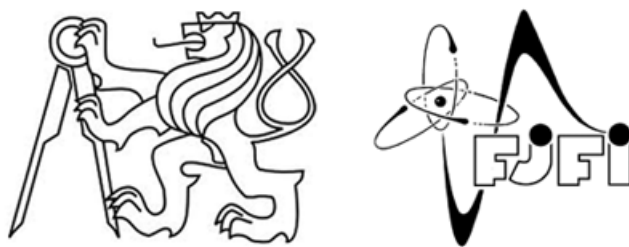


České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky  
Obor: Matematické inženýrství  
Zaměření: Matematická fyzika



# Extra dimenze v částicové fyzice

## Extra Dimensions in Particle Physics

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval: Jan Lochman  
Vedoucí práce: Ing. Zdeněk Hubáček, Ph.D.  
Rok: 2013

Zadání práce

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů.

V Praze dne .....

.....  
Jan Lochman

## **Poděkování**

Děkuji panu Ing. Zdeňku Hubáčkovi, Ph.D. za ochotu, se kterou mou práci vedl, za podnětné návrhy, které vedly k jejímu obohacení, a za kvalitní konzultace.

Jan Lochman

*Název práce:*

**Extra dimenze v částicové fyzice**

*Autor:* Jan Lochman

*Obor:* Matematické inženýrství

*Druh práce:* Bakalářská práce

*Vedoucí práce:* Ing. Zdeněk Hubáček, Ph.D.  
CERN

*Abstrakt:* Práce se zabývá teoriemi extra dimenzí jako možným řešením některých problémů Standardního modelu a poskytuje přehled experimentů, které byly uskutečněny za účelem jejich ověření. V první části je uvedena konstrukce Standardního modelu s důrazem na mechanismus zavádějící do teorie Higgsův boson. Po obecném rozšíření polí Standardního modelu a gravitace do extra dimenzí jsou představeny konkrétní modely extra dimenzí - teorie Large Extra Dimensions se zaměřením na ADD model, teorie se zakřivenými dimenzemi se zaměřením na RS model a teorie Universal Extra Dimensions. V závěru práce jsou pro jednotlivé modely extra dimenzí shrnuty výsledky experimentálních měření a diskutovány limity, které z těchto měření pro jednotlivé teorie extra dimenzí vyplývají.

*Klíčová slova:* Standardní model, teorie extra dimenzí, hledání extra dimenzí, LHC

*Title:*

**Extra Dimensions in Particle Physics**

*Author:* Jan Lochman

*Abstract:* This thesis deals with the theories of extra dimensions as a possible solution to some of the problems of the Standard Model and provides an overview of experiments that were made to verify them. The first section describes the construction of the Standard model with the emphasis on the mechanism introducing the Higgs boson into theory. After the general extension of the Standard Model and gravity in the extra dimensions, specific models of extra dimensions are presented - the Large Extra Dimensions theories focusing on the ADD model, the theories of the warped extra dimensions with a focus on the RS model and the theories of the Universal Extra Dimensions. Finally, results of experimental measurements are summarized for various models of extra dimensions including limits for the theories of extra dimensions which follow from these measurements.

*Key words:* Standard model, extra dimensions theory, extra dimensions search, LHC

# Obsah

|                                                                |           |
|----------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Úvod</b>                                                    | <b>1</b>  |
| <b>1 Standardní model</b>                                      | <b>3</b>  |
| 1.1 Kalibrační principy . . . . .                              | 4         |
| 1.1.1 Kalibrační invariance v kvantové mechanice . . . . .     | 4         |
| 1.1.2 Kalibrační invariance na neabelovských grupách . . . . . | 7         |
| 1.1.3 Spontánní narušení symetrie . . . . .                    | 8         |
| 1.1.4 Higgsův mechanismus . . . . .                            | 9         |
| 1.2 Elektroslabá teorie . . . . .                              | 10        |
| 1.2.1 Volba kalibrační grupy a její reprezentace . . . . .     | 11        |
| 1.2.2 Higgsův mechanismus a hmotnost $W^\pm$ , $Z$ . . . . .   | 13        |
| 1.3 Silná interakce . . . . .                                  | 16        |
| 1.4 Lagrangian Standardního modelu . . . . .                   | 17        |
| 1.5 Důvody, proč jít za Standardní model . . . . .             | 17        |
| <b>2 Teorie extra dimenzí</b>                                  | <b>20</b> |
| 2.1 Kaluza–Kleinova teorie . . . . .                           | 22        |
| 2.2 Fyzika v extra dimenzích . . . . .                         | 23        |
| 2.2.1 Role Planckovy Energie ve více dimenzích . . . . .       | 23        |
| 2.2.2 Redukce dimenzí . . . . .                                | 24        |
| 2.2.3 Fermiony v pěti dimenzích . . . . .                      | 25        |
| 2.2.4 Bosony v pěti dimenzích . . . . .                        | 26        |
| 2.2.5 Narušení symetrie ve více dimenzích . . . . .            | 27        |
| 2.3 Large extra dimensions . . . . .                           | 28        |
| 2.4 Teorie se zakřivenými dimenzemi . . . . .                  | 29        |
| 2.5 Universal extra dimensions . . . . .                       | 31        |
| <b>3 Hledání extra dimenzí</b>                                 | <b>32</b> |
| 3.1 Experimenty na urychlovačích . . . . .                     | 32        |
| 3.1.1 Large extra dimensions . . . . .                         | 33        |
| 3.1.2 Teorie se zakřivenými dimenzemi . . . . .                | 36        |
| 3.1.3 Universal extra dimensions . . . . .                     | 38        |
| 3.1.4 Mikroskopické černé díry . . . . .                       | 39        |

|              |                                                         |           |
|--------------|---------------------------------------------------------|-----------|
| 3.2          | Ostatní experimenty . . . . .                           | 41        |
| 3.2.1        | Newtonův gravitační zákon na malých měřítkách . . . . . | 41        |
| 3.2.2        | Astronomická pozorování . . . . .                       | 43        |
| <b>Závěr</b> |                                                         | <b>45</b> |

# Úvod

Hledání vzorů v přírodě dovedlo lidstvo k závěru, že svět, tak jak ho vnímáme, je ovládán čtyřmi různými interakcemi. Cestu k tomuto poznání odstartoval Isaac Newton v 17. století svou teorií gravitace. Je odvážné tvrdit, že lidstvo došlo již na konec této cesty. Současnými urychlovači částic rozbíjíme základní stavební kameny hmoty, čímž se nám odhalují nové vlastnosti jaderných sil. Ve 2. polovině 20. století vědci ukázali, že tři interakce - elektromagnetickou, silnou a slabou, je možno popsat jednou teorií - Standardním modelem. Poslední interakce - gravitace, je popsána Obecnou teorií relativity a prozatímni pokusy o její zahrnutí mezi interakce Standardního modelu skončily nezdarem.

Navzdory obrovským úspěchům Standardního modelu v popisu světa atomů a Obecné teorie relativity v popisu světa na kosmických měřítkách existují důvody k vybudování nové teorie. Jedním z adeptů jsou teorie extra dimenzí, podle nichž vnímáme vesmír pouze ve čtyřech rozměrech, zatímco skutečná tvář vesmíru je nám skryta. Tato myšlenka se objevila již ve starověkém Řecku ve známém Platónově Podobenství o jeskyni [1]. V něm jsou lidé uvězněni celý život v jeskyni a z vnějšího světa je jim dovoleno vidět pouze stíny, jež skutečné objekty vrhají. Matematika a současné fyzikální experimenty nám umožňují vyzdvihnout Platónovu myšlenku z filozofické temnoty na vědecké výslunní a hledat odpověď na otázku, zda nejsme pouze vězni v Platónově jeskyni. Vězni, co vidí vesmír pouze ve třech prostorových dimenzích, zatímco extra dimenze jsou před námi skryty.

První kapitola je věnována Standardnímu modelu - budou představeny matematické principy nutné k jeho vybudování, které budou demonstrovány na konstrukci teorie elektroslabé interakce. Součástí teorie je Higgsov mechanismus, předpovídající existenci nové částice - Higgsova bosonu, jehož v nedávné době prokázaná existence potvrdila správnost této konstrukce. Po krátké rekapitulaci vlastností silné interakce bude systematicky sepsán lagrangián Standardního modelu a na konci kapitoly upozorněno na problémy Standardního modelu, které vedou vědce k budování nových teorií.

Následující kapitola je věnována teoriím extra dimenzí. Ačkoliv popis světa ve třech prostorových dimenzích má své opodstatnění, existují modely zavádějící kompaktní extra dimenze o tak malé velikosti, že prozatím zůstávají našim experimentům skryty. Budou zkoumány dopady těchto kompaktních extra dimenzí na realitu ve třech rozměrech a představeny konkrétní teorie extra dimenzí - teorie Large extra dimensions a její zástupce ADD model, teorie se zakřivenými dimenzemi a její zástupce RS model a teorie Universal extra dimensions.

Třetí kapitola se zabývá experimenty pátrajícími po předpovězených dopadech teorií extra dimenzí. Stěžejní bod představují experimenty na urychlovačích, které kladou na většinu modelů extra dimenzí zatím nejprísnější hranice. Bude ukázáno, že projevy různých modelů extra dimenzí při srážkách na urychlovačích jsou značně odlišné. Na konci kapitoly jsou vedle experimentů na urychlovačích představeny další experimenty a pozorování kladoucí na parametry extra dimenzí další hranice.

# Kapitola 1

## Standardní model

Standardní model je kvantová polní teorie popisující základní stavební kameny hmoty (fermiony) a způsob, jakým spolu interagují díky elektromagnetické, slabé a silné interakci, které jsou v ní zprostředkovány výměnou bosonů.

Fermiony jsou ve Standardním modelu rozděleny podle toho, jakou z těchto interakcí cítí. Leptony ( $e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ ) cítí slabou interakci, kvarky ( $u, d, c, s, t, b$ ) navíc interakci silnou. Mají-li fermiony náboj, jsou ovlivňovány i interakcí elektromagnetickou. Fermiony mají poločíselný spin a podléhají Fermi-Diracově statistice.

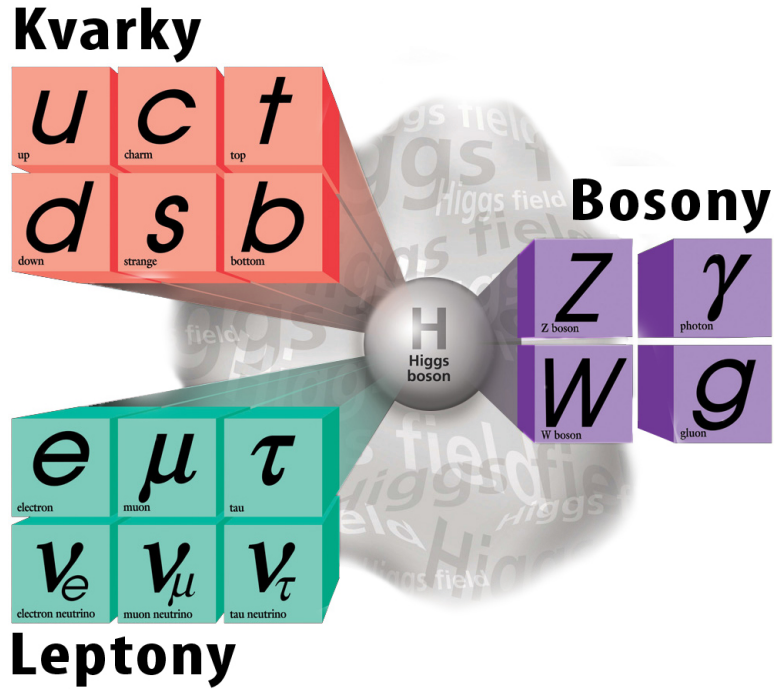
Bosony naproti tomu mají spin celočíselný a řídí se Bose-Einsteinovou statistikou. Patří mezi ně foton (zprostředkovávající elektromagnetickou interakci), bosony  $W^\pm, Z$  (slabá interakce), gluony (silná interakce) a Higgsův boson, jež zprostředkovává interakci fermionů a bosonů s všudypřítomným Higgsovým polem a je zodpovědný za rozdílné hmotnosti jednotlivých částic. Strukturu elementárních částic Standardního modelu ukazuje obrázek 1.1.

Fermiony standardního modelu jsou rozděleny do multipletů se strukturou

$$\left\{ \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad e_R, \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad u_R, \quad d_R \right\},$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \quad \mu_R, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \quad c_R, \quad s_R \right\},$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L, \quad \tau_R, \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L, \quad t_R, \quad b_R \right\},$$

kde index  $L$  resp.  $R$  značí levotočivé resp. pravotočivé fermiony. Částice mezi multiplety se liší hmotností a alespoň jedním kvantovým číslem. Charakter interakcí se nezmění, zaměníme-li libovolnou částici za částici z jiného multipletu (ale na stejné pozici v multipletu).

Matematicky je Standardní model kalibrační kvantová polní teorie založená na kalibrační grupě transformací  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , kde  $SU(3)$  je kalibrační grupa symetrií silné interakce kvarků a gluonů popsaná kvantovou chromodynamikou, zatímco  $SU(2) \times U(1)$  představuje kalibrační grupu symetrií elektroslabé interakce.



Obrázek 1.1: Systém elementárních částic Standardního modelu. Převzato z [2].

## 1.1 Kalibrační principy

Je známo, že Hamiltonova, resp. Lagrangeova funkce, jež popisují dynamiku zkoumaného systému, nejsou určeny jednoznačně - kupříkladu přičtení konstanty nemá na popis dynamiky zkoumaného systému vliv. Je-li Lagrangeova funkce invariantní při globální transformaci obecných souřadnic, existuje pro ní podle teorému Noetherové zákon zachování. Tím vstupuje do fyziky symetrie, která je podřízena dynamice systému.

Při konstrukci Standardního modelu se naráží na opačnou situaci - je dán systém se známými symetriemi a hledá se nejobecnější tvar lagrangiánu, který je invariantem transformací generovaných těmito symetriemi. Touto úlohou se zabývají kalibrační principy, které se snaží určit dynamický popis zkoumaného systému pouze na základě předem známých symetrií.

### 1.1.1 Kalibrační invariance v kvantové mechanice

Několik konkrétních příkladů uvedených v této sekci bude demonstrovat, jaké netriviální transformace je možno provést, aby fyzikální podstata zkoumaného systému zůstala zachována.

Při řešení Maxwellových rovnic se s výhodou přechází od reálných vektorových potenciálů  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  k elektromagnetickým potenciálům  $\phi$ ,  $\vec{A}$ , kde skalární potenciál  $\phi(x, t)$  a

vektorový potenciál  $\vec{A}(x, t)$  jsou definovány

$$\vec{E} = -\text{grad}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{rot}\vec{A}. \quad (1.1)$$

Takto definované  $\phi$ ,  $\vec{A}$  nejsou určeny jednoznačně. Je-li  $\chi(x, t)$  libovolná skalární funkce, potom nové potenciály  $\phi'$ ,  $\vec{A}'$

$$\phi \xrightarrow{G} \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \vec{A} \xrightarrow{G} \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}\chi, \quad (1.2)$$

popisují stejné elektromagnetické pole jako  $\phi$ ,  $\vec{A}$ . Jelikož při transformaci  $G$  nedochází ke změně měřitelných veličin  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ , je tato transformace nazývána kalibrační.

Dalším příkladem je částice o hmotnosti  $m$  a náboji  $q$  v elektromagnetickém poli  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ , jež je pod vlivem Lorentzovy síly  $F_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ . Klasický hamiltonián má v jazyce potenciálů  $\phi$ ,  $\vec{A}$  tvar

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi. \quad (1.3)$$

Záměnou  $\vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla}$  se snadno přejde ke Schrödingerově rovnici částice v elektromagnetickém poli

$$\left[ \frac{1}{2m} (-i\vec{\nabla} - q\vec{A})^2 + q\phi \right] \psi(x, t) = i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}, \quad (1.4)$$

kterou je možno zapsat v kompaktní podobě

$$\frac{1}{2m} (-i\vec{D})^2 \psi = iD_0\psi, \quad (1.5)$$

kde bylo zavedeno značení

$$\vec{D} = \vec{\nabla} - iq\vec{A}, \quad D_0 = \frac{\partial}{\partial t} + iq\phi. \quad (1.6)$$

Pokud se potenciály  $\phi$ ,  $\vec{A}$  transformují pomocí (1.2)  $(\phi, \vec{A}) \xrightarrow{G} (\phi', \vec{A}')$ , dojde tím i k transformaci rovnice (1.5)

$$\frac{1}{2m} (-i\vec{D}')^2 \psi' = iD'_0\psi'. \quad (1.7)$$

Řešení  $\psi'$  transformované rovnice je bohužel fyzikálně neslučitelné s původním řešením  $\psi$ . K tomu je zapotřebí provést současně transformaci vlnové funkce

$$\psi' = \exp(iq\chi)\psi, \quad (1.8)$$

kde  $\chi = \chi(x, t)$  je funkce použitá již v transformaci (1.2). Potom

$$\vec{D}'\psi' = \left[ \vec{\nabla} - iq \left( \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \right) \right] \exp(iq\chi)\psi = \exp(iq\chi)\vec{D}\psi, \quad (1.9)$$

$$D'_0\psi' = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + iq \left( \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \right] \exp(iq\chi)\psi = \exp(iq\chi)D_0\psi, \quad (1.10)$$

a pro transformovanou Schrödingerovu rovnici (1.7) platí

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2m} \left(-i\vec{D}'\right)^2 \psi' &= \frac{1}{2m} \left(-i\vec{D}'\right) \left(-i\vec{D}'\psi'\right) = \frac{1}{2m} \left(-i\vec{D}'\right) \left(-i \exp(iq\chi) \vec{D}\psi'\right) = \\
&= \frac{(-i)^2}{2m} \vec{D}' \left(\exp(iq\chi) \vec{D}\psi'\right) = \frac{(-i)^2}{2m} \exp(iq\chi) \vec{D} \left(\vec{D}\psi\right) = \\
&= \exp(iq\chi) \frac{1}{2m} \left(-i\vec{D}\right)^2 \psi = \exp(iq\chi) (iD_0) \psi = iD'_0 \psi'. \quad (1.11)
\end{aligned}$$

Řešení  $\psi$  a  $\psi'$  jsou mezi sebou již ekvivalentní.

