

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ
V PRAZE
Fakulta Jaderná a Fyzikálně Inženýrská
Katedra Fyziky



Bakalářská práce

Metody matematického modelování ve
finančních trzích

Autor: Martin Prokš

Vedoucí práce: Ing. Petr Jizba, Ph.D

Praha, 2014



Katedra fyziky

Akademický rok 2013/14

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Posluchač: Martin Prokš

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Matematická fyzika

Název práce: Metody matematického modelování ve finančních trzích

Název práce: Methods of Mathematical Modeling in Financial Markets
(anglicky)

Osnova:

1. Z knihy [1] nastudujte stochastický počet a jeho základní aplikace ve finančních trzích
2. Z knihy [2] nastudujte numerické metody používané v analýze finančních trhů. Zvláštní zřetelem věnujte programovacímu jazyku R a C++ .
3. Z prací [3], [4] a [5] nastudujte použití ekonofyziky v kvantitativním finančnictví (se zvláštním zřetelem na teorie finančních časových řad a teorii opěí) .
4. Aplikujte metody stochastického počtu a ekonofyziky (škálování, superstatistiku, atd.) k analýze multistochastických finančních procesů (např. k analýze modelu se stochastickou volatilitou).

Doporučená literatura

- [1] A.N. Shiryaev, "Essentials of Stochastic Finance. Facts, Models, Theory", (WS, London, 1999)
- [2] J. Maindonald, "Using R for Data Analysis and Graphics: Introduction, Code and Commentary", 2008 (online)
- [3] W. Paul a J. Baschnagel, "Stochastic Processes: from Physics to Finance" (Springer-Verlag, Berlin, 1999)
- [4] J.-P. Bouchaud a M. Potters, "Theory of Financial Risk – From Data Analysis to Risk Management", (CUP, Cambridge, 2008)
- [5] R.N. Mantegna a H. E. Stanley, "An Introduction to Econophysics, Correlations and Complexity in Finance", (CUP, Cambridge, 2007)

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

Ing. Petr Jizba, Ph.D., FJFI ČVUT

Do bakalářské práce se vkládá zadání a dále na stranu předcházející obsahu abstrakt a klíčová slova. Součástí zadání bakalářské práce je její uložení na webové stránky katedry fyziky a zaslání abstraktu a klíčových slov ve formátu WORD na e-mailovou adresu katedry fyziky: kf@fjfi.cvut.cz

Datum zadání bakalářské práce: 18.10.2013

Termín odevzdání bakalářské práce: 07.07.2014

Vedoucí katedry

Děkan

V Praze dne 18.10.2013



Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, software, atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu §60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne

Název práce:

Metody matematického modelování ve finančních trzích

Autor: Martin Prokš

Zaměření: Matematická fyzika

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Petr Jizba, Ph.D.

Abstrakt:

Tato práce se zabývá základním matematickým aparátem používaným v ekonomice. Jsou zde shrnutý fraktály, teorie pravděpodobnosti a stochastický počet. Jako aplikace stochastického počtu je uvedena Black–Scholesova formule. Fraktální geometrie je v textu využita k analýze časové řady a odhadu Hurstova exponentu.

Klíčová slova: fraktály, multifraktály, Brownův pohyb, Itôův integrál, Black–Scholesova formule, Hurstův exponent

Title:

Methods of Mathemacial Modeling in Financial Markets

Author: Martin Prokš

Specialization: Mathematical physics

Sort of project: Bachelor thesis

Supervisor: Ing. Petr Jizba, Ph.D.

Abstract:

This Bachelor thesis is concern with basic mathematical methods used in econophysics. In the text, there are mentioned fractals, probability theory and stochastic calculus. The Black-Scholes formula is stated as an application of stochastic calculus. The fractal geometry is used to analyze time series and to estimate Hurst exponent.

Key words: fractals, multifractals, Brownian motion, Itô integral, Black–Scholes formula, Hurst exponent

Poděkování

Chtěl bych poděkovat Ing. Petru Jizbovi, Ph.D. za vedení bakalářské práce, cenné rady, připomínky a čas, který mi věnoval.

Obsah

| | |
|---|-----------|
| Úvod | 1 |
| 1 Fraktály a fraktální geometrie | 2 |
| 1.1 Příklady | 2 |
| 1.1.1 Přírodní | 2 |
| 1.1.2 Matematické | 3 |
| 1.2 Dimenze | 5 |
| 1.2.1 Podobnostní dimenze | 5 |
| 1.2.2 Hausdorffova dimenze | 6 |
| 1.2.3 “Box-counting” dimenze | 8 |
| 1.3 Multifraktály | 10 |
| 2 Klíčové koncepty z teorie pravděpodobnosti | 12 |
| 2.1 Základní pojmy | 12 |
| 2.2 Důležitá rozdělení | 16 |
| 2.2.1 Binomické rozdělení | 16 |
| 2.2.2 Gaussovo rozdělení | 16 |
| 2.2.3 Log-normální rozdělení | 17 |
| 2.2.4 Lévyho rozdělení | 17 |
| 2.3 Centrální limitní teorém | 18 |
| 2.4 Stabilní rozdělení | 18 |
| 2.5 “Infinitely divisible” rozdělení | 21 |
| 3 Stochastický počet | 22 |
| 3.1 Náhodná procházka | 23 |
| 3.1.1 Brownův proces | 24 |
| 3.2 Martingale | 26 |
| 3.3 Stochastický integrál | 27 |
| 3.3.1 Itôův integrál | 28 |
| 3.3.2 Itôovo lemma | 29 |
| 3.3.3 Stratonovichův integrál | 30 |
| 3.4 Stochastické diferenciální rovnice | 31 |

| | |
|--|-----------|
| 4 Aplikace stochastického počtu a fraktální geometrie | 33 |
| 4.1 Black-Scholes formule | 33 |
| 4.1.1 Možné modifikace | 36 |
| 4.2 Fraktální analýza časových řad | 38 |
| 4.2.1 Metody pro stacionární řady | 39 |
| 4.2.2 Nestacionární řady | 40 |
| 4.2.3 Multifraktály v časových řadách | 41 |

Seznam obrázků

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Použití fraktálů v počítačové grafice | 3 |
| 1.2 | Romanesco | 3 |
| 1.3 | Cantorova množina | 4 |
| 1.4 | Kochova vločka | 4 |
| 1.5 | Mandelbrotova množina | 5 |
| 1.6 | “Diffusion-limited aggregation” | 10 |
| 4.1 | Denní fluktuace NASDAQ indexu v období od 1. 10. 1985 do 29. 11. 2013. Indexy slouží k diverzifikaci rizika jednotlivých akcií, či průmyslových odvětví, ale neeliminují, tzv. systematické chyby způsobené politickým děním, a tím pádem dobrě reflektují aktuální stav celkové ekonomiky. | 37 |

Úvod

Základní matematické metody používané ve finančních trzích jsou fraktály a stochastický počet. Cílem této práce je seznámit se s těmito oblastmi matematiky a uvést jejich možné aplikace.

V první kapitole jsou shrnuty fraktály a multifraktály. Čerpáno bylo převážně z literatury [1] a [2], kde lze najít podrobnější informace.

Druhá kapitola pojednává o nezbytných základech teorie pravděpodobnosti. Shrnutý jsou základní pojmy a dále používaná rozdělení v ekonofyzice, jako je Log-normální a Lévyho rozdělení. Knížky [5] a [6] obsahují téměř nevyčerpatelný zdroj informací o teorii pravděpodobnosti. O stabilních rozděleních je pěkně pojednáno v [3].

Stochastický počet je probrán ve třetí kapitole. Je zde uvedena náhodná procházka a její spojitý případ, tj. Brownův pohyb. Dále se třetí kapitola zaobírá Itôvým integrálem a hlavně je zde uvedeno Itôovo lemma, které se využije v poslední kapitole k odvození Black–Scholesovy formule. Text je z velké části převzat z [11] a [8].

Poslední kapitola se snaží využít teoretické znalosti z předchozích kapitol k praktickému využití. Je zde představena Black-Scholesova formule, sloužící k vhodnému určení ceny opce, a analýza časových řad pomocí metod fraktální geometrie, jako je “Detrended fluctuation analysis”.

Kapitola 1

Fraktály a fraktální geometrie

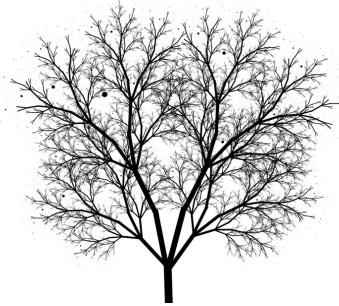
Fraktály jsou objekty s neceločíselnou dimenzí, odkud pramení jejich název (angl. “fraction” zlomek). Za zakladatele je považován Mandelbrot, který si všiml, že v reálném světě se nevyskytují hladké plochy, krychle nebo rovné čáry, se kterými se pracuje v Eukleidovské geometrii a následně se s jejich pomocí approximují skutečné objekty, které jsou velmi nepravidelné. Více informací lze nalézt v [1], [2] a [9].

Mandelbrot zavedl fraktály jako množinu, která má Hausdorffovu dimenzi ostře větší, než je její topologická dimenze. Bohužel se ukázalo, že tato definice není dostačující, protože vylučuje množiny, které by se za fraktály měly považovat. Takže obecně si pod tímto termínem můžeme představit libovolnou množinu, která má sobě podobnou strukturu (self-similarity), tj. jakákoliv její část je tvořena přesnou zmenšenou kopí sama sebe. Aby byly fraktály použitelné i v praxi, tedy mimo čistou matematiku, považuje se za fraktál libovolný útvar vykazující statistickou sobě podobnost, což znamená, že jednotlivé části nejsou přesnou kopí celku, ale jsou sobě podobné. Tím se os sebe odlišují matematické a přírodní fraktály.

1.1 Příklady

1.1.1 Přírodní

Každý už se setkal s fraktály, jen si to neuvědomil. Za fraktál totiž považujeme kapradiny, rostliny, plíce nebo nervovou soustavu a mnoho dalšího. Všechny tyto objekty se mohou modelovat pomocí fraktálů.



Obrázek 1.1: Použití fraktálů v počítačové grafice

z větví bez udání měřítka, tak bychom nebyli schopni určit, zda se jedná o hlavní větev nebo nějakou z nejmenších v koruně stromu.

Libovolný objekt, u kterého nedokážeme usoudit na jaké škále (měřítku) ho pozorujeme, tj. neexistuje fundamentální škála, považujeme za fraktál.

1.1.2 Matematické

Mezi matematické fraktály řadíme množiny, které mají pevně danou konstrukci a z tohoto důvodu vykazují self-similaritu na všech škálách. K nejznámějším patří Cantorova množina, Kochova křivka, Sierpiňského trojúhelník a jejich modifikace.

Cantorova množina

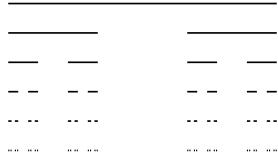
Je to snadno zkonstruovaný a jeden z nejjednodušších matematických fraktálů. Konstrukce je velice jednoduchá a přímočará. Začneme s jednotkovou úsečkou a postupně budeme odstraňovat prostřední třetinu. Dostaneme dvě úsečky o délce $1/3$, tuto množinu označme E_1 (první úroveň). Dále stejný postup aplikujeme na levou a pravou část množiny E_1 . Tím získáme množinu E_2 , skládající se ze čtyř úseček o délce $1/9$. Rekurentně opakujeme stejný postup. Výsledná Cantorova množina je průnik všech takto vytvořených množin.



Obrázek 1.2: Romanesco

$$\mathcal{C} = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$$

E_0 se nazývá **iniciátor** a E_1 **generátor**.



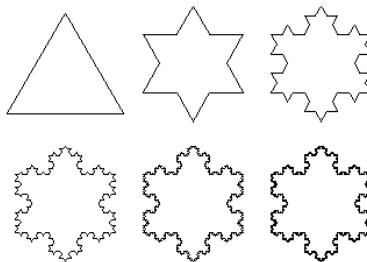
Obrázek 1.3: Cantorova množina

Není nutné odstraňovat zrovna třetinu, ale např. polovinu nebo libovolný zlomek. Navíc můžeme odstraňovat i jinou než prostřední část, čímž dostaneme různé modifikace Cantorovy množiny. Všechny tyto modifikace se provádí určením množiny E_1 , tj. generátoru, který se v každé iteraci po přeskálování aplikuje na nově vznikající množiny a tím, jak název napovídá, generuje výsledný fraktál.

V případě více generátorů $\{E_{1,1}, \dots, E_{1,n}\}$ se jim může přiřadit pravděpodobnost, se kterou budou používány při iteraci, a tedy získat tzv. **náhodný fraktál**.

Kochova křivka

Stejně jako u Cantorovy množiny je postup konstrukce Kochovy křivky velice jednoduchý, navrhl ho švédský matematik Niels Fabian Helge von Koch. Jednotková úsečka se rozdělí na třetiny a prostřední se nahradí rovnosstranným trojúhelníkem s délkou strany $1/3$, bez spodní hrany. Tím vznikne E_1 , tj. generátor, a ten se následně aplikuje na 4 nově vzniklé úsečky třetinové velikosti. Délka Kochovy křivky je po n -té iteraci $(\frac{4}{3})^n$, což pro $n \rightarrow +\infty$ diverguje.



