}, X_3^{*(1)} + \gamma X_3^{*(2)}, X_2\}$
2. (S_2): $\{\alpha X_3^{(1)} + \beta X_3^{*(2)}, \beta X_3^{*(1)} - \alpha X_3^{(2)}, X_2, X_1^{(2)}\}(\alpha \neq 0 \cup \beta \neq 0)$
3. (S_3): $\{\alpha X_3^{*(1)} + \beta X_3^{(2)}, \alpha X_3^{(1)} - \beta X_3^{*(2)}, X_2, X_1^{(1)}\}(\alpha \neq 0 \cup \beta \neq 0)$
4. (S_4): $\{X_3^{*(1)} + X_3^{(2)}, X_3^{(1)} - X_3^{*(2)}, X_2, X_1^{(1)} + X_1^{(2)}\}$

kde α, β, γ jsou volné parametry.

Při kontrole zda tyto podgrupy působí tranzitivně na časoprostoru požadujeme, aby čtyři nezávislé Killingovy vektory tvořily bázi tečného prostoru pro libovolný bod časoprostoru. Pro každý bod časoprostoru musí tedy existovat invertovatelné matice $A(u, v, x_1, x_2)$, které řeší rovnici

$$
\partial_a = A_a^b(u, v, x_1, x_2)X_b. \tag{3.15}
$$

kde $a, b = 1, 2, 3, 4$, $\partial_a = \partial_u, \partial_v, \partial_{x_2}, \partial_{x_2}$ a X_b tvoří bázi podalgebry.

Podmínka na volnou akci podgrupy symetrií infinitezimálně říká, že pokud pro nějaký bod časoprostoru existuje vektor z příslušné Lieovy podalgebry takový, že má na tento bod nulovou akci, pak musí byt nulový.

Zkoumáním podgrup symetrií zjistíme, že podalgebry (S_1) a (S_2) negenerují změnu v souřadnici u a tedy nemohou působit tranzitivně.

Při kontrole podgrupy S_3 dostáváme z tranzitivity a volnosti podmínku na parametry $\alpha, \beta : \alpha\beta \neq 0$. Podgrupa S_4 působí také tranzitivně a volně.

Podgrupy, které působí volně a tranzitivně na tomto časoprostoru tedy jsou

(S_3): $\{\alpha X_3^{*(1)} + \beta X_3^{(2)}, \alpha X_3^{(1)} - \beta X_3^{*(2)}, X_2, X_1^{(1)}\}, (\alpha\beta \neq 0)$

(S_4): $\{X_3^{*(1)} + X_3^{(2)}, X_3^{(1)} - X_3^{*(2)}, X_2, X_1^{(1)} + X_1^{(2)}\}$

3.2 Speciální případ $K_{ij}(u)x_ix_j = -\frac{3}{(u^2+1)^2}x_1^2 + \frac{2u^2-1}{(u^2+1)^2}x_2^2$

Mějme rovnoběžnou rovinnou vlnu v Brinkmannově souřadnicích

$$ds^2 = (-\frac{3}{(u^2+1)^2}x_1^2 + \frac{2u^2-1}{(u^2+1)^2}x_2^2)du^2 + 2dudv + dx_1^2 + dx_2^2, \tag{3.16}$$

tedy

$$g = \begin{pmatrix} -\frac{3}{(u^2+1)^2}x_1^2 + \frac{2u^2-1}{(u^2+1)^2}x_2^2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Rovnice pro generátory Heisenbergovy algebry mají nyní tvar

$$\begin{aligned} \partial_u^2 b_1(u) &= -\frac{3}{(u^2+1)^2}b_1(u), \\ \partial_u^2 b_2(u) &= \frac{2u^2-1}{(u^2+1)^2}b_2(u). \end{aligned} \tag{3.18}$$

S počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} b_i^{(k)}(0) = \delta_{ik},\, \partial_u b_i^{(k)}(0) = 0, \\ b_i^{*(k)}(0) = 0,\, \partial_u b_i^{*(k)}(0) = \delta_{ik}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Řešením první rovnice jsou funkce $\sqrt{u^2+1}e^{2i\tan^{-1}(u)}$ $i\sqrt{u^2+1}e^{-2i\tan^{-1}(u)}$, a řešením druhé rovnice jsou funkce $\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}$ a $\frac{u^3+3u}{\sqrt{u^2+1}}$.