Ve Standardním modelu hraje důležitou roli Diracův lagrangián volného fermionu hmotnosti  $m$ , jež je popsán vlnovou funkcí  $\psi$

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi} (i\partial - m) \psi. \quad (1.12)$$

Pokud se provede lokální kalibrační transformace (tj. transformace závisující od  $x$ ) vlnové funkce

$$\psi \rightarrow \psi' = \exp[-i\alpha(x)]\psi, \quad (1.13)$$

zavede se kalibrační pole  $A_\mu$  pomocí kovariantní derivace

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (1.14)$$

a současně se požaduje, aby se  $A_\mu$  transformovalo

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha, \quad (1.15)$$

potom

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\psi \rightarrow \mathcal{L}'_\psi &= \bar{\psi}' [(i\partial - eA) - m] \psi' = \\
&= \bar{\psi} \exp(i\alpha) \left[ i\partial - e \left( A + \frac{1}{e} \partial\alpha \right) - m \right] \exp(-i\alpha) \psi = \\
&= \mathcal{L}_\psi - e\bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu. \quad (1.16)
\end{aligned}$$

Zde se využívá Einsteinovy sumační konvence, která bude i nadále v celém textu důsledně dodržována. Při konstrukci lokálně kalibračně invariantního lagrangiánu volné částice popsané Diracovou rovnicí je tedy třeba do lagrangiánu dodat člen párující  $\psi$  s kalibračním polem  $A_\mu$  (např. elektron s fotonem) za účelem zachování invariance. Tenzor elektromagnetického pole

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.17)$$

je rovněž invariantem kalibrační transformace (1.15). Proto je invariantem i lagrangián volného kalibračního pole

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (1.18)$$

Lagrangián (1.12) společně s (1.18) popisuje stejnou fyziku jako lagrangián

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi} (i\partial\!\!\!/ - e\mathcal{A} - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (1.19)$$

což je lagrangián z kvantové elektrodynamiky popisující volný fermion  $\psi$  o náboji  $e$  a hmotnosti  $m$  interagující s elektromagnetickým polem  $A_\mu$ , jež je fermionem generováno. Pole  $A_\mu$ , jež bylo do teorie dodáno uměle, získává v tomto případě konkrétní fyzikální význam.

### 1.1.2 Kalibrační invariance na neabelovských grupách

Předchozí část byla věnována otázce konstrukce vhodné kalibrační transformace ke známému lagrangiánu (popř. hamiltoniánu), která nijak nemění fyzikální podstatu situace. V případě Diracova lagrangiánu bylo ukázáno, že do lagrangiánu je třeba přidat dodatečný člen za účelem zachování invariance. V této sekci budou shrnuty základní poznatky pro případ, kdy transformace nemění fyzikální podstatu lagrangiánu tvoří neabelovskou grupu  $G$  s generátory  $t_a$  splňujícími

$$[t_a, t_b] = iC^{abc}t_c, \quad (1.20)$$

kde symbolem  $C^{abc}$  jsou označeny strukturní konstanty grupy<sup>1</sup>. Požaduje se, aby lagrangián  $\mathcal{L}_\psi$  byl invariantní při transformaci

$$\psi \rightarrow \psi' = \Omega\psi, \quad \Omega = \exp[-it_a\alpha^a(x)]. \quad (1.21)$$

Za tímto účelem se pro každý generátor  $t_a$  zavádí jedno kalibrační pole  $A_\mu^a$  a definuje se kovariantní derivace

$$D_\mu = \partial_\mu - igt_a A_\mu^a, \quad (1.22)$$

kde  $g$  je dodatečně určitelná konstanta. V případě infinitezimální transformace  $\Omega \approx 1 - it_a\alpha^a(x)$  se kalibrační pole transformuje

$$A_\mu^a \rightarrow A'^a_\mu = A_\mu^a - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha^a + C^{ab}_c\alpha_b A_\mu^c. \quad (1.23)$$

Dále se zobecní tenzor (1.17)

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gC^a_{bc}A_\mu^b A_\nu^c, \quad (1.24)$$

jež se díky (1.23) transformuje

$$F_{\mu\nu}^a \rightarrow F'^a_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a + C^a_{bc}\alpha^b F_{\mu\nu}^c. \quad (1.25)$$

Výraz pro kinetickou energii kalibračních bosonů

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad (1.26)$$

---

<sup>1</sup>Pro další účely nechť je u strukturních konstant možno sčítací indexy libovolně snižovat, resp. zvedat, tedy  $C^{abc} = C_{abc} = C^a_{bc} = C^{ab}_c$  pro každou permutaci  $a, b, c$ .

zůstává při lokální kalibrační transformaci invariantní. Hmotnost kalibračních bosonů

$$A_\mu^a A_a^\mu \rightarrow A_\mu'^a A_a'^\mu = \left( A_\mu^a - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a + C_{bc}^a \alpha^b A_\mu^c \right) \left( A_a^\mu - \frac{1}{g} \partial^\mu \alpha_a + C_a^{de} \alpha_d A_e^\mu \right), \quad (1.27)$$

stále narušuje kalibrační invarianci teorie. Pokud některé z kalibračních bosonů mají mít hmotnost, bude třeba uvést nový aparát k zajištění invariance hmotnostního členu.

### 1.1.3 Spontánní narušení symetrie

Může nastat situace, že lagrangián je vůči jisté transformaci invariantní, zatímco vakuum (základní stav) invariantní není. Příkladem takového systému je feromagnet, na který je možno při teplotě vyšší než Couriérova teplota  $T_C$  pohlížet jako na systém neuspořádaných spinů. Diracův lagrangián popisující interakci fermionů uvnitř feromagnetu je  $SO(3)$  invariantní a rovněž tak vakuum, neboť neexistuje preferovaný směr, do kterého by měl magnet snahu se natočit. Při teplotě  $T < T_C$  dochází ke spontánní magnetizaci, vzniká preferovaný směr, do kterého se feromagnet samovolně natáčí. Symetrie vakua je narušena  $SO(3) \rightarrow SO(2)$  na grupu symetrií reprezentující rotaci celého systému kolem směru spinu, zatímco Diracův lagrangián zůstává stále  $SO(3)$  invariantní.

Obecně zde bude rozebrán příklad komplexního skalárního pole  $\Phi$  popsaného lagrangiánem

$$\mathcal{L}_A = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - V(\Phi^* \Phi), \quad (1.28)$$

s potenciálem

$$V(\Phi^* \Phi) = \mu^2 (\Phi^* \Phi) + \lambda (\Phi^* \Phi)^2, \quad \lambda > 0. \quad (1.29)$$

Lagrangián (1.28) je invariantní při transformaci  $\Phi \rightarrow \exp(-i\theta)\Phi$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  a je tedy  $SO(2)$  symetrický. Pro další účely se přejde od komplexního pole  $\Phi$  ke dvěma reálným polím  $\phi_1, \phi_2$  dle

$$\Phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}. \quad (1.30)$$

Pokud  $\mu^2 > 0$ , je minimum potenciálu (1.29) při  $\phi_1 = \phi_2 = 0$  a vakuum zůstává  $SO(2)$  symetrické. V případě  $\mu^2 < 0$  je tvar potenciálu komplikovanější (viz obrázek 1.2) a vakua tvoří celou varietu

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} \equiv v^2. \quad (1.31)$$

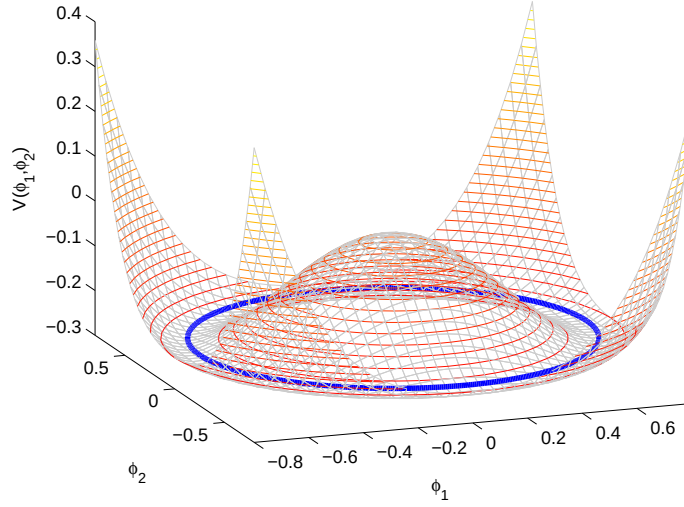
Je snadné vidět, že vakua zůstala  $SO(2)$  invariantní. Tato symetrie je však narušena, jakmile je za vakuum zvolen konkrétní bod. Při konkrétní volbě

$$\phi_1 = v, \quad \phi_2 = 0, \quad (1.32)$$

se původní pole  $\phi_1, \phi_2$  posunutím do tohoto bodu transformují

$$\phi_1 \rightarrow \phi_1' = \phi_1 - v, \quad (1.33)$$

$$\phi_2 \rightarrow \phi_2' = \phi_2. \quad (1.34)$$



Obrázek 1.2: Tvar potenciálu (1.29) při  $\mu^2 < 0$ . Modrá barva znázorňuje vakuum. Při vykreslení byly voleny hodnoty  $\mu^2 = -1$ ,  $\lambda = 1$ .

Dosazením nových polí do lagrangiánu (1.28) se obdrží

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi'_1 \partial^\mu \phi'_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi'_2 \partial^\mu \phi'_2 - \frac{1}{2} (-2\mu^2) \phi'^2_1 + \boxed{\phi'_1} + \boxed{\phi'^3_1} + \boxed{\phi'^4_1} + \boxed{\phi'^4_2} + \boxed{\phi'_1 \phi'^2_2} + \boxed{\phi'^2_1 \phi'^2_2}, \quad (1.35)$$

kde např  $\boxed{\phi'_1}$  značí člen úměrný  $\phi'_1$ . Z matice hmotnosti

$$M_{ij}^2 = \left. \frac{\partial^2 V(\phi'_1, \phi'_2)}{\partial \phi'_i \partial \phi'_j} \right|_{\Phi' = \Phi'_0} \quad (1.36)$$

je vidět, že díky určení vakua získalo skalární pole  $\phi'_1$  hmotnost  $(-2\mu^2) > 0$ , zatímco  $\phi'_2$  se transformovalo na nehmotný skalární boson. Tento fakt je důsledkem Goldstonova teorému, který tvrdí, že pokud je spojitá globální symetrie spontánně narušena (tj. není symetrií vakua), teorie obsahuje jednu nehmotnou skalární částici za každý porušený generátor původní grupy symetrií.

#### 1.1.4 Higgsův mechanismus

Goldstonův teorém, který je uveden na konci předchozí části, využívá narušení globální symetrie lagrangiánu k zavedení nových nehmotných skalárních částic - Goldstonových bosonů. Je-li na lagrangián podléhající spontánnímu narušení globální symetrie naložena dodatečná podmínka - invariance při lokální kalibrační transformaci, původně nehmotné Goldstonovy bosony se stanou hmotnými. To je náplní Higgsova mechanismu, jehož další vlastnosti budou v této sekci ilustrovány na jednoduchém příkladu.

Vyjde se z lagrangiánu (1.28) s potenciálem (1.29), v němž komplexní skalární pole  $\Phi$  bude parametrizováno pomocí reálných polí  $\phi_1, \phi_2$  dle (1.30) a požaduje se invarianci při lokální transformaci

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \exp[iq\alpha(x)] \Phi. \quad (1.37)$$

Aby lagrangián zůstal při této transformaci invariantní, zavádí se kalibrační boson  $A_\mu$  a kovariantní derivace  $D_\mu$  podle návodu ze sekce 1.1.2

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu, \quad A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha(x). \quad (1.38)$$

Spontánní narušení symetrie nastává při  $\mu^2 < 0$ . Pro malé oscilace kolem vakua (1.32) je výhodné zavést parametrizaci

$$\Phi = \exp\left(\frac{i\phi'_2}{v}\right) \frac{\phi'_1 + v}{\sqrt{2}} \approx \left(1 + \frac{i\phi'_2}{v}\right) \frac{\phi'_1 + v}{\sqrt{2}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi'_1 + i\phi'_2 + v) = \Phi' + \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad (1.39)$$

jejímž dosazením do lagrangiánu (1.28) vznikne člen úměrný  $A_\mu \partial^\mu \phi'_2$ , jehož je snadné se zbavit volbou kalibračního parametru v (1.37)

$$\alpha(x) = -\frac{1}{qv} \phi_2(x). \quad (1.40)$$

Transformace pole  $\Phi$  přechází touto volbou na tvar

$$\Phi = \exp\left[iq\left(\frac{-\phi'_2}{qv}\right)\right] \exp\left(\frac{i\phi'_2}{v}\right) \frac{\phi'_1 + v}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi'_1 + v) \quad (1.41)$$

a lagrangián (1.28) se transformuje do závěrečné podoby

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial_\mu \phi'_1 \partial^\mu \phi'_1 - \frac{1}{2} (-2\mu^2) \phi'^2_1 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{q^2 v^2}{2} A'_\mu A'^\mu \\ & + \frac{1}{2} q^2 (\phi'_1 + 2v) \phi'_1 A'_\mu A'^\mu - \frac{\lambda}{4} \phi'^3_1 (\phi'_1 + 4v). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Výsledný lagrangián postrádá skalár  $\phi'_2$ , který byl při původním narušení symetrie Goldstonovým bosonem. V tomto případě se stupeň volnosti lagrangiánu příslušející  $\phi'_2$  přemístil na kalibrační boson  $A'_\mu$ , který díky tomu získal hmotnost.

V další části budou uvedené metody aplikovány na kalibrační grupu  $SU(2) \times U(1)$ , což je grupa symetrií elektroslabé interakce vystupující ve Standardním modelu.

## 1.2 Elektroslabá teorie

Ačkoliv se elektromagnetická a slabá interakce zdají být neslučitelné, v 60. letech minulého století S. L. Glashow, A. Salam a S. Weinberg ukázali, že se ve skutečnosti jedná o různé projevy jedné interakce - elektroslabé. Teorie elektroslabé interakce je kvantová kalibrační polní teorie s vnitřní symetrií  $SU(2) \times U(1)$ .

Při konstrukci každé kalibrační teorie je třeba

- Zvolit kalibrační grupu  $G$ , každému jejímu generátoru přiřadit kalibrační boson a definovat kovariantní derivace;
- Přejít ke vhodné reprezentaci;
- Přidat skalární pole tak, aby některé z kalibračních bosonů získaly hmotnost;
- Posunout skalární pole do vakua a napsat nejobecnější tvar renormalizovatelného lagrangiánu invariantního vůči  $G$ .

Pro konstrukci teorie elektroslabé interakce budou důležité některé vlastnosti fermionů. Pro fermiony se zavádí operátor helicity

$$L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad \text{resp.} \quad R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5), \quad (1.43)$$

jež převádí fermion  $\psi$  na levotočivý  $\psi_L = L\psi$  resp. pravotočivý  $\psi_R = R\psi$ ,  $\gamma_5$  představuje Diracovu  $\gamma$ -matici. Pro lepton  $\ell$  a neutrino  $\nu$  se zavádí levotočivý dublet resp. pravotočivý singlet

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \nu \\ \ell \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} L\nu \\ L\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \ell_L \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \mathbf{R} = R\ell = \ell_R. \quad (1.44)$$

Důvodem tohoto zavedení je výsledek měření  $\beta$ -rozpadu  $^{60}\text{Co}$  [5], který ukázal, že pouze levotočivé fermiony se účastní slabé interakce. Pravotočivé neutrino zatím pozorováno nebylo. Gell-Mann–Nishijimův vztah určuje závislost mezi nábojem  $Q$ , isospinem  $T_3$  a hypernábojem  $Y$

$$Q = T_3 + \frac{1}{2}Y. \quad (1.45)$$

Hypernáboj dubletů (1.44) je roven  $Y_L = -1$  resp.  $Y_R = -2$ .

### 1.2.1 Volba kalibrační grupy a její reprezentace

Podle návodu konstrukce kalibrační teorie je třeba nejprve zvolit grupu symetrií. Volí se  $SU(2) \times U(1)$ , kde  $SU(2)$  je neabelovská grupa symetrií slabé interakce, jejímiž generátory jsou Pauliho matice  $\sigma_i$  a  $U(1)$  je symetrie elektromagnetické interakce s jediným generátorem, za něž se volí 1. Dále je třeba ke každému generátoru symetrie přiřadit kalibrační boson

$$SU(2) \rightarrow W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3, \quad (1.46)$$

$$U(1) \rightarrow B_\mu, \quad (1.47)$$

a dle (1.22) definovat kovariantní derivaci

$$\mathbf{L} : \quad \partial_\mu + i\frac{g}{2}\sigma_i W_\mu^i + i\frac{g'}{2}Y_L B_\mu, \quad (1.48)$$

$$\mathbf{R} : \quad \partial_\mu + i\frac{g'}{2}Y_R B_\mu, \quad (1.49)$$

kde byly zavedeny kalibrační konstanty  $g, g'$ , jež rozhodují o síle interakcí. Kovariantní derivace se rozpadla na dva případy, neboť pouze levotočivé fermiony cítí elektroslabou interakci. Definuje se silový tenzor dle (1.24) v případě  $SU(2)$  a dle (1.17) v případě  $U(1)$

$$W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + g\epsilon_{jk}^i W_\mu^j W_\nu^k, \quad (1.50)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (1.51)$$

Na základě (1.26) a (1.18) je možno psát lagrangián volného kalibračního pole

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}. \quad (1.52)$$

Pro leptony se píše volný lagrangián (neobsahující hmotnostní člen) ve tvaru

$$\mathcal{L}_{leptons} = \bar{R}i\partial\!R + \bar{L}i\partial\!L, \quad (1.53)$$

jež se díky kovariantním derivacím (1.48), (1.49) transformuje

$$\mathcal{L}_{leptons} \rightarrow \mathcal{L}_{leptons} + \bar{L}i\gamma^\mu \left( i\frac{g}{2}\sigma_i W_\mu^i + i\frac{g'}{2}Y_L B_\mu \right) L + \bar{R}i\gamma^\mu \left( i\frac{g'}{2}Y_R B_\mu \right) R. \quad (1.54)$$

Z posledního výrazu se nejprve vezmou členy, které shlukují rozdílné leptony (nediagonální prvky)

$$\mathcal{L}_{leptons}^{(\pm)} = -\frac{g}{2}\bar{L}\gamma^\mu (\sigma_1 W_\mu^1 + \sigma_2 W_\mu^2) L = -\frac{g}{2}\bar{L}\gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & 0 \end{pmatrix} L. \quad (1.55)$$

Je přirozené zde přejít od kalibračních bosonů  $W_\mu^1, W_\mu^2$  k nabitým kalibračním bosonům  $W_\mu^+, W_\mu^-$

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp W_\mu^2), \quad (1.56)$$

díky čemuž je možno lagrangián (1.55) psát v podobě

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{leptons}^{(\pm)} &= -\frac{g}{2\sqrt{2}} [\bar{\nu}\gamma^\mu (1 - \gamma_5) \ell W_\mu^+ + \bar{\ell}\gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu W_\mu^-] = \\ &= \boxed{\bar{\nu}_\ell \ell W^+} + \boxed{\bar{\ell} \nu_\ell W^-}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Zatím nepoužité členy v (1.54) shlukují pole  $W_\mu^3, B_\mu$  s párem totožných fermionů

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{leptons}^{(0)} &= -\frac{1}{2}\bar{L}\gamma^\mu (g\sigma_3 W_\mu^3 + g'Y_L B_\mu) L - \frac{g'}{2}\bar{R}\gamma^\mu Y_R B_\mu R = \\ &= \bar{L}\frac{\gamma^\mu}{2} \begin{pmatrix} -gW_\mu^3 + g'B_\mu & 0 \\ 0 & gW_\mu^3 + g'B_\mu \end{pmatrix} L + \bar{R}g'\gamma^\mu B_\mu R. \end{aligned} \quad (1.58)$$

V posledním výrazu se ukrývá člen  $\bar{\nu}_L(\gamma^\mu/2)(-gW_\mu^3 + g'B_\mu)\nu_L$ , který shlukuje levo-točivá neutrina s kalibračním bosonem elektromagnetické interakce. To je nepřípustné,

neboť na neutrina elektromagnetická interakce vliv nemá. Za účelem odstranění tohoto členu se přechází od kalibračních bosonů  $B_\mu, W_\mu^3$  k novým bosonům  $A_\mu, Z_\mu$  podle

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix}, \quad (1.59)$$

kde  $\theta_W$  se nazývá Weinbergův úhel a je třeba ho s kalibračními konstantami  $g, g'$  svázat vztahy

$$\sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (1.60)$$

Provedením této transformace nabude výraz  $gW_\mu^3 - g'B_\mu$  nulové hodnoty. Pokud je transformace (1.59) provedena na lagrangiánu (1.58) zůstanou v lagrangiánu členy úměrné

$$\mathcal{L}_{leptons}^{(0)} = \boxed{\bar{\ell}\ell A} + \boxed{\bar{\ell}\ell Z} + \boxed{\bar{\nu}_\ell \nu_\ell Z}. \quad (1.61)$$

Prozatím jsou v budované teorii

- 4 nehmotné kalibrační bosony  $W_\mu^\pm, Z_\mu, A_\mu$  (nebo ekvivalentně  $W_\mu^i, B_\mu$ );
- 2 nehmotné fermiony  $\nu, \ell$ .