Obrázek 1.4: Kochova vločka

Spojením tří Kochových křivek do trojúhelníku dostaneme tzv. **Kochovu vločku**, jejíž zajímavostí je, že zaujímá konečný povrch, ale má nekonečný obvod (to plyne z nekonečné délky samotné Kochovy křivky). Dále není nikde diferencovatelná, což je pro fraktály typické.

Také zde můžeme pomocí volby generátoru vytvářet různé modifikace a případně přejít do tří rozměrů a generovat realistické modely krajin, jako se to dělá v počítačové grafice.

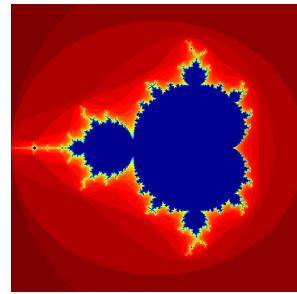
Mandelbrotova množina

Nejspíše nejznámější fraktál, který se objevil až s příchodem výkonné výpočetní techniky. Získal si oblibu díky svému krásnému grafickému vyjádření. Komplexní číslo c je prvkem Mandelbrotovy množiny, pokud je posloupnost $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ omezená, kde z_n jsou dány rekurentně:

$$z_0 = 0$$

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

Dá se ukázat, že Mandelbrotova množina je kompaktní a celá leží v kouli o poloměru 2 se středem v počátku komplexní roviny. Podle toho, jak rychle posloupnost $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unikne z dané koule, tj. pro jaké n je $|z_n| > 2$, se vybarvují jednotlivé body komplexní roviny.



Obrázek 1.5: Mandelbrotova množina

1.2 Dimenze

Dimenze určuje, jak velkou část prostoru kolem libovolného vlastního bodu množina zaujímá. Umožňuje nám přiřadit číslo množině, tedy nějak ji kvantifikovat a následně porovnávat s ostatními, tj. porovnávat velikosti množin.

Používá se mnoho definic dimenze. Hlavní a spíše teoretická je Hausdorff-Besicovitchova dimenze, která se zavádí pomocí Hausdorffovy míry a lze ji určit pro libovolnou množinu. Její výpočet je pracný, a proto se v praxi užívá "Box-counting" dimenze, která se dá poměrně snadno numericky odhadnout. Naopak nejjednodušší a užívaná výhradně pro matematické fraktály je "similarity" či podobnostní dimenze.

Aby definice dimenze splňovala intuitivní představu dimenze, je dobré, aby platilo:

- monotonie - pokud $E \subset F$, potom $\dim E \leq \dim F$
- stabilita - $\dim(E \cup F) = \max(\dim E, \dim F)$
- spočetná stabilita - $\dim\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \sup_{0 < i < \infty} \dim F_k$
- zachování dimenze při transformaci - $\dim f(F) = \dim F$ $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$
- F spočetná množina $\Rightarrow \dim F = 0$
- F otevřená množina v $\mathbb{R}^n \Rightarrow \dim F = n$

Bohužel, ne všechny definice dimenze tyto podmínky splňují, a to může vést k omezení jejich použitelnosti, viz níže u "Box-counting" dimenze, která ne-splňuje spočetnou stabilitu.

1.2.1 Podobnostní dimenze

Užívá se ve spojení s matematickými fraktály s obecně rekurzivní konstrukcí.

Dimenze je spojena se škálováním. Uvažme úsečku jednotkové délky a rozdělme ji na N stejných segmentů o velikosti ϵ . Tedy $L = N\epsilon^1 = 1$. Jednotlivé segmenty (části objektu) se s počtem jejich částí škálují jako $\epsilon = \frac{1}{N}$.

Čtverec rozdělíme na N menších stejných částí o ploše ϵ^2 , takže výsledná plocha je $A = N\epsilon^2$. U čtverce se tedy jednotlivé části škálují jako $\epsilon = \frac{1}{N^{1/2}}$. Stejným způsobem zjistíme, že škálování pro krychli je $\epsilon = \frac{1}{N^{1/3}}$. Obecně pro objekt velikosti V platí:

$$N\epsilon^{D_S} = V$$

$$D_S = \frac{\log V - \log N}{\log \epsilon}$$

A v limitě $\epsilon \rightarrow 0$:

$$D_S = \frac{\log N}{-\log \epsilon}$$

D_S se nazývá podobnostní dimenze, která pro známé předměty, jako je úsečka, čtverec nebo krychle dává intuitivní hodnoty dimenze, tj. po řadě 1, 2 a 3.

Aplikováním podobnostní dimenze na Cantorovu množinu, která se skládá ze dvou identických částí $N = 2$ s třetinovou velikostí $\epsilon = 1/3$, dostaneme:

$$D_S = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309\dots$$

Tedy Cantorova množina má neceločíselnou dimenzi. Podobně se spočte podobnostní dimenze pro Kochovu křivku. Ta se skládá ze čtyř segmentů třetinové délky, takže její dimenze je:

$$D_S = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,2618\dots$$

Vidíme, že dimenze Cantorovy množiny je mezi 0 a 1, je to tedy něco mezi úsečkou a bodem. Naopak dimenze Kochovy křivky je větší než 1, což znamená, že je to něco mezi křivkou a plochou.

1.2.2 Hausdorffova dimenze

Jak bylo uvedeno výše, Hausdorffova dimenze je založena na Hausdorffově mříži, definované:

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ } \delta\text{-pokrytí } F \right\}$$

Limita pro $\delta \rightarrow 0$ existuje, protože s klesající δ omezují možná pokrytí, a tedy dělám infimum ze stále menších množin, a tím dostanu monotónní funkci. Výsledná limita

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F)$$

se nazývá s-dimenzionální Hausdorffova míra množiny F . Není těžké ukázat, že je to míra, tj. splňuje:

1. $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$
2. $\mathcal{H}^s(F) \leq H^s(E)$ pokud $F \subset E$
3. $\mathcal{H}^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} H^s(A_i)$ a rovnost nastává právě tehdy když jsou A_i navzájem disjunktní

Pro libovolnou množinu $F \subset \mathbb{R}^n$ a U_i δ -pokrytí, $\delta < 1$ platí:

$$\sum_i |U_i|^t = \sum_i |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s$$

Pokud uděláme infimum, tak dostaneme $\mathcal{H}_\delta^t \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s$ a pro limitu $\delta \rightarrow 0$ platí, že pokud $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ potom $\mathcal{H}^t(F) = 0$ pro $t > s$. Existuje tedy kritická hodnota s , kde se míra mění z ∞ na 0 a takovou hodnotu nazýváme **Hausdorff–Besicovitchova** dimenze množiny F .

$$\dim_H F = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

Pro $\dim_H F = s$ může $\mathcal{H}^s(F)$ nabývat libovolné hodnoty, kterou můžeme využít k porovnávání velikostí fraktálů se stejnou dimenzí (větší míra znamená větší fraktál). Například pro množiny skládající se pouze z diskrétních bodů dostaneme $\mathcal{H}^0(F) =$ počet bodů v množině F .

Dokážeme tvrzení o dimenzi Cantorovy množiny.

Věta 1.1. Nechť F je Cantorova množina. Pokud $s = \log 2 / \log 3$, potom $\dim_H F = s$ a $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(F) \leq 1$.

Důkaz. Cantorovu množinu budeme považovat jako limitní případ množin E_k , což bude souhrn 2^k intervalů o velikosti 3^{-k} . Vezmeme-li je jako možné pokrytí dostaneme $\mathcal{H}_{3^{-k}}^s(F) \leq 2^k 3^{-ks} = 1$ pro $s = \log 2 / \log 3$ a v limitě $\mathcal{H}^s(F) \leq 1$.

Ted' je třeba ukázat, že $\sum |U_i| \geq \frac{1}{2} = 3^{-s}$ pro libovolné pokrytí $\{U_i\}$ platí:

$$\sum_i |U_i|^s \geq \frac{1}{2} = 3^{-s}$$

Díky tvaru a kompaktnosti Cantorovy množiny můžeme za pokrytí brát pouze konečný počet uzavřených intervalů na $[0, 1]$. $\forall i, \exists k$ tak, že

$$3^{-(k+1)} \leq |U_i| < 3^{-k}$$

Tím pádem U_i může protinout maximálně jeden interval z množiny E_k . Pro $j \geq k$ protne U_i maximálně $2^{j-k} = 2^j 3^{-sk} \leq 2^j 3^s |U_i|^s$ intervalů z E_j . Máme pro $\forall i$ nějaké k_i , vezměme $j = \max k_i$, tedy pro $\forall i$ U_i protne méně než $2^j 3^s |U_i|^s$ intervalů z E_j . Zároveň je $\{U_i\}$ pokrytí, a tedy protne všech 2^j intervalů. Sečtením přes všechny U_i dostaneme požadovanou nerovnost:

$$2^j \leq \sum 2^j 3^s |U_i|^s$$

□

Pro Cantorovu množinu se tedy podobnostní dimenze shoduje s Hausdorffovou.

Z tohoto ilustračního příkladu je vidět, že výpočet Hausdorfovy dimenze je značně komplikovaný i pro jednoduché množiny, z tohoto důvodu je vhodné zavést “Box-counting” dimenzi.

1.2.3 “Box-counting” dimenze

Viděli jsme, že najít Hausdorffovu dimenzi i pro jednoduchou množinu, jako je Cantorova, je značně obtížné, a proto se v praxi využívá tzv. “Box-counting” dimenze, která je pro výpočet mnohem snadnější. Můžeme se setkat s různými názvy, jako je Kolmogorova entropie, informační dimenze nebo Minkowského dimenze.

“Box-counting” dimenze je založena na měření pomocí pravítka pevné délky, tzn. zanedbáváme nepravidelnosti pod touto délkou, která se postupně zmenšuje k nule, a tedy každým dalším měřením dostáváme přesnější hodnotu délky (míry).

Označme $N_\delta(F)$ nejmenší počet libovolných množin s poloměrem menším než δ , který pokrývá množinu F . Potom “Box-counting” dimenze je definována:

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

Motivace takového zavedení plyne přímo z chápání pojmu dimenze. Podívejme se na dobře známé prvky, jako je křivka, čtverec a krychle. Délku křivky určíme tak, že budeme postupně přikládat pravítko určité délky, jedno za druhým, a dále spočteme kolik pravítka jsme k tomu potřebovali. Výsledná délka je $N\delta$. Tedy dimenze křivky je 1. Co takový čtverec? Tady změříme délku jedné strany a umocníme na druhou (dimenze 2). Podobně u krychle umocníme na třetí. Ve všech případech dostaneme $N\delta^s$.

Dá se ukázat, že místo libovolných množin můžeme brát intervaly v \mathbb{R}^n o délce δ tedy „krabice“ odkud plyne její název. Tímto způsobem se velice usnadní její výpočet, protože stačí množinu F rozdělit δ -sítí a spočítat počet intervalů, které protinou množinu F . Takový výpočet se provede pro více δ , tj. více šířek sítě, a následně se graf $\log N_\delta(F)$, v závislosti na $\log \delta$ (tzv. *log – log* graf), proloží přímkou pomocí metody nejmenších čtverců a její směrnice s opačným znaménkem je požadovaný odhad “Box-counting” dimenze. Takto se například odhadla dimenze pro pobřeží Velké Británie na 1.2, kde se jako měřítko δ bralo 20 m až 200 km.

Můžeme se setkat i s dalšími definicemi $N_\delta(F)$, které však dávají stejné hodnoty “Box-counting” dimenze, např:

1. nejmenší počet uzavřených koulí o poloměru δ pokrývající F
2. nejmenší počet krychlí o poloměru δ pokrývající F
3. nejmenší počet množin s průměrem menším než δ pokrývající F
4. největší počet disjunktních koulí o poloměru δ se středem v F

Jelikož existuje více definic dimenzí, nemusí se pro stejnou množinu rovnat. Obecně platí:

$$\dim_H F \leq \dim_B F$$

Avšak pro běžně používané množiny nastává rovnost. Rozdíl je v tom, že u Hausdorffovy dimenze využíváme všech možných množin, kdežto u “Box-counting” dimenze pokrýváme množinu F pouze množinami stejné velikosti. To je vidět z definice “Box-counting” dimenze a porovnáním se zavedením Hausdorffovy dimenze:

$$N_\delta \delta^s \rightarrow \infty \text{ pro } s < \dim_B F$$

$$N_\delta \delta^s \rightarrow 0 \text{ pro } s > \dim_B F$$

$$N_\delta(F) \delta^s = \inf \left\{ \sum_i \delta^s : \{U_i\} \text{ } \delta - \text{pokrytí } F \right\}$$

Pro výpočet “Box-counting” dimenze Cantorovy množiny využijeme tvrzení:

Věta 1.2. *Nechť F může být pokryto n_k množinami s poloměrem nejvyšše δ_k a navíc $\delta_k \rightarrow 0$. Potom*

$$\dim_B F \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_k}{-\log \delta_k}$$

Cantorovu množinu můžeme pokrýt 2^k intervaly o délce 3^{-k} :

$$\log 2 / \log 3 = \dim_H F \leq \dim_B F \leq \log 2 / \log 3$$

Nevýhoda “Box-counting” dimenze je, že spočetné množiny mohou mít ne-nulovou dimenzi. Plyně to z vlastnosti:

$$\dim_B \bar{F} = \dim_B F$$

Jelikož pro spočetnou množinu všech racionálních čísel na intervalu $[0, 1]$ je uzávěr celý interval a jeho dimenze je 1, ale dimenze jediného bodu je 0, a proto neplatí spočetná stabilita. Z tohoto důvodu se omezujeme na kompaktní množiny.