Počáteční podmínky nám zafixují funkce na

$$b_1^{(1)} = \frac{1}{2}\sqrt{u^2+1}(e^{\sqrt{2}\tan^{-1}(u)} + e^{-\sqrt{2}\tan^{-1}(u)}), b_2^{(1)} = 0$$

$$b_1^{(2)} = 0, b_2^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} \tag{3.20}$$

a

$$b_1^{*(1)} = \frac{\sqrt{u^2+1}}{2\sqrt{2}}(e^{\sqrt{2}\tan^{-1}(u)} - e^{-\sqrt{2}\tan^{-1}(u)}), b_2^{*(1)} = 0$$

$$b_1^{*(2)} = 0, b_2^{*(2)} = \frac{u^3+3u}{3\sqrt{u^2+1}}. \tag{3.21}$$

Dosazením do vztahu

$$X_3^{(J)} = (-\partial_u b_1^{(J)}(u)x_1 - \partial_u b_2^{(J)}(u)x_2)\partial_v + b_1^{(J)}(u)\partial_{x_1} + b_2^{(J)}(u)\partial_{x_2} \tag{3.22}$$

získáváme Killingovy vektory

$$
\begin{aligned}
X_3^{(1)} =& (-\frac{(u-\sqrt{2})(e^{-\sqrt{2}\tan^{-1}(u)}) + (u+\sqrt{2})(e^{\sqrt{2}\tan^{-1}(u)})}{2\sqrt{u^2+1}})x_1\partial_v + \\
& \frac{1}{2}\sqrt{u^2+1}(e^{\sqrt{2}\tan^{-1}(u)} + e^{-\sqrt{2}\tan^{-1}(u)})\partial_{x_1}, \\
X_3^{(2)} =& (\frac{u}{(u^2+1)^{\frac{3}{2}}}x_2)\partial_v + \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\partial_{x_2}
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

a

$$
\begin{aligned}
X_3^{*(1)} =& -(\frac{(2-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}\tan^{-1}(u)} + (2+\sqrt{2})e^{\sqrt{2}\tan^{-1}(u)}}{4\sqrt{u^2+1}})x_1\partial_v + \\
& \frac{\sqrt{u^2+1}}{2\sqrt{2}}(e^{\sqrt{2}\tan^{-1}(u)} - e^{-\sqrt{2}\tan^{-1}(u)})\partial_{x_1} \\
X_3^{*(2)} =& (-\frac{2u^4+3u^2+3}{3(u^2+1)^{\frac{3}{2}}})x_2\partial_v + \frac{u^3+3u}{3\sqrt{u^2+1}}\partial_{x_2}.
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

Přidáním Killingova vektoru X_2 získáváme pětirozměrnou Heisenbergovu algebru. Zbývá zkoumat Killingovy vektory z třídy X_1

$$
X_1 = (a_{01}u + a_{00})\partial_u - a_{01}v\partial_v + fx_2\partial_{x_1} - fx_1\partial_{x_2}, \tag{3.25}
$$

kde koeficienty a_{01}, a_{00}, f splňují rovnice 2.29, 2.30, 2.31 a tedy

$$
\begin{aligned}
2a_{01}(\frac{3}{(u^2+1)^2}) + (a_{01}u + a_{00})(\frac{12u}{(u^2+1)^3}) &= 0, \\
2f(-\frac{3}{(u^2+1)^2}) - 2f(\frac{2u^2-1}{(u^2+1)^2}) &= 0, \\
2a_{01}(\frac{2u^2-1}{(u^2+1)^2}) + (a_{01}u + a_{00})(\frac{4u^3-8}{(u^2+1)^3}) &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

Tyto rovnice nemají netriviální řešení a tedy příslušná metrika nemá Killingovy vektory třídy X_1.

