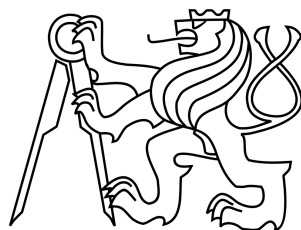


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA JADERNÁ A FYZIKÁLNĚ INŽENÝRSKÁ
KATEDRA FYZIKY



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Zdroje fotonů pro kvantové počítání
Photon Sources for Quantum Computation

Vypracoval: Pavel Baxant

Vedoucí práce: prof. Ing. Igor Jex, DrSc.

Praha, 2013

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu § 60 zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 29. července 2013

.....
Pavel Baxant

Poděkování

Chtěl bych tímto poděkovat vedoucímu práce prof. Ing. Igoru Jexovi, DrSc. za zajímavé téma a za ochotu a pomoc při vzniku práce.
Dále velice děkuji Mgr. Aurélu Gabrisovi, Ph.D. za poskytnutou možnost konzultací.

Pavel Baxant

Název práce:

Zdroje fotonů pro kvantové počítání

Autor: Pavel Baxant

Obor: Matematické inženýrství

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: prof. Ing. Igor Jex, DrSc.

Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

Konzultant: Mgr. Aurél Gabris, Ph.D.

Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

Abstrakt: Práce je zaměřena na problematiku sestupné parametrické frekvenční konverze v soustavě nelineárních vlnovodů. Tento proces se jeví jako perspektivní možnost získávání kvantově provázaných fotonů a může tak posloužit při konstrukci kvantového počítače. Nejprve uvedeme základní postuláty a formalismus kvantové teorie i se stručnou zmínkou o kvantovém počítání. V dalším textu definujeme některé pojmy potřebné v kvantové optice, abychom následně mohli uvést matematický popis a základní vlastnosti sestupné parametrické frekvenční konverze. Dále se zmíníme o šíření elektromagnetického pole v soustavě vlnovodů a v závěru se již zaměříme na samotný proces parametrické frekvenční konverze v soustavě nelineárních vlnovodů.

Klíčová slova: kvantové provázání, sestupná parametrická frekvenční konverze, soustava nelineárních vlnovodů

Title:

Photon Sources for Quantum Computation

Author: Pavel Baxant

Abstract: This work is focused on spontaneous parametric down-conversion in array of nonlinear waveguides. This process is an auspicious possibility to obtaining entangled photon pairs, so it can be employed during building of quantum computer. First we present basic principles of quantum theory and its formalism together with short note about quantum computation. Next we define some terms needed in quantum optics. Consequently, we are able to present mathematical description and basic properties of spontaneous parametric down-conversion. Next we mention the propagation of the electromagnetic field in waveguide array and in the last chapter we discuss the process of spontaneous parametric down-conversion in array of nonlinear waveguides.

Key words: entanglement, spontaneous parametric down-conversion, waveguide array

Obsah

Úvod	7
1 Základy kvantové teorie	8
1.1 Postuláty kvantové mechaniky	8
1.2 Pozorovatelné veličiny, kvantová měření	10
1.3 Čisté a smíšené stavy	12
1.4 Kvantové provázání, redukováná matice hustoty	14
1.5 Kvantové počítání	15
2 Koherentní stavy v kvantové optice	19
2.1 Interakční obrazy kvantové mechaniky	19
2.2 Systémy nerozlišitelných částic	20
2.3 Obsazovací čísla, Fockův prostor	21
2.4 Koherentní stavy	22
2.5 Kvantování elektromagnetického pole	24
3 Sestupná parametrická frekvenční konverze	26
3.1 Princip sestupné parametrické frekvenční konverze	26
3.2 Dvoumódový popis interakce	27
3.3 Vícemódové řešení	31
3.4 Kvantové provázání signálních a jalových fotonů	32
4 Šíření EM pole v soustavě vlnovodů	34
4.1 Soustava lineárních vlnovodů	34
4.2 Soustava nelineárních vlnovodů	37
5 SPDC v soustavě nelineárních vlnovodů	39
5.1 Hamiltonián interakce a výstupní stav	39
5.2 Spektrálně-prostorové korelace	41
5.3 Kontrola výstupního stavu změnou parametrů čerpacího pole	43
5.4 Experimentální ověření	43
Závěr	47
Literatura	48

Úvod

Tato práce se zabývá perspektivní možností získávání kvantově provázaných fotonů prostřednictvím sestupné parametrické frekvenční konverze v soustavě nelineárních vlnovodů. Úspěšná realizace takového procesu (tedy získávání kvantově provázaných fotonů) je nutným předpokladem ke konstrukci kvantového počítače založeného na reprezentaci kvantového bitu fotonem.

Samotný text je rozdělen do pěti kapitol. Nejprve jsou uvedeny základní poznatky kvantové teorie a zavedeno dále použité značení. Stručně je nastíněna též problematika kvantové informace. Ve druhé kapitole se pak detailněji věnujeme vybraným oblastem kvantové teorie (interakční obrazy, systémy nerozlišitelných částic a Fockův prostor), abychom mohli definovat koherentní stavy a zároveň provést kvantování elektromagnetického pole. Třetí kapitola obsahuje základní informace o sestupné parametrické frekvenční konverzi a věnuje se hlavně jejímu kvantovému popisu. V následující kapitole je popsáno šíření elektromagnetického pole v soustavě vlnovodů (jak lineárních, tak nelineárních). Konečně poslední kapitola je věnována samotnému procesu parametrické frekvenční konverze v soustavě nelineárních vlnovodů (je uveden matematický model, ale i jeho experimentální ověření).