Fraktály se objeví, pokud začneme zaznamenávat různé přírodní jevy jako funkci času. Tedy graf, pokud ho považujeme za podmnožinu roviny (t, x) libovolné funkce, může být za určitých podmínek fraktál. Nejznámější taková funkce je Weierstrassova funkce, která je spojitá, není nikde diferencovatelná a má “Box-counting” dimenzi $1 < s < 2$:

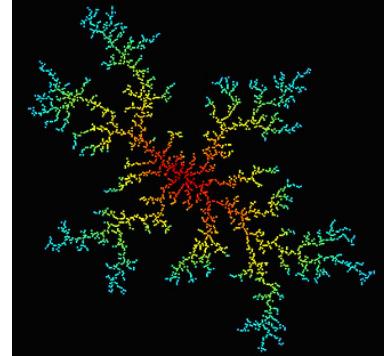
$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k t) \quad \lambda > 1$$

S rostoucí dimenzí rostou i fluktuace a graf funkce téměř pokryje celou plochu.

1.3 Multifraktály

Pokud máme v prostoru velmi nepravidelně rozmištěnou hmotu μ (obecně libovolnou míru, např. hustotu pravděpodobnosti), tak si daný prostor můžeme rozdělit na části, kde je hmota koncentrována přibližně stejně. Taková množina je fraktál, a tudiž se můžeme ptát na její dimenzi. Rozdělení se provede pomocí “power-law” chování pro malé r :

$$\mu(B(x, r)) \simeq r^\alpha$$



Pro každé α dostaneme jinou množinu a tím také jinou dimenzi, z čehož plyně multifraktalita.

Obrázek 1.6: “Diffusion-limited agglomeration”

Prostor, kde je rozprostřena hmota, pokryjeme intervaly (krabicemi) v \mathbb{R}^n o hraně délky r , n je dimenze prostoru, v němž leží zkoumaná hmota. Následně určíme počet intervalů, pro které je $\mu(I) \sim r^\alpha$, a potom se podíváme na jeho “power-law” chování. $N_r(\alpha)$ určuje počet intervalů obsahujících více než r^α hmoty.

$$N_r(\alpha) = \#\{ \text{intervaly o straně } r \mid \mu(I) \geq r^\alpha \}$$

Multifraktální spektrum je definováno:

$$f_C(\alpha) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log (N_r(\alpha + \epsilon) - N_r(\alpha - \epsilon))}{-\log r}$$

K usnadnění výpočtu multifraktálního spektra se zavádí *q-momentová suma* pro $q \in \mathbb{R}$ a $r > 0$:

$$M_r(q) = \sum \mu(I)^q,$$

kde se sčítá přes všechny intervaly, pro které platí $\mu(I) > 0$. Potom se určí “power-law” pro $M_r(q)$:

$$\beta(q) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log M_r(q)}{-\log r}$$

Pro více q a r se spočte momentová suma a z $\log - \log$ grafu se odhadne $\beta(q)$. Následně se udělá *Legendreova transformace*:

$$f_L(\alpha) = \inf_{-\infty < q < +\infty} \{\beta(q) + \alpha q\}$$

$f_L(\alpha)$ se nazývá *Legendreovo spektrum*. Obecně platí $f_C(\alpha) \leq f_L(\alpha)$, ale v praxi se uvažuje rovnost.

Kapitola 2

Klíčové koncepty z teorie pravděpodobnosti

V této kapitole jsou uvedeny základní pojmy a vztahy používané v teorii pravděpodobnosti, jako je náhodná veličina a její popis pomocí rozdělení, střední hodnoty a variance. Více informací lze nalézt v [5] a [6].

Teorie pravděpodobnosti je velmi důležitá, protože v praxi se téměř nevyskytuje deterministický děj, který znamená, že při zadání počátečních podmínek víme přesně, jak se bude vyvíjet v čase. Pravděpodobnostní popis je mimo jiné nezbytný v chaotických dynamických systémech či v kvantové mechanice, kde můžeme pouze říci, s jakou pravděpodobností určitý jev nastane, např. rozpad radioaktivního prvku za určitý čas. Vyskytuje se tu určitá náhodnost, tj. nedostatek informací o systému.

2.1 Základní pojmy

Intuitivní představa o pravděpodobnosti je, že pokud budeme pokus (děj) mnohokrát (teoreticky nekonečněkrát) opakovat za stejných podmínek, tak relativní četnost výskytu pozorovaného jevu se začne pohybovat kolem určité hodnoty, kterou nazveme pravděpodobnost daného jevu. Formální definice je následující:

Definice 2.1. Nechť Ω neprázdná množina, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, σ -algebra. Potom pravděpodobnost P je libovolná funkce $P: \mathcal{A} \mapsto [0, 1]$ splňující:

1. $(\mathcal{P}(A) \geq 0) \ (\forall A \in \mathcal{A})$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Bud' $(A_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$ systém disjunktních jevů. Potom $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$

Uspořádanou trojici (Ω, \mathcal{A}, P) nazveme **pravděpodobnostní prostor**.

Ω zde reprezentuje množinu všech možných dále nedělitelných jevů, které mohou nastat. V diskrétním případě se za σ -algebrou volí 2^Ω , což je množina všech podmnožin množiny Ω . σ – algebra \mathcal{A} určuje souhrn všech otázek, na které se můžeme ptát a zjišťovat jejich pravděpodobnost.

Pokud známe o systému nějakou dodatečnou informaci, například, že jev B nastal, tak se musíme při zkoumání pravděpodobnosti jevu A omezit na nový prostor stavů, a to na množinu B . Nová pravděpodobnost se může, či nemusí lišit od původní pravděpodobnosti jevu A .

Definice 2.2. Nechť $A, B \in \mathcal{A}, P(B) \neq 0$. Potom $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ se nazývá podmíněná pravděpodobnost jevu A za předpokladu jevu B .

S podmíněnou pravděpodobností úzce souvisí důležitý pojem v teorii pravděpodobnosti, kterým je nezávislost dvou jevů.

Definice 2.3. Nechť A, B jsou jevy. Potom řekneme, že jsou nezávislé právě tehdy, když $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Pokud bychom se ptali na nezávislost více jevů $A_1 \dots A_k$, musí platit

$$P\left(\bigcap_{k \in J} A_k\right) = \prod_{k \in J} P(A_k)$$

pro libovolnou indexovou množinu $J \in \mathcal{P}(\{1 \dots k\})$.

Je zřejmé, že pokud jsou jevy A a B nezávislé a $P(B) \neq 0$, pak znalost jevu B neovlivní pravděpodobnost výskytu jevu A . Tedy platí $P(A|B) = P(A)$.

Na prostoru všech možných jevů Ω můžeme definovat funkci $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tj. každému jevu přiřadíme číslo. Funkci X nazýváme náhodná veličina a pravděpodobnost, se kterou nabývá jednotlivé hodnoty, je dána její **distribuční funkcí**.

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Je to neklesající, zleva spojitá funkce, pro kterou dále platí $F(-\infty) = 0$ a $F(+\infty) = 1$. Pro absolutně spojitu distribuční funkci existuje funkce $\rho(y)$, nazývaná *hustota pravděpodobnosti*, pro kterou platí:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \varrho(y) dy$$

Nejpravděpodobnější hodnota, kolem které se jednotlivé výsledky pohybují, je střední hodnota, která je dána vztahem:

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \varrho(x) dx$$

Je zřejmé, že střední hodnota je lineární.

Pokud máme dvě náhodné veličiny, tak se můžeme ptát, zda se navzájem nějak ovlivňují, tj. jsou korelované. To nám říká *korelační koeficient*, definovaný za předpokladu $X, Y \in \mathcal{L}_2$:

$$R(X, Y) = \frac{E([X - E(X)][Y - E(Y)])}{\sigma_X \sigma_Y},$$

kde výraz v čitateli se nazývá **kovariance**, a platí:

$$R(X, Y) \in [-1, 1]$$

Pokud jsou náhodné proměnné X a Y nezávislé, potom je $R(X, Y) = 0$, ale opak platit nemusí. Pro $R(X, Y) > 0$ je vidět z definičního vztahu, že kladná odchylka od průměru X je většinou doprovázena kladnou odchylkou Y . Například X může reprezentovat výšku a Y hmotnost náhodně vybrané osoby, potom naměření nadprůměrné výšky je často doprovázeno naměřením nadprůměrné hmotnosti. Naopak je-li $R(X, Y) < 0$ bývá výchylka na jednu stranu doprovázena výchylkou na opačnou stranu.

Věta 2.1. *Nechť X, Y jsou náhodné veličiny z \mathcal{L}_2 a $R(X, Y) = 1$ nebo -1 . Potom $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tak, že $Y = aX + b$*

Jednou z možností (a téměř jedinou používanou), jak měřit výchylky od střední hodnoty, je **variance** (také nazývaná rozptyl), která je definována:

$$\sigma^2 = Var(X) = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \varrho(x) dx$$

σ se nazývá *směrodatná odchylka* a má rozměr totožný s náhodnou veličinou X . Jsou-li X_1, \dots, X_n nezávislé, pak je rozptyl aditivní. To vyplývá z definičního vztahu, pokud si uvědomíme, že kovariance nezávislých veličin je nulová.

Jinou možností je, místo kvadrátu odchylky, uvažovat pouze absolutní hodnotu, ale vzhledem k početním komplikacím se tento postup téměř nepoužívá.

K určení tvaru hustoty pravděpodobnosti se používají tzv. *centrální momenty*, kde n -tý centrální moment je definován:

$$\mu_n(X) = E[(X - \mu)^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^n \varrho(x) dx$$

Ze vztahu vyplývá, že druhý centrální moment μ_2 je variance. Třetí centrální moment μ_3 , dělený σ^3 (aby výsledek byl bezrozměrná veličina), určuje *křivost* rozdělení, tj. míru asymetrie. Výraz $\frac{\mu_4}{\sigma^4}$ se nazývá *špičatost*, která udává, zda se jedná o *leptokurtické* rozdělení, tj. centralizované, s relativně ostrým vrcholem nebo *platykurtické* rozdělení, kde hustota pravděpodobnosti pozvolna klesá ze svého maxima.

Rozdělení náhodné veličiny je jednoznačně určeno pomocí *charakteristické funkce*, která je definována jako *Fourierova transformace* hustoty pravděpodobnosti:

$$\phi_X(p) = E[e^{iXp}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} \varrho(x) dx$$

Pomocí charakteristické funkce se snadno počítají obecné momenty náhodné veličiny, které jsou dány vztahem $\mu'_n = E[X^n]$ a jsou svázány s centrálními momenty pomocí binomické věty.

$$\mu_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \mu'_k (\mu'_1)^{n-k}$$

Věta 2.2. Nechť existuje prvních n momentů $\mu'_k = E[X^k]$. Potom $\phi_X(p)$ má prvních n derivací a platí:

$$\phi_X^{(k)}(0) = i^k \mu'_k \quad k = 1, \dots, n$$

Věta 2.3. Nechť X_1, \dots, X_n jsou nezávislé náhodné veličiny, pak charakteristická funkce jejich součtu je dána:

$$\phi_{X_1, \dots, X_n}(p) = \prod_{k=1}^n \phi_{X_k}(p)$$

Z této věty plyne výhoda použití charakteristické funkce. Jelikož distribuční funkce součtu nezávislých náhodných veličin je konvoluce jednotlivých distribučních funkcí, jejichž výpočet bývá komplikovaný, ale charakteristická funkce součtu je jen součin jednotlivých charakteristických funkcí.

2.2 Důležitá rozdělení

2.2.1 Binomické rozdělení

Je to rozdělení pro diskrétní náhodné veličiny. Nechť náhodná veličina X nabývá hodnoty 1 s pravděpodobností p a 0 s pravděpodobností $1 - p = q$, kde 1 reprezentuje úspěch a 0 neúspěch, např. při hodu mincí. Potom Y , definovaná jako počet úspěchů v n po sobě jdoucích pokusech, má **binomické rozdělení**:

$$p_Y(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Z binomické věty plyne normovanost:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1$$

Střední hodnota binomického rozdělení je:

$$E(Y) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = np \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} p^r q^{(n-1)-r} = np$$

Podobně se vypočítá rozptyl $\sigma_Y^2 = npq$. Binomické rozdělení se využije při studiu náhodné procházky. Pro velká n přechází binomické rozdělení na Gaussovo rozdělení.