Algebra symetrií této metriky je tedy tvořena pouze pětirozměrnou Heisenbergovou algebrou

$$
\begin{aligned}
X_2 =&\partial_v, \\
X_3^{(1)} =&(-\frac{(u-\sqrt{2})(e^{-\sqrt{2}\tan^{-1}(u)})+(u+\sqrt{2})(e^{\sqrt{2}\tan^{-1}(u)})}{2\sqrt{u^2+1}})x_1\partial_v+ \\
&+\frac{1}{2}\sqrt{u^2+1}(e^{\sqrt{2}\tan^{-1}(u)}+e^{-\sqrt{2}\tan^{-1}(u)})\partial_{x_1}, \\
X_3^{(2)} =&(\frac{u}{(u^2+1)^{\frac{3}{2}}}x_2)\partial_v+\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\partial_{x_2}, \\
X_3^{*(1)} =&-(\frac{(2-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}tan^{-1}(u)}+(2+\sqrt{2})e^{\sqrt{2}\tan^{-1}(u)}}{4\sqrt{u^2+1}})x_1\partial_v+ \\
&+\frac{\sqrt{u^2+1}}{2\sqrt{2}}(e^{\sqrt{2}\tan^{-1}(u)}-e^{-\sqrt{2}\tan^{-1}(u)})\partial_{x_1}, \\
X_3^{*(2)} =&(-\frac{2u^4+3u^2+3}{3(u^2+1)^{\frac{3}{2}}})x_2\partial_v+\frac{u^3+3u}{3\sqrt{u^2+1}}\partial_{x_2}.
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

S nenulovými komutátory

$$\left[X_3^{(k)}, X_3^{*(j)}\right] = -\delta_{kj}X_2. \tag{3.28}$$

Chceme-li nyní nalézt čtyřrozměrné podalgebry symetrií, stačí nám vzít libovolný tři-dimenzionální podprostor vektoru třídy X_3 a přidat X_2. Dostáváme podalgebry

1. (S_1): $\{X_3^{(1)}+\alpha X_3^{*(2)}, X_3^{(2)}+\beta X_3^{*(2)}, X_3^{*(1)}+\gamma X_3^{*(2)}, X_2\}$

Z úvah v minulém speciálním případu vyplývá, že tato podgrupa nepůsobí volně na časoprostoru.

3.3 Speciální případ $K_{ij}(u)x_ix_j = -2\mathbf{sech}^2(u)x_1^2$

Mějme rovnoběžnou rovinnou vlnu v Brinkmannově souřadnicích

$$ds^2 = (-2\mathrm{sech}^2(u)x_1^2)du^2 + 2dudv + dx_1^2 + dx_2^2, \tag{3.29}$$

tedy

$$g = \begin{pmatrix} -2\mathrm{sech}^2(u)x_1^2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.30}$$

Rovnice pro generátory Heisenbergovy algebry mají nyní tvar

$$\begin{aligned} \partial_u^2 b_1(u) &= -2\mathrm{sech}^2(u) b_1(u), \\ \partial_u^2 b_2(u) &= 0. \end{aligned} \tag{3.31}$$

S počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} b_i^{(k)}(u_0) = \delta_{ik},\ \partial_u b_i^{(k)}(u_0) = 0, \\ b_i^{*(k)}(u_0) = 0,\ \partial_u b_i^{*(k)}(u_0) = \delta_{ik}. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Řešením první rocnic jsou funkce

$$\begin{aligned} b_1(u) =& c_1 \tanh(u) + c_2(-\frac{1}{2}\tanh(u)(\log(1-\tanh(u)) - \log(\tanh(u)+1)) - 1), \\ b_2(u) =& d_1 u + d_0. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Počáteční podmínky nám zafixují funkce na

$$\begin{aligned} b_1^{(1)} = \frac{1}{2}(\tanh(u)(\log(1-\tanh(u)) - \log(\tanh(u)+1)) + 2), b_2^{(1)} = 0 \\ b_1^{(2)} = 0, b_2^{(2)} = 1 \end{aligned} \tag{3.34}$$

a

$$\begin{aligned} b_1^{*(1)} = \tanh(u),\ b_2^{*(1)} = 0, \\ b_1^{*(2)} = 0,\ b_2^{*(2)} = u. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Dostáváme tedy Killingovy vektory