Kapitola 1

Základy kvantové teorie

1.1 Postuláty kvantové mechaniky

Nejprve uvedeme tři základní postuláty kvantové mechaniky (volně převzaté z [1]). V klasické mechanice užíváme k popisu systému konfiguračního či fázového prostoru. Znalost těchto prostorů je pro nás vždy zásadní, neboť všechny pozorovatelné veličiny daného systému definujeme jako funkce na těchto prostorech. Jako první tedy uvedeme postulát určující prostor užívaný k popisu stavu kvantového systému:

Každému izolovanému fyzikálnímu systému je přiřazen komplexní vektorový prostor se skalárním součinem, který je v metrice indukované tímto skalárním součinem úplný, tj. je to Hilbertův prostor. Takový prostor nazýváme stavovým prostorem systému a značíme jej $\mathcal{H}$. Systém je pak úplně popsán svým stavovým vektorem, který je představován jednotkovým vektorem ve stavovém prostoru.

Při značení vektorů se přidržíme Diracovy braketové notace. Prvky stavového prostoru (ket-vektory) tedy značíme $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, prvky duálního prostoru, tj. omezené lineární funkcionály (bra-vektory, ale budeme užívat též označení kovektory) definované na $\mathcal{H}$, značíme $\langle\psi| \in \mathcal{H}^*$. Rieszovo lemma (viz např. [2]) nám pak umožňuje jednoznačně ztotožnit funkcionály s vektory. Ke každému funkcionálu $\langle\psi| \in \mathcal{H}^*$ totiž existuje vektor $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ takový, že pro libovolný vektor $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ platí $\langle\psi|(|\phi\rangle) = (|\psi\rangle, |\phi\rangle)$, kde $(., .)$ značí skalární součin. Naopak také každému vektoru $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ můžeme přiřadit kovektor $\langle\psi| \in \mathcal{H}^*$ takový, že platí $(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = \langle\psi|(|\phi\rangle)$ pro libovolný vektor $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$. To nám umožňuje zapsat skalární součin vektorů $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}$ v jednoduchém tvaru $(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = \langle\psi| \phi\rangle$. Působení lineárního operátoru $\hat{A}$ na vektor $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ značíme $\hat{A}(|\psi\rangle) = \hat{A}|\psi\rangle$, operátor sdružený k $\hat{A}$ pak značíme $\hat{A}^\dagger$.¹ Pro zjednodušení zápisu pak klademe $(|\psi\rangle, \hat{A}|\phi\rangle) = (\hat{A}^\dagger|\psi\rangle, |\phi\rangle) = \langle\psi| \hat{A}|\phi\rangle$.

Stavový vektor není danému stavu přiřazen jednoznačně. Stav $|\psi\rangle$ a jeho nenulový násobek $C|\psi\rangle$, $C \in \mathbb{C}$ odpovídají témuž stavu. Konvence o užívání jednotkových vektorů sice zužuje třídu těch vektorů, které můžeme k popisu systému použít, ale stále jednomu stavu systému můžeme přiřadit nekonečně mnoho stavových vektorů lišících se nyní pouze svou globální fází (tj. stavy $|\psi\rangle$ a $e^{i\varphi}|\psi\rangle$, kde $\varphi \in \mathbb{R}$, jsou ekvivalentní). Nicméně toto není ani smyslem konvence – užívání jednotkových vektorů však podstatně zjednodušuje některé vztahy a též usnadňuje jejich fyzikální interpretaci.

¹Tj. $\hat{A}$, $\hat{A}^\dagger$ splňují pro všechny vektory $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}$ rovnost $(|\psi\rangle, \hat{A}|\phi\rangle) = (\hat{A}^\dagger|\psi\rangle, |\phi\rangle)$.

Jako další uvedeme postulát určující časový vývoj systému:

Časový vývoj uzavřeného kvantového systému je popsán unitární transformací. Pro libovolné dva vektory $|\psi(t_1)\rangle$, $|\psi(t_2)\rangle$ popisující stav systému v čase t_1 , resp. t_2 tedy existuje unitární operátor $\hat{U}$ závisející pouze na časech t_1 a t_2 takový, že

$$|\psi(t_2)\rangle = \hat{U} |\psi(t_1)\rangle. \quad (1.1)$$

Tento postulát obsahuje požadavek uzavřenosti systému. Reálné fyzikální systémy ale vždy nějakým způsobem interagují se svým okolím. Existují však systémy, které mohou být v dostatečné míře považovány za uzavřené a pro něž unitární vývoj představuje uspokojivé přiblížení vývoje skutečného. Navíc lze (přinejmenším principiálně) popsat každý otevřený systém jako část většího uzavřeného systému (v krajním případě Vesmíru jako celku), který se již unitární evolucí skutečně vyvíjí.

Uvedený postulát nám nic neříká o tom, jak tento unitární operátor získáme (stejně tak jako nám první postulát neříká, který stavový vektor máme systému přiřadit). Postulát lze však ekvivalentně přeformulovat následovně:

Časový vývoj stavu uzavřeného kvantového systému je popsán Schrödingerovou rovnicí

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (1.2)$$

kde $\hbar$ je redukovaná Planckova konstanta a $\hat{H}$ je hermitovský operátor nazývaný hamiltonián uzavřeného systému.