Dalším krokem je přidat do teorie skalární pole, díky němuž bude možno použít Higgsovu mechanizmus a přidělit bosonům  $W^\pm, Z$  hmotnost, zatímco  $A$  zůstane nehmotný.

### 1.2.2 Higgsova mechanizmus a hmotnost $W^\pm, Z$

Aby bylo možno Higgsoým mechanismem udělit bosonům  $W^\pm, Z$  hmotnost je nejprve třeba (dle návodu z odstavce 1.1.4) zavést Higgsovu dubletu

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix}, \quad (1.62)$$

kde  $\Phi^+, \Phi^0$  jsou komplexní skalární pole (první nabitě, druhé neutrální). Z relace (1.45) je snadné vidět, že hypernáboj Higgsova dubletu je  $Y = 1$ . Dále se definuje lagrangián

$$\mathcal{L}_{scalar} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - V(\Phi^\dagger \Phi), \quad (1.63)$$

v němž potenciál nechť je roven

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda \left( \Phi^\dagger \Phi \right)^2, \quad (1.64)$$

kde  $\lambda > 0, \mu^2 < 0$ . zavede se kovariantní derivace

$$D_\mu = \partial_\mu + i\frac{g}{2}\sigma_i W_\mu^i + i\frac{g'}{2}Y B_\mu \quad (1.65)$$

a pevně určí vakuum (bod, v němž potenciál (1.64) nabývá minima)

$$\langle \Phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}. \quad (1.66)$$

Protože boson  $B$  (foton) má zůstat jako jediný nehmotný, je cílem narušit symetrii  $SU(2) \times U(1) \rightarrow U(1)$ . Po narušení symetrie bude vakuum stále invariantní při lokální  $U(1)$  transformaci s parametrem  $\alpha(x)$ , tedy

$$e^{i\alpha Q} \langle \Phi \rangle_0 \approx (1 + i\alpha Q) \langle \Phi \rangle_0 = \langle \Phi \rangle_0, \quad (1.67)$$

což nastává, pokud  $Q \langle \Phi \rangle_0 = 0$

$$Q \langle \Phi \rangle_0 = \left( T_3 + \frac{1}{2} Y \right) \langle \Phi \rangle_0 = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0. \quad (1.68)$$

Pro ostatní generátory, u nichž má dojít k narušení vakua, se provede parametrizace Higgsova dubletu (1.62) pomocí čtveřice reálných polí  $\chi_1, \chi_2, \chi_3, H$

$$\begin{aligned} \Phi &= \exp \left( i \frac{\sigma_i \chi^i}{2} \frac{1}{v} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \approx \left[ \left( 1 + \frac{i}{2v} \right) \begin{pmatrix} \chi_3 & \chi_1 - i\chi_2 \\ \chi_1 + i\chi_2 & -\chi_3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &\approx \langle \Phi \rangle_0 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi_2 + i\chi_1 \\ 2H - i\chi_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.69)$$

jež výborně popisují Higgsův dublet pro malé výchylky kolem vakua. Dále se provede  $SU(2)$  kalibrační transformace tohoto pole s parametrem  $\alpha_i = \chi_i/v$

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \exp \left( -i \frac{\sigma_i \chi^i}{2} \frac{1}{v} \right) \Phi = \frac{v+H}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.70)$$

Takto parametrizované pole se použije pro transformaci lagrangiánu (1.63)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{scalar} &= \left| \left( \partial_\mu + i \frac{g}{2} \sigma_i W_\mu^i + i \frac{g'}{2} Y B_\mu \right) \frac{(v+H)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 - \mu^2 \frac{(v+H)^2}{2} - \lambda \frac{(v+H)^4}{4} = \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H + \frac{g^2}{4} (v+H)^2 \left( W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2 \cos^2 \theta_W} Z_\mu Z^\mu \right) - \\ &\quad - \mu^2 \frac{(v+H)^2}{2} - \lambda \frac{(v+H)^4}{4}, \end{aligned} \quad (1.71)$$

kde při poslední úpravě bylo použito transformačních vztahů (1.56), (1.59) mezi  $W^i$  a  $W^\pm, Z$ . V posledním lagrangiánu se ukrývá řada úspěšných předpovědí Standardního modelu. Porovnáním členů úměrných  $W_\mu^+ W^{-\mu}$  a  $Z_\mu Z^\mu$

$$\frac{g^2 v^2}{4} W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{g^2 v^2}{8 \cos^2 \theta_W} Z_\mu Z^\mu \quad (1.72)$$

s hmotnostním výrazem kalibračních bosonů  $W_\mu^\pm, Z_\mu$

$$M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu \quad (1.73)$$

se snadno identifikuje hmotnost kalibračních bosonů  $W^\pm, Z$

$$M_W = \frac{gv}{2}, \quad M_Z = \frac{gv}{2 \cos \theta_W}. \quad (1.74)$$

Navíc skalární boson  $H$ , který byl zaveden při parametrizaci vakua, v lagrangiánu přetrval. V (1.71) je snadné vidět výraz

$$\frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H - \frac{1}{2} (-2\mu^2) H^2, \quad (1.75)$$

jež představuje lagrangián volného Higgsova pole a určuje tak hmotnost Higgsova bosonu

$$M_H = \sqrt{-2\mu^2}. \quad (1.76)$$

Předpovězené hmotnosti  $M_W, M_Z$  kalibračních bosonů  $W^\pm, Z$  byly naměřeny. Protože  $\mu^2$  je neměřitelná konstanta, Standardní model není schopen předpovědět hmotnost Higgsova bosonu. 4. 7. 2012 však CERN oznámil [4], že pozoroval částici s vlastnostmi očekávaných u Higgsova bosonu.

V teorii se vyskytuje poslední člen narušující invarianci - výraz hmotnosti leptonu

$$M_\ell \bar{\ell} \ell = M_\ell (\bar{\ell}_R \ell_L + \bar{\ell}_L \ell_R). \quad (1.77)$$

Tento člen se stane kalibračně invariantním zavedením Yukawovy vazby leptonů s Higgsovým polem (1.70)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{yuk}^l &= -G_\ell [\bar{R}(\Phi^\dagger L) + (\bar{L}\Phi)R] = \\ &= -G_\ell \frac{(v+H)}{\sqrt{2}} \left[ \bar{\ell}_R \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \ell_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{\ell}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ell_R \right] = \\ &= -\frac{G_\ell v}{\sqrt{2}} \bar{\ell} \ell - \frac{G_\ell}{\sqrt{2}} \bar{\ell} \ell H, \end{aligned} \quad (1.78)$$

kde  $G_\ell$  je Yukawova konstanta. Díky poslednímu výrazu je možno identifikovat hmotnost leptonů (nevztahuje se na neutrina)

$$M_\ell = \frac{G_\ell v}{\sqrt{2}}. \quad (1.79)$$

Tento výraz završuje konstrukci kalibrační teorie elektroslabé interakce.

### 1.3 Silná interakce

Aby bylo možno k teorii elektroslabé interakce přidat silnou interakci a tím vybudovat Standardní model, je třeba rozšířit kalibrační grupu symetrií  $SU(2) \times U(1) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , kde nově přidaná grupa  $SU(3)$  reprezentuje kalibrační grupu symetrií silné interakce. V této sekci je velmi stručně uvedeno, jak je toto přidání možno provést.

$SU(3)$  je neabelovská grupa jejímiž generátory jsou Gell-Mannovy matice  $\lambda_a$ ,  $a = 1, \dots, 8$ . Každému generátoru je třeba přiřadit kalibrační boson  $\lambda_a \rightarrow G_\mu^a$  (gluon). Kovariantní derivace grupy  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  je možno psát v podobě

$$D_\mu = \partial_\mu + i\frac{g}{2}YB_\mu + i\frac{g'}{2}\sigma_i W_\mu^i + \frac{g''}{2}\lambda_a Y G_\mu^a, \quad (1.80)$$

kde byly pro jednotlivé grupy zavedeny kalibrační konstanty  $g, g', g''$ . Dle (1.24) je možno definovat tenzor

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + i\frac{g''}{2}C_{bc}^a G_\mu^b G_\nu^c \quad (1.81)$$

a dle (1.26) volný lagrangián

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}. \quad (1.82)$$

Protože leptony necítí silnou interakci, není vybudovaná teorie elektroslabé interakce nijak narušena. Kvarky jsou však fermiony, na něž působí všechny interakce (kvůli slabé interakci je třeba kvarky rozdělit na levotočivé a pravotočivé). Ve Standardním modelu hraje důležitou roli CKM matice (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa), která v sobě nese informaci o síle slabých interakcí, měnících vůni kvarků. Při takových interakcích je třeba vlnové funkce kvarků  $d, s, b$  transformovat

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}_L = V \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L, \quad (1.83)$$

kde  $V$  značí CKM matici. Jelikož gluony jsou nehmotné, neinteragují s Higgsovým polem, a proto není třeba znovu použít Higgsův mechanismus k narušení symetrie vakua a přidělení hmotnosti gluonům.

## 1.4 Lagrangián Standardního modelu

V této části je ve schematické podobě sepsán lagrangián Standardního modelu [6]. Nejprve část obsahující kalibrační pole (1.52), (1.82) a skalární potenciály (1.71)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{scalar} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}W_{\mu\nu}^+W^{-\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^aG_a^{\mu\nu} + \\
& + M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2}M_Z^2 Z_\mu Z^\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu H \partial^\mu H - \frac{1}{2}M_H^2 H^2 + \\
& + \boxed{W^+W^-A} + \boxed{W^+W^-Z} + \\
& + \boxed{W^+W^-AA} + \boxed{W^+W^-ZZ} + \boxed{W^+W^-AZ} + \boxed{W^+W^-W^+W^-} + \\
& + \boxed{HHH} + \boxed{HHHH} + \boxed{W^+W^-H} + \boxed{W^+W^-HH} + \boxed{ZZH} + \boxed{ZZHH},
\end{aligned} \tag{1.84}$$

kde např.  $\boxed{W^+W^-A}$  označuje výraz sdružující pole  $W^+$ ,  $W^-$ ,  $A$  uvedený bez patřičné konstanty. Další nepostradatelnou část lagrangiánu Standardního modelu tvoří leptony (1.57), (1.61) (jak volné, tak interagující s kalibračními bosony slabé interakce) společně s Yukavovou vazbou (1.78) zajišťující invarianci hmotnostního členu leptonů

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{leptons} + \mathcal{L}_{yukawa}^{\ell} = & \sum_{\ell=e,\mu,\tau} \bar{\ell}(i\partial - m_{\ell})\ell + \sum_{\nu_{\ell}=\nu_e,\nu_{\mu},\nu_{\tau}} \bar{\nu}_{\ell}(i\partial)\nu_{\ell} + \\
& + \boxed{\bar{\nu}_{\ell}\ell W^+} + \boxed{\bar{\ell}\nu_{\ell}W^-} + \boxed{\bar{\ell}\ell A} + \boxed{\bar{\ell}\ell Z} + \boxed{\bar{\nu}_{\ell}\nu_{\ell}Z} + \boxed{\bar{\ell}\ell H}.
\end{aligned} \tag{1.85}$$

A konečně kvarky, jež přispějí do lagrangiánu Standardního modelu svým volným lagrangiánem, párováním s kalibračními bosony slabé interakce (kde vstoupí do hry transformace pomocí CKM matice) a Yukavovou vazbou s Higgsovým polem

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{quarks} + \mathcal{L}_{yukawa}^q = & \sum_{q=u,\dots,b} \bar{q}(i\partial - m_q)q + \\
& + \boxed{\bar{u}d'W^+} + \boxed{\bar{d}'uW^-} + \boxed{\bar{q}qA} + \boxed{\bar{q}qZ} + \boxed{\bar{q}qH}.
\end{aligned} \tag{1.86}$$

Lagrangián Standardního modelu je součtem dílčích lagrangiánů

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{scalar} + \mathcal{L}_{leptons} + \mathcal{L}_{yukawa}^{\ell} + \mathcal{L}_{quarks} + \mathcal{L}_{yukawa}^q. \tag{1.87}$$

## 1.5 Důvody, proč jít za Standardní model

Navzdory obrovské úspěšnosti Standardního modelu, kterou utvrzuje schopnost Standardního modelu předpovídat výsledky srážek na současných urychlovačích částic, existují důvody k vybudování nové teorie.

- **Hmotnost neutrin**

Experimenty naznačují [7], že neutrina mají nenulovou (ale velmi malou) hmotnost. Standardní model by měl být schopen vysvětlit, kde se tato hmotnost bere a

proč je tak malá. Navíc, aby hmotnostní výraz pro neutrino mohl být zahrnut v invariantní podobě v lagrangiánu Standardního modelu, je třeba připustit existenci pravotočivých neutrin.

- **Volné parametry**

Standardní model obsahuje volné parametry (viz Tabulka 1.1), které je do něho třeba zadat z vnějšku [8]. Jejich počet navíc závisí na skutečnosti, zda se připustí, aby i neutrino měla hmotnost.

| Parametr                                                     | Počet     |           |
|--------------------------------------------------------------|-----------|-----------|
| Hmotnost kvarků $u, d, c, s, t, b$                           | 6         | 6         |
| Hmotnost leptonů $e, \mu, \tau, (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$  | 3         | 6         |
| Parametry CKM matice                                         | 4         | 8         |
| Kalibrační konstanty $g, g', g''$ jednotlivých grup symetrií | 3         | 3         |
| Higgsovo vakuum $v$ , hmotnost Higgsova bosonu $M_H$         | 2         | 2         |
| Parametr umožňující narušení CP symetrie                     | 1         | 1         |
|                                                              | <b>19</b> | <b>26</b> |

Tabulka 1.1: Parametry Standardního modelu. V prvním sloupci model uvažující nehmotná neutrino, ve druhém sloupci model s hmotnými neutriny.

- **Absence gravitace**

Při interakcích elementárních částic hraje gravitace vedlejší úlohu a je možné ji zanedbat. Pokud ale jednotná teorie všech interakcí existuje, Standardní model jí pravděpodobně není. Prozatímni pokusy o zahrnutí gravitace do Standardního modelu skončili nerenormalizovatelností teorie, tj. místo 19, resp. 26 parametrů, jež je třeba do Standardního modelu zadat z vnějšku, by bylo třeba nekonečně mnoha parametrů. Standardní model by tím ztratil schopnost vytvářet předpovědi výsledků experimentů.

Se silou gravitační interakce souvisí další nevysvětlená záhada, jež sahá dokonce za hranice Standardního modelu - problém s hierarchií, který ve stručnosti tvrdí [9], že neznáme důvod, proč by gravitace měla být tak mnohem slabší než ostatní interakce.

- **Baryonová asymetrie vesmíru**

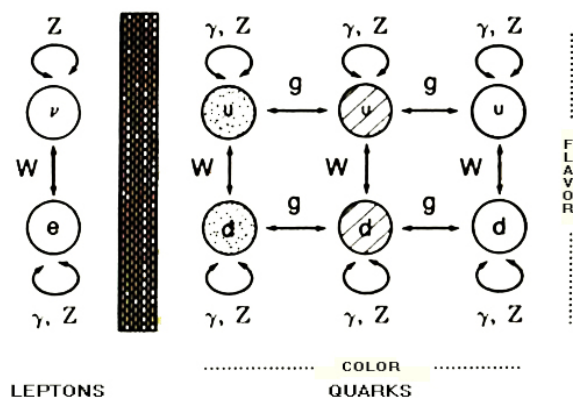
Dle Standardního modelu se má množství hmoty a antihmoty vzniklé při velkém třesku přibližně rovnat. Ve vesmíru se však zdá být značná převaha hmoty nad antihmotou.

- **Temná hmota, temná energie**

Standardní model se zabývá popisem interakcí částic, které podle současných kosmologických pozorování tvoří pouze 4 % energie ve vesmíru. Zbylých 96 % energie tvoří temná hmota a temná energie, jejíž původ a vlastnosti Standardní model není schopen vysvětlit.

- **Konkrétní volba grupy symetrií**

Podle Teorie velkého sjednocení je kalibrační grupa symetrií Standardního modelu  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  obsahující 13 generátorů neúplná a je třeba místo ní uvažovat novou grupu symetrií. Jednou z možných voleb je grupa symetrií  $SU(5)$  mající celkově 15 generátorů - kromě kalibračních bosonů Standardního modelu obsahuje tento model dva nové kalibrační bosony, jimž je věnován obrázek 1.3.



Obrázek 1.3: Schéma ukazující transformaci elementárních částic Standardního modelu z první generace prostřednictvím kalibračních bosonů. Kruhy označují fermiony, efekty kalibračních bosonů jsou reprezentovány šipkou  $\longleftrightarrow$  s dodatečným označením kalibračního bosonu zprostředkovávajícího konkrétní transformaci mezi fermiony. Dva nové bosony předpovídané Teorií velkého sjednocení by měly odstranit bariéru mezi leptony a kvarky. Převzato z [10].

Fyzici snažící se čelit výzvám, jež výše zmíněné problémy současné fyziky představují, přišli se zcela nečekaným vysvětlením. Podle nich má vesmír ve skutečnosti více dimenzí, než nám naše běžná zkušenost říká. V každém bodě vesmíru existují našim smyslům skryté extra dimenze otevírající fyzikům nové možnosti pro vysvětlení problémů, kterým Standardní model ani Obecná teorie relativity čelit nemohou.

Extra dimenze již nejsou pouhou sci-fi fantazií. Pro fyziky se staly nástrojem umožňujícím elegantním způsobem zodpovědět otázky dosud nezodpovězené a ačkoliv se to může zdát neuvěřitelné, hledání extra dimenzí již započalo.

## Kapitola 2

# Teorie extra dimenzí

Pohybové rovnice mohou být formálně zapsány v libovolném počtu dimenzí. Proč tedy lidé považují svět za 3-rozměrný? Existuje fyzikální důvod, proč by měl vesmír mít právě 3 prostorové dimenze? Touto netriviální otázkou se zabývá P. Ehrenfest ve svém článku z roku 1917 [11], ve kterém se snaží na třech konkrétních příkladech demonstrovat, že vesmír je nutno popisovat 3-rozměrnou geometrií. Ve stručnosti zde bude uveden první příklad, ve kterém je probírán pohyb tělesa v gravitačním poli.