$$
\begin{aligned}
X_3^{(1)} =& -(\frac{1}{2}\text{sech}^2(u)(\sinh(2u) - \log(1-\tanh(u)) + \log(\tanh(u)+1))x_1\partial_v + \\
&+ \frac{1}{2}(\tanh(u)(\log(1-\tanh(u)) - \log(\tanh(u)+1)) + 2)\partial_{x_1}, \\
X_3^{(2)} =& \partial_{x_2}, \\
X_3^{*(1)} =& -(\text{sech}^2(u))x_1\partial_v + (\tanh(u))\partial_{x_1}, \\
X_3^{*(2)} =& x_2\partial_v + u\partial_{x_2}.
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

Přidáním Killingova vektoru X_2 získáme celou pětirozměrnou Heisenbergovu algebru. Pro získání kompletní Killingovy algebry dané metriky zbývá zkoumat Killingovy vektory třídy X_1

$$
X_1 = (a_{01}u + a_{00})\partial_u - a_{01}v\partial_v + fx_2\partial_{x_1} - fx_1\partial_{x_2}, \tag{3.37}
$$

kde koeficienty a_{01}, a_{00}, f splňují rovnice 2.29, 2.30, 2.31 a tedy

$$
\begin{aligned}
-2a_{01}^2(u) + (a_{01}u + a_{00})4\tanh(u)\text{sech}^2(u) = 0, \\
-2f\text{sech}^2(u) = 0.
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

Tyto rovnice nemají netriviální řešení a tedy neexistují Killingovy vektory třídy X_1. Máme tedy pětirozměrnou Killingovu algebru

$$
\begin{aligned}
X_2 =& \partial_v \\
X_3^{(1)} =& -(\frac{1}{2}\text{sech}^2(u)(\sinh(2u) - \log(1-\tanh(u)) + \log(\tanh(u)+1))x_1\partial_v + \\
&+ \frac{1}{2}(\tanh(u)(\log(1-\tanh(u)) - \log(\tanh(u)+1)) + 2)\partial_{x_1}, \\
X_3^{(2)} =& \partial_{x_2}, \\
X_3^{*(1)} =& -(\text{sech}^2(u))x_1\partial_v + (\tanh(u))\partial_{x_1}, \\
X_3^{*(2)} =& x_2\partial_v + u\partial_{x_2}.
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

S nenulovými komutačními relacemi

$$
\left[X_3^{(k)}, X_3^{*(j)}\right] = -\delta_{kj}X_2. \tag{3.40}
$$

Čtyřrozměrné podalgebry pak jsou izomorfní

1. (S_1): $\{X_3^{(1)} + \alpha X_3^{*(2)}, X_3^{(2)} + \beta X_3^{*(2)}, X_3^{*(1)} + \gamma X_3^{*(2)}, X_2\}$

Z předešlých úvah vyplývá, že tato podgrupa nepůsobí volně na časoprostoru.

3.4 Speciální případ $K_{ij}(u)x_ix_j = -2\mathbf{sech}^2(u)(x_1^2 + x_2^2)$

Mějme rovnoběžnou rovinnou vlnu v Brinkmannově souřadnicích

$$ds^2 = (-2\text{sech}^2(u)x_1^2 - 2\text{sech}^2(u)x_2^2)du^2 + 2dudv + dx_1^2 + dx_2^2, \tag{3.41}$$

tedy:

$$g = \begin{pmatrix} -2\text{sech}^2(u)x_1^2 - 2\text{sech}^2(u)x_2^2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.42}$$

Rovnice pro generátory Heisenbergovy algebry mají nyní tvar

$$\begin{aligned} \partial_u^2 b_1(u) &= -\,2\text{sech}^2(u)b_1(u), \\ \partial_u^2 b_2(u) &= -\,2\text{sech}^2(u)b_2(u). \end{aligned} \tag{3.43}$$

S počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} b_i^{(k)}(u_0) = \delta_{ik},\ \partial_u b_i^{(k)}(u_0) = 0, \\ b_i^{*(k)}(u_0) = 0,\ \partial_u b_i^{*(k)}(u_0) = \delta_{ik}. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Řešením jednotlivých rovnic je funkce

$$b_i(u) = c_1 \tanh(u) + c_2(-\frac{1}{2}\tanh(u)(\log(1-\tanh(u)) - \log(\tanh(u)+1)) - 1),$$

