České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky
Obor: Matematické inženýrství
Zaměření: Matematická fyzika

Dvourozměrné Lieovské grupy a jejich Poissonovy závorky
Two-dimensional Lie groups and their Poisson brackets

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval: Iveta Semorádová
Vedoucí práce: prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.
Rok: 2013

Před svázáním místo téhle stránky $\boxed{\text{vložíte zadání práce}}$ s podpisem děkana (bude to jediný oboustranný list ve Vaší práci) !!!!

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracovala samostatně a použila jsem pouze literaturu uvedenou v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č.121/2000 Sb., o právu atorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne ....

....
Iveta Semorádová

Poděkování

Děkuji prof. RNDr. Ladislavu Hlavatému, DrSc. za vedení mé bakalářské práce, za trpělivost a podnětné připomínky, které ji obohatily.

Iveta Semorádová

Název práce:
Dvourozměrné Lieovské grupy a jejich Poissonovy závorky

Autor: Iveta Semorádová

Obor: Matematické inženýrství
Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.
Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze
Konzultant: —

Abstrakt: Lieovy bialgebry jsou Lieovskými algebrami Poisson-Lieových grup. Jsou to Lieovy algebry společně s lineárním zobrazením zvaným kokomutátor, jež definuje Lieovu závorku na duálu Lieovy algebry. V této práci se zaměřujeme na dvourozměrné kohraniční Lieovy bialgebry. Kokomutátor je u nich definován jako kohranice tzv. r-matice. Dostatečnou podmínkou, aby r-matice definovala kokomutátor, je klasická Yang-Baxterova rovnice. Určení těchto r-matic nám umožní spočítat Poissonovy struktury příslušných Poisson-Lieových grup.

Klíčová slova: Lieova bialgebra, r-matice, Poissonova závorka

Title:
Two-dimensional Lie groups and their Poisson brackets

Author: Iveta Semorádová

Abstract: Lie bialgebras are Lie algebras of Poisson-Lie groups. They are Lie algebras together with linear map called cocomutator, which defines a Lie bracket on a dual of the Lie algebra. In this work we focus on two-dimensional coboundary Lie bialgebras. Their cocomutator is defined as a coboundary of so-called r-matrix. Sufficient condition for r-matrix to define the cocomutator is classical Yang-Baxter equation. Determination of those r-matrices allow us to compute Poisson structures of corresponding Poisson-Lie groups.

Key words: Lie bialgebra, r-matrix, Poisson bracket

Obsah

Úvod

Tato práce se zabývá problematikou Poisson-Lieových grup a Lieovských bialgeber. Ty hrají významnou roli v klasické teorii integrabilních systémů.

Poisson-Lieovy grupy jsou Lieovy grupy vybavené Poissonovou závorkou, kompatibilní s grupovým násobením. Poissonova závorka indukuje na příslušné Lieově algebře dodatečnou strukturu - zobrazení definující Lieovu závorku na jejím duálu. Lieovu algebru s takovouto dodatečnou strukturou pak nazýváme Lieova bialgebra. Tato struktura také může být popsána pomocí kohranice r-matice, jež vyhovuje klasické Yang-Baxterově rovnici.

Úkolem této práce je najít r-matice dvourozměrných kohraničních Lieových bialgeber a následně jejich pomocí určit Poissonovské struktury na příslušných Poisson-Lieových grupách.

V první kapitole se seznámíme se základními pojmy z teorie Lieových bialgeber. Nejprve se zabýváme kohomologií Lieových algeber a samotnou definicí Lieovy bialgebry. Díky definici koadjungované reprezentace pak můžeme zavést duál Lieovy bialgebry a následně také Maninovy trojice, které nám velice usnadní další práci.

V druhé kapitole zadefinujeme pojmy kohraniční Lieova bialgebra a r-matice. Ukážeme si též souvislost mezi kohraničními Lieovskými bialgebrami a klasickou Yang-Baxterovou rovnicí.

Předmětem třetí kapitoly je aplikace teoretických poznatků z předešlých dvou kapitol na Lieovy bialgebry dimenze 2. Určíme, které z nich jsou kohraničí a spočítáme příslušné r-matice.

Po zavedení pojmu Poissonova varieta, ve čtvrté kapitole konečně definujeme pojem Poisson-Lieových grup a zabýváme se jejich souvislostí s Lieovými bialgebrami, především pak kohraničními Lieovými bialgebrami. Na závěr pak díky těmto poznatkům a výsledkům z kapitoly 3 můžeme spočítat Poissonovské struktury příslušných Poisson-Lieových grup.

Kapitola 1

Lieovy bialgebry

V této kapitole shrneme základní poznatky o Lieovských bialgebrách. Budeme čerpat především z práce [3], v poslední podkapitole též z práce [5].

1.1 Kohomologie Lieovských algeber

Definice 1.1.1 Nechť L je konečně–rozměrný vektorový prostor nad tělesem K. L nazveme **Lieova algebra** nad K, pokud existuje zobrazení $(x, y) \to [x, y]$ splňující:

1. $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, y] + \beta[y, z]$ pro $\alpha, \beta \in \mathrm{K}$ (linearita),
2. $[x, y] = -[x, y]$ (antisymetrie),
3. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ pro všechny $x, y, z \in \mathrm{L}$ (Jacobiho identita).

Definice 1.1.2 Nechť L je Lieova algebra nad K a V je konečně–rozměrný vektorový prostor. **Reprezentace** L ve V je homomorfismus $x \to T(x)$ Lieovy algebry L do množiny lineárních operátorů na V. Říkáme, že L působí na V, nebo že V je L-modul. Pro $x \in \mathrm{L},\ a \in V$, často značíme $(T(x))(a)$ pouze jako $x.a$.

Příklad 1.1.3 Každá Lieova algebra L působí sama na sebe pomocí **adjungované reprezentace** $ad : x \in \mathrm{L} \to ad_x \in \mathrm{End\ L}$, definované pro všechna $y \in \mathrm{L}$ vztahem

$$ad_x(y) = [x, y]\ .$$

V obecném případě L působí na tenzorový součin L sama se sebou následujícím způsobem:

Pro rozložitelné prvky $y_1 \otimes \cdots \otimes y_p \in \overset{p}{\otimes} \mathrm{L} = \underbrace{\mathrm{L} \otimes \cdots \otimes \mathrm{L}}_{\text{p-krát}}$ platí

$$x.(y_1 \otimes \cdots \otimes y_p) = ad_x^{(p)}(y_1 \otimes \cdots \otimes y_p) = ad_x y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_p$$

$$+ y_1 \otimes ad_x y_2 \otimes y_3 \otimes \cdots \otimes y_p + \cdots + y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_{p-1} \otimes ad_x y_p \ .$$

.