2.2.2 Gaussovo rozdělení

Je nejpoužívanější rozdělení pro spojité náhodné veličiny, a proto se mu také říká normální rozdělení. O jeho rozšíření se zasloužil centrální limitní teorém, který tvrdí, že chyby měření jsou normálně rozděleny.

Je to approximace binomického rozdělení pro velká n , kde se k odhadu binomických koeficientů využije Stirlingův vzorec pro $n!$. Hustota pravděpodobnosti pro Gaussovo rozdělení je:

$$\varrho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2.1)$$

kde μ je střední hodnota a σ^2 rozptyl. Pravděpodobnost, že hodnota náhodné veličiny s normálním rozdělením padne do intervalu $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$, je 68,3%. Odchyly od průměru větší než 3σ jsou téměř nepozorovatelné, jelikož jejich pravděpodobnost je pouhých 0,3%.

Distribuční funkce $F(x) = \int_{-\infty}^x \varrho(y)dy$ se nedá vyjádřit pomocí elementárních funkcí, a proto je pro normalizované rozdělení $N(0, 1)$ tabelovaná.

Existuje také tzv. **inverzní Gaussovo rozdělení**, jež je definováno pouze pro kladné hodnoty $t \in (0, t)$ a jeho hustota pravděpodobnosti je:

$$\rho(t) = \left[\frac{\lambda}{2\pi t^3} \right]^{1/2} \exp \left\{ \frac{-\lambda(t - \mu)^2}{2\mu^2 t} \right\}, \quad (2.2)$$

kde $\mu > 0$ je střední hodnota a $\lambda > 0$ je škálovací parametr. Použitelnost tohoto rozdělení uvidíme v kapitole 3.

2.2.3 Log-normální rozdělení

Toto rozdělení se používá pro spojité nesymetrické náhodné veličiny, které nabývají pouze kladných hodnot a jsou vyjádřeny jako součin nezávislých náhodných veličin, tzv. *multiplikativní proces*. Například pokud je $S = \frac{Y(t+\Delta t)}{Y(t)}$ relativní zisk investice, tj. podíl aktuální ceny akcie a její hodnoty při koupi v čase t , pak si můžeme S vyjádřit jako součin relativních přírůstků:

$$S = \prod_{k=0}^n \frac{Y(t + \frac{k\Delta t}{n})}{Y(t + \frac{(k-1)\Delta t}{n})} = \prod_{k=0}^n S_k$$

Po zlogaritmování přejde produkt na sumu a z CLT plyne, že $\ln S$ má normální rozdělení. Hustota pravděpodobnosti pro *log-normální* rozdělení se dostane z Gaussova rozdělení po zavedení substituce:

$$x = \ln y, \quad \langle x \rangle = \ln y_0, \quad dx = \frac{dy}{y}$$

$$\varrho(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 y}} \exp \left(-\frac{\ln(\frac{y}{y_0})}{2\sigma^2} \right)$$

Důvod, proč se log-normální rozdělení používá ve finančnictví nalezneme na konci 3. kapitoly.

2.2.4 Lévyho rozdělení

Lévyho rozdělení je charakterizováno pomocí asymptotického chování:

$$L_{\alpha,\beta}(x) \sim \frac{\alpha C_{\pm}^{\alpha}}{|x|^{1+\alpha}} \quad \text{pro } x \rightarrow \pm\infty,$$

kde $0 < \alpha < 2$ a $\beta = \frac{C_+ - C_-}{C_+ + C_-}$ je parametr asymetrie.

S klesajícím parametrem α se tvar rozdělení stává špičatější a jeho konce tlustší. To pro popisovaný systém znamená, že jsou pozorovány malé odchylky doprovázené velkými skoky. Přesně jak je vidět u fluktuací finančních produktů, kterých si všiml jako první Mandelbrot při pozorování cen bavlny.

Analytické vyjádření Lévyho rozdělení pro symetrické rozdělení, tj. $\beta = 0$ ($C_+ = C_- = C$) existuje pouze pro $\alpha = 1$ a nazývá se **Couchyho rozdělení**:

$$L_1(x) = \frac{C}{x^2 + \pi^2 C^2}$$

2.3 Centrální limitní teorém

Centrální limitní teorém říká, že při splnění určitých podmínek se rozdělení součtu velkého počtu nezávislých náhodných veličin blíží k normálnímu rozdělení. Proto se například rozdělení chyb měření považuje za normální. Tento předpoklad ospravedlňuje CLT, protože výsledná chyba je součtem velkého množství malých chyb. Základní formulace CLT je:

Věta 2.4. *Nechť X_1, \dots, X_n jsou iid náhodné veličiny a existuje jejich střední hodnota a rozptyl $E[X] = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$. Potom*

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - \mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0, 1) \text{ pro } n \rightarrow +\infty$$

2.4 Stabilní rozdělení

Někdy se pojem stabilní rozdělení zaměňuje s Lévyho rozdělením, ale to je jenom konkrétní podmnožina všech možných stabilních rozdělení. Intuitivní definice stabilního rozdělení může být následující:

Definice 2.4. *Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s rozdělením F s parametry $\bar{\Theta}$. Pak rozdělení F nazveme stabilní, pokud $S = X + Y$ má stejné rozdělení F lišící se nejvýše v parametrech $\bar{\Theta}$.*

Stabilita znamená, že si rozdělení zachovává svůj funkcionální tvar při konvoluci, tj. při součtu nezávislých náhodných veličin téhož rozdělení. To znamená, že hustota pravděpodobnosti součtu více náhodných veličin se získá z původní hustoty jednotlivých náhodných veličin pouze vhodným posunutím a přeskálováním.

Ukažme, že Gaussovo rozdělení je stabilní. Využijeme k tomu charakteristickou funkci normálního rozdělení, což je Fourierova transformace hustoty

pravděpodobnosti.

$$\mathcal{F}[\rho(x)](q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqx} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = e^{-(\sigma^2/2)q^2}$$

Nechť $X, Y \sim N(0, \sigma)$, potom rozdělení náhodné veličiny $S = X + Y$ je dáno konvolucí $\rho(s) = \rho(x) * \rho(y)$. Využitím vlastností Fourierovy transformace dostaneme:

$$\mathcal{F}[\rho(s)](q) = [\mathcal{F}[\rho(x)](q)]^2 = e^{-\sigma^2 q^2}$$

Nyní se pomocí inverzní Fourierovy transformace dostaneme k rozdělení S :

$$\rho(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sqrt{2}\sigma)} e^{-\frac{s^2}{2(\sqrt{2}\sigma)^2}}$$

Toto je zase normální rozdělení, jen se rozptyl změnil na $2\sigma^2$. Z toho plyne, že normální rozdělení je stabilní.

Stabilní rozdělení hrají důležitou roli při rozdělení součtu nezávislých náhodných veličin s různým rozdělením. Jak říká Lévy-Khintchinova věta:

Věta 2.5. Nechť X_1, \dots, X_n jsou nezávislé náhodné veličiny s různým rozdělením. Potom $L(x)$ může být hustota pravděpodobnosti veličiny $S_N = \frac{1}{B_N} \sum_{k=1}^N X_k - A_N$ pro vhodné konstanty A_N, B_N jen tehdy, pokud je stabilní.

Lévy a Khintchin dokonce našli kritérium pro stabilitu.

Věta 2.6. Hustota pravděpodobnosti $L_{\alpha,\beta}(x)$ je stabilní právě tehdy, když

$$\ln \mathcal{F}[L_{\alpha,\beta}(x)](k) = i\gamma k - c|k|^\alpha \left(1 + i\beta \frac{k}{|k|} \omega(k, \alpha) \right),$$

kde γ je libovolná, $c \geq 0$, $\alpha \in (0, 2]$ a $\beta \in [-1, 1]$, a funkce $\omega(k, \alpha)$ je dána

$$\omega(k, \alpha) = \begin{cases} \tan(\pi\alpha/2) & \text{pro } \alpha \neq 1 \\ (2/\pi) \ln |k| & \text{pro } \alpha = 1 \end{cases}$$

γ a c jsou pouze škálovací parametry, na rozdíl od α a β , které určují tvar rozdělení. α se nazývá *charakteristický exponent* a udává chování rozdělení pro velké x :

$$L_{\alpha,\beta}(x) \sim \frac{1}{|x|^{1+\alpha}} \quad \text{pro } x \rightarrow \pm\infty$$

Tedy existuje δ -moment pro $\delta < \alpha$ a všechny vyšší neexistují. Parametr β určuje míru asymetrie rozdělení, $\beta = 0$ udává symetrické rozdělení.

K tomu, abychom určili, zda se rozdelení součtu iid náhodných veličin s rozdelením $p(x)$ blíží ke konkrétnímu stabilnímu rozdelení $L_{\alpha,\beta}(y)$, slouží následující věta:

Věta 2.7. *Nechť X_1, \dots, X_N jsou iid náhodné veličiny s rozdelením $p(x)$. Potom $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N \sim L_{\alpha,\beta}(y)$ právě tehdy, když*

$$p(x) \sim \frac{\alpha a^\alpha c_\pm}{|x|^{1+\alpha}}, \quad \text{pro } x \rightarrow \pm\infty, \quad (0 < \alpha < 2),$$

kde konstanty c_\pm jsou svázány s parametry stabilního rozdelení:

$$c = \begin{cases} \frac{\pi(c_+ + c_-)}{2\alpha\Gamma(\alpha)\sin(\pi\alpha/2)} & \text{pro } \alpha \neq 1 \\ \frac{\pi}{2}(c_+ + c_-) & \text{pro } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} \frac{c_- - c_+}{c_+ + c_-} & \text{pro } \alpha \neq 1 \\ \frac{c_+ - c_-}{c_+ + c_-} & \text{pro } \alpha = 1 \end{cases}$$

Na všechna rozdelení klesající pro velké hodnoty x aspoň s třetí mocninou se vztahuje centrální limitní teorém, a jejich suma je tedy normálně rozdělena. Pokud bude mít suma jiné stabilní rozdelení, pak je jisté, že rozdelení jednotlivých nezávislých náhodných veličin je “heavy-tails” (Lévyho rozdelení). Tzn. velké výkyvy, které by se podle normálního rozdelení téměř neměly vyskytovat, mají relativně velkou pravděpodobnost. Takové chování je vidět, např. u rozdílů cen akcií nebo velikosti zemětřesení.

Existují také rozdelení, které mají “heavy-tails”, ale nespadají do třídy stabilních rozdeleních. Takové je, například **Studentovo rozdelení**, které se používá ve statistice při ověřování hypotéz. Hustota pravděpodobnosti je:

$$\rho(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \sqrt{\pi n} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

kde n určuje počet stupňů volnosti.

Pokud se za X_i ve větě 2.7 dosadí, např. denní fluktuace ceny akcie, potom se součtem n po sobě jdoucích X_i získá fluktuace za n dní, tzn. že můžeme určit fluktuace na různých škálách (týden, měsíc, rok) a jejich rozdelení bude mít stejný parametr α jako jednodenní fluktuace. Tím dostaneme statisticky podobný graf na různých škálách. Taková vlastnost se podle Mandelbrota nazývá “self-affinita”.

2.5 “Infinitely divisible” rozdělení

Jedná se o širší třídu rozdělených, která obsahuje množinu stabilních distribucí. První kroky v této oblasti provedl italský matematik Bruno de Finetti, na jehož práci následně navázali Kolmogorov, Lévy a Khintchine. O “infinitely divisible” distribucích pojednává [12].

Definice 2.5. Nechť X je náhodná proměnná s distribuční funkcí F . Potom F nazveme “infinitely divisible” právě tehdy, když $\forall n \in \mathbb{N} \exists (X_1, \dots, X_n)$ iid náhodné proměnné tak, že F je distribuční funkce náhodné proměnné $S = \sum_{i=1}^n X_i$.

Pro jednoduché posouzení, zda distribuce F je nebo není “infinitely divisible”, slouží charakteristická funkce $\phi_X(p)$. Pokud ji lze vyjádřit jako n -tou mocninu nějaké funkce $\phi_n(p)$, tj. $\phi_X(p) = [\phi_n(p)]^n$, potom je F “infinitely divisible”.

Lévyho-Khintchinova definice pro “infinitely divisible” charakteristickou funkci zní:

Definice 2.6. Funkce $\phi_X(p)$ je charakteristická funkce náhodné veličiny s “infinitely divisible” distribucí právě tehdy, když má následující tvar:

$$\log \phi_X(p) = i\gamma p + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{ipu} - 1 - \frac{ipu}{1+u^2} \right] \frac{1+u^2}{u^2} dG(u),$$

kde γ je konstanta, $G(u)$ je neklesající ohrazená funkce, $G(-\infty) = 0$ a pro $u = 0$ je integrand roven $-\frac{p^2}{2}$.

“Infinitely divisible” distribuce jsou klíčové pro stacionární stochastické procesy, viz kapitola 3, s nezávislými přírůstky. Protože tyto přírůstky lze vyjádřit jako součet nezávislých náhodných veličin ($\{t_i \mid i = 1, \dots, n\}$ je rozdělení intervalu $[t_0, t_0 + t]$):

$$Y(t) = X(t+t_0) - X(t_0) = \sum_{i=0}^n X(t_{i+1}) - X(t_i)$$

Kapitola 3

Stochastický počet

Na stochastický proces můžeme nahlížet jako na zobecnění náhodného vektoru.