Operátor $\hat{H}$ má již na rozdíl od operátoru $\hat{U}$ fyzikální význam a odpovídá operátoru energie. Z tohoto důvodu je v této rovnici uvedena i konstanta $\hbar$, neboť z matematického hlediska by bylo výhodnější ji zahrnout do definice Hamiltonova operátoru $\hat{H}$.

Vztah mezi unitárním operátorem $\hat{U}$ a hamiltoniánem $\hat{H}$ pak již nalezneme snadno. Ze Schrödingerovy rovnice (a požadavku na zachování jednotkové normy operátoru) určíme stav systému v čase t_2 jako

$$|\psi(t_2)\rangle = \exp \left[\frac{1}{i\hbar} \hat{H}(t_2 - t_1) \right] |\psi(t_1)\rangle = \hat{U}(t_1, t_2) |\psi(t_1)\rangle, \quad (1.3)$$

kde $\exp [\hat{A}]$ je exponenciální funkce² operátoru $\hat{A}$, a definujeme tedy

$$\hat{U}(t_1, t_2) = \exp \left[\frac{1}{i\hbar} \hat{H}(t_2 - t_1) \right]. \quad (1.4)$$

Unitarita takto definovaného operátoru se pak ověří ze vztahu $\exp [\hat{A}] \exp [\hat{B}] = \exp [\hat{A} + \hat{B}]$ pro komutující hermitovské operátory $\hat{A}$ a $\hat{B}$

$$\hat{U}(t_1, t_2) \hat{U}^\dagger(t_1, t_2) = \exp \left[\frac{1}{i\hbar} \hat{H}(t_2 - t_1) \right] \exp \left[\frac{1}{i\hbar} \hat{H}^\dagger(t_2 - t_1) \right] = \exp [0] = \hat{I}, \quad (1.5)$$

kde jsme využili toho, že $\hat{H}$ je hermitovský operátor a argumenty exponenciálních funkcí tak zřejmě komutují.

Nakonec uvedeme postulát, který využijeme při studiu složených systémů:

²Exponenciální funkci omezeného lineárního operátoru $\hat{A}$ definujeme ve formě mocninné řady $\exp [\hat{A}] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \hat{A}^k$ a klademe $\hat{A}^0 = \hat{I}$, kde $\hat{I}$ značí identický operátor.

Stavový prostor $\mathcal{H}$ fyzikálního systému složeného z n podsystémů s příslušnými stavovými prostory $\mathcal{H}_i$ je tenzorovým součinem těchto stavových prostorů, tj. $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$. Je-li i -tý podsystém popsán stavovým vektorem $|\psi_i\rangle$, potom lze celému systému přiřadit stavový vektor $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle$.

Dále budeme při značení stavových vektorů pro jednoduchost vynechávat znak tenzorového součinu, tj. klademe $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle = |\psi_1\rangle |\psi_2\rangle \dots |\psi_n\rangle$. Na prostoru $\mathcal{H}$ definujeme lineární operátory jako tenzorový součin lineárních operátorů definovaných na jednotlivých podprostorech. Působí-li tedy operátor $\hat{A}_i$ v některém z podprostorů $\mathcal{H}_i$, lze na prostoru $\mathcal{H}$ definovat například operátor $\hat{A} = \hat{I} \otimes \dots \otimes \hat{I} \otimes \hat{A}_i \otimes \hat{I} \otimes \dots \otimes \hat{I}$, který působí netriviálně pouze v tomto podprostoru, tj.

$$\hat{A} |\psi_1\rangle \dots |\psi_{i-1}\rangle |\psi_i\rangle |\psi_{i+1}\rangle \dots |\psi_n\rangle = |\psi_1\rangle \dots |\psi_{i-1}\rangle \hat{A}_i |\psi_i\rangle |\psi_{i+1}\rangle \dots |\psi_n\rangle. \quad (1.6)$$

1.2 Pozorovatelné veličiny, kvantová měření

V klasické mechanice odpovídá pozorovatelné veličině reálná funkce definovaná na příslušném konfiguračním či fázovém prostoru. V kvantové mechanice je pak každá pozorovatelná veličina matematicky vyjádřena lineárním operátorem na stavovém prostoru. Možné výsledky měření pak odpovídají číslům ze spektra příslušného operátoru (spektrum operátoru je popsáno v [3], detailněji pak v [2]). Je tedy rozumné omezit množinu těchto lineárních operátorů pouze na operátory hermitovské, neboť jejich spektrum je vždy podmnožinou reálných čísel.

Má-li operátor $\hat{A}$ čistě bodové spektrum a jsou-li a_i jeho vlastní hodnoty s příslušnými vlastními vektory $|a_{i_j}\rangle$ (index j značí případnou degeneraci vlastní hodnoty), tj. $\hat{A}|a_{i_j}\rangle = a_i|a_{i_j}\rangle$, lze takový operátor zapsat pomocí projektorů $|a_{i_j}\rangle\langle a_{i_j}|$ na příslušné vlastní podprostory ve formě tzv. spektrálního rozkladu

$$\hat{A} = \sum_{i,j} a_i |a_{i_j}\rangle \langle a_{i_j}|. \quad (1.7)$$

Vektory a_{i_j} pak navíc splňují relaci ortonormality

$$\langle a_{i_j} | a_{k_l} \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (1.8)$$

a relaci úplnosti

$$\sum_{i,j} |a_{i_j}\rangle \langle a_{i_j}| = \hat{I}, \quad (1.9)$$

tedy $\{|a_{i_j}\rangle\}$ je ortonormální bází stavového prostoru.