Specielně pro p=2

$$ad_x^{(2)}(y_1 \otimes y_2) = ad_x y_1 \otimes y_2 + y_1 \otimes ad_x y_2 = [x, y_1] \otimes y_2 + y_1 \otimes [x, y_2] \ .$$

Označíme-li identické zobrazení z L do L pomocí 1, můžeme psát

$$ad_x^{(2)}(u) = (ad_x \otimes 1 + 1 \otimes ad_x)(u) = [x \otimes 1 + 1 \otimes x, u] \ . \tag{1.1}$$

Poznámka 1.1.4 Nechť L je konečně-rozměrná Lieova algebra s bází $(e_1, \cdots, e_n)$. S použitím Einsteinovy sumační konvence pro každý prvek $b \in \mathrm{L} \otimes \mathrm{L}$, $b = b^{ij} e_i \otimes e_j$, platí

$$ad_x^{(2)} b = b^{ij}([x, e_i] \otimes e_j + e_i \otimes [x, e_j]) \ .$$

Definice 1.1.5 Prostorem ***k*-kořetězců** na L s hodnotami ve V, pro každé nezáporné celé číslo k, nazveme vektorový prostor antisymetrických k-lineárních zobrazení z L do V, kde V je vektorový prostor reprezentace L.

Definice 1.1.6 Kohranice k-kořetězce u na L s hodnotami ve V je $(k+1)$-kořetězec δu s hodnotami ve V, definovaný následovně

$$\delta u(x_0, x_1, \cdots, x_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i x_i.(u(x_0, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_k))$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} u([x_i, x_j], x_0, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, \hat{x}_j, \cdots, x_k) \ ,$$

pro $x_0, x_1, \cdots, x_k \in \mathrm{L}$, kde $\hat{x}_i$ znamená, že prvek x_i byl vynechán.

Poznámka 1.1.7 V následujícím textu budeme potřebovat pouze případy $k = 0$ nebo 1.

0-kořetězec na L s hodnotami ve V je prvek V. 1-kořetězec na L s hodnotami ve V je lineární zobrazení z L do V. Pro jejich kohranice platí:

$$k = 0, \ u \in \mathrm{V}, \ x \in \mathrm{L}, \ \delta u(x) = x.u \ ,$$

$$k = 1, \ v : \mathrm{L} \to \mathrm{V}, \ x, y \in \mathrm{L}, \ \delta v(x, y) = x.v(y) - y.v(x) - v([x, y]) \ .$$

Tvrzení 1.1.8 Pro každý k-kořetězec u, $k \geq 0$, platí $\delta(\delta u) = 0$.

Definice 1.1.9 k-kořetězec nazveme ***k*-kocyklus**, pokud $\delta u = 0$. k-kořetězec u $(k \geq 1)$ nazveme ***k*-kohranice**, pokud existuje $(k-1)$-kořetězec v takový, že $u = \delta v$.

Poznámka 1.1.10 Dle tvrzení 1.1.8, každá k-kohranice je k-kocyklus.

1.2 Definice Lieovy bialgebry

Uvažujme Lieovu algebru L a lineární zobrazení $\gamma : \mathrm{L} \to \mathrm{L} \otimes \mathrm{L}$ s transpozicí ${}^t\gamma : \mathrm{L}^* \otimes \mathrm{L}^* \to \mathrm{L}^*$. Přičemž víme, že lineární zobrazení na $\mathrm{L}^* \otimes \mathrm{L}^*$ může být definováno pomocí bilineárního zobrazení na L^*.

Definice 1.2.1 **Lieovou bialgebrou** nazveme Lieovu algebru L společně s lineárním zobrazením $\gamma : \mathrm{L} \to \mathrm{L} \otimes \mathrm{L}$ takovým, že

(i) ${}^t\gamma : \mathrm{L}^* \otimes \mathrm{L}^* \to \mathrm{L}^*$ definuje Lieovu závorku na L^*, tedy ${}^t\gamma$ je antisymetrické bilineární zobrazení vyhovující Jacobiho identitě,

(ii) γ je 1-kocyklus na L s hodnotami v $\mathrm{L} \otimes \mathrm{L}$, kde L působí na $\mathrm{L} \otimes \mathrm{L}$ pomocí adjungované reprezentace $ad_x^{(2)}$.

Definice 1.2.2 Zobrazení γ z předchozí definice nazýváme **kokomutátor**.

Poznámka 1.2.3 Podmínka (ii) z definice 1.2.1 znamená, že 2-kořetězec $\delta\gamma$ je roven nule pro všechna $x, y \in \mathrm{L}$, tedy

$$ad_x^{(2)}(\gamma(y)) - ad_x^{(2)}(\gamma(x)) - \gamma([x, y]) = 0 \tag{1.2}$$

alternativně, s využitím vztahu (1.1)

$$\gamma([x, y]) = [\gamma(x), 1 \otimes y + y \otimes 1] + [1 \otimes x + x \otimes 1, \gamma(y)] \ . \tag{1.3}$$

Poznámka 1.2.4 Zavedeme značení, pro $\xi, \eta \in \mathrm{L}^*$

$$[\xi, \eta]_{\mathrm{L}^*} = {}^t\gamma(\xi \otimes \eta) \ ,$$

potom pro $x \in \mathrm{L}$ platí

$$\langle [\xi, \eta]_{\mathrm{L}^*}, x \rangle = \langle {}^t\gamma(\xi \otimes \eta), x \rangle = \langle \xi \otimes \eta, \gamma(x) \rangle \ . \tag{1.4}$$

Podmínku (i) z definice 1.2.1 můžeme ekvivalentně přepsat pomocí nového značení

$$[\xi, \eta]_{\mathrm{L}^*} = -[\eta, \xi]_{\mathrm{L}^*} \ ,$$

$$[\xi, [\eta, \zeta]_{\mathrm{L}^*}]_{\mathrm{L}^*} + [\eta, [\zeta, \xi]_{\mathrm{L}^*}]_{\mathrm{L}^*} + [\zeta, [\xi, \eta]_{\mathrm{L}^*}]_{\mathrm{L}^*} = 0 \ .$$

Podobně s využitím vztahů (1.1), (1.2) a rovnosti $\langle [\xi, \eta]_{\mathrm{L}^*}, [x, y] \rangle = \langle \xi \otimes \eta, \gamma([x, y]) \rangle$ přepíšeme i podmínku (ii),

$$\begin{aligned} \langle [\xi, \eta]_{\mathrm{L}^*}, [x, y] \rangle = {} & \langle \xi \otimes \eta, (ad_x \otimes 1 + 1 \otimes ad_x)(\gamma(y)) \rangle \\ & - \langle \xi \otimes \eta, (ad_y \otimes 1 + 1 \otimes ad_y)(\gamma(x)) \rangle. \end{aligned} \tag{1.5}$$