Pro vesmír s  $n$  ( $n \geq 3$ ) prostorovými dimenzemi se ve shodě s Gaussovou větou o divergenci definuje  $n$ -rozměrný Newtonův gravitační potenciál generovaný tělesem o hmotnosti  $M$  ve vzdálenosti  $r$

$$\phi(r) = -G \frac{M}{(n-2)r^{n-2}}, \quad (2.1)$$

kde gravitační konstanta  $G$  obecně závisí na počtu dimenzí. Je-li do takto definovaného potenciálu vloženo těleso hmotnosti  $m$ , bude časový vývoj jeho polohy  $x$  určen Newtonovými pohybovými rovnicemi

$$m \frac{d^2 x_k}{dt^2} = -\frac{\partial(m\phi)}{\partial x_k} = -G \frac{mM}{r^{n-1}} \frac{x_k}{r}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Sféricky symetrický potenciál (2.1) zachovává moment hybnosti a pohyb se tak odehrává v rovině. Díky tomu je možno s výhodou přejít k polárním souřadnicím  $r, \varphi$  a využít zachovávajících se veličin - energie  $E$  a velikosti momentu hybnosti  $\theta$

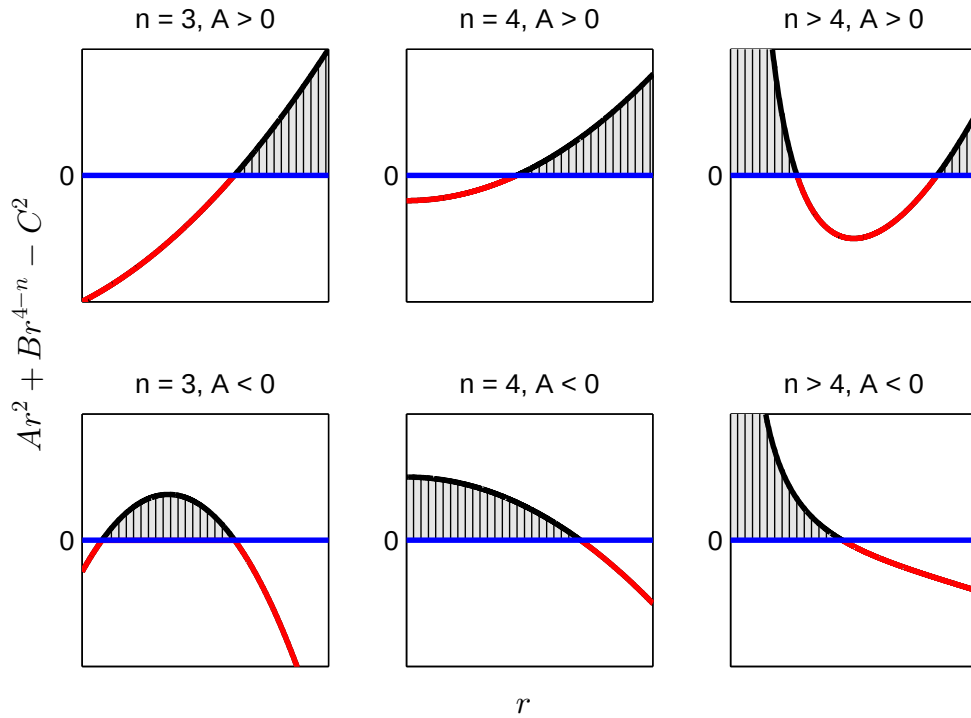
$$\frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + m\phi(r) = E, \quad (2.3)$$

$$mr^2 \dot{\varphi} = \theta. \quad (2.4)$$

Z posledních rovnic je možno vyjádřit radiální rychlost  $\dot{r}$

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2E}{m} - 2\phi(r) - \frac{\theta^2}{m^2 r^2}}, \quad (2.5)$$

$$\dot{r} = \frac{1}{r} \sqrt{Ar^2 + Br^{4-n} - C^2}, \quad (2.6)$$



Obrázek 2.1: Graf závislosti  $Ar^2 + Br^{4-n} - C^2$  na  $r$  pro různé hodnoty  $n$  a  $A$ . Červená oblast je pro těleso s danou energií  $E$  nedostupná. Body na průsečíku s osou  $r$  představují body obratu.

kde za účelem přehlednosti byly zavedeny konstanty  $A, B, C$  a pro další diskuzi je podstatné, že  $A$  má stejné znaménko jako celková energie  $E$ . Pro určení charakteru pohybu jsou důležité body v nichž  $\dot{r} = 0$ , tzv. body obratu. Stabilní trajektorie jsou ty, v nichž se těleso hmotnosti  $m$  pohybuje právě mezi dvěma body obratu. Na obrázku 2.1 je ukázán graf závislosti výrazu  $Ar^2 + Br^{4-n} - C^2$  na  $r$  pro různé hodnoty  $n$  a  $A$ . Pouze pro  $n = 3$ ,  $A < 0$  je možný pohyb mezi dvěma hodnotami  $r$ . Ve zbylých případech dochází buď k nekontrolovatelnému pádu na centrum nebo neomezenému pohybu tělesa do nekonečna. Ve více dimenzích by Země nemohla obíhat kolem Slunce.

V tom případě mají naše smysly pravdu a vesmír má skutečně 3 prostorové dimenze - alespoň na makroskopické úrovni. Vědci přišli na konci 20. století s teoriemi, které zavádí extra dimenze o rozměrech menších jak 1 mm, přičemž efekty extra dimenzí by se měly projevit až na měřítkách srovnatelných s rozměrem extra dimenze. Strunová teorie předpokládá existenci extra dimenzí velikosti  $\sim 10^{-35}$  m.

V této kapitole budou představeny některé modely extra dimenzí - Kaluza-Kleinova (KK) teorie, teorie Large Extra Dimensions (LED) a její zástupce ADD model. Dále budou představeny teorie se zakřivenými dimenzemi, konkrétně Randall-Sundrum (RS)

model a na konci této kapitoly bude zmíněna teorie Universal Extra Dimensions (UED). Ačkoliv žádná z těchto teorií není v rozporu s experimenty, nehraje si na to, že by se mohla stát hledanou teorií všeho. Modely extra dimenzí umožňují vytvářet předpovědi, jak by se extra dimenze mohly projevit již při současných experimentech a tím dávají experimentátorům návod, jak extra dimenze hledat.

Je opět na místě se pozastavit nad otázkou, proč by měl mít vesmír 3 prostorové dimenze? Vědci sami přiznávají, že nevědí [12]. Možná i proto jsou teorie extra dimenzí tak populární. Následovat bude stručný přehled značení použitého v této kapitole.

4-rozměrný prostoročas je z pohledu teorií extra dimenzí pouze řezem v  $n$ -rozměrném hyperprostoru (bulk) obsahujícího  $d$  extra dimenzí ( $n = 4 + d$ ). Tento řez (a další jemu podobné) se nazývá membrána (brane). Membrány budou popisovány čtveřicí prostoročasových souřadnic  $x$  a případné sčítání přes tyto souřadnice bude značeno malými řeckými písmeny ( $\mu, \nu, \dots$ ). Souřadnice extra dimenzí budou značeny  $y$  a pokud se v některém výrazu bude sčítat pouze přes tyto souřadnice, bude jako sčítací index použito malé písmeno latinské abecedy ( $a, b, \dots$ ). V případě sčítání přes všechny souřadnice budou použita velká písmena latinské abecedy ( $M, N, \dots$ ). Sčítací indexy budou číslovány ( $0, 1, 2, 3, 5, 6, \dots$ ) aby v posledním indexu bylo ukryto, kolik dimenzí se uvažuje a aby v případě sčítání přes první 4 indexy docházelo ke shodě s Einsteinovou konvencí. V metrice bude dodržována konvence  $(+, -, -, \dots)$ .

Rovněž se bude pracovat (s výjimkou explicitních výpočtů) v systému jednotek, ve kterém redukovaná Planckova konstanta  $\hbar$ , rychlost světla  $c$  a klasická Newtonova gravitační konstanta  $G$  jsou rovny jedné. Tedy  $\hbar = c = G = 1$ , což má za následek, že vzdálenost a čas budou udávány v jednotkách inverzní energie.

## 2.1 Kaluza–Kleinova teorie

V roce 1915, kdy Einstein publikoval Obecnou teorii relativity, byly ve světě fyziky známy dvě interakce - gravitační a elektromagnetická. V roce 1919 Theodor Kaluza navrhuje [13] sjednocení těchto dvou interakcí přidáním páté dimenze do Obecné teorie relativity, jejímž účelem je reprodukce Maxwellových rovnic elektromagnetismu. Kaluza za tímto účelem navrhuje rozšíření metrického tenzoru  $g_{\mu\nu}$  [14] ve tvaru

$$g_{MN}^{(Kaluza)} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} & kA_0 \\ g_{01} & g_{11} & g_{12} & g_{13} & kA_1 \\ g_{02} & g_{12} & g_{22} & g_{23} & kA_2 \\ g_{03} & g_{13} & g_{23} & g_{33} & kA_3 \\ kA_0 & kA_1 & kA_2 & kA_3 & k \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Ačkoliv ve 4-vektoru  $A_\mu$  je možno rozpoznat kalibrační boson elektromagnetické interakce a volba  $g_{MN}^{(Kaluza)}$  tak vypadá na první pohled velmi slibně, má Kaluzův metrický tenzor podstatný nedostatek - není to tenzor. V roce 1926 Oskar Klein tento problém napravuje

[15] úpravou metrického tenzoru do podoby

$$g_{MN}^{(Klein)} = \begin{pmatrix} g_{00} + kA_0A_0 & g_{01} + kA_0A_1 & g_{02} + kA_0A_2 & g_{03} + kA_0A_3 & kA_0 \\ g_{01} + kA_0A_1 & g_{11} + kA_1A_1 & g_{12} + kA_1A_2 & g_{13} + kA_1A_3 & kA_1 \\ g_{02} + kA_0A_2 & g_{12} + kA_1A_2 & g_{22} + kA_2A_2 & g_{23} + kA_2A_3 & kA_2 \\ g_{03} + kA_0A_3 & g_{13} + kA_1A_3 & g_{23} + kA_2A_3 & g_{33} + kA_3A_3 & kA_3 \\ kA_0 & kA_1 & kA_2 & kA_3 & k \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

O. Klein se navíc zamýšlí nad otázkou, zda má pátá dimenze fyzikální význam a navrhuje, že extra dimenze může být stočena do kružnice poloměru  $R$  tak malého, že současné experimenty jsou její existencí nedotčeny. Jako Kaluza-Kleinův (KK) model je chápán model navržený O. Kleinem.

Ve 30. letech zájem o KK model pohasl a pozornost vědců se přesunula k nově objeveným jaderným interakcím. V 50. letech se W. Pauli pokusil rozšířit KK model o 6. dimenzi [16] za účelem zahrnutí jaderných sil do KK modelu. tento pokus skončil nezdarem a koncept extra dimenzí tak upadl do zapomnění. Až v 70. letech minulého století, kdy se začíná rozvíjet strunová teorie, je myšlenka sjednocení interakcí prostřednictvím extra dimenzí oživena. V 90. letech popularita extra dimenzí vede k rozvoji řady teorií extra dimenzí a právě teoriím vzniklým v této době je tato kapitola věnována.

## 2.2 Fyzika v extra dimenzích

KK model předpokládá existenci hyperprostoru s jednou kompaktní extra dimenzí stočenou do kružnice o poloměru  $R$ . Jedná se o nejjednodušší model teorie extra dimenzí, který nepřichází do rozporu s naší zkušeností a nadále bude takový hyperprostor označován jako KK hyperprostor. V této sekci bude diskutováno, jaké dopady tato extra dimenze má na fyzikální realitu ve čtyřech rozměrech a jakými projevy by na sebe mohla upozornit. Veškerou problematiku probíranou v této sekci je možno najít např. v [17].

### 2.2.1 Role Planckovy Energie ve více dimenzích

Předpokládá se, že efekty kvantové gravitace začnou být důležité až při Planckově hmotnosti  $M_P$  definované pomocí základních konstant včetně Newtonovy gravitační konstanty  $G$  jako

$$M_P c^2 = \left[ \frac{\hbar c^5}{8\pi G} \right]^{1/2} \sim 2,4 \cdot 10^{18} \text{ GeV}. \quad (2.9)$$

Co se stane s Planckovou hmotností rozšířením prostoru o  $d$  kompaktních extra dimenzí, jež je každá stočena do kružnice o poloměru  $R$ ? Vyjde se z  $(4+d)$ -dimenzionální gravitační akce

$$S = \frac{1}{16\pi G_*} \int d^4x d^d y \sqrt{|g_{(4+d)}|} R_{(4+d)}, \quad (2.10)$$

kde  $G_*$  se nazývá fundamentální gravitační konstantou. Pro jednoduchost se předpokládá, že extra dimenze jsou nezakřivené, tj. metriku je možno zapsat ve tvaru

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu - \delta_{ab} dy^a dy^b. \quad (2.11)$$

Při této volbě  $\sqrt{|g_{(4+d)}|} = \sqrt{|g_{(4)}|}$ ,  $R_{(4+d)} = R_{(4)}$  a v rovnici (2.10) je možno vyintegrovat přes extra dimenze

$$S = \frac{V_d}{16\pi G_*} \int d^4x \sqrt{|g_{(4)}|} R_{(4)}, \quad (2.12)$$

kde symbolem  $V_d = (2\pi R)^d$  je označen objem extra dimenzí. Poslední výraz je však standardní gravitační akce, v níž bylo položeno

$$G = \frac{G_*}{V_d}. \quad (2.13)$$

Pro další účely je třeba určit, jaký fyzikální rozměr má fundamentální gravitační konstanta  $G_*$ . Protože  $[dx] = [dy] = [\text{energie}]^{-1}$ ,  $[R_{(4+d)}] = [\text{energie}]^2$  a jelikož  $S$  a  $g_{(4+d)}$  jsou bezrozměrné, musí mít dle (2.10)  $G_*$  rozměr  $[G_*] = [\text{energie}]^{-d-2}$ .

Při zavedení extra dimenzí Planckova hmotnost  $M_P$  již není fundamentální konstantou. Místo ní je třeba definovat fundamentální hmotnost  $M_*$  jako

$$M_* c^2 = \left[ \frac{\hbar^{1+d} c^{5+d}}{8\pi G_*} \right]^{1/(2+d)}. \quad (2.14)$$

LHC sráží protony s energií 4 TeV (v roce 2012), prozatím bez náznaků efektů kvantové gravitace. Je proto na místě předpokládat, že  $M_* c^2 \geq 10 \text{ TeV}$ . Pokud  $M_* c^2 = 10 \text{ TeV}$  je možno z poslední rovnosti získat hranici na poloměr extra dimenzí v závislosti na jejich počtu. V případě  $d = 1$  vychází pro poloměr extra dimenzí  $R \sim 10^9 \text{ m}$ . Extra dimenze takového rozměru by se projevila v našem každodenním životě a její existence je tak vyloučena. Pro  $d = 2$  se obdrží  $R \sim 10^{-6} \text{ m}$ , což je pro současné experimenty velmi zajímavá hodnota, jak bude ukázáno v kapitole 3. Pro  $d = 3$  vychází  $R \sim 10^{-10} \text{ m}$  a konečně pro  $d = 6$ , což je počet extra dimenzí, se kterým pracuje strunová teorie, se obdrží  $R \sim 10^{-15} \text{ m}$ .

### 2.2.2 Redukce dimenzí

Zavedení extra dimenze dokáže více než snížit hodnotu Planckovy hmotnosti. Je možno na skalárním poli  $\phi(x, y)$  šířícím se celým KK hyperprostorem pozorovat projevy extra dimenze? V této části bude představena metoda zvaná redukce dimenzí, která tuto úlohu vyřeší.

Akce pole  $\phi(x, y)$  na nezakřiveném prostoru má tvar

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^4x dy (\partial^M \phi \partial_M \phi - m^2 \phi^2). \quad (2.15)$$

Kompaktnost extra dimenze je možno postihnout podmínkou  $\phi(x, y) = \phi(x, y + 2\pi R)$ , díky níž je možno provést Fourierův rozklad do extra dimenze

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \phi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \left[ \phi_n(x) \cos\left(\frac{ny}{R}\right) + \hat{\phi}_n(x) \sin\left(\frac{ny}{R}\right) \right]. \quad (2.16)$$

Dosazením tohoto rozvoje do (2.15) a vyintegrováním přes extra dimenzi se obdrží

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^4x \left( \partial^\mu \phi_0 \partial_\mu \phi_0 - m^2 \phi_0^2 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \int d^4x \left( \partial^\mu \phi_n \partial_\mu \phi_n - m_n^2 \phi_n^2 + \partial^\mu \hat{\phi}_n \partial_\mu \hat{\phi}_n - m_n^2 \hat{\phi}_n^2 \right), \quad (2.17)$$

kde bylo zavedeno označení  $m_n = m^2 + \frac{n^2}{R^2}$ . Z posledního výrazu je snadno vidět, že všechny módy rozvoje (2.16) získaly přírůstek hmotnosti  $\frac{n}{R}$  oproti módu nultému. Tyto excitované módy se nazývají Kaluza-Kleinovy (KK) a na jejich existenci (a tím na existenci extra dimenze) by upozorňovalo celé spektrum částic tohoto pole, shodujících se ve všech kvantových číslech, ale lišících se v hmotnosti.

### 2.2.3 Fermiony v pěti dimenzích

Rozšířit skalární pole do páté dimenze nebylo nijak obtížné, poněvadž na něj nebylo třeba klást extra podmínky - stačilo připsat mu dodatečnou závislou proměnnou. V této části se provede rozšíření nehmotného fermionu  $\Psi$  šířícího se celým KK hyperprostorem, jež je řešením rozšířené Diracovy rovnice

$$i \partial_M \Gamma^M \Psi(x, y) = 0, \quad (2.18)$$

kde  $\Gamma^M$  jsou matice vyhovující Cliffordově algebře  $\{\Gamma^M, \Gamma^N\} = 2\eta^{MN}$  a představují tak rozšíření Diracových  $\gamma$ -matic. Pro pětirozměrný případ je možno použít reprezentaci

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^5 = i\gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

kde  $\sigma^\mu = (\mathbb{I}, \vec{\sigma})$ ,  $\bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{I}, -\vec{\sigma})$  a  $\vec{\sigma}$  představuje vektor z Pauliho matic<sup>1</sup>.

Akce nehmotného fermionu  $\Psi$  má při tomto rozšíření tvar

$$S = \int d^4x dy \ i \bar{\Psi} \Gamma^A \partial_A \Psi = \int d^4x dy \ [i \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \bar{\Psi} \gamma^5 \partial_5 \Psi], \quad (2.20)$$

kde bylo využito explicitního tvaru matice  $\Gamma^5$  (2.19) a zaveden Diracův spinor  $\Psi$  obvyklým způsobem

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi} = (\bar{\psi}_L \quad \bar{\psi}_R). \quad (2.21)$$

Dále se zvlášť pro levotočivé a pravotočivé fermiony provede Fourierův rozklad do páté dimenze

$$\psi_{L(R)}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \psi_{0,L(R)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \left[ \psi_{n,L(R)}(x) \cos\left(\frac{ny}{R}\right) + \hat{\psi}_{n,L(R)}(x) \sin\left(\frac{ny}{R}\right) \right]. \quad (2.22)$$

<sup>1</sup>Rozšíření do více dimenzí není tak přímočaré. Matice  $\Gamma^M$  není možno rozšířit o šestou matici tak, aby společně vyhovovaly Cliffordově algebře. Je třeba přejít k větším maticím (s výhodou  $8 \times 8$ ), což vede rovněž k nutnosti rozšíření Diracova spinoru. Více viz [17].