Definice 3.1. *Nechť (Ω, \mathcal{A}, P) je pravděpodobnostní prostor. Potom stochastický proces je množina náhodných veličin $\{X_t, t \in T\}$, kde T je libovolná indexová množina.*

Podle množiny T , která většinou reprezentuje čas, rozlišujeme spojitý a diskrétní stochastický proces. Převážně se používá diskrétní případ, protože reprezentuje časovou řadu, jejíž hodnoty se v praxi zaznamenávají (z důvodu digitalizace) po určitých časových intervalech libovolné pevné délky. Pokud je šířka intervalu dostatečně malá, tak se i diskrétní stochastický proces považuje za spojitý.

Stochastický proces je funkce dvou proměnných. Každému $t \in T$ přiřadí náhodnou proměnnou X_t a zároveň pro libovolný jev $\omega \in \Omega$ je $X_t(\omega)$ funkce od t , která se nazývá *realizace* stochastického procesu nebo *trajektorie*.

Pro rozdělení stochastického procesu je nejjednodušší případ, kdy je množina T konečná, protože pak se jedná pouze o náhodný vektor a jeho pravděpodobnostní rozdělení je plně určeno *sdrženou distribuční funkcí* $F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$. Bohužel v mnoha případech je T dokonce spojité a narázíme zde na problém nekonečně dimenzionální funkce. Jak bylo řečeno výše, stochastický proces přiřazuje jevu ω trajektorii, tj. $X : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$, kde \mathcal{F} je prostor vhodných funkcí (trajektorií), a tedy podle analogie s náhodnou proměnnou bychom měli uvažovat pravděpodobnost, že X padne do konkrétní podmnožiny funkcí $A \in \mathcal{F}$, $P(X \in A)$. Tento způsob zavedení distribuce stochastického procesu je značně komplikovaný, a proto se používá schůdnější varianta v podobně konečně dimenzionální distribuce stochastického procesu.

Definice 3.2. Nechť $X = (X_t)_{t \in T}$ je stochastický proces. Pak konečně dimenzionální distribuce (fidis) stochastického procesu X je rozdělení konečných vektorů.

$$F(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) = P(X_{t_1} \leq x_{t_1}, \dots, X_{t_n} \leq x_{t_n})$$

Pro $\forall n \in \mathbb{N}$ a $t_1, \dots, t_n \in T$.

Stochastický proces, jelikož je to souhrn náhodných proměnných, popisujeme pomocí střední hodnoty, variance a kovariance. Pro $\forall t \in T$ máme $E[X_t]$, a tedy střední hodnota náhodného procesu je funkce času:

$$\mu_X(t) = E[X_t]$$

Kovariance je pro stochastický proces funkce dvou proměnných a nazýváme ji *kovarianční funkce*. Její dva parametry určují konkrétní dvě náhodné veličiny, mezi jimiž se kovariance počítá.

$$c_X(t, s) = cov(X_t, X_s) = E[(X_t - \mu_X(t))(X_s - \mu_X(s))]$$

Po normalizaci příslušnými směrodatnými odchylkami dostaneme *korelační funkci* vyjadřující míru závislosti mezi hodnotami v čase t a s . Pokud v kovarianční funkci dosadíme $s = t$, tak získáme varianci jednotlivých náhodných veličin, tj. *autokovarianční funkci*.

Definice 3.3. Stochastický proces $(X_t)_{t \in T}$ se nazývá **striktně stacionární**, pokud $\forall n \in N$, $t_1, \dots, t_n \in T$ a h takové, že $t_1 + h, \dots, t_n + h \in T$ platí:

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$$

Pokud má proces střední hodnotu nezávislou na čase a kovarianční funkce závisí pouze na vzdálenosti mezi jednotlivými náhodnými veličinami ($|t - s|$), pak se takový proces nazývá *slabě stacionární*.

3.1 Náhodná procházka

Nejjednodušší případ náhodné procházky je pohyb částice po přímce, která může skočit v každém časovém kroku Δt o Δx doprava s pravděpodobností p , nebo s pravděpodobností $q = 1 - p$ doleva. Brownův proces je potom limitní případ symetrické náhodné procházky ($p = \frac{1}{2} = q$), kdy se délka časového kroku zmenšuje k nule.

Uvažme, že v čase $t = 0$ se částice nachází v počátku. Ptáme se, jaká je pravděpodobnost nalezení částice v bodě m po N krocích. Aby byla částice v bodě m , tak musí udělat r skoků vpravo a zároveň $l = N - r$ skoků vlevo a

musí platit $m = r + l$. Jelikož se jedná o binomické rozdělení, tak je požadovaná pravděpodobnost:

$$p(m, N) = \binom{N}{r} p^r (1-p)^l$$

Ta je rovna pravděpodobnosti vykonání přesně r skoků vpravo, kde r, l, m splňují výše uvedené vztahy. Dosazením známých hodnot $E[r] = Np$, $Var[r] = Npq = Np(1-p)$ dostaneme:

$$E[m] = 2N(p - \frac{1}{2})$$

$$Var[m] = 4Npq$$

Pro velká N můžeme použít Stirlingův vzorec k vyjádření faktoriálů a po zavedení $x = m\Delta x$, $t = N\Delta t$, $D = 2pq\frac{\Delta x^2}{\Delta t}$, kde D se nazývá difuzní koeficient, se dostaneme ke spojitému případu limitním přechodem $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$ a budeme požadovat, aby difuzní koeficient zůstal konstantní. Dostaneme hustotu pravděpodobnosti nalezení částice v bodě x a čase t :

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 2Dt}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - vt)^2}{2Dt}\right)$$

Zde $v = \frac{2(p-\frac{1}{2})\Delta x}{\Delta t}$ je *driftová rychlosť*, která se vyskytne jenom pro nesymetrický případ a vyjadřuje lineární závislost střední hodnoty na čase. Porovnáním s výrazem 2.1 zjistíme, že se jedná o Gaussovo rozdělení se střední hodnotou $\mu = vt$ a variancí $\sigma^2 = 2Dt$.

Pokud si zvolíme pevně pozici α náhodného chodce a budeme se ptát na čas, kdy do tohoto bodu dorazí tzv. "first passage time", tak zjistíme, že tento čas má inverzní Gaussovo rozdělení s parametry $\mu = \frac{\alpha}{v}$ a $\lambda = \frac{\alpha^2}{2Dt}$. Z tohoto důvodu se nazývá inverzní, protože původní Gaussovo rozdělení určuje rozdělení polohy v pevně daném čase a naopak inverzní Gaussovo rozdělení přechází k rozdělení času pro pevně zvolenou poloho.

U symetrické náhodné procházky dostaneme normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a variancí rostoucí s časem. Tyto vlastnosti jsou základem pro definici Brownova procesu.

3.1.1 Brownův proces

Pojmenovaný je po skotském botanikovi Robertu Brownovi, který pozoroval nepravidelný pohyb pylového zrnka ve vodě, způsobený náhodnými kolizemi molekul vody se zrnkem. Podobné pohyby zaznamenal Louis Bachelier při porovnávání rozdílů cen akcií. Proto se na ně pokusil aplikovat Brownův pohyb, pro něž musel položit základní matematickou formulaci, kterou následně americký

matematik Norbert Wiener upravil do dnešní rigorózní podoby. Z tohoto důvodu se v matematice setkáváme spíše s názvem Wienerův proces.

Definice 3.4. Nechť stochastický proces $B = (B_t), t \in [0, +\infty)$ splňuje následující podmínky:

1. $B_0 = 0$
2. má stacionární a nezávislé přírůstky
3. $\forall t > 0, B_t \sim N(0, t)$
4. má spojitou trajektorii

Potom B nazveme **Brownův proces**.

Z definice plyne, že Brownův proces sám o sobě není stacionární, ale jeho přírůstky $\Delta_i B = B_i - B_{i-1}$, kde je pevně určen časový krok Δt , už stacionární jsou a mají rozdělení $N(0, \Delta t)$, tj. čím delší čas mezi pozorováním tím větší skoky můžeme naměřit. Vztah $Var(\Delta_i B) = \Delta t$ se zapisuje jako $dB^2 = dt$, a toho se následně využívá při konstrukci stochastického integrálu. Přírůstky reprezentují náhodné posuny pylového zrnka ve vodě, který je určen velkým množstvím nezávislých nárazů jednotlivých molekul vody z různých stran. Tím pádem CLT ospravedlnuje v definici použité normální rozdělení.

Pro Brownův pohyb platí:

$$\begin{aligned}\mu_B(t) &= 0 \\ c_B(t, s) &= \min(s, t)\end{aligned}$$

Brownův pohyb spadá do třídy *sobě podobných* stochastických procesů, které nejsou nikde diferencovatelné. Platí pro něho:

$$(T^{\frac{1}{2}} B_{t_1}, \dots, T^{\frac{1}{2}} B_{t_n}) \stackrel{d}{=} (B_{Tt_1}, \dots, B_{Tt_n})$$

$$\forall T > 0, t_i \geq 0, i = 1, \dots, n, n \in \mathcal{N}$$

Tato vlastnost zaručuje, že Brownův pohyb vypadá podobně při vhodném přeškálování souřadnicových os, což znamená, že je to fraktál.

Nepříjemná vlastnost Brownova pohybu, která komplikuje zavedení stochastického integrálu, je kromě neexistence derivace také nekonečná variace.

$$\sup_{\tau} \sum_{i=1}^n |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}| = +\infty \quad \tau \text{ je rozdělení intervalu } [0, T]$$

3.2 Martingale

Pojem *martingale* je spojen s férovou hrou, kdy střední hodnota zisku je nulová, a tedy ani jeden z hráčů nemůže nic vyhrát ani ztratit.

Pokud máme náhodnou veličinu X , pak můžeme vytvořit množinu obsahující její vzory pro libovolnou Borelovskou množinu. Taková množina ještě nemusí být σ -algebra, ale lze ji doplnit tak, aby už podmínky σ -algebry splňovala. Nazveme ji σ -algebra generovaná náhodnou veličinou X a označíme $\sigma(X)$. Při počítání střední hodnoty nové náhodné veličiny Y na stejném pravděpodobnostním prostoru se, za předpokladu znalosti hodnoty X , můžeme omezit na menší podmnožinu v Ω .

Uvažme symetrickou náhodnou procházku, potom očekávaná hodnota polohy částice je 0. Pokud budeme sledovat historii polohy až po n -tý krok, tj. budeme znát polohu po každém kroku, pak poloha po $n+1$ kroku bude $X_{n+1} = X_n \pm 1$ s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Tedy podmíněná střední hodnota je:

$$E[X_{n+1}|X_n] = \frac{1}{2}(X_n + 1) + \frac{1}{2}(X_n - 1) = X_n$$

Znalost předchozího vývoje nám pomohla lépe odhadnout budoucí hodnotu, tj. dodatečnou informaci o systému jsme redukovali náhodnost.

Dodatečná informace se matematicky vyjadřuje pomocí *filtrace*. Je to neklesající posloupnost σ -algeber na původním měřitelném prostoru proměnných X_t :

$$\begin{aligned} & \{\mathcal{F}_t \mid \mathcal{F}_t \subset \mathcal{P}(\Omega) \forall t \in T\} \\ & \mathcal{F}_{t_1} \subseteq \mathcal{F}_{t_2} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_{t_n} \quad \text{pro } t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \end{aligned}$$

Pro stochastický proces se filtrace bere jako σ -algebra generovaná náhodnými veličinami X_s pro $s < t$.

Proces, u kterého nezáleží na minulosti a očekávaná budoucí hodnota je stejná jako poslední zaznamenaná, se nazývá *martingale*. Není zde žádný zisk, protože střední hodnota přírůstku je 0, a tedy se jedná o férovou hru. Jinými slovy, ačkoliv známe historii vývoje dané hry, nemůžeme upravit herní strategii ve prospěch výhry. Stochastický proces $(X_t)_{t \in T}$ se nazývá *martingale*, pokud splňuje:

1. $E|X(t)| < +\infty \forall t \in T$
2. $\sigma(X_t) \subset \mathcal{F}_t \forall t \in T$
3. $E[X(t)|\mathcal{F}_s, s < t] = X(s)$

Druhá podmínka vyjadřuje tzv. adaptaci procesu $(X_t)_{t \in T}$ na filtraci $\{\mathcal{F}_t\}$, tj. stochastický proces nesmí obsahovat více informací než daná filtrace. Zda je určitý proces martingale má vliv i použitá filtrace, tj. náhodný proces $(X_t)_{t \in T}$ může být martingale při filtraci $\{\mathcal{F}_t\}$, ale při $\{\mathcal{F}'_t\}$ už být nemusí.

Nutná podmínka k tomu, aby náhodný proces byl martingale, je konstantní střední hodnota $E[X_t] = E[X_s] \forall s, t$, ale ne každý stochastický proces s konstantní střední hodnotou musí být martingale, tedy to není podmínka postačující.