1.3 Koadjungovaná reprezentace

Nechť L je konečně–rozměrná Lieova algebra a L^* je k ní příslušný duální vektorový prostor. Pro $x \in \mathrm{L}$ položíme

$$ad_x^* = -{}^t(ad_x) \ .$$

Tedy ad_x^* je endomorfismus L^*, jež pro $y \in \mathrm{L},\ \xi \in \mathrm{L}^*$ vyhovuje podmínce

$$\langle \xi, ad_x y \rangle = -\langle ad_x^* \xi, y \rangle \ ,$$

Je snadné ukázat, že zobrazení $x \in \mathrm{L} \to ad_x^* \in \mathrm{End}\ \mathrm{L}^*$ je reprezentace L v L^*.

Definice 1.3.1 Reprezentace $x \to ad_x^*$ L do L^* se nazývá **koadjungovaná reprezentace** L.

1.4 Duál Lieovy bialgebry

Pomocí značení v předchozí sekci, poznámky 1.2.4 a vztahu

$$\langle \xi \otimes \eta, (ad_x \otimes 1)\gamma(y) \rangle = -\langle [ad_x^* \xi, \eta]_{\mathrm{L}^*}, y \rangle$$

přepíšeme podmínku (ii)

$$\langle [\xi,\eta]_{\mathrm{L}^*}, [x,y] \rangle + \langle [ad_x^*\xi,\eta]_{\mathrm{L}^*}, y \rangle + \langle [\xi, ad_x^*\eta]_{\mathrm{L}^*}, y \rangle - \langle [ad_y^*\xi,\eta]_{\mathrm{L}^*}, x \rangle - \langle [\xi, ad_y^*\eta]_{\mathrm{L}^*}, x \rangle = 0 \ .$$

Můžeme vidět, že mezi L s Lieovou závorkou $[\ ,\ ]$ a L^* s Lieovou závorkou $[\ ,\ ]_{\mathrm{L}^*}$ je symetrie definovaná zobrazením γ. Proto obdobně jako výše zavedeme pro všechna $\xi, \eta \in \mathrm{L}^*,\ x \in \mathrm{L}$

$$ad_\xi \eta = [\xi, \eta]_{\mathrm{L}^*} \tag{1.6}$$

a

$$\langle ad_\xi \eta, x \rangle = -\langle \eta, ad_\xi^* x \rangle \ . \tag{1.7}$$

Potom $\xi \in \mathrm{L}^* \to ad_\xi^* \in \mathrm{End}\ \mathrm{L}$ je koadjungovaná reprezentace L^* v jejím duálním prostoru, který je izomorfní s L.

Po použití vztahů (1.6) a (1.7) je podmínka (ii) z definice 1.2.1 ekvivalentní zápisu

$$\langle [\xi,\eta]_{\mathrm{L}^*}, [x,y] \rangle + \langle ad_x^*\xi, ad_\eta^* y \rangle - \langle ad_x^*\eta, ad_\xi^* y \rangle + \langle ad_y^*\xi, ad_\eta^* x \rangle - \langle ad_y^*\eta, ad_\xi^* x \rangle = 0 \ .$$

Nyní můžeme jasně vidět, že L a L^* hrají symetrické role. Označme $\mu : \mathrm{L} \otimes \mathrm{L} \to \mathrm{L}$ antisymetrické bilineární zobrazení definující Lieovu závorku na L. Naše rovnice přejde do tvaru

$$\langle {}^t\mu[\xi,\eta]_{\mathrm{L}^*}, x \otimes y \rangle - \langle \xi, [x, ad_\eta^* y] \rangle + \langle \eta, [x, ad_\xi^* y] \rangle + \langle \xi, [y, ad_\eta^* x] \rangle - \langle \eta, [y, ad_\xi^* x] \rangle = 0 \ ,$$

z definice transpozice a adjungované reprezentace dále pak

$$\langle\, {}^t\mu[\xi,\eta]_{L^*}, x\otimes y\rangle + \langle (ad_\eta\otimes 1 + 1\otimes ad_\eta)({}^t\mu(\xi)), x\otimes y\rangle$$
$$-\langle (ad_\xi\otimes 1 + 1\otimes ad_\xi)({}^t\mu(\eta)), x\otimes y\rangle = 0$$

nebo také

$$ad^{(2)}_\xi(({}^t\mu)(\eta)) - ad^{(2)}_\eta(({}^t\mu)(\xi)) - ({}^t\mu)([\xi,\eta]_{L^*}) = 0\ .$$

Vidíme tedy, že vztah (ii) je ekvivalentní požadavku, aby ${}^t\mu : L^* \to L^*\otimes L^*$ byl 1-kocyklus na L^* s hodnotami v $L^*\otimes L^*$, kde L^* působí na $L^*\otimes L^*$ pomocí adjungované reprezentace.

Tvrzení 1.4.1 Pokud (L,γ) je Lieova bialgebra a μ je Lieova závorka na L, pak $(L^*, {}^t\mu)$ je Lieova bialgebra, kde ${}^t\gamma$ je Lieova závorka na L^*.

Definice 1.4.2 Lieovu bialgebru $(L^*, {}^t\mu)$ z předešlého tvrzení nazveme **duálem** Lieovy bialgebry (L,γ).

Poznámka 1.4.3 Každá Lieova bialgebra (L,γ) má svůj duál, jehož duálem je původní Lieova bialgebra (L,γ).

1.5 Maninovy trojice

Definice 1.5.1 Bilineární forma $h : L\times L \to \mathbb{R}$ je ***ad*-invariantní** pokud pro všechna $x,y,z\in L$ platí

$$h(ad_x y, z) + h(y, ad_x z) = 0\ .$$

Definice 1.5.2 Maninova trojice je trojice Lieovských algeber $(\mathcal{D}, L, \tilde{L})$ společně s nedegenerovanou ad-invariantní symetrickou bilineární formou $\langle\ ,\ \rangle$ na $\mathcal{D}$ takovou, že

(i) L a $\tilde{L}$ jsou Lieovy podalgebry $\mathcal{D}$,

(ii) $\mathcal{D} = L\oplus\tilde{L}$ (jako součet vektorových prostorů),

(iii) L a $\tilde{L}$ jsou izotropní vzhledem k $\langle\ ,\ \rangle$, tedy:

$$\langle X_i, X_j\rangle = \langle \tilde{X}^i, \tilde{X}^j\rangle = 0\ , \qquad \langle X_i, \tilde{X}^j\rangle = \delta_i^j\ , \tag{1.8}$$

kde $\{X_i\}$ a $\{\tilde{X}^i\}$ jsou báze Lieovských algeber L a $\tilde{L}$.