Dosazením tohoto rozvoje do prvního členu na pravé straně (2.20) a vyintegrováním vzhledem k extra dimenzi vzniknou kinetické výrazy všech KK módů fermionu včetně módu nultého. Dosazením tohoto rozvoje do druhého členu na pravé straně (2.20), užitím tvaru  $\gamma^5$  matice (2.19) a vyintegrováním přes extra dimenzi vznikne výraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int d^4x \left( \frac{n}{R} \right) \left[ \bar{\psi}_{n,L} \hat{\psi}_{n,R} - \bar{\psi}_{n,R} \hat{\psi}_{n,L} + \hat{\bar{\psi}}_{n,R} \psi_{n,L} - \hat{\bar{\psi}}_{n,L} \psi_{n,R} \right], \quad (2.23)$$

jež připomíná hmotnostní výraz  $m\bar{\Psi}\Psi$  v Diracově rovnici. Dosadí-li se však do hmotnostního výrazu Fourierův rozklad (2.22) a provede se vyintegrování přes extra dimenzi, zjistí se, že hmotnostní výraz neshlukuje liché ( $\hat{\psi}_n$ ) a sudé ( $\psi_n$ ) módy. Výraz (2.23) nelze fyzikálně interpretovat. Jednou z možností, jak se tohoto výrazu zbavit, představuje předpoklad extra dimenze jakožto orbifoldu  $U(1)/\mathbb{Z}_2$ , který pro  $y \in (0, \pi R)$  provádí ztotožnění  $\psi_{L(R)}(x, y) = \psi_{L(R)}(x, -y)$ . Z Fourierova rozvoje (2.22) tak vypadnou členy obsahující  $\sin\left(\frac{ny}{R}\right)$  a redukce dimenzí tak nepovede ke vzniku členu (2.23). Fermiony ve výsledku sice vytvoří spektrum KK módů, ale pro pozorovatele na membráně budou mít všechny stejnou hmotnost.

## 2.2.4 Bosony v pěti dimenzích

Po rozšíření skalárního pole a fermionů do celého KK hyperprostoru je na místě to samé provést s kalibračními bosony. Lagrangián volného kalibračního bosonu  $A_M$  má v pěti dimenzích tvar

$$\mathcal{L}_{5D} = -\frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} F_{\mu 5} F^{\mu 5}, \quad (2.24)$$

kde  $F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M$ . Stejně jako v předchozích případech se provede Fourierův rozvoj do páté dimenze

$$A_M(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} A_M^{(0)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \left[ A_M^{(n)}(x) \cos\left(\frac{ny}{R}\right) + \hat{A}_M^{(n)}(x) \sin\left(\frac{ny}{R}\right) \right], \quad (2.25)$$

jehož dosazení do lagrangiánu (2.24) a vyintegrování přes extra dimenzi vede k efektivnímu lagrangiánu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4D} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(0)} F_{(0)}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left( \partial_\mu A_5^{(0)} \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(n)} F_{(n)}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left[ \partial_\mu A_5^{(n)} - \left( \frac{n}{R} \right) \hat{A}_\mu^{(n)} \right]^2 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu}^{(n)} \hat{F}_{(n)}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left[ \partial_\mu \hat{A}_5^{(n)} + \left( \frac{n}{R} \right) A_\mu^{(n)} \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Tento výraz je obtížné fyzikálně interpretovat, neboť uvnitř hranatých závorek dochází k míchání sudých ( $A^{(n)}$ ) a lichých ( $\hat{A}^{(n)}$ ) módů. Pro bosony je však možno provést kalibrační transformaci  $A_M \rightarrow A_M + \partial_M \Lambda(x, y)$ , kde  $\Lambda(x, y)$  je libovolná skalární funkce. Tato

transformace neovlivňuje lagrangián (2.24) (viz sekce 1.1.1) a navíc může být vyjádřena pro jednotlivé KK módy [17] v podobě

$$\begin{aligned} A_\mu^{(n)}(x) &\rightarrow A_\mu^{(n)}(x) + \partial_\mu \Lambda^{(n)}(x), & A_5^{(n)}(x) &\rightarrow A_5^{(n)}(x) + \left(\frac{n}{R}\right) \hat{\Lambda}^{(n)}(x), \\ \hat{A}_\mu^{(n)}(x) &\rightarrow \hat{A}_\mu^{(n)}(x) + \partial_\mu \hat{\Lambda}^{(n)}(x), & \hat{A}_5^{(n)}(x) &\rightarrow \hat{A}_5^{(n)}(x) + \left(\frac{n}{R}\right) \Lambda^{(n)}(x). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Volba skalárního pole  $\Lambda^{(n)} = \left(\frac{R}{n}\right) \hat{A}_5^{(n)}$ ,  $\hat{\Lambda}^{(n)} = \left(-\frac{R}{n}\right) A_5^{(n)}$  vede ke zjednodušení lagrangiánu (2.26) na tvar

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4D} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(0)} F_{(0)}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left( \partial_\mu A_5^{(0)} \right)^2 + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(n)} F_{(n)}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left( \frac{n}{R} \right)^2 A_\mu^{(n)} A_{(n)}^\mu + \frac{1}{2} \left( \partial_\mu A_5^{(n)} \right)^2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu}^{(n)} \hat{F}_{(n)}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left( \frac{n}{R} \right)^2 \hat{A}_\mu^{(n)} \hat{A}_{(n)}^\mu + \frac{1}{2} \left( \partial_\mu \hat{A}_5^{(n)} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Za povšimnutí stojí, že pouze nultý mód zůstal nehmotný. Všechny KK módy získaly hmotnost  $\left(\frac{n}{R}\right)$  díky absorpci skaláru  $A_5^{(n)}$ . To může připomínat Higgsův mechanismus ze sekce 1.1.4, v němž  $A_5^{(n)}$  hraje roli Goldstonova bosonu. Jelikož nultý mód zůstal pátou dimenzí nepoznamenán, k narušení symetrie u nultého módu nedochází a o Higgsův mechanismus se tak nejedná.

### 2.2.5 Narušení symetrie ve více dimenzích

V sekcích 1.1.3 a 1.1.4 bylo ukázáno, jak spontánní narušení symetrie vede k přidělení hmotnosti původně nehmotných kalibračních bosonů. V této části bude naznačeno, jak se tento mechanismus modifikuje v případě, kdy vakuum je reprezentováno minimem potenciálního pole  $\phi(x, y)$  žijícího v celém hyperprostoru. Potenciál  $V(\phi)$  bude definován (v analogii s (1.29)) ve tvaru

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^2 + \lambda \phi^4, \quad \mu^2 < 0, \quad \lambda > 0. \quad (2.29)$$

Minimum potenciálu nastává při  $\langle \phi_0 \rangle^2 = \frac{-\mu^2}{\lambda}$ . Při uvážení Fourierova rozvoje skalárního pole  $\phi$  do extra dimenzí  $\phi = \frac{\phi_0}{\sqrt{V_d}} + \dots$ , kde  $V_d$  značí objem extra dimenzí, je minimální hodnota potenciálu  $\phi$  pro pozorovatele na membráně rovna

$$\langle \phi_0 \rangle^2 = \frac{-\mu^2 V_d}{\lambda}. \quad (2.30)$$

Uvažme kalibrační boson  $A_M(x, y)$ , jež vstupuje do teorie prostřednictvím kovariantní derivace  $D_M = \partial_M - igA_M$ , kde  $g$  je příslušná kalibrační konstanta. Kinetický člen  $(D_M \phi)^2$  obsahuje pro naši diskuzi důležitý výraz  $g^2 \phi^2 A_M(x, y) A^M(x, y)$ , který ve vakuu (2.30) nabývá podoby

$$g^2 \langle \phi_0 \rangle^2 A_M(x, y) A^M(x, y). \quad (2.31)$$

Tím pádem všechny KK módy kalibračního bosonu  $A_M$  (včetně nultého) získají univerzální hmotnostní příspěvek od vakua skalárního pole žijícího v hyperprostoru. Problematika narušení symetrie je podrobně probírána v [18].

Tímto příkladem je zakončen rozbor fenoménů, které extra dimenze do fyziky přináší. V dalším budou představeny konkrétní modely teorií extra dimenzí.

## 2.3 Large extra dimensions

Teorie označovaná jako Large Extra Dimensions (LED) předpokládá existenci extra dimenzí o velikostech  $10^{-15} - 10^{-3}$  m čímž si vysloužila označení Large, neboť tyto rozměry jsou opravdu velké v porovnání s Planckovou délkou ( $\sim 10^{-35}$  m), což je rozměr, jež extra dimenzím připisuje strunová teorie. Teorie LED se snaží čelit problému hierarchie zavedením kompaktních extra dimenzí, přičemž gravitace se bez výjimky šíří celým hyperprostorem, zatímco pole Standardního modelu jsou uvězněna na membráně, případně mohou expandovat pouze do části hyperprostoru (nikoliv však do všech jeho dimenzí). Šíření gravitace celým hyperprostorem má za následek, že pozorovatelům na membráně se gravitace jeví mnohem slabší, než ve skutečnosti je.

S touto myšlenkou přišli v roce 1998 Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos a Gia Dvali [19] a na jejich počet bývá teorie LED označována ADD. Ve skutečnosti však ADD představuje pouze konkrétní model teorie LED, kterou zmíněná trojice autorů publikovala.

Model ADD předpokládá existenci  $d$  nezakřivených kompaktních extra dimenzí, každou stočenu do kružnice o poloměru  $R$ . V ADD modelu jsou všechna pole Standardního modelu vázána na membráně, zatímco skrz celý hyperprostor se šíří pouze gravitace.

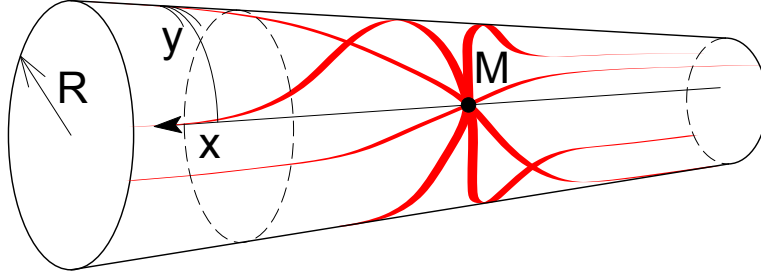
V sekci 2.2.1 byly na extra dimenze kladeny stejné podmínky, jako to činí ADD model. Planckova energie  $M_P$  není v ADD modelu základní jednotkou určující, kdy se mohou projevit efekty kvantové gravitace. Místo ní je třeba definovat novou, fundamentální energii  $M_*$ , která závisí na poloměru a počtu extra dimenzí dle (2.14). V sekci 2.2.1 bylo ukázáno, že pomocí této závislosti je možno na základě hranice současných experimentů určit možný poloměr extra dimenzí.

Srážky na urychlovačích mohou při energii srovnatelné s  $M_*$  uvolňovat gravitony<sup>2</sup>. Ty podle ADD modelu mohou unikat do extra dimenzí. Jak se tohoto faktu využívá při experimentálním ověřování ADD modelu je ukázáno v sekcích 3.1.1 a 3.2.2.

Na ADD modelu s jednou extra dimenzí je možno znázornit šíření gravitačního pole hyperprostorem z bodového zdroje hmotnosti  $M$  na membráně, což je ukázáno na obrázku 2.2. ADD model předpovídá změnu Newtonova gravitačního potenciálu na vzdálenostech menších jak rozměr extra dimenze. Newtonův gravitační potenciál ve vzdálenosti  $r$  je podle ADD modelu roven

---

<sup>2</sup>Graviton je hypotetické kvantum gravitačního pole. Ačkoliv prozatím není teorie kvantové gravitace vybudována, vědci vědí, jaké vlastnosti by graviton měl mít (pokud existuje) a předpokládají [20] že problémy kvantové gravitace se odstraní, jakmile bude nalezena jednotná teorie všech interakcí, která bude zahrnovat graviton.



Obrázek 2.2: Schematické znázornění šíření gravitačního pole KK hyperprostorem z bodového zdroje hmotnosti  $M$  na membráně  $x$ . Membrána je pro jednoduchost znázorněna přímkou. Pozorovatel ve vzdálenosti  $r \gg R$  efekty extra dimenze necítí. Na vzdálenostech  $r \ll R$  se však gravitace stává mnohem silnější. Převzato z [21].

$$\phi(r) = \begin{cases} -G \frac{M}{r} \left(\frac{R}{r}\right)^d, & r \ll R, \\ -G \frac{M}{r}, & r \gg R, \end{cases} \quad (2.32)$$

kde  $G$  značí klasickou Newtonovu gravitační konstantu. Na malých vzdálenostech se tedy gravitace stává mnohem silnější a tím dává vodítko, jak extra dimenze hledat. V sekci 3.2.1 je uvedena současná hranice testování Newtonova gravitačního zákona na malých vzdálenostech. Dalším důsledkem zesílení gravitační interakce na malých vzdálenostech je možná produkce mikroskopických černých děr na LHC, jimž je věnována sekce 3.1.4.

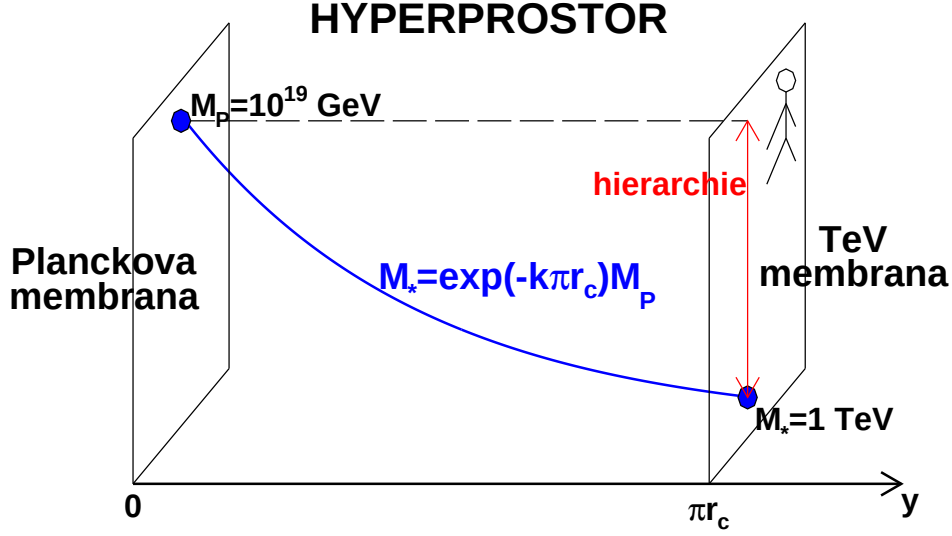
## 2.4 Teorie se zakřivenými dimenzemi

Další řešení problému hierarchie představili v roce 1999 Lisa Randall a Raman Sundrum [22]. Randall-Sundrum (RS) model zavádí pouze jednu extra dimenzi. Tato dodatečná dimenze není stočena do kružnice, nýbrž způsobuje dodatečné zakřivené prostoročasu na membráně skrz extra dimenzi. Metrika RS hyperprostoru má podobu

$$ds^2 = e^{-2kr_c|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 dy^2, \quad (2.33)$$

kde souřadnice extra dimenze  $y$  nabývá hodnot  $0 < |y| < \pi$  a  $r_c$  značí poloměr extra dimenze.  $e^{-2kr_c|y|}$  je nazýván faktorem zakřivení a jeho odvození je možno najít např. v [23]. Ačkoliv původní verze RS modelu předpokládala, že pouze gravitace se šíří celým hyperprostorem (takový model bude nadále označován jako RS model), objevily se publikace, které i pole Standardního modelu (kromě Higgsova pole, jehož absence v extra dimenzích je klíčem pro vysvětlení problému hierarchie) rozšiřují do extra dimenze (viz např. [24]). Toto rozšíření vede ke vzniku KK spektra částic Standardního modelu (zatímco v původní teorii pouze gravitony získávají KK spektrum).

RS model je možno si zjednodušeně představit jako hyperprostor mezi dvěma membránami [25]. Obě membrány jsou propojeny pomocí extra dimenze  $y$ , přičemž vzdálenost obou membrán  $\pi r_c$  je parametrem RS modelu. Zakřivení skrz extra dimenzi má za následek rozdílné chování gravitace na obou membránách, což vede k různé hodnotě Planckovy



Obrázek 2.3: Hyperprostor RS modelu je možno znázornit pomocí dvou membrán - Planckovy membrány ( $y = 0$ ) a TeV membrány ( $y = \pi r_c$ ). Gravitace se šíří celým hyperprostorem, zatímco pole Standardního modelu jsou uvězněna na TeV membráně. Zakřivení hyperprostoru způsobuje přebytek gravitonů na Planckově membráně, díky čemuž se hmotnost při vzdalování od Planckovy membrány exponenciálně zmenšuje. Vhodným nastavením parametrů RS modelu je možno docílit, aby pro pozorovatele na TeV membráně byla Planckova energie rovna 1 TeV a tím vysvětlit problém hierarchie.

energie na každé z membrán. Struktura hyperprostoru RS modelu je schematicky znázorněna na obrázku 2.3. Hmotnost  $M$  vnímaná pozorovatelem na TeV membráně odpovídá fundamentální vícedimenziální hmotnosti  $M_0$  dle

$$M = \exp(-k\pi r_c) M_0, \quad (2.34)$$

kde za účelem redukce  $M_P \sim 10^{19}$  GeV na hodnotu  $M_* \sim 1$  TeV je třeba volit [36]  $kr_c \sim 11 - 12$ . Tato volba svazuje základní parametry modelu  $M_* = \exp(-k\pi r_c) M_P$  a je možno jí využít k přepsání poslední rovnosti do tvaru

$$m_n = x_n \frac{k}{\bar{M}_P} M_*, \quad (2.35)$$

kde bezrozměrný zlomek  $k/\bar{M}_P$ ,  $\bar{M}_P = M_P/\sqrt{8\pi}$  bývá nazýván kalibrační konstantou RS modelu. Symbolem  $m_n$  rozumíme hmotnost  $n$ -tého módu KK spektra elementární částice Standardního modelu (a gravitonu) a  $x_n$  představuje číselný parametr, který je možno odvodit z teorie [23] a pro každou elementární částici může nabývat různé hodnoty. Experimentům hledajícím předpovědi RS modelu je věnována sekce 3.1.2

Na závěr stojí za zmínku, že existují dva typy RS modelu. RS1, jež byl doposud popisován, a RS2, který stejnojmenná dvojice autorů uvedla v témže roce [26]. RS2 je možno získat z RS1 limitou  $r_c \rightarrow \infty$ .