Předpokládejme tedy, že máme systém popsáný stavovým vektorem $|\psi\rangle$ a chceme vědět, jaké hodnoty pozorovatelné veličiny A naměříme. Kvantová teorie nám obecně neposkytuje deterministickou odpověď na tuto otázku (na rozdíl od klasické mechaniky), její předpovědi mají pouze pravděpodobnostní charakter. Můžeme určit například střední hodnotu veličiny A při stavu $|\psi\rangle$

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle. \quad (1.10)$$

Výrazy tvaru $\langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle$, kde $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$ jsou zcela libovolné stavové vektory a $\hat{A}$ je libovolný operátor působící na $\mathcal{H}$, pak nazveme maticovými elementy operátoru $\hat{A}$

(v případě konečně rozměrného stavového prostoru a za předpokladu, že $|\phi\rangle$, $|\psi\rangle$ jsou prvky libovolné báze $\mathcal{H}$, tyto elementy skutečně představují prvky matice operátoru $\hat{A}$ vyjádřené v příslušné bázi).

Podobně jako ve statistické fyzice určíme střední kvadratickou odchylku pozorovatelné veličiny A jako

$$\Delta_\psi(A) = \sqrt{\langle A^2 - \langle A \rangle_\psi^2 \rangle_\psi}. \quad (1.11)$$

Lze-li na operátor $\hat{A}$ použít spektrální rozklad (1.7), pak pravděpodobnost naměření hodnoty a_i při stavu $|\psi\rangle$ je dána vztahem

$$P_{A=a_i} = \sum_j |\langle a_{i_j} | \psi \rangle|^2, \quad (1.12)$$

v případě, že a_i je nede degenerovaná hodnota, se pak tento vztah zjednoduší na

$$P_{A=a_i} = |\langle a_i | \psi \rangle|^2. \quad (1.13)$$

Tato pravděpodobnost se nazývá pravděpodobností přechodu ze stavu $|\psi\rangle$ do stavu $|a_i\rangle$ a lze ji značit též $P_{\psi \rightarrow a_i}$. V případě degenerované vlastní hodnoty a_i pak pravděpodobnost $P_{A=a_i}$ chápeme jako součet jednotlivých pravděpodobností přechodu $P_{\psi \rightarrow a_{i_j}}$ ze stavu $|\psi\rangle$ do stavu $|a_{i_j}\rangle$. Čísla $\langle a_{i_j} | \psi \rangle$ nazýváme amplitudami pravděpodobnosti přechodu ze stavu $|\psi\rangle$ do stavu $|a_{i_j}\rangle$.

Kvantové měření má vůbec velice zvláštní postavení v rámci kvantové mechaniky. V klasické mechanice jsme (opět alespoň v principu) schopni plně určit stav systému souborem současných (nebo alespoň v krátkém časovém intervalu uskutečněných) měření. V kvantové mechanice však měření provedená na zkoumaném systému mohou stav systému změnit. Můžeme tak narazit na situaci, kdy výsledky měření jednotlivých pozorovatelných veličin budou ovlivněny pořadím, v němž jsme jednotlivá měření prováděli.

Tato skutečnost je způsobena tzv. kolapsem vlnové funkce (též redukce stavu). Předpokládejme, že máme systém popsáný stavovým vektorem $|\psi\rangle$ a chceme na něm provést měření veličiny A , pro jejíž operátor $\hat{A}$ existuje spektrální rozklad (1.7). Obdržíme-li při měření hodnotu a_i , potom stav systému po měření je popsán vektorem

$$\hat{\mathcal{P}}_{a_i} |\psi\rangle = \left(\sum_j |a_{i_j}\rangle \langle a_{i_j}| \right) |\psi\rangle = \sum_j \langle a_{i_j} | \psi \rangle |a_{i_j}\rangle, \quad (1.14)$$

který samozřejmě ještě normujeme. Operátor

$$\hat{\mathcal{P}}_{a_i} = \sum_j |a_{i_j}\rangle \langle a_{i_j}| \quad (1.15)$$

pak odpovídá projekci do vlastního podprostoru příslušejícího vlastní hodnotě a_i . Užitím pravděpodobností přechodu zjistíme, že po takovém měření nám již každé následné měření téže veličiny neposkytne žádné nové informace o systému, neboť s jistotou (samozřejmě za předpokladu, že systém se nevyvíjí) již vždy naměříme hodnotu a_i .

Omezíme-li se nyní na operátory, které lze současně diagonalizovat ve stejné ortonormální bázi (tj. v této bázi lze operátory vyjádřit ve tvaru (1.7)), nebude již záležet

na pořadí ve kterém měření provádíme.³ Tato podmínka je splněna v případě, že tyto operátory komutují (viz tvrzení 2.2 v [1]). Zavedeme-li komutátor operátorů $\hat{A}$, $\hat{B}$ předpisem $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$, pak je tato podmínka ekvivalentní s

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0. \quad (1.16)$$

Pozorovatelné veličiny A , B pak nazýváme kompatibilními. Soubor vzájemně kompatibilních veličin $\{A_i\}$ nazveme úplnou množinou pozorovatelných, jestliže naměřením hodnot všech těchto veličin je úplně určen stav systému.