Tvrzení 1.5.3 Existuje jednoznačné přiřazení mezi konečně-rozměrnými Lieovskými algebrami a konečně-rozměrnými Maninovými trojicemi.

Poznámka 1.5.4 Označme strukturní koeficienty Lieovských algeber L a $\tilde{\text{L}}$ následovně:

$$[X_i, X_j] = f_{ij}^k X_k \ , \qquad [\tilde{X}^i, \tilde{X}^j] = \tilde{f}_{ij}^k \tilde{X}^k \ , \tag{1.9}$$

pak ze vztahů (1.8), (1.9) a (1.4) získáváme

$$\gamma(X_i) = \tilde{f}_i^{jk} X_j \otimes X_k \ . \tag{1.10}$$

Dosadíme-li tento vztah do podmínky (1.3) pro 1-kocyklus, získáme alternativní definici pro Lieovy bialgebry.

$$f_{mk}^i \tilde{f}_l^{jm} - f_{ml}^i \tilde{f}_k^{jm} - f_{mk}^j \tilde{f}_l^{im} + f_{ml}^j \tilde{f}_k^{im} = f_{kl}^m \tilde{f}_m^{ij} \ .$$

Tvrzení 1.5.5 Existuje 5 neizomorfních Maninových trojic

I. Abelovská Maninova trojice

$$f_{ij}^k = 0 \ , \qquad \tilde{f}_i^{jk} = 0 \qquad \forall i, j, k \in \{1, 2\}$$

II. Semiabelovská Maninova trojice

$$f_{ij}^k = 0 \ , \qquad \tilde{f}_2^{12} = 1$$

III. Semiabelovská Maninova trojice

$$f_{12}^2 = 1 \ , \qquad \tilde{f}_i^{jk} = 0$$

IV. Neabelovská Maninova trojice typu A

$$f_{12}^2 = 1 \ , \qquad \tilde{f}_2^{12} = b \qquad b \neq 0$$

V. Neabelovská Maninova trojice typu B

$$f_{12}^2 = 1 \ , \qquad \tilde{f}_1^{12} = 1$$

Poznámka 1.5.6 Mezi neabelovskou Maninovou trojicí typu A a jejím duálem existuje izomorfní zobrazení I_A definované vztahem

$$I_A(X_1) = \frac{1}{b} X_1 \ , \qquad I_A(X_2) = X_2 \ .$$

Obdobně mezi neabelovskou Maninovou trojicí typu B a jejím duálem existuje izomorfní zobrazení I_B

$$I_B(X_1) = X_2 \ , \qquad I_B(X_2) = -X_1 \ .$$

Kapitola 2

Kohraniční Lieovské bialgebry a klasická Yang-Baxterova rovnice

V této části se budeme zabývat takovými Lieovskými bialgebrami, jejichž kokomutátor je definován pomocí kocyklu δr, který je kohranicí prvku $r \in \mathrm{L} \otimes \mathrm{L}$. Ukážeme, že klasická Yang-Baxterova rovnice (CYBE) je dostatečnou podmínkou pro δr, aby definoval Lieovu závorku na L^*. Využíváme především poznatků z práce [3].

2.1 Kohraniční Lieovské bialgebry

Definice 2.1.1 Lieovu bialgebru (L,γ) nazveme **kohraniční Lieova bialgebra**, pokud zobrazení γ je 1-kohranice, tedy pokud existuje prvek $r \in \mathrm{L} \otimes \mathrm{L}$ takový, že pro všechna $x \in \mathrm{L}$

$$\gamma(x) = [1 \otimes x + x \otimes 1, r] \ . \tag{2.1}$$

Takový prvek r nazýváme (klasická) $\boldsymbol{r}$**-matice**.

Aby zobrazení δr definovalo kokomutátor Lieovy bialgebry, musí splňovat podmínky (i) a (ii) z definice 1.2.1. Podmínka (ii) je automaticky splněna, neboť z definice 1.1.9 a poznámky 1.1.10 vyplývá, že kohranice 0-kořetězce je 1-kocyklus. Podmínka (ii) říká, že transpozice zobrazení $\gamma = \delta r$, ${}^t\gamma : \mathrm{L}^* \otimes \mathrm{L}^* \to \mathrm{L}^*$, musí definovat Lieovu závorku na L^*, tedy

a) ${}^t\gamma$ je antisymetrické bilineární zobrazení na L^*, tedy γ má hodnoty v $\Lambda^2\mathrm{L}$,

b) ${}^t\gamma$ splňuje Jacobiho identitu.

Označme a antisymetrickou a s symetrickou část r. Tedy $r = a + s$, kde $a \in \Lambda^2\mathrm{L}$, $s \in S^2\mathrm{L}$. Pro zobrazení δr platí

$$\delta r = ad_x^{(2)} r = ad_x^{(2)} a + ad_x^{(2)} s \ .$$

Vidíme, že podmínka a) je splněna pokud $ad_x^{(2)} s = 0$, tedy pokud je symetrická část r ad-invariantní. Tato podmínka je zřejmě splněna, když $s = 0$, tedy pokud je r antisymetrická ($r = a$).

Ke každému prvku $r \in \mathrm{L} \otimes \mathrm{L}$ přiřadíme zobrazení $\underline{r} : \mathrm{L}^* \to \mathrm{L}$ definované pro všechna $\xi, \eta \in \mathrm{L}^*$ vztahem

$$\underline{r}(\xi)(\eta) = r(\xi, \eta) = \langle \eta, \underline{r}\xi \rangle \ .$$

Tedy na $r \in \mathrm{L} \otimes \mathrm{L}$ můžeme nahlížet jako na bilineární formu na L^*, a na $\underline{r}\xi \in \mathrm{L}$ jako na lineární formu na L^*. Označíme-li ${}^t\underline{r} : \mathrm{L} \to \mathrm{L}^*$ transpozici zobrazení $\underline{r}$, pak z předchozí definice získáváme

$$\underline{a} = \frac{1}{2}(\underline{r} - {}^t\underline{r}) \ , \qquad\qquad \underline{s} = (\underline{r} + {}^t\underline{r}) \ .$$

Pro $\xi, \eta \in \mathrm{L}^*$ jsme v 1. kapitole položili $[\xi, \eta]_{\mathrm{L}^*} = {}^t\gamma(\xi, \eta)$. V případě, že $\gamma = \delta r$, budeme nadále psát $[\xi, \eta]^r$ místo $[\xi\eta]_{\mathrm{L}^*}$.