Pokud máme náhodnou proměnnou Y a filtraci $\{\mathcal{F}_s\}$, tak můžeme sestrojit martingale jako podmíněnou pravděpodobnost náhodné veličiny Y za předpokladu filtrace (informace) \mathcal{F}_n .

$$X_n = E[Y|\mathcal{F}_n]$$

Ověření podmínky na martingale je snadné:

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = E[E[Y|\mathcal{F}_{n+1}]|\mathcal{F}_n] = E[Y|\mathcal{F}_n] = X_n$$

Další příklad martingale je součet X_1, \dots, X_n nezávislých náhodných veličin s nulovou střední hodnotou $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. S_n může reprezentovat polohu náhodného chodce po n krocích.

Brownův proces je martingale. Plyně to z nezávislosti jeho přírůstků.

$$E[B(t)|\mathcal{F}(s), s < t] = E[B(s) + (B(t) - B(s))|\mathcal{F}(s)] = B(s)$$

To znamená, že pokud známe hodnotu Brownova procesu v čase s , tak jeho očekávaná hodnota v budoucnu bude $B(s)$.

3.3 Stochastický integrál

Uvažme, že v čase t_k vlastníme $q(t_k)$ akcií, jejichž cena je $S(t_k)$. V čase t_{k+1} se jejich cena změní na $S(t_{k+1})$ a náš zisk, případně ztráta (v závislosti na znaménku přírůstku), je $q(t_k)\Delta S_k$. V dalším čase můžeme nakoupit či prodat naše akcie, a tedy $q(t_k)$ je náhodná proměnná stejně jako $S(t_k)$. Pokud budeme obchodovat v časovém období $(0, t)$ n-krát v časech $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t$ (např. na začátku každého dne po stanovení ceny akcie), kdy v každém okamžiku je náš počet akcií $q(t)$ a jejich cena $S(t)$, pak je náš výsledný zisk (po n dnech obchodování) $I_n = \sum_{k=0}^{n-1} q(t_k)\Delta S_k$. Obecný vývoj ceny akcie se popisuje rovnici:

$$\Delta S(t_k) = \mu \Delta t S(t_k) + \sigma S(t_k) \Delta B_k$$

Po dosazení, pokud budeme chtít za pomoci limity $n \rightarrow \infty$ ($\Delta t \rightarrow 0$) přejít ke spojitému případu, narazíme na problém jak interpretovat integrál podle Brownova pohybu $\int f(t)dB_t$.

Bohužel nemůžeme použít vztah $\int f(s)dg = \int f(s)g'(s)ds$, protože Brownův pohyb není nikde diferencovatelný. Ale můžeme se pokusit budovat integrál podobným způsobem jako Riemannův obyčejný integrál. Vezmeme rozdělení τ intervalu $[0, t]$ a napočítá se, tzv. *Riemann–Stieltjesova* suma:

$$\sum_{i=1}^n f(y_i) \Delta_i g \quad \forall i \quad t_{i-1} \leq y_i \leq t_i$$

Dále by se ukázalo, že daná suma nezávisí na rozdělení a výběru y_i , a integrál by se definoval jako limita $n \rightarrow +\infty$, tzv. *Riemann–Stieltjesův integrál*. Dá se ukázat, viz [8], že za vhodných předpokladů na funkce f a g má tento integrál smysl. Bohužel pro náš případ $f = g = B(t)$ takový integrál neexistuje z důvodu neomezené variace.

3.3.1 Itōův integrál

Vezměme *Riemann–Stieltjesovu* sumu pro Brownův pohyb se speciálním výběrem $y_i = t_{i-1}$, tj. levým krajním bodem dělícího intervalu.

$$I_n = \sum_{i=1}^n B(t_{i-1}) \Delta_i B$$

Ukazuje se, že tato suma konverguje podle kvadratického středu k $\frac{1}{2}(B_t^2 - t)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[(I_n - \frac{1}{2}(B_t^2 - t))^2] = 0$$

Tento vztah slouží jako definice Itōova integrálu z Brownova procesu $\int_0^t B(s)dB(s)$. Za integrand se může volit libovolný stochastický proces C splňující:

1. C_t musí být funkce pouze B_s pro $s \leq t$
2. $\int_0^T E[C_s^2]ds < \infty$

Tyto podmínky zaručují existenci posloupnosti $(C^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ jednoduchých procesů (existuje rozdělení intervalu $[0, T]$), takové že pro každý dělící interval je na něm C_t stejná náhodná proměnná) takových, že approximují původní proces C , viz [8]. Itōův integrál z jednoduchého procesu je:

$$I_t(C^{(n)}) = \sum_{i=1}^{k-1} C_{t_{i-1}}^{(n)} \Delta_i B + C_{t_k}(B_t - B_{t_{k-1}}) \quad t_{k-1} < t < t_k$$

Limitou podle kvadratického středu je určen Itōův integrál ze stochastického procesu C . $I_t(C)$ je možné approximovat pro rozdělení τ Riemann–Stieltjesovou sumou, abychom se vyhnuli hledání posloupnosti $(C^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$:

$$I_t(C) = \sum_{i=1}^{k-1} C_{t_{i-1}} \Delta_i B + C_{t_k} (B_t - B_{t_{k-1}}) \quad t_{k-1} < t < t_k$$

Vlastnosti Itōova integrálu

Pro stochastický proces $I_t(C)$ platí, že má spojitou trajektorii, jeho střední hodnota je 0 a je to martingale vzhledem k filtraci generované Brownovým procesem. Dále platí izometrie a linearita podobně jako pro obyčejný integrál:

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^t C_s dB_s\right)^2 &= \int_0^t EC_s^2 ds, \quad t \in [0, T] \\ \int_0^t \left[c_1 C_s^{(1)} + c_2 C_s^{(2)}\right] dB_s &= c_1 \int_0^t C_s^{(1)} dB_s + c_2 \int_0^t C_s^{(2)} dB_s \\ \int_0^T C_s dB_s &= \int_0^t C_s dB_s + \int_t^T C_s dB_s \end{aligned}$$

3.3.2 Itōovo lemma

Slouží k výpočtu Itōova stochastického integrálu. Upravuje klasické řetězové pravidlo pro derivaci složené funkce tak, aby platilo i pro Itōův stochastický integrál.

Pro stochastický proces $f(B_t)$ se využije jeho rozvoj do Taylorovy řady, kde se zanedbají členy vyššího než druhého rádu.

$$f(B_{t+dt}) - f(B_t) = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)(dB_t)^2$$

Následně se $(dB_t)^2$ nahradí dt a integrací pro dvakrát diferencovatelnou funkci f dostáváme ($s < t$) součet Itōova integrálu z f' a obyčejného Riemannova integrálu z f'' :

$$f(B_t) - f(B_s) = \int_s^t f'(B_x) dB_x + \frac{1}{2} \int_s^t f''(B_x) dx$$

To je Itōovo lemma pro funkci pouze Brownova pohybu. Pokud daná funkce závisí také explicitně na čase, tak se postupuje obdobným způsobem. Použije se Taylorův rozvoj pro funkci dvou proměnných $f(t, x)$ se spojitými derivacemi do druhého řádu¹:

$$f(t + dt, B_{t+dt}) - f(t, B_t) = f_1 dt + f_2 dB_t + \frac{1}{2}[f_{11}(dt)^2 + 2f_{12}dtdB_t + f_{22}(dB_t)^2]$$

Stejnou záměnou a zanedbáním členů s druhou diferencí času a součinu $dtdB_t$ dostaneme integraci ($s < t$):

$$f(t, B_t) - f(s, B_s) = \int_s^t \left[f_1(x, B_x) + \frac{1}{2}f_{22}(x, B_x) \right] dx + \int_s^t f_2(x, B_x) dB_x$$

Definice 3.5. Stochastický proces X_t , který lze zapsat ve tvaru:

$$X_t = X_0 + \int_0^t A_s^{(1)} ds + \int_0^t A_s^{(2)} dB_s$$

kde $A_s^{(1)}$, $A_s^{(2)}$ jsou funkce pouze B_l pro $l \leq s$ a jsou určeny pomocí X_t jednoznačně. Se nazývá **Itōův proces**.

Zobecnění Itōova lemma pro stochastické procesy, které jsou funkci Itōova procesu je:

$$f(t, X_t) - f(s, X_s) = \int_s^t \left[f_1(y, X_y) + \frac{1}{2}[A_y^{(2)}]^2 f_{22}(y, X_y) \right] dy + \int_s^t f_2(y, X_y) dX_y$$

Všechny verze se odvodily z Taylorova rozvoje pro funkci $f(t, x)$ se spojitými druhými parciálními derivacemi. Podobně se dá postupovat pro funkce více proměnných a následně získat vzorec pro derivaci součinu dvou Itōových procesů:

$$d(X_t^{(1)} X_t^{(2)}) = X_t^{(2)} dX_t^{(1)} + X_t^{(1)} dX_t^{(2)} + A_t^{(2,1)} A_t^{(2,2)} dt$$

3.3.3 Stratonovichův integrál

Itōův integrál používá levý krajní bod dělícího intervalu, díky čemuž je martingale, ale bohužel pro něho neplatí řetězové pravidlo ve stejném tvaru, jak ho známe z klasického diferenciálního počtu. Tuto nevhodnost nemá Stratonovichův integrál, který používá prostřední hodnotu v dělícím intervalu, a proto se využívá pro řešení stochastických diferenciálních rovnic. Na druhou stranu jeho nevhodnost je, že není martingale.

¹ $f_1 = \frac{\partial f}{\partial t}(t, B_t)$, $f_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, B_t)$, apod.

Stratonovichův integrál se buduje stejně jako Itôův.

Věta 3.1. Nechť f je dvakrát diferencovatelná a $\int_0^T E f^2(B_t) dt < +\infty$. Potom suma $\tilde{S}_n = \sum_{i=1}^n f(B_{y_i}) \Delta_i B$ konverguje podle kvadratického středu a její limitou je definován Stratonovichův integrál

$$\int_0^T f(B_s) \circ dB_s$$

Vztah mezi Itôovým a Stratonovichovým integrálem pro stochastický proces je dán následující větou.

Věta 3.2. Nechť f splňuje $\int_0^T E[f(B_t)]^2 dt < +\infty$ a $\int_0^T E[f'(B_t)]^2 dt < +\infty$ a má spojité parciální derivace do druhého rádu. Potom platí:

$$\int_0^T f(B_t) \circ dB_t = \int_0^T f(B_t) dB_t + \frac{1}{2} \int_0^T f'(B_t) dt,$$

kde na levé straně je Stratonovichův a na pravé Itôův integrál.

3.4 Stochastické diferenciální rovnice

Obecný případ stochastické diferenciální rovnice je:

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dB(t)$$

Rovnice se pomocí integrace převádí na tvar:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dB(s), \quad (3.1)$$

kde první integrál je normální integrál podle času a druhý stochastický integrál přes Brownův proces. Koeficient μ se nazývá *drift* a určuje deterministickou část, kdežto σ škáluje náhodné odchylky. $X(0)$ je počáteční podmínka, která může být náhodná proměnná.

Stochastický proces $(X_t)_{t \in T}$ nazveme **silné řešení** pokud:

1. X_t je funkce pouze B_s $s \leq t$
2. oba integrály v rovnici 3.1 existují
3. X závisí na Brownově procesu a koeficientech $\mu(t, x)$ a $\sigma(t, x)$

Slabé řešení znamená, že známe pouze rozdělení stochastického procesu $(X_t)_{t \in T}$, tj. jeho střední hodnotu, varianci a kovarianční funkci.

Věta 3.3. Nechť $X(0)$ a B_t jsou nezávislé pro $\forall t \in [0, T]$ a $E[X(0)^2] < \infty$. Pokud dále platí

1. $\mu(t, x), \sigma(t, x)$ jsou spojité
2. $|\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$

Potom má rovnice 3.1 jednoznačné silné řešení X na $[0, T]$.

Vyřešíme stochastickou diferenciální rovnici, která odpovídá přírůstkům cen akcie:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB \quad (3.2)$$

Integrací dostaneme:

$$S(t) = S(0) + \int_0^t S(s) \mu ds + \int_0^t S(s) \sigma dB_s \quad (3.3)$$

Pokud budeme předpokládat, že $S(t) = f(t, B_t)$, tak z Itōova lemma dostaneme:

$$S(t) = S(0) + \int_0^t \left[f_1(s, B_s) + \frac{1}{2} f_{22}(s, B_s) \right] ds + \int_0^t f_2(s, B_s) dB_s \quad (3.4)$$

Vyjádření $S(t)$ je jednoznačné, protože je to Itōův proces, proto porovnáním integrandů u ds a dB_s v rovnicích 3.3 a 3.4 dostaneme soustavu dvou parciálních diferenciálních rovnic pro funkci $f(t, B_t) = S(t)$. Vyřešením těchto rovnic dostaneme řešení:

$$S(t) = S(0) \exp(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t \quad t \in [0, T]$$

$S(t)$ se nazývá **Geometrický Brownův pohyb** a je základem k modelování cen akcií na finančním trhu.

Vydělením rovnice 3.2 cenou akcie S získáme na pravé straně diferenci logaritmu, tj. rovnici můžeme přepsat do tvaru:

$$d \ln S = \mu dt + \sigma dB_t$$

Z tohoto tvaru je zřejmé, že $\ln S$ odpovídá Brownově pohybu, tedy má normální rozdělení a původní ceny S mají tím pádem log-normální rozdělení.