1.3 Čisté a smíšené stavy

Stavy, kterými jsme se dosud zabývali jsme mohli popsat vektorem Hilbertova prostoru. Takové stavy nazýváme čistými stavy. Představme si ovšem, že při přípravě stavu⁴ hraje roli nějaký náhodný proces a my nejsme schopni přesně určit v jakém stavu se systém právě nalézá. Předpokládejme, že známe pouze pravděpodobnosti, se kterými se systém v daných stavech nalézá. Nechť je tedy systém s pravděpodobnostmi p_i ve stavu $|\psi_i\rangle$ a nechť platí $\sum_i p_i = 1$. Hovoříme pak o smíšeném stavu (interpretujeme ho jako statistický soubor čistých stavů) a definujeme tzv. operátor (též matici) hustoty

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (1.17)$$

Smíšený stav tak již není popsán stavovým vektorem, ale právě operátorem hustoty. Tímto operátorem lze také popsat každý čistý stav.

Pro operátor hustoty nyní odvodíme některé důležité vztahy. Předně z podmínky $\sum_i p_i = 1$ plyne pro jeho stopu⁵

$$\begin{aligned} \text{Tr} \hat{\rho} &= \sum_j \langle \phi_j | \hat{\rho} | \phi_j \rangle = \sum_j \left\langle \phi_j \left| \left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right) \right| \phi_j \right\rangle \\ &= \sum_i p_i \sum_j |\langle \psi_i | \phi_j \rangle|^2 = \sum_i p_i = 1, \end{aligned} \quad (1.18)$$

³Předpokládejme, že $\hat{A}$ a $\hat{B}$ jsou operátory odpovídající veličinám A a B a že existuje ortonormální báze $\{|a_i, b_j\rangle\}$, v níž lze tyto operátory vyjádřit ve formě spektrálního rozkladu $\hat{A} = \sum_{i,j} a_i |a_i, b_j\rangle \langle a_i, b_j|$, $\hat{B} = \sum_{i,j} b_j |a_i, b_j\rangle \langle a_i, b_j|$. Provedeme-li pak měření pozorovatelné A na stavu $|\psi\rangle$ a obdržíme-li hodnotu a_i , je stav po měření popsán vektorem $\sum_j a_i |a_i, b_j\rangle \langle \psi | a_i, b_j\rangle$ (samozřejmě ještě normovaným k jedné). Po měření veličiny B s výsledkem b_j je potom systém popsán vektorem $|a_i, b_j\rangle$ a zřejmě tedy již každé měření A dá výsledek a_i . Provedeme-li navíc jako první měření pozorovatelné B a obdržíme-li stejné výsledky b_j , a_i jako při užití prvního postupu, je výsledný stav systému v obou případech stejný.

⁴Přípravou stavu rozumíme kompletně určenou experimentální proceduru, po jejíž realizaci obdržíme požadovaný stav (viz [5]). Jako příklad pak můžeme uvést použití tzv. filtru. Jedná se o zařízení, kterým necháme systém projít. Filtr provede na systému měření úplné množiny pozorovatelných a dle jeho výsledku buď systém filtrem projde, nebo je odcloněn. V případě, že filtr nechá projít pouze jediný možný výsledek těchto měření, nazveme jej filtrem s ideální rozlišovací schopností (podrobněji v [4]). Náhodnost přípravy pak můžeme reprezentovat filtrem s konečnou rozlišovací schopností (nechává projít více výsledků měření).

⁵Pojem stopa operátoru splývá na prostorech konečné dimenze s pojmem stopy příslušné matice tohoto operátoru, tj. součtem prvků této matice ležících na hlavní diagonále. Lze ukázat, že hodnota stopy je nezávislá na volbě báze, v níž je matice operátoru vyjádřena. Pro nekonečně dimenzionální prostory $\mathcal{H}$, které jsou nicméně separabilní, zobecňujeme pojem stopy operátoru $\hat{A}$ předpisem $\text{Tr} \hat{A} = \sum_i \langle \psi_i | \hat{A} | \psi_i \rangle$, kde $\{|\psi_i\rangle\}$ je ortonormální báze prostoru $\mathcal{H}$.

kde $\{|\phi_j\rangle\}$ je ortonormální báze $\mathcal{H}$ a $\sum_j |\langle\psi_i|\phi_j\rangle|^2$ je dle Parsevalovy rovnosti (viz [2]) čtverec normy vektoru $|\psi_i\rangle$, která je rovna jedné. Snadno se též ukáže, že matice hustoty je pozitivním operátorem.⁶ Naopak podmínka pozitivnosti a jednotkové stopy znamená (viz tvrzení 2.5 v [1]), že daný operátor je maticí hustoty (tj. existují čísla $p_i \in \mathbb{R}$ a vektory $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}$ takové, že operátor lze zapsat ve tvaru (1.17)).