Tvrzení 2.1.2 Pokud r je antisymetrická, pak

$$[\xi, \eta]^r = ad^*_{\underline{r}\xi}\eta - ad^*_{\underline{r}\eta}\xi \ .$$

Zavedeme algebraickou **Schoutenovu závorku** prvku $r \in \Lambda^2\mathrm{L}$ se sebou samým, kterou budeme značit $[[r, r]]$. Je to prvek v $\Lambda^3\mathrm{L}$ definovaný jako

$$[[r, r]](\xi, \eta, \zeta) = -2\langle \zeta, [\underline{r}\xi, \underline{r}\eta] \rangle_{(cycl\ \xi,\eta,\zeta)} \ ,$$

kde ($cycl$ ξ, η, ζ) značí cyklickou záměnu proměnných ξ, η, ζ.

Tvrzení 2.1.3 Nutnou a postačující podmínkou pro $\gamma = \delta r,\ r \in \Lambda^2\mathrm{L}$, aby definovalo Lieovu závorku na L^*, je ad-invariance $[[r, r]] \in \Lambda^3\mathrm{L}$.

Poznámka 2.1.4 Postačující podmínka ad-invariance $[[r, r]]$ je

$$[[r, r]] = 0 \ . \tag{2.2}$$

Vztah (2.2) je někdy nazýván zobecněná Yang-Baxterova rovnice.

Poznámka 2.1.5 Prvek $r \in \mathrm{L} \otimes \mathrm{L}$ se symetrickou částí s a antisymetrickou částí a je (klasickou) r-maticí, pokud s a $[[a, a]]$ jsou ad-invariantní.

Definice 2.1.6 Nechť $r \in \mathrm{L} \otimes \mathrm{L},\ r = a + s$. Pokud r je antisymetrická ($r = a$) a $[[r, r]] = 0$, pak r nazýváme **trojúhelníková** r-matice.

Tvrzení 2.1.7 Dvě kohraniční bialgebry (L,γ) a (L',γ'), definované pomocí $r \in \mathrm{L} \otimes \mathrm{L}$ a $r' \in \mathrm{L}' \otimes \mathrm{L}'$, jsou izomorfní právě tehdy, když existuje izomorfismus Lieovských algeber $\alpha : \mathrm{L} \to \mathrm{L}'$ takový, že $(\alpha \otimes \alpha)r - r'$ je L' invariantní, tedy když pro všechna $x \in \mathrm{L}$

$$[1 \otimes x + x \otimes 1, (\alpha \otimes \alpha)r - r'] = 0 \ .$$

2.2 Klasická Yang-Baxterova rovnice

Nechť $r \in \mathrm{L} \otimes \mathrm{L}$, zavedeme zobrazení $\langle \underline{r, r} \rangle : \Lambda^2 \mathrm{L}^* \to \mathrm{L}$, definované jako

$$\langle \underline{r, r} \rangle(\xi, \eta) = [\underline{r}\xi, \underline{r}\eta] - \underline{r}[\xi, \eta]_{\mathrm{L}^*} \ . \tag{2.3}$$

Klademe

$$\langle r, r \rangle(\xi, \eta, \zeta) = \langle \zeta, \langle \underline{r, r} \rangle(\xi, \eta) \rangle \ . \tag{2.4}$$

Zobrazení $\langle \underline{r, r} \rangle$ je ztotožněno s prvkem $\langle r, r \rangle \in \Lambda^2 \mathrm{L} \otimes \mathrm{L}$.

Teorém 2.2.1 Nechť $r = a + s$, pro $a \in \Lambda^2\mathrm{L}$ a $s \in S^2\mathrm{L}$, s je ad-invariantní, platí

(i) $\langle a, a \rangle = -\frac{1}{2}[[a, a]]$, $\langle a, a \rangle \in \Lambda^3\mathrm{L}$,

(ii) $\langle \underline{s, s} \rangle(\xi, \eta) = [\underline{s}\xi, \underline{s}\xi]$, $\langle s, s \rangle$ je ad-invariantní prvek $\Lambda^3\mathrm{L}$,

(iii) $\langle r, r \rangle = \langle a, a \rangle + \langle s, s \rangle$, $\langle r, r \rangle \in \Lambda^3\mathrm{L}$.

Důsledkem tohoto teorému je následující tvrzení.

Tvrzení 2.2.2 Nechť $r \in \mathrm{L} \otimes \mathrm{L}$, $r = a + s$, kde s je symetrická a ad-invariantní, a a je antisymetrická. Postačující podmínka ad-invariantnost výrazu $[[a, a]]$ je

$$\langle r, r \rangle = 0 \ . \tag{2.5}$$

Poznámka 2.2.3 Z tvrzení 2.2.2 a poznámky 2.1.5 vyplývá, že prvek $r \in \mathrm{L} \otimes \mathrm{L}$ s ad-invariantní symetrickou částí, vyhovující podmínce $\langle r, r \rangle = 0$, je r-matice.

Definice 2.2.4 Podmínka (2.5) se nazývá **klasická Yang-Baxterova rovnice** (CYBE). r-matice vyhovující CYBE se nazývá **kvazi-trojúhelníková**. Jestliže je navíc symetrická část r invertibilní, pak r nazýváme **faktorizovatelná**.

Poznámka 2.2.5 Pokud je r antisymetrická, podmínka (2.5) se redukuje na podmínku (2.2). Tedy trojúhelníková r-matice je kvazi-trojúhelníková, avšak není faktorizovatelná.

Kapitola 3

Výpočet r-matic

V této části určíme, které z našich 5-ti dvourozměrných Lieovských bialgeber jsou kohraniční, spočítáme jejich r-matice a následně ověříme, zda-li tyto splňují CYBE.

3.1 Teorie

Potřebujeme nalézt takové prvky $r = r^{ij} X_i \otimes X_j \in \mathrm{L} \otimes \mathrm{L}$, že kokomutátory jednotlivých Lieovských bialgeber můžeme zapsat ve tvaru (3.1). Pomocí vztahu (1.1) a poznámky 1.1.4 získáváme pro bazické vektory X_l

$$\gamma(X_l) = r^{ij}([X_l, X_i] \otimes X_j + X_i \otimes [X_l, X_j]) ,$$

dále pak využitím vztahů (1.9), (1.10) a přejmenováním koeficientů přejde naše rovnice do tvaru

$$\tilde{f}_i^{pq} X_p \otimes X_q = r^{kq} f_{ik}^q X_p \otimes X_q + r^{pl} f_{il}^q X_p \otimes X_q .$$

Protože $X_p \otimes X_q$ tvoří bázi prostoru $\mathrm{L} \otimes \mathrm{L}$, můžeme ekvivalentně přejít k rovnosti koeficientů. Výsledná podmínka na koeficienty r-matic je

$$\tilde{f}_i^{pq} = r^{kq} f_{ik}^q + r^{pl} f_{il}^q . \tag{3.1}$$

Tato rovnice tvoří pro každou Lieovu bialgebru nehomogenní soustavu n^3 lineárních rovnic pro n^2 neznámých, kde n značí dimenzi Lieovy bialgebry L.