Počáteční podmínky nám zafixují funkce na

$$\begin{aligned} b_1^{(1)} &= \frac{1}{2}(\tanh(u)(\log(1-\tanh(u)) - \log(\tanh(u)+1)) + 2), b_2^{(1)} = 0, \\ b_1^{(2)} &= 0, b_2^{(2)} = \frac{1}{2}(\tanh(u)(\log(1-\tanh(u)) - \log(\tanh(u)+1)) + 2) \end{aligned} \tag{3.45}$$

a

$$\begin{aligned} b_1^{*(1)} &= \tanh(u), b_2^{*(1)} = 0, \\ b_1^{*(2)} &= 0, b_2^{*(2)} = \tanh(u). \end{aligned} \tag{3.46}$$

Dostáváme Killingovy vektory

$$
\begin{aligned}
X_3^{(1)} =& -(\frac{1}{2}\mathrm{sech}^2(u)(\sinh(2u) - \log(1-\tanh(u)) + \log(\tanh(u)+1))x_1\partial_v + \\
&+ \frac{1}{2}(\tanh(u)(\log(1-\tanh(u)) - \log(\tanh(u)+1)) + 2)\partial_{x_1}, \\
X_3^{(2)} =& -(\frac{1}{2}\mathrm{sech}^2(u)(\sinh(2u) - \log(1-\tanh(u)) + \log(\tanh(u)+1))x_2\partial_v + \\
&+ \frac{1}{2}(\tanh(u)(\log(1-\tanh(u)) - \log(\tanh(u)+1)) + 2)\partial_{x_2}, \\
X_3^{*(1)} =& -(\mathrm{sech}^2(u))x_1\partial_v + (\tanh(u))\partial_{x_1}, \\
X_3^{*(2)} =& -(\mathrm{sech}^2(u))x_2\partial_v + (\tanh(u))\partial_{x_2}.
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

Přidáním Killingova vektoru X_2 pak dostáváme kompletní Heisenbergovu algebru a zbývá tedy zkoumat Killingovy vektory třídy X_1:

$$
X_1 = (a_{01}u + a_{00})\partial_u - a_{01}v\partial_v + fx_2\partial_{x_1} - fx_1\partial_{x_2}, \tag{3.48}
$$

kde koeficienty a_{01}, a_{00}, f splňují rovnice 2.29, 2.30, 2.31 a tedy

$$
\begin{aligned}
-2a_{01}\mathrm{sech}^2(u) + (a_{01}u + a_{00})4\tanh(u)\mathrm{sech}^2(u) = 0, \\
-2f\mathrm{sech}^2(u) + f2\mathrm{sech}^2(u) = 0, \\
-2a_{01}\mathrm{sech}^2(u) + (a_{01}u + a_{00})4\tanh(u)\mathrm{sech}^2(u) = 0.
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

Odtud dostáváme existenci Killingova vektoru:

$$
X_1^{(2)} = x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2}. \tag{3.50}
$$

Kompletní algebra symetrií této metriky je tedy:

$$
\begin{aligned}
X_1^{(2)} =& x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2}, \\
X_2 =& \partial_v, \\
X_3^{(1)} =& -(\frac{1}{2}\mathrm{sech}^2(u)(\sinh(2u) - \log(1-\tanh(u)) + \log(\tanh(u)+1))x_1\partial_v + \\
&+ \frac{1}{2}(\tanh(u)(\log(1-\tanh(u)) - \log(\tanh(u)+1)) + 2)\partial_{x_1}, \\
X_3^{(2)} =& -(\frac{1}{2}\mathrm{sech}^2(u)(\sinh(2u) - \log(1-\tanh(u)) + \log(\tanh(u)+1))x_2\partial_v + \\
&+ \frac{1}{2}(\tanh(u)(\log(1-\tanh(u)) - \log(\tanh(u)+1)) + 2)\partial_{x_2},
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