## 2.5 Universal extra dimensions

V teoriích LED se požaduje, aby pole Standardního modelu byla (alespoň částečně) vázána na membráně, zatímco gravitace se šíří celým hyperprostorem. Teorie Universal Extra Dimensions (UED) požadují, aby se celým hyperprostorem šířila i pole Standardního modelu (nebo alespoň některá z nich).

Jako první tuto teorii publikovali Thomas Appelquist, Hsin-Chia Cheng a Bogdan A. Dobrescu v roce 2000 [27]. V jejich teorii se všechna pole Standardního modelu šíří celým hyperprostorem obsahujícím  $d$  kompaktních extra dimenzí, každou stočenou do kružnice o poloměru  $R$ . Dále se pod označením UED rozumí právě tento model.

Dle sekce 2.2 všechny částice Standardního modelu získávají v UED hmotnostní spektrum KK módů. V sekci 2.2.3 byl zmíněn problém s rozšířením fermionů do pěti dimenzí. Bylo však navrženo řešení dodáním dodatečné podmínky na extra dimenzi.

V teoriích LED existoval v extra dimenzi význačný bod, v němž byla lokalizovaná membrána s poli Standardního modelu. V teoriích UED žádný takový bod neexistuje, což vede k zachování hybnosti podél extra dimenzí. Experimenty hledající předpovědi teorií UED jsou uvedeny v sekci 3.1.3

Velkým přínosem teorií UED je předpověď existence hmotné částice bez barvy a bez náboje [28] - možného kandidáta na vysvětlení temné hmoty ve vesmíru.

## Kapitola 3

# Hledání extra dimenzí

Teorie extra dimenzí představené v předchozí kapitole jsou vybudovány tak, aby současné experimenty mohly na existenci skrytých extra dimenzí upozornit. V této kapitole je uveden přehled experimentů, které dávají na extra dimenze nejlepší odhad. Ačkoliv v době, kdy byla tato práce napsána, nebyla existence extra dimenzí prokázána, plyne z uskutečněných experimentů hranice na parametry každé z teorie.

### 3.1 Experimenty na urychlovačích

Díky velikosti extra dimenzí, které pro jednotlivé teorie připadají v úvahu, představují experimenty na urychlovačích kandidáta na jejich prokázání. Teorie extra dimenzí předpovídají změnu účinného průřezu reakcí oproti hodnotě předpovídané Standardním modelem. Tato změna je způsobena existencí procesu, který Standardní model nedovoluje.

Při analýze dat je v první řadě třeba určit pozadí Standardního modelu, tj. sečíst příspěvky od všech reakcí dovolených Standardním modelem, které se na urychlovači projeví stejně, jako se předpokládá u nového fenoménu předpovídaného teoriemi extra dimenzí. Aby se předpovědi teorií extra dimenzí neztratily v pozadí Standardního modelu, hledají se srážky, kde výsledné produkty mají značnou hodnotu příčné energie  $E_T$  (část kinetické energie promítnuté do směru kolmého ke směru pohybu nalétávajících částic), popř. značnou hodnotu  $\cancel{E}_T$ , což značí chybějící příčnou energii. Při analýze získaných dat je třeba brát v potaz, že  $\cancel{E}_T$  může být způsobena částicí, která při srážce sice vznikla, ale která unikla detekci.

V této části budou shrnuty hranice na parametry teorií extra dimenzí, které byly získány analýzou dat, jež v poslední době přišly z nejvýkonnějších urychlovačů částic. LHC (Large Hadron Collider) s jeho detektory ATLAS (A Toroidal LHC Apparatus) a CMS (Compact Muon Spectrometer) je dnes nejvýkonnějším urychlovačem a chloubou CERNu. Před LHC byl v CERNu do roku 2000 v provozu urychlovač LEP (Large Electron-Positron Collider) s detektory ALEPH, DELPHI, OPAL a L3. Dalším výkonným urychlovačem částic byl Tevatron s detektory CDF (Collider Detector at Fermilab) a D0 (DZero) nacházející se ve Fermilabu. Přehled detektorů je stručně uveden v tabulce 3.1.

|                 | Urychlovač | Detektory                  | Typ        | $\sqrt{s}$ [TeV] | Provoz       |
|-----------------|------------|----------------------------|------------|------------------|--------------|
| <b>CERN</b>     | LHC        | ATLAS, CMS                 | $pp$       | 8                | 2008 - 2012* |
|                 | LEP        | ALEPH, DELPHI,<br>OPAL, L3 | $e^+e^-$   | 0.209            | 1989 - 2000  |
| <b>Fermilab</b> | Tevatron   | CDF, D0                    | $p\bar{p}$ | 1.96             | 1983 - 2011  |

Tabulka 3.1: Přehled nejvýkonnějších urychlovačů. Uvedená energie  $\sqrt{s}$  dostupná v těžišťové soustavě srážejících se částic je brána k poslednímu roku provozu. V provozu zůstává pouze LHC, který od roku 2014 plánuje nárůst energie na  $\sqrt{s} = 13 - 14$  TeV.

### 3.1.1 Large extra dimensions

Předpokládá se, že při energiích srovnatelných s Planckovou hmotností  $\sim M_P$  je třeba k popisu gravitace použít (zatím nevybudovanou) kvantovou teorii gravitace, v níž gravitační interakce je zprostředkována výměnou částic gravitačního pole - gravitonů. ADD model vede k redukci Planckovy hmotnosti  $M_P$  na fundamentální hmotnost  $M_*$ . V sekci 2.3 bylo ukázáno, že  $M_*$  je určena počtem a poloměrem extra dimenzí a může tak nabývat takřka libovolné hodnoty. Pozorování gravitonů na urychlovačích by znamenalo, že Planckova hmotnost není fundamentální škálou a navzdory skutečnosti, že hledání je prozatím neúspěšné, díky současným experimentům byly získány odhady na  $M_*$  a tím i na poloměr extra dimenzí.

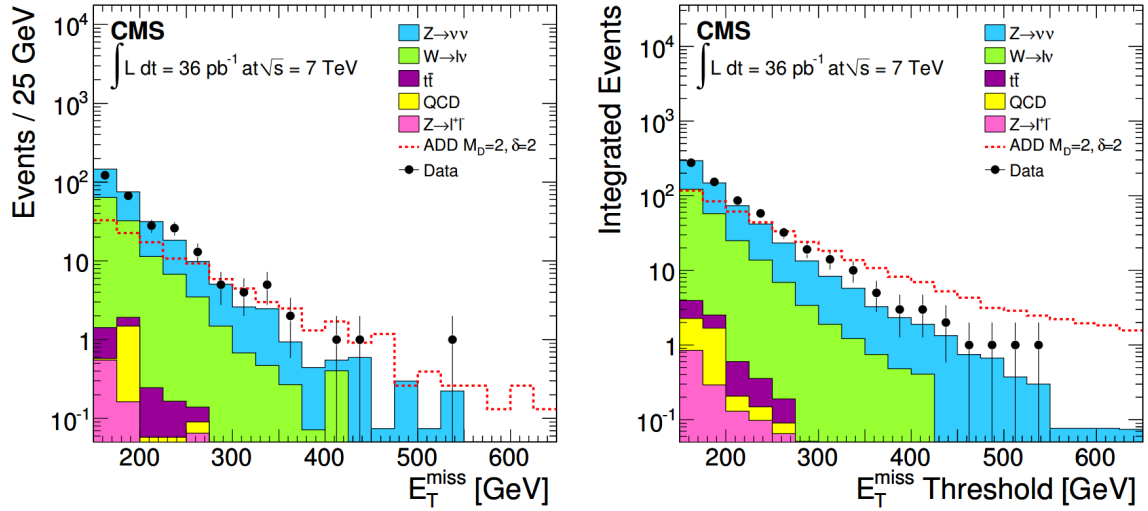
Jelikož gravitony nemohou být detekovány přímo, je třeba nepřímého měření. Vzniklý graviton s sebou odnáší část hybnosti a energie a proto se hledají události s chybějící příčnou energií  $\cancel{E}_T$ . Chybějící energie je způsobena i neutriny, která z procesů dovolených Standardním modelem unikají detekci. Stejně tak nedetekované leptony a v menší míře i hadrony přispívají k chybějící energii. Účinný průřez reakcí Standardního modelu vedoucích ke značné hodnotě  $\cancel{E}_T$  s rostoucí hodnotou  $\cancel{E}_T$  klesá. Proto se k odfiltrování velké části pozadí vybírají události, kde  $\cancel{E}_T > E_{min}$  (volí se alespoň  $E_{min} > 20$  GeV).

Přehled reakcí vedoucích ke vzniku gravitonu  $G$  včetně reakcí, jež dovoluje Standardní model a které mohou způsobovat ztrátu energie  $\cancel{E}_T$  je uveden v tabulce 3.2. Na obrázku 3.1 je vidět graf četnosti srážek v závislosti na  $\cancel{E}_T = E_T^{miss}$ , včetně znázorněných jednotlivých příspěvků od pozadí Standardního modelu.

Přehled výsledků, jež byly získány analýzou dat z různých detektorů, je uveden v tabulce 3.3. Z tabulky je snadno vidět, že prozatím nejlepší výsledek poskytuje analýza dat z detektoru ATLAS. Na obrázku 3.2 jsou ukázány hranice na hodnotu  $M_*$  v závislosti na počtu extra dimenzí  $d$  ADD modelu, vycházející právě z této analýzy.

| ADD model                                            | Pozadí Standardního modelu                                                   |
|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| $e^+ e^- \rightarrow \gamma + \cancel{E}_T$          | $e^+ e^- \rightarrow \gamma \nu \bar{\nu}$<br>$e^+ e^- \rightarrow \gamma Z$ |
| $pp, p\bar{p} \rightarrow \text{jet} + \cancel{E}_T$ | $pp, p\bar{p} \rightarrow Z + \text{jets}$                                   |
| $qg \rightarrow qG$                                  | $pp, p\bar{p} \rightarrow W + \text{jets}$                                   |
| $q\bar{q} \rightarrow gG$                            | $Z \rightarrow \nu \bar{\nu}, t\bar{t}, \ell\bar{\ell}$                      |
| $gg \rightarrow gG$                                  | $W \rightarrow \ell \nu$                                                     |

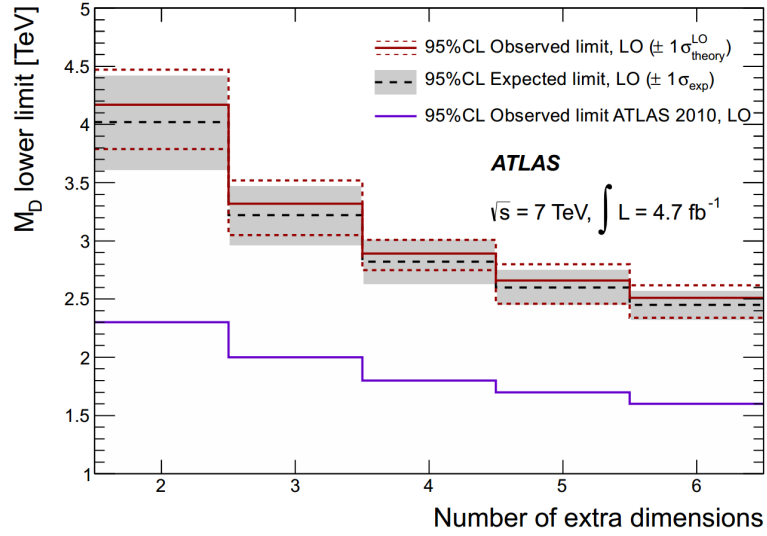
Tabulka 3.2: Přehled hlavních reakcí, které mohou vést k celkové značné hodnotě  $\cancel{E}_T$ . V prvním sloupci jsou reakce předpokládáné ADD modelem.  $\cancel{E}_T$  je zde způsobena gravitonem  $G$  unikajícím detekci. Ve druhém sloupci jsou uvedeny procesy dovolené Standardním modelem.  $\cancel{E}_T$  je zde způsobeno neutriny  $\nu$  a nezaznamenanými leptony  $\ell$  (popř. hadrony). Při kaskádovém rozpadu páru  $t\bar{t}$  vznikají leptony a hadrony a tím i produkce  $t\bar{t}$  přispívá k  $\cancel{E}_T$ . Ve spodní části tabulky jsou vlevo uvedeny možné vzniky gravitonu  $G$  z kvarku  $q$ , antikvarku  $\bar{q}$ , resp gluonu  $g$ . V pravé části potom ty rozpady bosonů  $W$ ,  $Z$  které mohou k  $\cancel{E}_T$  přispívat.



Obrázek 3.1: Histogram četnosti srážek v závislosti na  $\cancel{E}_T$ . Jsou vybrány pouze události, u kterých  $\cancel{E}_T > 150$  GeV. Histogram vpravo zobrazuje pro danou hodnotu  $\cancel{E}_T$  všechny procesy s hodnotou  $\cancel{E}_T$  vyšší. Na histogramech je zobrazen příspěvek od hlavních procesů Standardního modelu a předpověď ADD modelu s parametry  $M_* = M_D = 2$  TeV,  $d = \delta = 2$ . Zaznamenaná data se pro malé hodnoty  $\cancel{E}_T$  shodují s předpověďmi Standardního modelu. Převzato z [31].

| $d = 2$           |                    | $d \geq 3$      |                    | Detektor | Reakce                                                  | Rok       |
|-------------------|--------------------|-----------------|--------------------|----------|---------------------------------------------------------|-----------|
| $R [\mu\text{m}]$ | $M_* [\text{TeV}]$ | $R [\text{nm}]$ | $M_* [\text{TeV}]$ |          |                                                         |           |
| 28                | 4.17               | 0.48            | 3.32               | ATLAS    | $pp \rightarrow \text{jet} + \cancel{E}_T$              | 2013 [30] |
| 72                | 2.59               | 1.05            | 2.09               | CMS      | $pp \rightarrow \text{jet} + \cancel{E}_T$              | 2011 [31] |
| 245               | 1.40               | 2.8             | 1.16               | CDF      | $p\bar{p} \rightarrow \text{jet}/\gamma + \cancel{E}_T$ | 2008 [32] |
| 615               | 0.885              | 4.56            | 0.865              | D0       | $p\bar{p} \rightarrow \gamma + \cancel{E}_T$            | 2008 [33] |
| 350               | 1.17               | 3.6             | 0.997              | CDF      | $p\bar{p} \rightarrow \text{jet} + \cancel{E}_T$        | 2006 [34] |
| 210               | 1.52               | 2.9             | 1.13               | L3       | $e^+ e^- \rightarrow \gamma + \cancel{E}_T$             | 2004 [35] |

Tabulka 3.3: Hranice pro poloměr extra dimenze  $R$  a fundamentální hmotnost  $M_*$  ADD modelu. Poloměr  $R$  s hodnotou větší než ukazuje tabulka, je experimentálně vyloučen na 95%  $CL$ ,  $M_*$  s hodnotou menší než hodnota uvedená v tabulce je experimentálně vyloučena. Výsledky jsou uvedeny zvlášť pro ADD model s  $d = 2$  a  $d \geq 3$  extra dimenzemi. V tabulce je ukázána reakce, která byla při konkrétní analýze použita (jet/ $\gamma$  značí kombinovanou analýzu). Ve většině zdrojů je uvedena hranice pouze na poloměr extra dimenzí  $R$ . Hranice na  $M_*$  se ve většině zdrojů neuvádí. V tabulce je tato hodnota dopočtena s využitím vzorců (2.13) a (2.14).



Obrázek 3.2: Experimentální výsledky pro dolní hranici  $M_* = M_D$  v závislosti na počtu extra dimenzí ADD modelu. Graf ukazuje srovnání s analýzou dat z roku 2010. Převzato z [30].

### 3.1.2 Teorie se zakřivenými dimenzemi

RS model vede k redukci Planckovy hmotnosti  $M_P$  na fundamentální hmotnost  $M_*$  a tudíž k možné produkci gravitonů na současných urychlovačích. Experimentálně se hledá hranice na hmotnost prvního excitovaného stavu gravitonu  $m_G$  (KK gravitonu). KK graviton  $G^*$  se dle RS modelu rozpadá na částice Standardního modelu a způsobuje tak změnu v účinných průřezích předpovídaných Standardním modelem. Například vliv KK gravitonu na účinný průřez vzniku páru  $t\bar{t}$  je odvozen v [39].

Zatímco v teoriích LED se přítomnost gravitonů snaží prokázat analýzou chybějící energie reakce, v případě RS modelu se analyzují reakce mající za produkt dvojici detekovaných částic Standardního modelu, k nimž může rozpad KK gravitonu svými produkty přispívat. Přehled možného rozpadu  $G^*$  včetně možného příspěvku od pozadí Standardního modelu je uveden v tabulce 3.5. Na obrázku 3.3 je histogram zobrazující četnost událostí s produkcí dvojice fotonů s invariantní hmotou  $m_{\gamma\gamma}$  přesahující 125 GeV, včetně četnosti předpovězené Standardním modelem a RS modelem.

Pro experimentální účely je vhodné vyjádřit parametrizaci hmotnosti KK gravitonů pomocí výrazu (2.35). Jako výsledek experimentů se potom uvádí závislost hmotnosti KK gravitonu  $m_G$  na kalibrační konstantě RS modelu  $k/\bar{M}_P$ . Výsledky získané hledáním rozpadu  $G^*$  jsou uvedeny v tabulce 3.4. Na obrázku 3.4 je vykreslen experimentálně získaný limit na  $m_G$  pro několik hodnot parametru  $k/\bar{M}_P$ .