3.2 CYBE v tenzorovém tvaru

Ověříme, že takto spočítané r-matice splňují klasickou Yang-Baxterovu rovnici (2.5). Pro tyto účely bude vhodné převést CYBE do tenzorového tvaru.

Zavedeme tenzorové značení. Pro $r \in \mathrm{L} \otimes \mathrm{L}$, $r = r^{ij} X_i \otimes X_j$, kde $\{X_i\}$ je báze L, definujeme r_{12}, r_{13} a r_{23} jako prvky tenzorového součinu příslušné tenzorové algebry:

$$\begin{aligned} r_{12} &= r^{ij} X_i \otimes X_j \otimes 1 \ , \\ r_{13} &= r^{ij} X_i \otimes 1 \otimes X_j \ , \\ r_{23} &= r^{ij} 1 \otimes X_i \otimes X_j \ . \end{aligned}$$

V $\mathrm{L} \otimes \mathrm{L} \otimes \mathrm{L}$ pak máme

$$\begin{aligned} [r_{12}, r_{13}] &= [r^{ij} X_i \otimes X_j \otimes 1, r^{kl} X_k \otimes 1 \otimes X_l] = r^{ij} r^{kl} [X_i, X_k] \otimes [X_j, 1] \otimes [1, X_l] \\ &= r^{ij} r^{kl} f^m_{ik} X_m \otimes X_j \otimes X_l \ , \qquad (3.2) \end{aligned}$$

obdobně pak

$$[r_{12}, r_{23}] = [r^{ij} X_i \otimes X_j \otimes 1, r^{kl} 1 \otimes X_k \otimes X_l] = r^{ij} r^{kl} f^m_{jk} X_i \otimes X_m \otimes X_l \ , \qquad (3.3)$$

$$[r_{13}, r_{23}] = [r^{ij} X_i \otimes 1 \otimes X_j, r^{kl} 1 \otimes X_k \otimes X_l] = r^{ij} r^{kl} f^m_{jl} X_i \otimes X_k \otimes X_m \ . \qquad (3.4)$$

Uvažujme ad-invariantnost symetrické části s prvku r. Za pomoci tvrzení 2.1.2 získáváme

$$[\xi, \eta]^r = [\xi, \eta]^a = ad^*_{\underline{a}\xi} \eta - ad^*_{\underline{a}\eta} \xi = ad^*_{\underline{r}\xi} \eta + ad^*_{{}^t\underline{r}\eta} \xi \ , \qquad (3.5)$$

kde ${}^t r = -a + s$.

Z rovnic (2.3), (2.4) a (3.5) pak dostáváme

$$\begin{aligned} \langle r, r \rangle (\xi, \eta, \zeta) &= \langle \zeta, [\underline{r}\xi, \underline{r}\eta] \rangle - \langle \zeta, \underline{r}(ad^*_{\underline{r}\xi}\eta + ad^*_{{}^t\underline{r}\eta}\xi) \rangle = \langle \zeta, [\underline{r}\xi, \underline{r}\eta] \rangle + \langle ad^*_{\underline{r}\xi}\eta, \underline{r}\zeta \rangle + \langle ad^*_{{}^t\underline{r}\eta}\xi, \underline{r}\zeta \rangle \\ &= \langle \zeta, [\underline{r}\xi, \underline{r}\eta] \rangle + \langle \eta, [\underline{r}\xi, {}^t\underline{r}\zeta] \rangle + \langle \xi, [{}^t\underline{r}\eta, {}^t\underline{r}\zeta] \rangle \ . \end{aligned}$$

Přičemž

$$\begin{aligned} [r_{12}, r_{13}](\xi, \eta, \zeta) &= \langle \xi, [{}^t\underline{r}\eta, {}^t\underline{r}\zeta] \rangle \ , \\ [r_{12}, r_{23}](\xi, \eta, \zeta) &= \langle \eta, [\underline{r}\xi, {}^t\underline{r}\zeta] \rangle \ , \\ [r_{13}, r_{23}](\xi, \eta, \zeta) &= \langle \zeta, [\underline{r}\xi, \underline{r}\eta] \rangle \ . \end{aligned}$$

Tedy

$$\langle r, r \rangle = [r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}]$$

Tvrzení 3.2.1 V tenzorovém značení má klasická Yang-Baxterova rovnice (2.5) tvar

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0 \ .$$

Tuto rovnici nyní rozepíšeme podle vztahů (3.2), (3.3) a (3.4). Získáváme

$$r^{ij} r^{kl} f^m_{ik} X_m \otimes X_j \otimes X_l + r^{ij} r^{kl} f^m_{jk} X_i \otimes X_m \otimes X_l + r^{ij} r^{kl} f^m_{jl} X_i \otimes X_k \otimes X_m = 0 \ ,$$

záměnnou indexů dále pak

$$r^{mj} r^{lk} f^i_{ml} X_i \otimes X_j \otimes X_k + r^{im} r^{lk} f^j_{ml} X_i \otimes X_j \otimes X_k + r^{im} r^{jl} f^k_{ml} X_i \otimes X_j \otimes X_k = 0 \ .$$

Vzhledem k faktu, že $X_i \otimes X_j \otimes X_k$ je bazí $\mathrm{L} \otimes \mathrm{L} \otimes \mathrm{L}$, můžeme přejít k rovnosti koeficientů

$$r^{mj} r^{lk} f^i_{ml} + r^{im} r^{lk} f^j_{ml} + r^{im} r^{jl} f^k_{ml} = 0 \ . \tag{3.6}$$

Získáváme tak soustavu kvadratických rovnic. Pro vyšší dimenze by tato soustava byla jen obtížně řešitelná.

3.3 Vlastní výpočet

V dimenzi 2 rovnice (3.1) tvoří pro každou Lieovu bialgebru soustavu 8-mi rovnic pro 4 neznámé r^{ij}. Vyřešením těchto soustav získáme jasnou odpověď na naši otázku, které bialgebry jsou kohraniční, i tvar jednotlivých r-matic.