Kapitola 4

Aplikace stochastického počtu a fraktální geometrie

4.1 Black-Scholes formule

Držitel (“holder”) **evropské opce** má právo v daném čase T (expirační doba) od vypisovatele opce (“writer”) koupit nebo mu prodat (“call” resp. “put” opce) danou akcií za předem smluvěnou cenu K . Držitel toto právo nemusí využít, ale pokud se tak rozhodne, pak je vypisovatel povinen mu vyhovět. Tzn. jediný, kdo má určitou povinnost (nevýhodu) je vypisovatel, a proto si musí pořádně rozmyslet, za jakou cenu opcí prodá, tj. za jakou cenu je ochoten se nechat zavázat. Na tuto otázku podali odpověď *Fisher Black* a *Myron Scholes*, kteří našli formuli pro určení ceny opce. *Robert Cox Merton* dále propracoval tuto formuli a spolu s Myronem Scholesem dostali v roce 1997, dva roky po smrti Blacka, Nobelovu cenu za ekonomii.

Kromě evropských opcí existují i jiné, např. **americké opce**, které se liší pouze tím, že držitel může své právo uplatnit kdykoliv až do uplynutí expirační doby T . Dále se můžeme setkat s tzv. **exotickými opcemi**, což je souhrnný název pro opce se specifickými vlastnostmi. Více o opcích a dalších finančních produktech lze nalézt v [13].

Black–Scholesův model je založen na předpokladu **efektivního trhu**, tj.:

- všechny informace jsou okamžitě všem dostupné a tyto informace se promítají do vývoje ceny
- trh má vysokou likviditu, tj. je možno obchodovat kdykoliv bez jakékoliv prodlevy
- nejsou žádné poplatky za transakce ani za sjednání obchodu

Dále se předpokládá, že úroková míra v bance r a volatilita σ , tj. míra rizika trhu (čím větší volatilita tím větší fluktuace), zůstanou konstantní. Tuto podmínu můžeme vynechat, pokud jsou r a σ známé funkce času a nahradíme je výrazy:

$$r \rightarrow \frac{1}{T-t} \int_t^T r(t') dt', \quad \sigma^2 \rightarrow \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma^2(t') dt'$$

Pokud se vyplácí dividendy a známe funkci $D(t)$, podle které se vyplácí, pak je třeba upravit cenu akcie $S(t) \rightarrow S(t) \exp \left\{ - \int_t^T D(t') dt' \right\}$.

Black–Scholes bere v úvahu pouze trh bez **arbitráže**, což je způsob, jak obdržet zisk bez podstoupení rizika, proto se pro arbitráž také používá název „free lunch“. Uvažme, že si můžeme koupit akcie na burze v Londýně za cenu S a v New Yorku je cena stejné akcie S' . Pokud $S < S'$, tak si můžeme kupovat akcie v Londýně a okamžitě je prodávat v New Yorku, čímž dostaneme na každé akcie zisk $S' - S$. Díky zvýšené poptávce se cena v Londýně zvýší a naopak větší nabídka zapříčiní snížení ceny v New Yorku. Tím dochází k vyrovnání cen na obou burzách a nastolení rovnováhy. Tudíž můžeme říct, že arbitráž zajišťuje rovnováhu cen na burzách.

Důležitý předpoklad je možnost nákupu podkladového aktiva v libovolném, ne nutně celočíselném, množství. Vývoj ceny S podkladového aktiva podléhá Geometrickému Brownovu pohybu, tudíž ceny S jsou log-normálně rozděleny.

$$dS = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dB_t \quad (4.1)$$

Cena opce O závisí na čase a na ceně podkladového aktiva. Využitím rovnice 4.1 a Itôova lemma dostaneme:

$$dO = \left(\frac{\partial O}{\partial t} + \frac{1}{2} (\sigma S(t))^2 \frac{\partial^2 O}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial O}{\partial S} dS \quad (4.2)$$

Aby vypisovatel opce neutržil na konci expirační doby ztrátu, musí si udržovat vhodné množství akcií $\Delta(t)$ a k jeho nákupu potřebuje hotovost $\Pi(t)$, která se nachází v bance a tyto peníze jsou úročeny úrokovou mírou r , a proto je jejich přírůstek $r\Pi(t) = r\Pi(t)dt$, viz [3]. Jeho celkové jmění v čase t by se mělo rovnat ceně opce, tj. držitel by si měl obstarat počáteční kapitál:

$$O(t) = \mathcal{W}(t) = \Delta(t)S(t) + \Pi(t) \quad (4.3)$$

Z rovnice 4.3 vyjádříme diferenciál, kde předpokládáme, že během časového intervalu $(t, t+d)$ nebudeme nakupovat žádné akcie, tj. $\Delta(t)$ zůstane konstantní,

a diferenciál porovnáme s rovnicí 4.2. Tím dostaneme soustavu parciálních diferenciálních rovnic:

$$\Delta(t) = \frac{\partial O}{\partial S}(t) \quad (4.4)$$

$$r\Pi(t) = \frac{\partial O}{\partial t}(t) + \frac{1}{2} [\sigma S(t)]^2 \frac{\partial^2 O}{\partial S^2}(t) \quad (4.5)$$

Princip Black–Scholesovy formule je neustálé přizpůsobování, tzv. **hedging**, množství peněz v akcích a na bankovním účtu, kde je pevná úroková míra r , podle rovnice 4.4. Zde je důležitý předpoklad bezplatného a nepřetržitého přesouvání peněz z bankovního účtu a zpět, který v praxi bohužel není splněn.

Z rovnice 4.3 si pomocí 4.4 vyjádříme $\Pi(t)$ a dosazením do 4.5 dostaneme slavnou Black–Scholesovu rovnici:

$$\frac{\partial O}{\partial t}(t) + \frac{1}{2} [\sigma S(t)]^2 \frac{\partial^2 O}{\partial S^2}(t) + rS(t) \frac{\partial O}{\partial S}(t) - rO(t) = 0 \quad (4.6)$$

V čase $t = T$ držitel “call” opce uplatní své právo, pokud je $S(T) > K$ a vypisovatel bude mít v tomto případě ztrátu $S(T) - K$, kterou by si měl vykompenzovat kupní cenou opce $C(S, T)$. Podobně pro “put” opci by ztráta byla $K - S(T)$.

Pokud by S byla někdy nulová, tak by nulová zůstala napořád a “call” opce by neměla smysl. Naopak “put” opci by držitel určitě uplatnil a vypisovatel by musel zaplatit celou smluvenou hodnotu K , proto by měl opci prodat za takovou částku, aby se mu v bance za dobu $T - t$ zúročila na hodnotu K , tzn. vyřešit jednoduchou rovnici $P(0, t) \exp(r(T-t)) = K$.

Poslední případ, který je třeba zvážit, je $S \rightarrow +\infty$. Tady by se jistě nenašel nikdo, kdo by akcií prodal za cenu K , která by byla určitě menší než S , proto “put” opce nemá smysl, ale “call” opci by držitel uplatnil, a z tohoto důvodu musí být její cena úměrná S .

Z uvedeného rozboru plynou okrajové podmínky pro cenu “call” C a “put” P opce.

- $C(S, T) = \max(S(T) - K, 0)$
- $C(0, t) = 0$
- $C(S, t) \sim S \quad \text{pro } S \rightarrow +\infty$
- $P(S, T) = \max(K - S(T), 0)$
- $P(0, t) = K \exp(-r(T-t))$
- $P(S, t) \rightarrow 0 \quad \text{pro } S \rightarrow +\infty$

Postup řešení rovnice 4.6 s danými okrajovými podmínkami lze nalézt v [3] a [14]. Výsledné řešení pro “call” a “put” opci je:

$$C(S, t) = SF(d_1) - Ke^{-r(T-t)}F(d_2) \quad (4.7)$$

$$P(S, t) = -S\left[1 - F(d_1)\right] + Ke^{-r(T-t)}\left[1 - F(d_2)\right], \quad (4.8)$$

kde $F(x)$ je distribuční funkce $N(0, 1)$ rozdělení a d_1, d_2 jsou dány vztahy:

$$d_1 = \frac{\ln S/K + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad d_2 = \frac{\ln S/K + (r - \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

Může se zdát překvapivé, že výsledná cena jak pro “call” opci tak pro “put” opci nezávisí na parametru μ , který určuje rychlosť růstu ceny podkladového aktiva.

V Black–Scholesově formuli pro cenu opce se vyskytují čtyři parametry. T určuje expirační dobu, K je smluvná budoucí cena, r je úroková míra v bance a σ určuje volatilitu trhu. Všechny parametry jsou snadno určeny v době sjednání obchodu, kromě volatility. Jako nejjednodušší přiblížení ji můžeme odhadnout pomocí předchozích dat. Nechť známe N hodnot ceny akcie S , kde jednotlivé hodnoty jsou pořizovány po časových úsecích Δt . Potom σ^2 odhadneme jako, viz [14]:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{(N-1)\Delta t} \sum_{i=1}^N (\log S_{i+1}/S_i - \bar{m})^2, \quad \bar{m} = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{i=1}^N \log S_{i+1}/S_i$$

4.1.1 Možné modifikace

První, kdo začal poukazovat na chybný předpoklad normality přírůstků, byl Mandelbrot. Extrémní skoky, které lze vidět na obrázku 4.1, by podle normálního rozdělení téměř neměly nastat. Možná úprava je místo Brownova procesu použít Lévyho proces. Další možností je upustit od nezávislosti přírůstků v Brownově pohybu a tím dostaneme *frakční Brownův pohyb*.

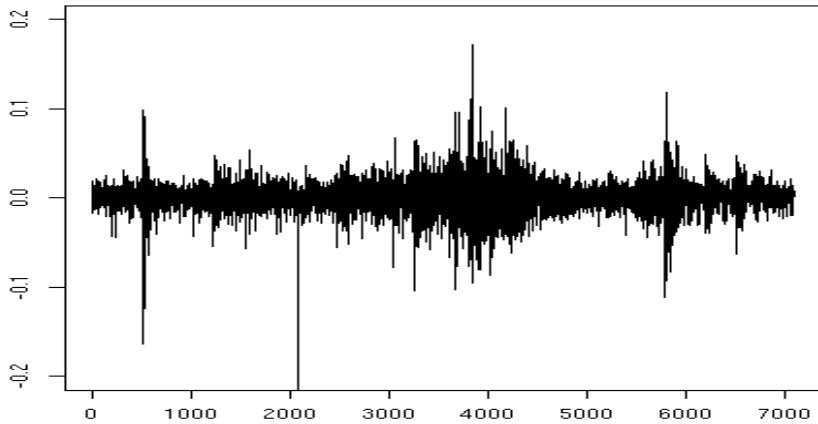
Frakční Brownův pohyb

Definice 4.1. Nechť $0 < \alpha < 1$ a $\{X(t)\}_{t \in T}$ je stochastický proces splňující:

1. $X(0) = 0$ a s pravděpodobností 1 je $X(t)$ spojitá funkce
2. pro $t \geq 0, h > 0$ platí

$$P(X(t+h) - X(t) \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}h^\alpha} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{u^2}{2h^{2\alpha}}\right\} du \quad (4.9)$$

Potom X nazveme *frakční Brownův pohyb* s parametrem α .



Obrázek 4.1: Denní fluktuace NASDAQ indexu v období od 1. 10. 1985 do 29. 11. 2013. Indexy slouží k diverzifikaci rizika jednotlivých akcií, či průmyslových odvětví, ale neeliminují, tzv. systematické chyby způsobené politickým děním, a tím pádem dobře reflektují aktuální stav celkové ekonomiky.

Druhá vlastnost říká, že frakční Brownův pohyb má stacionární přírůstky s normálním rozdělením $N(0, h^{2\alpha})$. Z definice plyne, viz [1]:

$$E[(X(t+h) - X(t))(X(t) - X(0))] = \frac{1}{2}[(t+h)^{2\alpha} - t^{2\alpha} - h^{2\alpha}]$$

Tento výraz je 0 pouze pro $\alpha = 1/2$, což odpovídá normálnímu Brownovu pohybu. Pro $\alpha > 1/2$ je korelace kladná a jedná se o tzv. *persistentní proces*, tzn. proces si zachovává stoupající, či klesající tendenci. Jinými slovy, vysoké hodnoty jsou následovány zase vysokými hodnotami a naopak, malé hodnoty zůstanou malé po dlouhou dobu. Naproti tomu pro $\alpha < 1/2$ je korelace záporná a proces nazýváme *anti-persistentní*, tj. střídají se stoupající a klesající trendy. Parametr α nám umožňuje charakterizovat stochastický proces/časovou řadu.

- $\alpha > 1/2 \rightarrow$ *persistentní proces*
- $\alpha < 1/2 \rightarrow$ *anti-persistentní proces*
- $\alpha = 1/2 \rightarrow$ Náhodná procházka

Díky nenulové korelacii můžeme pomocí analýzy předchozích dat získat informace o budoucím vývoji. Tuto možnost jsme při modelování ceny náhodnou procházkou neměli, protože Brownův pohyb je martingale.