Dále určíme pravděpodobnost realizace výsledku a_i při měření pozorovatelné A . Nechť tedy pro příslušný operátor $\hat{A}$ platí vztah (1.7) a stav systému nechť je popsán maticí hustoty $\hat{\rho} = \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle\psi_k|$. Potom je tato pravděpodobnost dána vztahem

$$P_{A=a_i} = \sum_k p_k \sum_j |\langle a_{i_j} | \psi_k \rangle|^2 = \sum_k p_k \sum_j \langle a_{i_j} | \psi_k \rangle \langle \psi_k | a_{i_j} \rangle. \quad (1.19)$$

Budeme-li nyní číslo $P_{A=a_i}$ pokládat za stopu čtvercové matice prvního řádu, obdržíme díky invarianci stopy vůči cyklické záměně argumentů vztah

$$P_{A=a_i} = \text{Tr} \left(\sum_k p_k \sum_j |\psi_k\rangle \langle\psi_k| |a_{i_j}\rangle \langle a_{i_j}| \right) = \text{Tr} (\hat{\rho} \hat{\mathcal{P}}_{a_i}) = \text{Tr} (\hat{\mathcal{P}}_{a_i} \hat{\rho}), \quad (1.20)$$

kde projektor $\hat{\mathcal{P}}_{a_i}$ je definován vztahem (1.15). Právě díky tomu, že $\hat{\mathcal{P}}_{a_i}$ je projektorem (tedy jedná se o hermitovský operátor, který navíc splňuje $\hat{\mathcal{P}}_{a_i}^2 = \hat{\mathcal{P}}_{a_i}$), lze tento vztah dále upravit následovně

$$P_{A=a_i} = \text{Tr} (\hat{\mathcal{P}}_{a_i}^2 \hat{\rho}) = \text{Tr} (\hat{\mathcal{P}}_{a_i} \hat{\rho} \hat{\mathcal{P}}_{a_i}) \quad (1.21)$$

Určíme ještě, jak se s časem matice hustoty vyvíjí. Vyjdeme-li z existence unitárního evolučního operátoru $\hat{U}$, potom

$$\hat{\rho}(t_2) = \sum_i p_i |\psi_i(t_2)\rangle \langle\psi_i(t_2)| = \sum_i p_i \hat{U} |\psi_i(t_1)\rangle \langle\psi_i(t_1)| \hat{U}^\dagger = \hat{U} \hat{\rho}(t_1) \hat{U}^\dagger. \quad (1.22)$$

Zderivujeme-li tento vztah, obdržíme pohybové rovnice pro matici hustoty (jedná se o kvantovou obdobu Liouvilleova teorému)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} &= \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} \hat{\rho}(t_1) \hat{U}^\dagger + \hat{U} \hat{\rho}(t_1) \frac{\partial \hat{U}^\dagger}{\partial t} \\ &= \frac{1}{i\hbar} \left(\hat{H} \hat{U} \hat{\rho}(t_1) \hat{U}^\dagger - \hat{U} \hat{\rho}(t_1) \hat{U}^\dagger \hat{H} \right) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}(t)], \end{aligned} \quad (1.23)$$

kde jsme navíc využili pohybovou rovnici evolučního operátoru získanou derivací rovnice (1.1) a jejím dosazením do (1.2)

$$\frac{\partial \hat{U}(t_1, t)}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} \hat{H} \hat{U}(t_1, t). \quad (1.24)$$

Jak jsme již podotkli, čistý stav lze považovat za speciální případ stavu smíšeného odpovídajícího maximální znalosti daného systému. Pro matici hustoty platí (viz [4]), že systém se nachází v čistém stavu právě tehdy, když

$$\text{Tr} \hat{\rho}^2 = 1, \quad (1.25)$$

⁶Řekneme, že hermitovský operátor $\hat{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ je pozitivní, pokud pro libovolný vektor $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ platí $\langle\phi|\hat{A}|\phi\rangle \geq 0$.

v obecném případě platí $\text{Tr}\hat{\rho}^2 \leq 1$. Získáváme tak jednoduché kritérium pro určení, zda matice hustoty popisuje stav čistý, nebo smíšený.

Ve shodě s právě zjištěnými vlastnostmi operátoru hustoty můžeme pro jeho použití přeformulovat postuláty uvedené v paragrafu 1.1:

Každému izolovanému fyzikálnímu systému je přiřazen komplexní vektorový prostor se skalárním součinem, který je v metrice indukované tímto skalárním součinem úplný, tj. je to Hilbertův prostor. Takový prostor nazýváme stavovým prostorem systému a značíme $\mathcal{H}$. Systém je pak úplně popsán operátorem hustoty $\hat{\rho}$ působícím na tomto prostoru. Operátor hustoty je pozitivním operátorem a má stopu rovnou jedné. Je-li systém ve stavu $\hat{\rho}_i$ s pravděpodobností p_i , potom má operátor hustoty systému tvar $\hat{\rho} = \sum_i p_i \hat{\rho}_i$.

Časový vývoj uzavřeného kvantového systému je popsán unitární transformací. Pro libovolné dva stavy $\hat{\rho}(t_1)$, $\hat{\rho}(t_2)$ popisující stav systému v čase t_1 , resp. t_2 tedy existuje unitární operátor $\hat{U}$ závisající pouze na časech t_1 a t_2 takový, že

$$\hat{\rho}(t_2) = \hat{U} \hat{\rho}(t_1) \hat{U}^\dagger. \quad (1.26)$$

Stavový prostor $\mathcal{H}$ fyzikálního systému složeného z n podsystémů s příslušnými stavovými prostory $\mathcal{H}_i$ je tenzorovým součinem těchto stavových prostorů, tj. $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$. Je-li i -tý podsystém popsán operátorem hustoty $\hat{\rho}_i$, lze celému systému přiřadit operátor hustoty $\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2 \otimes \dots \otimes \hat{\rho}_n$.