Následně ověříme, zda-li tímto způsobem spočítané r-matice splňují klasickou Yang-Baxterovu rovnici. V dimenzi 2 získáváme ze vztahu (3.6) pro každou Lieovu bialgebru soustavu osmi kvadratických rovnic do kterých dosadíme již známé prvky r^{ij} a ověříme jednotlivé rovnosti.

Výsledky těchto výpočtů jsou shrnuty v tabulce 3.1, kde L značí Lieovu bialgebru příslušející k dané Maninově trojici.

Tabulka 3.1: r-matice

L	r	CYBE
I.	$r \in \mathbb{R}^{2,2}$	je řešením
II.	nemá řešení	
III.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	je řešením
IV.	nemá řešení	
V.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	je řešením

Vidíme, že v dimenzi 2 jsou z našich 5-ti neizomorfních Lieových bialgeber pouze 3 kohraniční. Všechny nalezené r-matice splňují klasickou Yang-Baxterovu rovnici.

Kapitola 4

Výpočet Poissonových struktur pomocí Sklyaninovy závorky

Po shrnutí základních poznatků o Poisson-Lieovských grupách z práce [2] použijeme výsledků z předešlé kapitoly pro výpočet Poissonových struktur na Poisson-Lieovských grupách příslušejících k našim kohraničním Lieovským bialgebrám. V podkapitole 4.3 využíváme postupů z práce [3].

4.1 Poissonova varieta

Definice 4.1.1 **Bivektor** na hladké varietě M definujeme jako antisymetrické kontravariantní 2-tenzorové pole.

Tedy pokud P je bivektor, pak v každém bodě $x \in M$ má P_x antisymetrické složky v lokálních souřadnicích, $(P^{ij}(x))$.

V každém bodě x se můžeme na P_x dívat jako na antisymetrickou bilineární formu na duálním prostoru k tečnému prostoru T_xM, T_x^*M, nebo jako na antisymetrické lineární zobrazení $\underline{P}_x : T_x^*M \to T_xM$ takové, že pro $\xi_x, \eta_x \in T_x^*M$

$$\langle \eta_x, \underline{P}_x(\xi_x) \rangle = P_x(\xi_x, \eta_x) \ .$$

Pokud jsou ξ, η diferenciální 1-formy na M, můžeme definovat $P(\xi, \eta)$ jako hladkou funkci na hladké varietě M

$$(P(\xi, \eta))(x) = P_x(\xi_x, \eta_x) \ .$$

Nechť f, g jsou hladké funkce na M a $\mathrm{d}f$, $\mathrm{d}g$ jsou jejich diferenciály. Pokládáme

$$\{f, g\} = P(\mathrm{d}f, \mathrm{d}g) \ . \tag{4.1}$$

Označíme-li vektorové pole $\underline{P}(\mathrm{d}f)$ jako X_f, získáváme

$$\{f, g\} = X_f . g \ .$$

Poznámka 4.1.2 Takto definovaná závorka $\{\ ,\ \}$ splňuje pro všechny funkce $f, g, h \in C^\infty M$ Leibnitzovo pravidlo

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\} \ .$$

Definice 4.1.3 **Poissonovým bivektorem** nazveme takový bivektor P, pro něž závorka definovaná vztahem (4.1) vyhovuje Jacobiho identitě. Hladkou varietu M vybavenou Poissonovým bivektorem P pak nazýváme **Poissonova varieta** (M, P).

Definice 4.1.4 Nechť (M, P) je Poissonova varieta, potom závorku definovanou vztahem (4.1) nazýváme **Poissonova závorka** funkcí $f, g \in C^\infty M$.

4.2 Poisson-Lieovy grupy a Lieovy bialgebry

Definice 4.2.1 Nechť G je Lieova grupa, **levou** resp., **pravou translací** prvku $g \in \mathrm{G}$ rozumíme zobrazení λ_g, resp. ρ_g, definované pro $h \in \mathrm{G}$ vztahy

$$\lambda_g(h) = gh \ , \qquad\qquad \rho_g(h) = hg \ .$$

Vezměme tečné zobrazení k λ_g (resp., ρ_g) v bodě $h \in \mathrm{G}$, získáme tak lineární zobrazení z $T_h\mathrm{G}$ do $T_{gh}\mathrm{G}$ (resp., $T_{hg}\mathrm{G}$). Pro každé kladné celé číslo k můžeme zobrazit k-tenzorové pole v bodě h do k-tenzorového pole v bodě gh (resp., hg). Označme $g.Q_h$ (resp., $Q_g.h$) obraz tenzorového pole Q v bodě h, Q_h, při těchto zobrazeních.

Definice 4.2.2 Hladké kontravariantní tenzorové pole Q na Lieově grupě G nazveme **multiplikativní**, pokud pro všechna $g, h \in \mathrm{G}$

$$Q_{gh} = g.Q_h + Q_g.h \ .$$

Definice 4.2.3 Lieovu grupu G s Poissonovým bivektorem P nazveme **Poisson-Lieovou grupou**, pokud P je multiplikativní.

Tvrzení 4.2.4 Nechť $r \in \Lambda^2\mathrm{L}$, definujme pro všechny $g \in \mathrm{G}$, $r^\lambda(g) = g.r$ a $r^\rho(g) = r.g$. Pak bivektor definovaný vztahem

$$P = r^\lambda - r^\rho \tag{4.2}$$

je multiplikativní.

Tvrzení 4.2.5 Multiplikativní bivektor P definovaný vztahem (4.2) je Poissonův bivektor právě tehdy, když Schoutenova závorka $[[r, r]]$ je ad-invariantní.

Tedy, P je Poissonův bivektor právě tehdy, když r je řešením zobecněné Yang-Baxterovi rovnice. V případě, že r je trojúhelníková r-matice, pak P je Poissonův bivektor. Pokud r je kvazi-trojúhelníková r-matice s ad-invariantní symetrickou částí s a antisymetrickou částí a takovou, že $\langle a, a\rangle + \langle s, s\rangle = 0$, pak

$$P = r^\lambda - r^\rho = a^\lambda - a^\rho \ .$$

Tedy P je Poissonův bivektor, protože

$$-\frac{1}{2}[[a, a]] = \langle a, a\rangle = -\langle s, s\rangle \ ,$$

je prvkem Λ^3L.

Tedy každá kvazi-trojúhelníková r-matice dává vzniknout Poisson-Lieovské struktuře na G. Takto definovaná Poissonova závorka funkcí na G se nazývá **Sklyaninova závorka**.