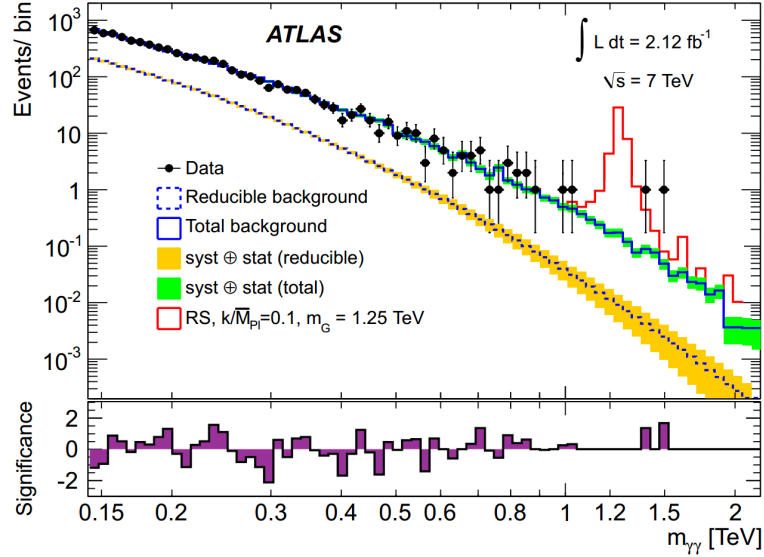
V případě rozšířeného RS modelu umožňujícímu i polím Standardního modelu šířit se extra dimenzí je možno místo KK gravitonů hledat KK bosony a KK fermiony. V [40] se hledá dolní hranice na hmotnost  $m_g$  prvního excitovaného stavu gluonu  $g^*$  hledáním rozpadu  $g^* \rightarrow t\bar{t}$ . Z analýzy vyplývá  $m_g > 650$  GeV.

| $k/\bar{M}_P = 0.01$ | $k/\bar{M}_P = 0.1$ |          |                                                                 |           |
|----------------------|---------------------|----------|-----------------------------------------------------------------|-----------|
| $m_G$ [GeV]          | $m_G$ [GeV]         | Detektor | Reakce                                                          | Rok       |
| 1950                 | 800                 | ATLAS    | $pp \rightarrow G^* \rightarrow \gamma\gamma/e^+e^-/\mu^+\mu^-$ | 2012 [41] |
| 1080                 | -                   | CMS      | $pp \rightarrow G^* \rightarrow e^+e^-/\mu^+\mu^-$              | 2011 [42] |
| 1058                 | 612                 | CDF      | $p\bar{p} \rightarrow G^* \rightarrow \gamma\gamma/e^+e^-$      | 2011 [43] |
| 759                  | -                   | D0       | $p\bar{p} \rightarrow G^* \rightarrow W W/W Z$                  | 2011 [44] |

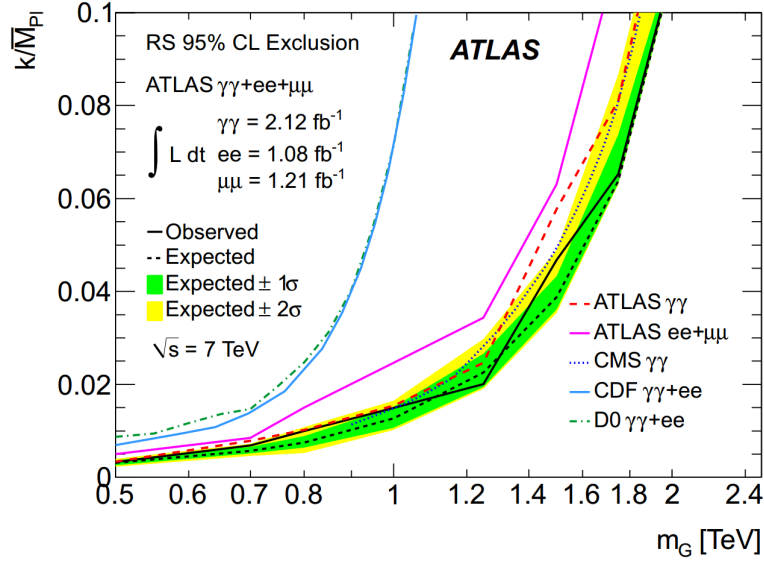
Tabulka 3.4: Experimentální hranice pro hmotnost prvního excitovaného stavu gravitonu  $m_G$  RS modelu. Hmotnost  $m_G$  s hodnotou menší než ukazuje tabulka, je experimentálně vyloučena na 95 %  $CL$ . Výsledek je uveden pro dvě různé hodnoty kalibrační konstanty  $k/\bar{M}_P$ . V některých citacích je uvedena hranice pouze pro  $k/\bar{M}_P = 0.01$ . V tabulce je uveden proces, který byl k získání výsledku použit.

| RS model                                                     | Pozadí Standardního modelu                                                                                              |
|--------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $g g, q \bar{q} \rightarrow G^* \rightarrow \gamma \gamma$   | $g g, q \bar{q} \rightarrow \gamma \gamma$<br>$H \rightarrow \gamma \gamma$                                             |
| $g g, q \bar{q} \rightarrow G^* \rightarrow \ell \bar{\ell}$ | $g g, q \bar{q} \rightarrow t \bar{t} \rightarrow \ell \bar{\ell}, W W, Z Z$<br>$q \bar{q} \rightarrow \ell \bar{\ell}$ |
| $g g, q \bar{q} \rightarrow G^* \rightarrow W W, Z Z$        | $H \rightarrow W W, Z Z$<br>$q q \rightarrow W q$                                                                       |

Tabulka 3.5: Přehled reakcí vedoucích ke vzniku excitovaného gravitonu  $G^*$  včetně jeho následného rozpadu. V pravém sloupci jsou uvedeny procesy dovolené Standardním modelem, které přispívají do pozadí rozpadu  $G^*$ .  $H$  představuje Higgsův boson, zbylé značení je převzato z tabulky 3.2.



Obrázek 3.3: Histogram četnosti událostí s produkcí dvojice fotonů s celkovou invariantní hmotou  $m_{\gamma\gamma} > 125$  GeV. V histogramu je zobrazena předpověď Standardního modelu a předpověď RS modelu s parametry  $k/\bar{M}_P = 0.1$ ,  $m_G = 1.25$  TeV. Převzato z [41].



Obrázek 3.4: Experimentální limity na  $m_G$  v závislosti na  $k/\bar{M}_P$ . Hodnoty  $m_G$  nacházející se vlevo od grafu, jsou experimentálně vyloučeny. V grafu je zobrazeno srovnání s výsledky z dalších detektorů. Převzato z [41].

### 3.1.3 Universal extra dimensions

Teorie UED požadují, aby se všechna pole Standardního modelu šířila extra dimenzemi. V sekci 2.5 bylo poznamenáno, že podél každé z extra dimenzí platí v teoriích UED zákon zachování hybnosti, který je možno formulovat jako zákon zachování KK čísla - pokud při srážce vznikne excitovaný stav částice Standardního modelu (tzv. KK částice), potom nutně musí vzniknout druhá KK částice, aby vyrovnala její hybnost podél extra dimenze.

Předpokládá se, že při srážkách vzniká KK kvark  $q^*$  resp. KK gluon  $g^*$ . Tyto excitované stavy jsou nestabilní a postupně se rozpadají na nejlehčí KK částici  $\gamma^*$  (nemusí se nutně jednat o KK foton) při současném zachování hybnosti podél extra dimenze. Během každé fáze postupného rozpadu se uvolní elementární částice Standardního modelu, což vede k výslednému rozpadu

$$q^* (g^*) \rightarrow \dots \rightarrow \gamma^* + SM,$$

kde symbolem  $SM$  jsou označeny elementární částice Standardního modelu uvolněné při kaskádovém rozpadu.  $\gamma^*$  je již stabilní částice, která uniká detekci a odnáší s sebou část energie reakce. Na možný vznik  $q^*$  resp.  $g^*$  by upozorňovala chybějící energie, kterou s sebou  $\gamma^*$  odnáší. Tato energie je bohužel malá a zaniká v pozadí Standardního modelu. Druhým možným způsobem detekce by bylo určení spektra částic Standardního modelu, které jsou uvolněny při postupném rozpadu. Tyto částice mají bohužel malou energii a díky silnému magnetickému poli, které současné detektory vytváří, jsou ve většině případů nedetekovatelné.

V [45] je rozpracována teorie, která předpokládá, že gravitace narušuje zachování KK čísla, což vede k rozpadu nejlehčí KK částice na foton a graviton  $\gamma^* \rightarrow \gamma + G$ . Tento rozpad se může projevit výskytem fotonu se značnou příčnou energií, což je událost snadno odseparovatelná od pozadí Standardního modelu. Vzniklý pár KK částic by se ve výsledku rozpadl na

$$\gamma\gamma + \cancel{E}_T + SM,$$

kde  $\cancel{E}_T$  představuje energii odnášenou gravitony. Procesy Standardního modelu, které dávají vzniku páru fotonů, jsou uvedeny v první části tabulky 3.5.

Experimentální hranice na poloměr extra dimenzí jsou uvedeny v tabulce 3.6.

| R [nm] | $M_c$ [GeV] | Detektor | Reakce                                                  | Rok       |
|--------|-------------|----------|---------------------------------------------------------|-----------|
| 1.18   | 961         | ATLAS    | $pp \rightarrow \gamma\gamma + \cancel{E}_T + SM$       | 2011 [46] |
| 1.56   | 729         | ATLAS    | $pp \rightarrow \gamma\gamma + \cancel{E}_T + SM$       | 2011 [47] |
| 2.38   | 477         | D0       | $p\bar{p} \rightarrow \gamma\gamma + \cancel{E}_T + SM$ | 2010 [48] |

Tabulka 3.6: Experimentálně určené limity na poloměr  $R$  extra dimenzí teorií UED s parametry  $d = 6$  a  $M_* = 5 \text{ TeV}$ . Poloměr  $R$  s hodnotou větší než ukazuje tabulka je experimentálně vyloučen na 95 %  $CL$ . V citovaných zdrojích je jako výsledek uvedena kompakfikační hmotnost  $M_c$ , která je s poloměrem extra dimenzí svázána vztahem  $M_c = 1/R$ .

### 3.1.4 Mikroskopické černé díry

Teorie extra dimenzí redukuje Planckovu hmotnost  $M_P$  na fundamentální hmotnost  $M_*$ , která je dosažitelná současnými experimenty. Zatímco při energiích  $\sim M_*$  by se gravitace měla projevovat kvantově, tedy prostřednictvím výměny gravitonů, při energiích  $> M_*$  by mělo být možno použít klasické přiblížení - přenést makroskopické zákonitosti o chování gravitace do světa elementárních částic. Jedním snadno pozorovatelným projevem tohoto přiblížení je možná produkce mikroskopických černých děr na LHC.

Mikroskopická černá díra hmotnosti  $M_{BH}$  má v modelu s  $d$  extra dimenzemi dle [49] Schwarzschildův poloměr

$$R_{BH} = C_d \frac{1}{M_*} \left( \frac{M_{BH}}{M_*} \right)^{\frac{1}{d+1}}, \quad (3.1)$$

kde symbolem  $C_d$  byl označen číselný parametr závisející pouze na  $d$ . Teplota takové černé díry je rovna

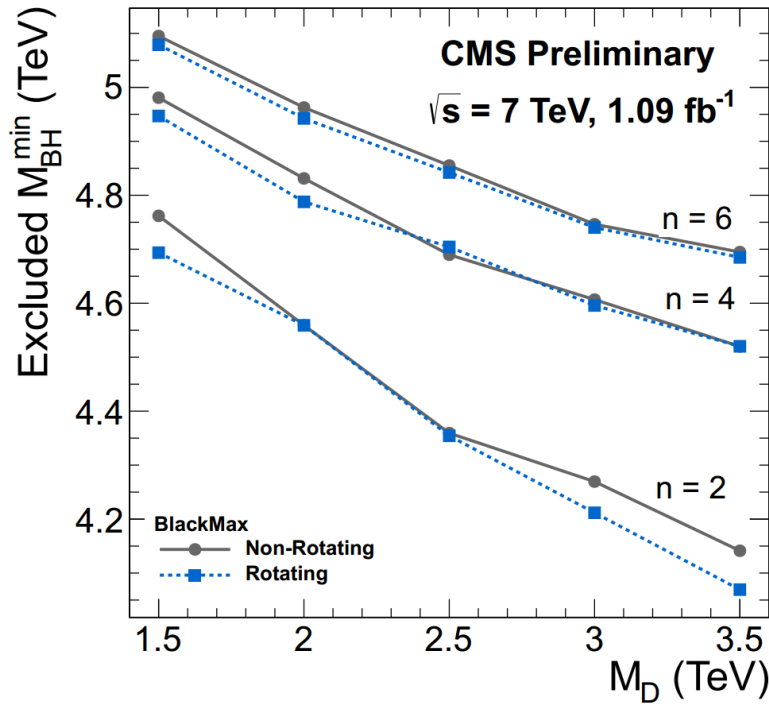
$$T_{BH} = \frac{d+1}{4\pi R_{BH}}. \quad (3.2)$$

Jsou-li do těchto vztahů dosazeny parametry, které z experimentů na jednotlivé modely extra dimenzí plynou, zjistíme, že taková mikroskopická černá díra se dle [50] vypaří prostřednictvím Hawkingova záření za čas  $\sim 10^{-26} \text{ s}$ .

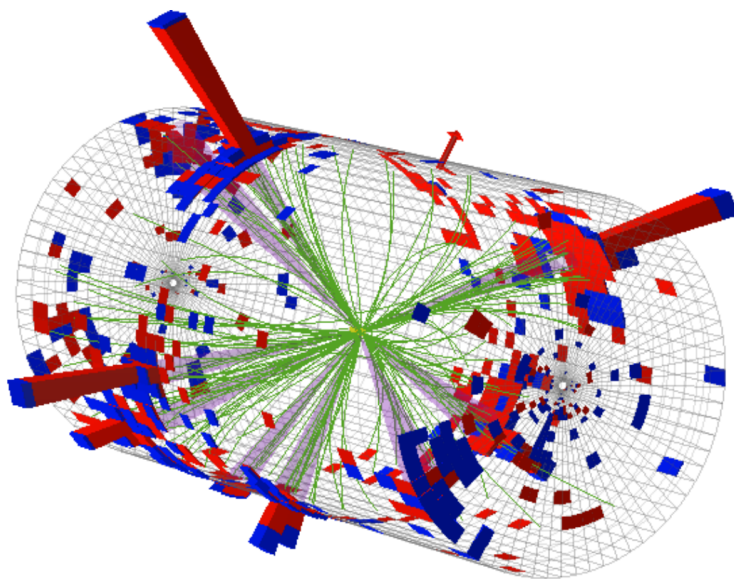
Černá díra by vyzářila částice izotropně do všech směrů (viz obrázek 3.6) a proto se hledají srážky, při nichž vzniká řada objektů se značnou hodnotou příčné hybnosti  $p_T$  (celková příčná hybnost by však měla zůstat nulová). Experimentální hranice na hmotnost černé díry shrnuje tabulka 3.7. Obrázek 3.5 ukazuje experimentální hranice na  $M_{BH}$  v závislosti na počtu extra dimenzí.

| $M_{BH}$ [TeV] | Detektor | Reakce                                         | Rok       |
|----------------|----------|------------------------------------------------|-----------|
| 4.0            | CMS      | $pp \rightarrow nE_T^{\text{jet}/\ell/\gamma}$ | 2011 [51] |
| 3.8            | ATLAS    | $pp \rightarrow nE_T^{\text{jet}/\ell}$        | 2011 [52] |
| 3.2            | ATLAS    | $pp \rightarrow nE_T^{\text{jet}}$             | 2011 [53] |

Tabulka 3.7: Experimentální hranice na hmotnost černé díry. Mikroskopická černá díra o hmotnosti menší než ukazuje tabulka, je experimentálně vyloučena na 95 %  $CL$ . Symbolem  $nE_T^{\text{jet}/\ell/\gamma}$  se rozumí několikanásobně zastoupení jet,  $\ell$  resp.  $\gamma$  se značnou hodnotou příčné energie. Uvedená hranice  $M_{BH}$  je platná pro všechny teorie extra dimenzí. Pro konkrétní teorii extra dimenzí může být tato hranice vyšší.



Obrázek 3.5: Experimentální hranice na hmotnost černé díry  $M_{BH}$  v závislosti na počtu extra dimenzí a fundamentální hmotnosti  $M_* = M_D$ . Uvažuje se i případ s rotující černou dírou. Převzato z [51].



Obrázek 3.6: Kandidát na černou díru zaznamenaný na detektoru CMS. Na obrázku je možno vidět několik produktů srážky se značnou hodnotou příčné energie, izotropně rozmístěných kolem místa, kde ke srážce došlo. Převzato z [51].

## 3.2 Ostatní experimenty

Vedle experimentů na urychlovačích existují další způsoby, jak extra dimenze hledat a to bez nutnosti budování obřích urychlovačů částic. Experimenty proměřující Newtonův gravitační zákon na malých vzdálenostech jsou uskutečňovány na deskách stolu a přesto kladou na poloměr extra dimenze velmi užitečné limity. Druhou třídu experimentů, kterou zde uvedeme, jsou astronomická pozorování.

### 3.2.1 Newtonův gravitační zákon na malých měřítkách

Teorie extra dimenzí předpovídají odchylky od Newtonova gravitačního zákona na vzdálenostech srovnatelných s rozměrem extra dimenzí. Objevila se řada experimentů, proměřujících chování gravitace na vzdálenostech  $\sim 10 \mu\text{m}$ . Zatím nejlepší výsledky jsou získány pomocí měření torze vlákna.

Zařízení se skládá z torzního vlákna, na jehož konci je ve vodorovné poloze zavěšen tenký disk (nazývaný detektor) s rovnoměrně rozmístěnými kruhovými zářezy po obvodu. Pod detektorem je možno vidět (viz obrázek 3.7) podobný kruhový disk (atraktor), který je již umístěn na pevné podložce a je připojen ke krokovému motoru, který zajišťuje jeho otáčení s konstantní úhlovou rychlostí  $\omega$ .

Detektor a atraktor se gravitačně přitahují a díky zářezům na obou z disků dochází při otáčení atraktoru ke změnám gravitační síly mezi nimi. Tyto změny způsobují periodické změny v torzi vlákna, které je možno spočítat a následně i změřit. Proto je mezi

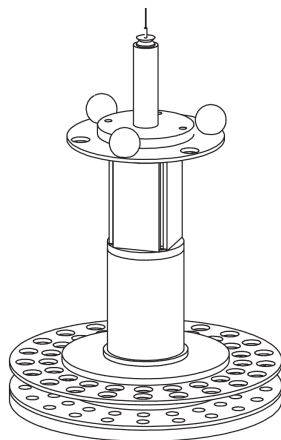
atraktor a detektor vložen třetí disk, jehož přítomnost by měla zaručit (pokud Newtonův gravitační zákon platí) anulování torzních efektů. Měří se torze, která i po přidání třetího disku přetrvává.

Při zjišťování odchylek od Newtonova gravitačního zákona se volí parametrizace gravitačního potenciálu ve tvaru

$$V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} \left[ 1 + \alpha e^{-r/\lambda} \right] \quad (3.3)$$

a hledají se hranice na parametry  $\alpha$  a  $\lambda$ .

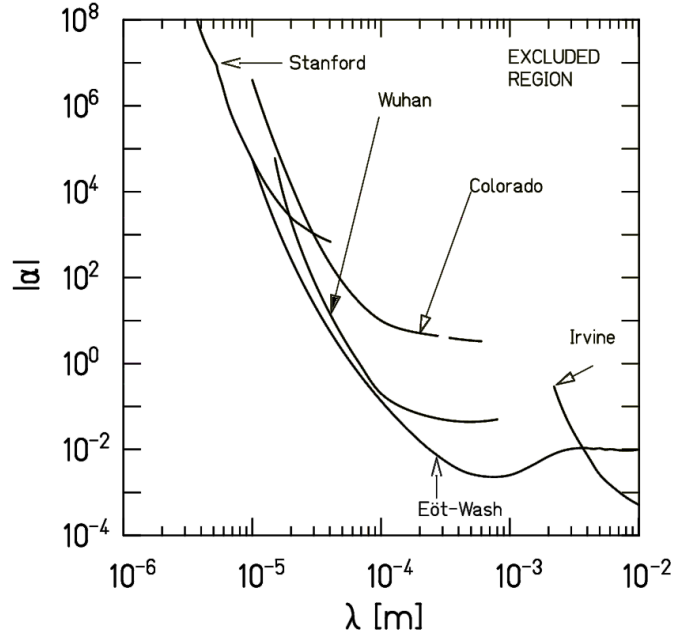
Experimentální hranice na možnou odchylku od Newtonova gravitačního zákona je uvedena v tabulce 3.8. Na obrázku 3.8 je pak možno vidět hranice na parametry  $\alpha$  a  $\lambda$ , jež byly získány z různých experimentů.