V souvislosti s posledním postulátem ještě uvedeme, že operátor $\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2 \otimes \dots \otimes \hat{\rho}_n$ má skutečně vlastnosti operátoru hustoty, tj. je pozitivní a má stopu rovnou jedné.

1.4 Kvantové provázání, redukovaná matice hustoty

Zajímavým důsledkem postulátu určujícího stavový prostor složeného systému jako tenzorový součin stavových prostorů a důsledkem linearitu tohoto prostoru je jev zvaný kvantové provázání (též *entanglement*). Některé stavy nelze zapsat jako tenzorový součin stavů jednotlivých podsystémů. Nejlépe tento problém ilustrujeme v případě dvousložkového systému, kde každému z podsystémů přísluší dvourozměrný stavový prostor. Buď $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$ ortonormální bázi stavového prostoru $\mathcal{H}_1$ prvního podsystému a podobně $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$ ortonormální bázi stavového prostoru $\mathcal{H}_2$ druhého podsystému. Potom soubor $\{|\psi_1\rangle|\phi_1\rangle, |\psi_1\rangle|\phi_2\rangle, |\psi_2\rangle|\phi_1\rangle, |\psi_2\rangle|\phi_2\rangle\}$ je ortonormální bázi stavového prostoru celého systému $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Uvažujme nyní tento systém v čistém stavu

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle|\phi_1\rangle + |\psi_2\rangle|\phi_2\rangle). \quad (1.27)$$

Lze snadno ukázat, že neexistuje zápis tohoto stavu ve formě tenzorového součinu čistých stavů prvního a druhého podsystému. Zapišeme-li stavové vektory $|\psi\rangle = \alpha_1|\psi_1\rangle + \alpha_2|\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_1$ a $|\phi\rangle = \beta_1|\phi_1\rangle + \beta_2|\phi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$ ve zvolených bázích jako sloupcové vektory

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad |\phi\rangle = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

potom můžeme jejich tenzorový součin zapsat ve tvaru

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 \\ \alpha_1\beta_2 \\ \alpha_2\beta_1 \\ \alpha_2\beta_2 \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

K tomu, aby existoval rozklad zmiňovaného vektoru $|\Phi\rangle$ ve formě tenzorového součinu (1.29), by pak muselo platit

$$\alpha_1\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_1\beta_2 = 0, \quad \alpha_2\beta_1 = 0, \quad \alpha_2\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (1.30)$$

Tato soustava rovnic však zřejmě nemá řešení. Vidíme tedy, že stav $|\Phi\rangle$ skutečně nelze zapsat jako tenzorový součin dvou vektorů a jedná se tak o příklad kvantového provázání.

Jak jsme již podotkli, vektor $|\Phi\rangle$ popisuje čistý stav. Tato skutečnost nám však neříká nic o tom, v jakém stavu se nachází jednotlivé podsystémy (samozřejmě by bylo logické těmto podsystémům přiřadit stavy vyskytující se v tenzorovém rozkladu, pokud by ovšem existoval). Je tedy otázkou, jaký stav můžeme přiřadit těmto podsystémům. Za tímto účelem zavádíme tzv. redukovanou matici hustoty (viz např. [1, 5]). Nechť $|\Psi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ je vektor popisující čistý stav systému složeného ze dvou podsystémů. Potom stav i -tého podsystému popisujeme pomocí parciální stopy⁷ matice hustoty celého systému $\hat{\rho}$ přes zbytek systému.

Uvedený postup ilustrujeme na vektoru $|\Phi\rangle$ popisujícím čistý stav – zapíšeme tedy stav prvního podsystému ve formě redukované matice hustoty

$$\hat{\rho}_1 = \text{Tr}_2 |\Phi\rangle \langle \Phi| = \langle \phi_1 | \Phi \rangle \langle \Phi | \phi_1 \rangle + \langle \phi_2 | \Phi \rangle \langle \Phi | \phi_2 \rangle = \frac{1}{2} (|\psi_1\rangle \langle \psi_1| + |\psi_2\rangle \langle \psi_2|). \quad (1.31)$$

Vidíme, že prvnímu podsystému jsme přiřadili smíšený stav čistých stavů $|\psi_1\rangle$ a $|\psi_2\rangle$ se stejnou pravděpodobností výskytu.

Tímto uzavíráme úvodní část o formalismu kvantové teorie a v následujícím paragrafu se ve stručnosti pokusíme definované pojmy demonstrovat v oblasti kvantového počítání.