$$
\begin{aligned}
X_3^{*(1)} &= -\,(\operatorname{sech}^2(u))x_1\partial_v + (\tanh(u))\partial_{x_1},\\
X_3^{*(2)} &= -\,(\operatorname{sech}^2(u))x_2\partial_v + (\tanh(u))\partial_{x_2},
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

kde nenulové komutátory jsou:

$$
\begin{aligned}
&\left[X_1^{(2)}, X_3^{(1)}\right] = X_3^{(2)}, \left[X_1^{(2)}, X_3^{(2)}\right] = -X_3^{(1)},\\
&\left[X_1^{(2)}, X_3^{*(1)}\right] = X_3^{*(2)}, \left[X_1^{(2)}, X_3^{*(2)}\right] = -X_3^{*(1)},\\
&\left[X_3^{(k)}, X_3^{*(j)}\right] = -\delta_{kj}X_2.
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

Hledáním čtyřrozměrných podalgeber symetrií dostáváme:

1. (S_1): $\{X_3^{(1)} + \alpha X_3^{*(2)}, X_3^{(2)} + \beta X_3^{*(2)}, X_3^{*(1)} + \gamma X_3^{*(2)}, X_2\}$

2. (S_2): $\{\alpha X_3^{(1)} + \beta X_3^{*(2)}, \beta X_3^{*(1)} - \alpha X_3^{(2)}, X_2, X_1^{(2)}\}(\alpha \neq 0 \cup \beta \neq 0)$

Z úvah v prvním speciálním případu vyplývá, že tyto podgrupy nepůsobí volně na časoprostoru.

Kapitola 4

Závěr

Pro konstrukci duálního modelu pomocí neabelovské T-duality je možné použít množinu symetrií dané metriky. Postačující podmínkou na dualizovatelnost je, aby zadaný model měl dostatek symetrií a existovala čtyřrozměrná algebra (podalgebra) symetrií, která působí tranzitivně a volně na časoprostoru. Pokud existuje takováto algebra (podalgebra) symetrií, pak užitím neabelovské T-duality můžeme z našeho modelu přejít na duální model. Následně je možno použít znalosti řešení prvního modelu při řešení duálního modelu a naopak.

Při podrobném zkoumání metriky rovnoběžné rovinné vlny jsem našel struktůru Killingovy algebry pro obecný model a tuto znalost následně aplikoval na některé speciální případy. Pro velkou část speciálních případů jsem zjistil, že algebra symetrií neobsahuje čtyřrozměrnou podalgebru, která by působila volně a tranzitivně na časoprostoru a tyto případy nejsou tedy z hlediska dualizovatelnosti zajímavé. Pro speciální případ: $K_{ij}(u)x_ix_j = -x_1^2 - x_2^2$, jsem zkoumáním algebry symetrií nalezl podalgebry, které působí volně a tranzitivně na časoprostoru. Tento případ je tedy vhodný ke konstrukci duálních modelů.

Literatura

[1] C. Klimčík, *Poisson-Lie T-duality*, Nucl. Phys. B(Proc. Suppl.)46 (1996) 116, [hep-th/9509095].

[2] M. Blau, M. O'Loughlin, G. Papadopoulos, A. Tseytlin, *Solvable models of strings in Homegenous Plane Waves*, Nucl. Phys. B 673 (2003) 57, [hep-th/0304198]

[3] G. Papadopoulus, J.G. Russo and A.A. Tseytlin, *Solvable model of strings in a timedependent plane wave backround*, Class. Quant. Grav 20 (2003) 969, [hep-th/0211289]

[4] L. Hlavatý, M Turek, *Nonabelian dualization of plane wave backrounds*, J. Mod. Phys. 3 (2012) 1088, [arXiv:1201.5939]

[5] M. Blau, M. O'Loughlin, *Homogenous Plane Waves*, Nucl. Phys. B 654 (2003) 135, [hep-th/0212135]

[6] M. Blau, J. Figueroa-O'Farrill, G. Papadopoulus, *Penrose limits, supergravity and brane dynamics*, class. Quant. Grav. 19 (2002) 4753, [hep-th/0202111]

[7] Program Wolfram Matematika 9