Obrázek 3.7: Schéma zařízení zavěšeného na torzním vlákně. Ve spodní části je možno vidět atraktor a detektor. Horní část zařízení slouží ke kalibraci přístroje a k měření torze. Převzato z [54].

| <b>R</b> [ $\mu\text{m}$ ] | <b>Způsob měření</b> | <b>Rok</b> |
|----------------------------|----------------------|------------|
| 44                         | Torze vlákna         | 2007 [54]  |
| 47                         | Torze vlákna         | 2007 [55]  |

Tabulka 3.8: Limit na vzdálenost  $R$ , při níž nebyly zaznamenány odchylky od Newtonova gravitačního zákona.



Obrázek 3.8: Experimentálně určené hranice na parametry  $\alpha$  a  $\lambda$  vystupující ve vztahu (3.3). Hodnoty nad grafem jsou již vyloučené. Převzato z [56].

### 3.2.2 Astronomická pozorování

Podmínky vytvářené na urychlovačích za účelem odkrytí skrytých zákonů, kterými se hmota ve vesmíru řídí, se ve vesmíru vyskytují poměrně hojně. Kupříkladu při výbuchu supernovy vytvoří hroustící se hvězda ve svém nitru podmínky, které se nám v blízké budoucnosti nepodaří uměle vytvořit. Neutronové hvězdy jsou proto vhodným kandidátem i pro ověřování teorií extra dimenzí.

Supernova SN 1987A je v době, kdy je tato práce psána, jedinou supernovou zaznamenanou našimi detektory. Signál neutrin uvolněných při jejím výbuchu byl použit pro určení hranice na poloměr extra dimenzí teorie LED. Počet emitovaných neutrin supernovou by měl být úměrný energii výbuchu předpovězenou stelárním modelem. Teorie LED předpovídá existenci KK gravitonů, na jejichž vytvoření je třeba energie. Pokud teorie LED platí, potom se část energie výbuchu supernovy spotřebuje na vytvoření KK gravitonů a počet emitovaných neutrin bude menší než stelární modely předpovídají. Tohoto faktu bylo využito pro předpovězení poloměru extra dimenzí teorie LED.

Po výbuchu supernovy zůstávají některé KK gravitony uvězněny uvnitř neutronové hvězdy, kde se postupně rozpadají. Jejich rozpad vede jednak k zahřívání neutronové hvězdy, jednak k možné emisi fotonu  $\gamma$ -záření. Analýza  $\gamma$ -záření neutronových hvězd poskytla další hranici na poloměr extra dimenzí.

Doposud nejlepší odhad na poloměr extra dimenzí představuje analýza signálu z neutronové hvězdy PSR J0953+0755. Na základě vyzařované energie a doby, kdy tato neutronová hvězda vznikla, je možno získat odhad na energii, kterou tato neutronová hvězda

získala rozpadem KK gravitonů a tím i na poloměr extra dimenzí. Výsledky z uvedených astronomických pozorování jsou pro teorie LED uvedeny v tabulce 3.9

| <b>d = 2</b>  |                            | <b>d ≥ 3</b>  |                            | <b>Způsob měření</b>                            | <b>Rok</b> |
|---------------|----------------------------|---------------|----------------------------|-------------------------------------------------|------------|
| <b>R [nm]</b> | <b>M<sub>*</sub> [TeV]</b> | <b>R [pm]</b> | <b>M<sub>*</sub> [TeV]</b> |                                                 |            |
| 0.155         | 1760                       | 2.58          | 78                         | Chladnutí neutronové hvězdy PSR J0953+0755      | 2004 [57]  |
| 0.38          | 1130                       | 4.2           | 57                         | Pozorování $\gamma$ záření z neutronových hvězd | 2004 [58]  |
| 660           | 27                         | 800           | 2.45                       | Analýza signálu neutrin ze supernovy SN 1987A   | 2001 [59]  |

Tabulka 3.9: Limit na poloměr extra dimenzí teorií LED určené na základě astronomický pozorování.

# Závěr

Teorie extra dimenzí představují řešení některých fenoménů, které Standardní model není schopen vysvětlit. Ačkoliv se představa extra dimenzí může zdát neskutečná, jsou teorie extra dimenzí budovány tak, aby jejich projevy mohly být pozorovány při současných experimentech, speciálně pak na urychlovačích částic. V době, kdy byla tato práce napsána, nebyl žádný z modelů extra dimenzí prokázán. Díky uskutečněným experimentům a podrobné analýze získaných dat jsme však získali první odhady na charakter těchto extra dimenzí.

Cílem této práce bylo shrnout různé teoretické modely extra dimenzí a současný status hledání extra dimenzí především ve srážkách vysokoenergetických částic. Na modelu extra dimenzí navrženém T. Kaluzou a O. Kleinen bylo ukázáno, jakými projevy by na sebe mohla kompaktní extra dimenze upozornit. Bylo zjištěno, že kompaktní extra dimenze vede k redukci Planckovy hmotnosti a že některé částice Standardního modelu díky ní získávají celé spektrum částic lišících se pouze hmotností. Dále byly představeny konkrétní modely extra dimenzí - teorie Large Extra Dimensions a její zástupce ADD model, teorie se zakřivenými dimenzemi se zaměřením na RS model a teorie Universal Extra Dimensions. Každá z představených teorií vede ke specifickým projevům extra dimenzí při srážkách vysokoenergetických částic.

Limity pro parametry jednotlivých modelů extra dimenzí, které byly získány na základě současných experimentů, byly představeny ve třetí kapitole. Vedle experimentálních dat z urychlovačů, kde nejlepší výsledky byly získány analýzou dat z detektorů ATLAS a CMS na urychlovači LHC, byla pro hledání extra dimenzí použita astronomická pozorování. Limity na extra dimenze poskytují i experimenty proměřující Newtonův gravitační zákon na malých vzdálenostech.

Z urychlovačů částic byl získán limit na poloměr extra dimenzí teorie Large Extra Dimensions  $R < 28 \mu\text{m}$  v případě modelu se dvěma extra dimenzemi a  $R < 0.48 \text{ nm}$  pro model s více jak dvěma extra dimenzemi. Astronomická pozorování neutronových hvězd stanovují limit na  $R < 0.155 \text{ nm}$  (dvě extra dimenze) a  $R < 2.58 \text{ pm}$  (více extra dimenzí).

V případě modelu se zakřivenými dimenzemi se analýza dat soustředí na RS model a jako výsledek se uvádí hmotnost prvního excitovaného stavu gravitonu. Pro RS model s kalibrační konstantou  $k/\bar{M}_P = 0.01$  byl pro hmotnost prvního excitovaného stavu gravitonu získán limit  $m_G > 1950 \text{ GeV}$ , pro model s  $k/\bar{M}_P = 0.1$  potom  $m_G > 800 \text{ GeV}$ .

Experimenty ověřující teorii Universal Extra Dimensions předpokládají model se šesti

extra dimenzemi a Planckovou hmotností redukovanou na škálu 5 TeV. Pro poloměr extra dimenzí byl získán limit  $R < 0.155 \text{ nm}$ .

Experimenty proměřující chování gravitace na malých měřítkách nezaznamenaly odchylky od Newtonova gravitačního zákona na vzdálenostech  $R > 44 \mu\text{m}$ . Rovněž jsme získali limit na hmotnost mikroskopické černé díry  $M_{BH} > 4 \text{ TeV}$ .

Plánované navýšení energie srážky na LHC poskytne nová experimentální data, která povedou ke zpřesnění těchto odhadů a nebo dokáží, že některý z modelů extra dimenzí je správný. Pokud se tak stane, bude to znamenat milník v našem chápání vesmíru.

# Literatura

- [1] P. Halpern, *The Great Beyond: Higher Dimensions, Parallel Universes and the Extraordinary Search for a Theory of Everything*, Wiley, 2005, 320 s., ISBN-13: 9780471736103.
- [2] *FERMILAB homepage*, <http://www.fnal.gov/>, [14.4.2013].
- [3] *ATLAS homepage*, <http://atlas.ch/>, [14.4.2013].
- [4] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], *Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC*, Phys. Lett. B **716** (2012) 1 [arXiv:1207.7214 [hep-ex]]; [CMS Collaboration], *Observation of a new boson with a mass near 125 GeV*, CMS-PAS-HIG-12-020.
- [5] C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes and R. P. Hudson, *Experimental Test Of Parity Conservation In Beta Decay*, Phys. Rev. **105** (1957) 1413.
- [6] S. F. Novaes, *Standard model: An Introduction*, In \*Sao Paulo 1999, Particles and fields\* 5-102 [hep-ph/0001283].
- [7] G. Drexlin, V. Hannen, S. Mertens and C. Weinheimer, *Current direct neutrino mass experiments*, Adv. High Energy Phys. **2013** (2013) 293986.
- [8] M. Schott, *Standard Model at the LHC*, <http://www.iop.vast.ac.vn/theor/conferences/vsop/18/files/Schott-4.pdf>, [14.4.2013].
- [9] *Rozhovor s Lisa Randallovou*, <http://www.esi-topics.com/brane/interviews/DrLisaRandall.html>, [12.2.2013].
- [10] A. Zee, *Fearful Symmetry: The Search for Beauty in Modern Physics (Princeton Science Library)*, Princeton University Press, 2007, 376 s., ISBN-13: 9780691134826.
- [11] P. Ehrenfest, [1917], *In what way does it become manifest in the fundamental laws of physics that space has three dimensions?*, Proceedings of the Royal Academy, Amsterdam, 20, pp. 200-209.

- [12] *Backreaction: Extra Dimensions*, <http://backreaction.blogspot.cz/2006/07/extra-dimensions.html>, [31.3.2013].
- [13] T. Kaluza, [1921], *Zum Unitätsproblem in der Physik*.
- [14] *William O. Straub: Kaluza-Klein Theory*, <http://www.weylmann.com/kaluza.pdf>, [31.3.2013].
- [15] O. Klein, [1926], *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie*.
- [16] N. Straumann, *On Pauli's invention of nonAbelian Kaluza-Klein theory in 1953*, gr-qc/0012054.
- [17] A. Perez-Lorenzana, *An Introduction to extra dimensions*, J. Phys. Conf. Ser. **18** (2005) 224 [hep-ph/0503177].
- [18] M. Quiros, *New ideas in symmetry breaking*, hep-ph/0302189.
- [19] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, *The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter*, Phys. Lett. B **429** (1998) 263 [hep-ph/9803315].
- [20] C. Rovelli, *Notes for a brief history of quantum gravity*, gr-qc/0006061.
- [21] H. C. Cheng, *2009 TASI Lecture – Introduction to Extra Dimensions*, arXiv:1003.1162 [hep-ph].
- [22] L. Randall, R. Sundrum and , *A Large mass hierarchy from a small extra dimension*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3370 [hep-ph/9905221].
- [23] M. Gabella, *The Randall-Sundrum Model*, <http://www-thphys.physics.ox.ac.uk/people/MaximeGabella/rs.pdf>, [2.4.2013].
- [24] G. Burdman, *Constraints on the bulk standard model in the Randall-Sundrum scenario*, Phys. Rev. D **66** (2002) 076003 [hep-ph/0205329].
- [25] *Randall-Sundrum-Modelle*, [http://www.wissenschaft-online.de/astrowissen/lexdt\\_r.html#rs](http://www.wissenschaft-online.de/astrowissen/lexdt_r.html#rs), [2.4.2013].
- [26] L. Randall, R. Sundrum and , *An Alternative to compactification*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4690 [hep-th/9906064].
- [27] T. Appelquist, H. -C. Cheng, B. A. Dobrescu and , *Bounds on universal extra dimensions*, Phys. Rev. D **64** (2001) 035002 [hep-ph/0012100].
- [28] D. Hooper, S. Profumo and , *Dark matter and collider phenomenology of universal extra dimensions*, Phys. Rept. **453** (2007) 29 [hep-ph/0701197].
- [29] G. F. Giudice, R. Rattazzi and J. D. Wells, *Quantum gravity and extra dimensions at high-energy colliders*, Nucl. Phys. B **544** (1999) 3 [hep-ph/9811291].

- [30] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], *Search for dark matter candidates and large extra dimensions in events with a jet and missing transverse momentum with the ATLAS detector*, JHEP **1304** (2013) 075 [JHEP **1304** (2013) 075] [arXiv:1210.4491 [hep-ex]].
- [31] S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], *Search for New Physics with a Mono-Jet and Missing Transverse Energy in  $pp$  Collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV*, Phys. Rev. Lett. **107** (2011) 201804 [arXiv:1106.4775 [hep-ex]].
- [32] T. Aaltonen *et al.* [CDF Collaboration], *Search for large extra dimensions in final states containing one photon or jet and large missing transverse energy produced in  $p\bar{p}$  collisions at  $\sqrt{s} = 1.96$  TeV*, Phys. Rev. Lett. **101** (2008) 181602 [arXiv:0807.3132 [hep-ex]].
- [33] V. M. Abazov *et al.* [D0 Collaboration], *Search for large extra dimensions via single photon plus missing energy final states at  $\sqrt{s} = 1.96$  TeV*, Phys. Rev. Lett. **101** (2008) 011601 [arXiv:0803.2137 [hep-ex]].
- [34] A. Abulencia *et al.* [CDF Collaboration], *Search for Large Extra Dimensions in the Production of Jets and Missing Transverse Energy in  $p\bar{p}$  Collisions at  $\sqrt{s} = 1.96$  TeV*, Phys. Rev. Lett. **97** (2006) 171802 [hep-ex/0605101].
- [35] P. Achard *et al.* [L3 Collaboration], *Single photon and multiphoton events with missing energy in  $e^+e^-$  collisions at LEP*, Phys. Lett. B **587** (2004) 16 [hep-ex/0402002].
- [36] N. Zhou, *Search for Randall-Sundrum Gravitons*, <http://www-ppd.fnal.gov/epoffice/RATalks/Zhou.pdf>, [2.4.2013].
- [37] N. Zhou, *Search for Randall-Sundrum Gravitons in Dielectron and Diphoton Final States with  $5.4\text{ fb}^{-1}$  of DO Data*, [http://www-d0.fnal.gov/results/publications\\_talks/thesis/zhou\\_z/thesis.pdf](http://www-d0.fnal.gov/results/publications_talks/thesis/zhou_z/thesis.pdf), [23.4.2013].
- [38] T. Gherghetta and A. Pomarol, *Bulk fields and supersymmetry in a slice of AdS*, Nucl. Phys. B **586** (2000) 141 [hep-ph/0003129].
- [39] M. Arai, N. Okada, K. Smolek and V. Simak, *Top quark spin correlations in the Randall-Sundrum model at the CERN Large Hadron Collider*, Phys. Rev. D **75** (2007) 095008 [hep-ph/0701155].
- [40] [ATLAS Collaboration], *A Search for  $t\bar{t}$  Resonances in the Lepton Plus Jets Channel in  $200\text{ pb}^{-1}$  of  $pp$  Collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV*, ATLAS-CONF-2011-087.
- [41] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], *Search for Extra Dimensions using diphoton events in 7 TeV  $pp$  collisions with the ATLAS detector*, Phys. Lett. B **710** (2012) 538 [arXiv:1112.2194 [hep-ex]].

- [42] S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], *Search for Resonances in the Dilepton Mass Distribution in  $pp$  Collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV*, JHEP **1105** (2011) 093 [arXiv:1103.0981 [hep-ex]].
- [43] T. Aaltonen *et al.* [CDF Collaboration], *Search for New Dielectron Resonances and Randall-Sundrum Gravitons at the Collider Detector at Fermilab*, Phys. Rev. Lett. **107** (2011) 051801 [arXiv:1103.4650 [hep-ex]].
- [44] V. M. Abazov *et al.* [D0 Collaboration], *Search for resonant  $WW$  and  $WZ$  production in  $p\bar{p}$  collisions at  $\sqrt{s} = 1.96$  TeV*, Phys. Rev. Lett. **107** (2011) 011801 [arXiv:1011.6278 [hep-ex]].
- [45] C. Macesanu, C. D. McMullen and S. Nandi, *New signal for universal extra dimensions*, Phys. Lett. B **546** (2002) 253 [hep-ph/0207269].
- [46] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], *Search for Diphoton Events with Large Missing Transverse Energy with  $36\text{ pb}^{-1}$  of 7 TeV  $pp$  Collision Data with the ATLAS Detector*, Eur. Phys. J. C **71** (2011) 1744 [arXiv:1107.0561 [hep-ex]].
- [47] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], *Search for Diphoton Events with Large Missing Transverse Energy in 7 TeV  $pp$  Collisions with the ATLAS Detector*, Phys. Rev. Lett. **106** (2011) 121803 [arXiv:1012.4272 [hep-ex]].
- [48] V. M. Abazov *et al.* [D0 Collaboration], *Search for diphoton events with large missing transverse energy in  $6.3\text{ fb}^{-1}$  of  $p\bar{p}$  collisions at  $\sqrt{s} = 1.96$  TeV*, Phys. Rev. Lett. **105** (2010) 221802 [arXiv:1008.2133 [hep-ex]].
- [49] S. B. Giddings and S. D. Thomas, *High-energy colliders as black hole factories: The End of short distance physics*, Phys. Rev. D **65** (2002) 056010 [hep-ph/0106219].
- [50] J. P. Ottersbach, *Micro Black Holes at the LHC*, [http://www.atlas.uni-wuppertal.de/diplom/WUD07-10\\_john\\_p\\_ottersbach.pdf](http://www.atlas.uni-wuppertal.de/diplom/WUD07-10_john_p_ottersbach.pdf) [4.5.2013]
- [51] [CMS Collaboration], *Search for Black Holes in  $pp$  Collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV*, CMS-PAS-EXO-11-071.
- [52] [ATLAS Collaboration], *Searches for TeV-gravity signatures in final states with leptons and jets with the ATLAS detector at  $\sqrt{s} = 7$  TeV*, ATLAS-CONF-2011-147.
- [53] [ATLAS Collaboration], *Search for Microscopic Black Holes in Multi-Jet Final States with the ATLAS Detector at  $\sqrt{s} = 7$  TeV*, ATLAS-CONF-2011-068.
- [54] D. J. Kapner, T. S. Cook, E. G. Adelberger, J. H. Gundlach, B. R. Heckel, C. D. Hoyle and H. E. Swanson, *Tests of the gravitational inverse-square law below the dark-energy length scale*, Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 021101 [hep-ph/0611184].

- [55] L. -C. Tu, S. -G. Guan, J. Luo, C. -G. Shao and L. -X. Liu, *Null Test of Newtonian Inverse-Square Law at Submillimeter Range with a Dual-Modulation Torsion Pendulum*, Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 201101.
- [56] *Particle Data Group*, <http://pdg.lbl.gov/>, [1.5.2013].
- [57] S. Hannestad and G. G. Raffelt, *Supernova and neutron star limits on large extra dimensions reexamined*, Phys. Rev. D **67** (2003) 125008 [Erratum-ibid. D **69** (2004) 029901] [hep-ph/0304029].
- [58] M. Casse, J. Paul, G. Bertone and G. Sigl, *Gamma-rays from the galactic bulge and large extra dimensions*, Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 111102 [hep-ph/0309173].
- [59] C. Hanhart, J. A. Pons, D. R. Phillips and S. Reddy, *The Likelihood of GODs' existence: Improving the SN1987a constraint on the size of large compact dimensions*, Phys. Lett. B **509** (2001) 1 [astro-ph/0102063].