4.2 Fraktální analýza časových řad

Fraktální analýza se používá k určení Hurstova exponentu, podle něhož se následně charakterizuje dlouhodobá/krátkodobá paměť a otázka, jestli se jedná o *persistentní* nebo *anti-persistentní* proces.

U časových řad reprezentuje Hurstův exponent H , tzv. škálovací exponent, který nám řekne, jak máme upravit vertikální osu při přeskálování časové osy, abychom dostali statisticky stejnou řadu, tj. původní a přeskálovaná řada mají stejné rozdělení:

$$x(t) \stackrel{d}{=} a^{-H} x(at) \quad (4.10)$$

Pouhým dosazením do vzorce 4.9 a provedením substituce v integrálu lze ověřit, že frakční Brownův pohyb s parametrem α je statisticky soběpodobný s Hurstovým exponentem $H = \alpha$. Z tohoto důvodu se tyto dva exponenty často zaměňují. Vztah mezi Hurstovým exponentem a fraktální dimenzí grafu je:

$$D = 2 - H$$

Tento vztah nám říká, že čím menší je Hurstův exponent, tím větší plochu trajektorie procesu pokryje, tj. vyskytují se větší fluktuace. Tudíž v případě finančních řad je nižší hodnota Hurstova exponentu spojována s rizikovějšími trhy.

Uvažme, že střední hodnota časové řady $\{x(t)\}_{t \in [0, T]}$ je 0 (pokud ne, tak bychom od původní řady odečetli průměr $\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$). Potom můžeme získat Hurstův exponent ze zkoumání rozptylu, viz [15]:

$$\langle x^2(t) \rangle \sim t^{2H}$$

V mnoha případech nás zajímá, zda se přírůstky časové řady $\{x_i\}_{i=0}^N$ nějakým způsobem ovlivňují. To nám řekne korelační funkce, kterou pro stacionární řadu vypočteme jako:

$$C(s) = \frac{1}{N-s} \sum_{i=1}^{N-s} \Delta x_i \Delta x_{i+s}$$

Z jejího tvaru následně určíme míru ovlivňování, tj. po jakou dobu si řada „pamatuje“ předchozí hodnoty.

- krátkodobá paměť - $C(s) \sim \exp\left\{-\frac{s}{t_x}\right\}$
- dlouhodobá paměť - $C(s) \propto s^{-\gamma} \quad 0 < \gamma < 1$
- nekorelované přírůstky - $C(s) = 0$

Parametr t_x určuje charakteristický čas, γ se nazývá *korelační exponent* a je s Hurstovým exponentem svázán vztahem, viz [15]:

$$H = 1 - \gamma/2$$

V mnoha případech je třeba korelační exponent získat jiným způsobem. Jedna z možností je zkoumat tzv. „power spektrum“ $S(f)$, což je kvadrát absolutní hodnoty Fourierovy transformace a najít parametr β , aby platilo:

$$S(f) \sim f^{-\beta}$$

Z Wiener Khinchinova teorému, který říká, že Fourierova transformace korelační funkce je rovna „power spektru“, plyne vztah mezi exponenty β , γ a H , viz [15]:

$$\beta = 1 - \gamma = 2H - 1$$

4.2.1 Metody pro stacionární řady

Rescaled range (R/S)

Tuto metodu jako první použil vodní inženýr *Harold Edwin Hurst* při stavbě přehrady na Nilu. Zde pozoroval dlouhodobé korelace výšky hladiny, tzv. *long persistent* proces.

Vezmeme zadanou řadu $\{x_i\}_{i=1}^N$ a odečteme od ní průměr $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N$, tím dostaneme novou řadu $\{\tilde{x}_i = x_i - \bar{x}\}_{i=1}^N$. Tuto novou řadu rozdělme na ne-překrývající segmenty po s členech. Na každém segmentu spočteme průměr $\langle y_{\nu_s} \rangle = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \tilde{x}_{\nu_s+i}$, $\nu = 0, \dots, [N/s] = N_s$. Následně napočítáme tzv. profil pro každý segment:

$$Y_\nu(j) = \sum_{i=1}^j (\tilde{x}_{\nu_s+i} - \langle y_{\nu_s} \rangle)$$

Dále spočteme rozsah a střední kvadratickou odchylku pro každý segment:

$$R_\nu(s) = \max_{1 \leq j \leq s} Y_\nu(j) - \min_{1 \leq j \leq s} Y_\nu(j), \quad S_\nu(s) = \sqrt{\frac{1}{s} \sum_{j=1}^s Y_\nu^2(j)}$$

Hledaný Hurstův exponent se určí z chování fluktuační funkce, tj. fluktuační funkce se napočítá pro více velikostí s segmentů a H se odhadne z *log-log* grafu pomocí metody nejmenších čtverců.

$$F_{RS}(s) = \frac{1}{N_s} \sum_{\nu=0}^{N_s-1} \frac{R_\nu(s)}{S_\nu(s)} \sim s^H$$

Fluktuační analýza

Stejně jako u R/S metody vytvoříme novou řadu $\{\tilde{x}_i\}_{i=1}^N$. Z této nové řady spočteme profil:

$$Y(j) = \sum_{i=1}^j \tilde{x}_i, \quad j = 1, \dots, N \quad (4.11)$$

Časový interval rozdělíme na $[N/s] = N_s$ segmentů. Jelikož N nemusí být násobek s , zbude na konci řady $N - s[N/s]$ členů. Abychom vzali v úvahu i tyto členy, vytvoříme dalších N_s segmentů z konce řady. Tím pádem dostaneme celkem $2N_s$ segmentů a na každém z nich určíme fluktuace tak, že vezmeme rozdíl hodnot $Y(j)$ v krajních bodech segmentu.

$$F_{FA}^2(\nu, s) = \left[Y(\nu s) - Y((\nu + 1)s) \right]^2$$

Pomocí "power law" pro průměrnou fluktuaci F se určí Hurstův exponent:

$$F(s) = \left[\frac{1}{2N_s} \sum_{\nu=0}^{2N_s-1} F_{FA}^2(\nu, s) \right]^{1/2} \sim s^H$$

Z důvodu přesnosti odhadu Hurstova exponentu je třeba se omezit na škály $s < N/10$.

4.2.2 Nestacionární řady

Detrended fluctuation analysis

DFA je rozšířením Fluktuační analýzy pro nestacionární časové řady, kdy se snaží odstranit trend, který zamezuje použití předchozích metod. Slouží k detekci dlouhodobé paměti v časové řadě, tj. určení korelačního exponentu γ , viz [17].

Postup je podobný jako u fluktuační analýzy. Nejprve se napočítá profil, viz vzorec 4.11. Následně se řada rozdělí na $N_s = [N/s]$ segmentů délky s . Na každém segmentu ($\nu = 0, \dots, 2N_s - 1$) se určí polynomální trend $y_{\nu,s}^m(j)$, kde m je stupeň polynomu. Použitý stupeň polynomu lze vyčíst z názvu, např. DFA0, DFA1 odpovídají konstantnímu a lineárnímu trendu. Pro každý segment se vypočítaný trend odečte od profilu řady, tím vznikne nová řada bez trendu:

$$\tilde{Y}_{\nu,s}(j) = Y(\nu s + j) - y_{\nu,s}^m(j)$$

Nyní se v každém segmentu spočte střední fluktuace:

$$F_{DFA}^2(\nu, s) = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \tilde{Y}_{\nu,s}^2(j)$$

Dále se postupuje shodně jako u fluktuační analýzy, tj. pro více s se napočítá průměrná fluktuace přes všechny segmenty a z *log-log* grafu se určí “power law”:

$$F(s) = \left[\frac{1}{2N_s} \sum_{\nu=0}^{2N_s-1} F_{DFA}^2(\nu, s) \right]^{1/2} \sim s^H$$

Požadovaný korelační exponent lze vyjádřit ze vztahu:

$$H = 1 - \gamma/2$$

Pro nekorelovaná data bychom dostali $H = 0,5$, což odpovídá náhodné procházce. Naopak pro dlouhodobou paměť v časové řadě platí $H > 0,5$.

Standardní chyba σ při odhadu exponentu H klesá s počtem dostupných dat. V praxi se pro chyby používají hodnoty:

$$\begin{aligned} N = 500 &\rightarrow \sigma = 0,1 \\ N = 3000 &\rightarrow \sigma = 0,05 \\ N = 10000 &\rightarrow \sigma = 0,03 \end{aligned}$$

4.2.3 Multifraktály v časových řadách

Díky výkonnější výpočetní technice a větších paměťových úložištích, jsou dnes dostupná data na menších škálách, jako jsou minuty, sekundy a dokonce data po jednotlivých transakcích. Nabízí se tedy možnost zkoumat finanční řady na těchto různých škálách a hledat mezi nimi nějakou souvislost. Např. náhodná procházka vykazuje fraktální chování, tj. její statistické vlastnosti zůstávají stejné při změně měřítka, pouze se přeskálují faktorem $1/2$. Naopak skutečná data mohou mít na různých škálách odlišné statistické vlastnosti, tj. různé rozdělení fluktuací.

Můžeme se setkat s případy, kdy vztah 4.10 platí pouze pro určitý rozsah hodnot a a další hodnoty (škály) jsou charakterizovány jinou hodnotou Hurstova exponentu H . Pokud máme celý interval Hurstových exponentů, pak se jedná o multifraktální systém.

Pokud bychom měli míru μ , která bude měřit velikost fluktuací v časové řadě, tj. volatilitu, potom můžeme definovat tzv. “trading time” jako funkci normálního času t .

$$T(t) = \mu([0, t]) = \int_0^t d\mu$$

Takto definovaný nový čas se bude vyvíjet podle aktuální aktivity na trhu. Např. ráno, kdy se na burze obchoduje mnohem častěji než v době oběda, se “trading time” prodlouží a naopak kolem poledne se zkrátí, protože je burza méně činná.

Časovou osu si rozdělíme podle lokální dimenze míry μ , tj. na úseky, kde se μ chová podle “power law“ $\mu([t, t+h]) \sim h^\gamma$:

$$F_\gamma = \left\{ t \mid \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log \mu[t, t+h]}{\log h} = \gamma \right\}$$

Pokud $t \in F_\gamma$, potom pro varianci přírůstků stochastického procesu $X(t) = B^\alpha(T(t))$, kde B^α je frakční Brownův proces s parametrem α , platí, viz [1]:

$$E[(X(t+h) - X(t))^2] \sim |h|^{2\gamma\alpha}$$

Tudíž fluktuace procesu $X(t)$ jsou určeny lokální dimenzí míry μ . Dále bychom mohli pomocí multifraktálního spektra určit, nakolik jsou konkrétní velikosti fluktuace v časové řadě zastoupeny. To by nám pomohlo v předpovědi finanční krize, jež je doprovázena častými nadprůměrnými výkyvy ceny, viz [16].

Literatura

- [1] K. Falconer. Fractal Geometry—Mathematical Foundations and Applications, second ed., John Wiley, 2003.
- [2] Michael F. Barnsley. Fractals Everywhere, second ed., Morgan Kaufmann, 1993.
- [3] Wolfgang Paul and Jörg Baschang. Stochastic Processes: From Physics to Finance. Springer, Berlin, 1999.
- [4] Jean-Phillipe Bouchard and Marc Potters. Theory of Financial Risks: From Statistical Physics to Risk Management. CUP, Cambridge, 2001.
- [5] Willian Feller. An Introduction to Probability theory and its Applications, volume 1. Wiley, 3. edition, 1967.
- [6] Willian Feller. An Introduction to Probability theory and its Applications, volume 2. Wiley, 2. edition, 1970.
- [7] Rosario N. Mantegna and H. Eugene Stanley. An Introduction to Econophysics. CUP, Cambridge, 2000.
- [8] Thomas Mikosch. Elementary stochastic calculus with Finance in View. World Scientific, 1998.
- [9] Benoit B. Mandelbrot. Fractals and Scaling in Finance, Discontinuity, Concentration, Risk. Springer 1997.
- [10] Alber N Shiryaev. Essentials of Stochastic Finance, Facts, Models, Theory. World Scientific 1999.
- [11] Ubbo F. Wiersema. Brownian motion calculus. John Wiley 2008.
- [12] Francesco Mainardi1, Sergei Rogosin. The origin of infinitely divisible distributions: from de Finetti's problem to Lévy-Khintchine formula. 2006.
- [13] J. C. Hull, Options, Futures, and Other Derivatives, 7th ed., Prentice Hall 2009.
- [14] Wilmott P., Dewynne J., Howison S. Option Pricing - Mathematical Models and Computation. Oxford Financial Press, Oxford 1993.

Literatura

- [15] Jan W. Kantelhardt, Fractal and Multifractal Time Series
- [16] Francisco O. Redelico, Araceli N. Proto, Empirical fractal geometry analysis of some speculative financial bubbles, *Physica A* 391 (2012) 5132–5138.
- [17] J. W. Kantelhardt, E. Koscielny-Bunde, H. H.A. Rego, S. Havlin, A. Bunde. Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis. *Physica A* 295 (2001) 441–454.