4.3 Vlastní výpočet

Víme, že pro trojúhelníkové a kvazi-trojúhelníkové Lieovy bialgebry můžeme získat odpovídající Poisson-Lieovské grupy prostřednictvím Skylaninovy závorky stanovené danými antisymetrickými r-maticemi.

$$\{f_1, f_2\} = \sum_{i,j} r^{ij}((X_i^L f_1)(X_j^L f_2) - (X_i^R f_1)(X_j^R f_2)) \qquad \forall f_1, f_2 \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{G}) \ , \qquad (4.3)$$

kde X_i^L a X_i^R jsou levoinvariantní a pravoinvariantní vektorová pole na příslušející dvourozměrné Lieovské grupě G.

Pokud r je řešením CYBE, tak následující závorky jsou též Poissonovými strukturami na Lieově grupě G.

$$\{f_1, f_2\}^L = \sum_{i,j} r^{ij}((X_i^L f_1)(X_j^L f_2) \qquad (4.4)$$

$$\{f_1, f_2\}^R = \sum_{i,j} r^{ij}((X_i^R f_1)(X_j^R f_2) \qquad (4.5)$$

Abychom našli levoinvariantní a pravoinvariantní vektorová pole na Lieově grupě G, stačí určit levé a pravé 1-formy. Pro $g \in$ G máme

$$\mathrm{d}g g^{-1} = R^i X_i \qquad\qquad (\,\mathrm{d}g g^{-1})^i = R^i = R^i_j\,\mathrm{d}x^j \ ,$$
$$g^{-1}\,\mathrm{d}g = L^i X_i \qquad\qquad (g^{-1}\,\mathrm{d}g)^i = L^i = L^i_j\,\mathrm{d}x^j \ ,$$

kde x^i jsou parametry grupových prostorů L^i, R^i splňují vztahy $\delta^i_j = \langle X^R{}_j, R^i\rangle$ a $\delta^i_j = \langle X^L{}_j, L^i\rangle$, kde $X^R{}_j = X^R{}^l_j\,\partial_l$ a $X^L{}_j = X^L{}^l_j\,\partial_l$. Odtud získáváme

$$X^R{}^l_j = (R^{-t})^l_j \ , \qquad\qquad X^L{}^l_j = (L^{-t})^l_j \ .$$

Jelikož všechny uvažované Lieovy grupy jsou řešitelné, můžeme využít následnou parametrizaci grupy G [1]:
$$g = e^{x_1 X_1} e^{x_2 X_2} \ .$$

Za pomocí vztahů

$$\mathrm{d}g = \ \mathrm{d}x_1 X_1 e^{x_1 X_1} e^{x_2 X_2} + \ \mathrm{d}x_2 e^{x_1 X_1} X_2 e^{x_2 X_2}$$

a

$$g^{-1} = e^{-x_2 X_2} e^{-x_1 X_1} \ ,$$

pak obecně pro levoinvariatní a pravoinvariantní formy s hodnotami v Lieově algebře L získáváme

$$\begin{aligned} \mathrm{d}g g^{-1} &= \ \mathrm{d}x_1 X_1 + \ \mathrm{d}x_2 e^{x_1 X_1} X_2 e^{-x_1 X_1} \ , \\ g^{-1}\,\mathrm{d}g &= \ \mathrm{d}x_1 e^{-x_2 X_2} X_1 e^{x_2 X_2} + \ \mathrm{d}x_2 X_2 \ . \end{aligned}$$

Pro výpočet výrazů typu $e^{x_i X_i} X_j e^{-x_i X_i}$ využijeme následující lemma [4].

Lemma 4.2.1 Nechť $X, Y \in \mathbb{C}^{n,n}$, pak platí

$$e^X Y e^{-X} = e^{adX} Y = Y + [X,Y] + \frac{1}{2!}[X,[X,Y]] + \frac{1}{3!}[X,[X,[X,Y]]] + \cdots \ .$$

Provedli jsme tyto výpočty pro dvourozměrné kohraniční Lieovy bialgebry a získali jsme tak levoinvariantní a pravoinvariantní vektorová pole příslušných Lieových grup, viz tabulka 4.1.

Tabulka 4.1: Levoinvariatní a pravoinvartiantní vektorová pole nad dvourozměrnými kohraničními grupami.

L	$\begin{pmatrix} {X^L}_1 \\ {X^L}_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} {X^R}_1 \\ {X^R}_2 \end{pmatrix}$
I.	$\begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix}$
III.	$\begin{pmatrix} \partial_1 - x_2\partial_2 \\ \partial_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \partial_1 \\ e^{-x_1}\partial_2 \end{pmatrix}$
V.	$\begin{pmatrix} \partial_1 - x_2\partial_2 \\ \partial_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \partial_1 \\ e^{-x_1}\partial_2 \end{pmatrix}$

Následně podle vztahů (4.3), (4.4) a (4.5) spočítáme Poissonovy závorky na odpovídajících Lieových grupách. Výsledky jsou shrnuty v tabulce 4.2.

Tabulka 4.2: Poissonovy závorky vztahující se k dvourozměrným kohraničním Lieovským bialgebrám.

L	$\{x_1, x_2\}^L$	$\{x_1, x_2\}^R$	$\{x_1, x_2\}$
I.	r^{12}	r^{12}	0
III.	0	0	0
V.	1	e^{-x_1}	$1 - e^{-x_1}$

Závěr

V této práci jsme shrnuli základní poznatky o Poisson-Lieovských grupách a Lieovských bialgebrách. Zdárně se nám podařilo zjistit, které Lieovy bialgebry jsou kohraniční a nalézt jejich r-matice. S využitím těchto výsledků jsme následně spočítali Poissonovské struktury na příslušných Poisson-Lieovských grupách.

Znalost těchto struktur by v dalších pracích mohla posloužit ke konstrukci integrabilních systémů nad vektorovým prostorem L^* či k získání Poisson-Lieových T-duálních σ-modelů nad dvourozměrnými trojúhelníkovými Lieovskými bialgebrami.

Seznam použitých zdrojů

[1] A. O. Barut and R.Raczka. *Theory of group representation and applications.* PWN Warszawa, 1980.

[2] M. Fecko. *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov.* Bratislava: IRIS, 2004. ISBN 8089018106

[3] Y. Kosmann-Schwarzbach. Lie bialgebras, Poisson Lie groups and dressing transformations.*Integrability of Nonlinear Systems.* Lecture Notes in Physics, 638, Springer-Verlag, Berlin, 2004, 107-173.

[4] W. Miller. *Symmetry Groups and their Applications.* New york: Academic Press, 1972. ISBN 0-12-497460-0.

[5] A. Rezaei-Aghdam, M. Hemmati and A.R. Rastkar. *Classification of real three - dimensional Lie bialgebras and their Poisson-Lie groups.* J. Phys A : Math.Gen. 38 (2005) 3981-3994.