1.5 Kvantové počítání

V klasické teorii informace je nejmenší jednotkou informace bit, reprezentovaný stavem 0, nebo 1. V kvantové teorii je jeho obdobou qubit (z angl. *quantum bit*). Jedná se o superpozici ortonormálních vektorů $|0\rangle$ a $|1\rangle$

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (1.32)$$

⁷Nechť $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_1$ a $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$. Potom $|\psi_1\rangle \langle \psi_2| \otimes |\phi_1\rangle \langle \phi_2|$ je lineárním operátorem na $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Předpisem $\text{Tr}_2 (|\psi_1\rangle \langle \psi_2| \otimes |\phi_1\rangle \langle \phi_2|) = |\psi_1\rangle \langle \psi_2| \text{Tr}(|\phi_1\rangle \langle \phi_2|)$ definujeme parciální stopu operátoru $|\psi_1\rangle \langle \psi_2| \otimes |\phi_1\rangle \langle \phi_2|$ přes prostor $\mathcal{H}_2$. Operace stopy za rovnítkem již odpovídá klasické stopě. Výsledkem této operace je lineární operátor definovaný na prostoru $\mathcal{H}_1$. Podobně $\text{Tr}_1 (|\psi_1\rangle \langle \psi_2| \otimes |\phi_1\rangle \langle \phi_2|) = \text{Tr}(|\psi_1\rangle \langle \psi_2|) |\phi_1\rangle \langle \phi_2|$ odpovídá parciální stopě operátoru $|\psi_1\rangle \langle \psi_2| \otimes |\phi_1\rangle \langle \phi_2|$ přes prostor $\mathcal{H}_1$.

Definici rozšíříme na všechny lineární operátory definované na $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ (tj. i pro operátory, které nejsou tvaru $|\psi_1\rangle \langle \psi_2| \otimes |\phi_1\rangle \langle \phi_2|$) požadavkem linearity operátoru parciální stopy.

kde $a, b \in \mathbb{C}$. Tento stav je (v souladu s uvedenými postuláty) ještě navíc normován, tj. $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Při měření na takovém stavu pak můžeme obdržet stejně jako u klasického bitu buď hodnotu 0 (s příslušným vlastním vektorem $|0\rangle$), nebo hodnotu 1 (s vlastním vektorem $|1\rangle$). Čísla α, β pak odpovídají amplitudám pravděpodobnosti – při měření tedy obdržíme výsledek 0 s pravděpodobností $|\alpha|^2$ a podobně výsledek 1 s pravděpodobností $|\beta|^2$. Qubit budeme též zapisovat ve formě sloupcového vektoru – v uvedené bázi $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ odpovídá vektoru $|\psi\rangle$ zápis

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

Protože platí normovací podmínka $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, můžeme přepsat vektor $|\psi\rangle$ do tvaru

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left(\cos \frac{\vartheta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\vartheta}{2} |1\rangle \right), \quad (1.34)$$

kde $\gamma, \varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$. Jak jsme však již podotkli, vektory lišící se pouze svou globální fází popisují stejný stav. Proto můžeme psát

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\vartheta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\vartheta}{2} |1\rangle. \quad (1.35)$$

Každému stavu qubitu tak můžeme přiřadit bod na tzv. Blochově sféře (viz obrázek 1.1). Jedná se o jednotkovou trojrozměrnou sféru (ve smyslu jejího vnoření do $\mathbb{R}^3$), kde číslo ϑ odpovídá polárnímu úhlu a φ odpovídá úhlu azimutálnímu. Na severním pólu (tj. pro $\vartheta=0$) je znázorněn stav $|0\rangle$, na jižním pólu ($\vartheta=\pi$) pak stav $|1\rangle$. Zbylé body na sféře jednoznačně odpovídají všem ostatním realizovatelným lineárním kombinacím těchto stavů.

Stejně tak jako se jednotlivé klasické bity sdružují do bitových registrů, definujeme i pro qubity tzv. kvantový registr. Jedná se o již zmiňovaný tenzorový součin qubitů. Pro zjednodušení značení definujeme $|i\rangle|j\rangle = |ij\rangle$, tedy například $|0\rangle|1\rangle = |01\rangle$. Uvažujme pro ilustraci systém tvořený dvěma qubity. Stavový prostor takového systému je generován bází $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ a libovolný stav dvou qubitů lze vyjádřit ve tvaru

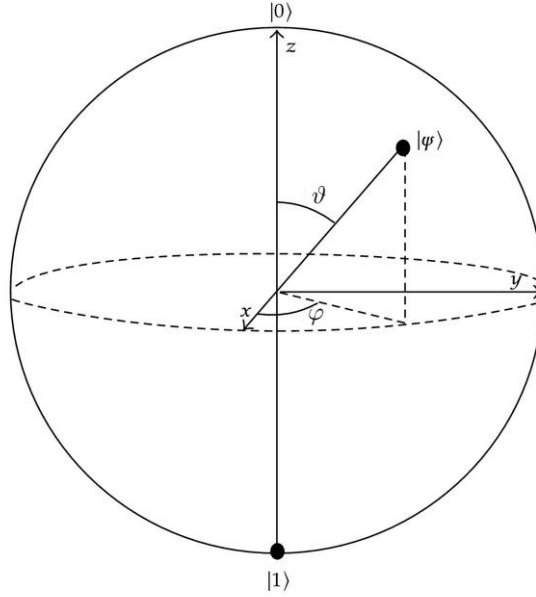
$$|\psi\rangle = \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle, \quad (1.36)$$

kde čísla $\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{10}, \alpha_{11} \in \mathbb{C}$ opět odpovídají amplitudám pravděpodobnosti. V takto zvolené bázi navíc můžeme tento stav jednoduše popsat jako sloupcový vektor

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_{00} \\ \alpha_{01} \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

K manipulaci s qubity pak využíváme tzv. kvantových hradel. Matematicky je definujeme jako unitární operátory na stavovém prostoru. V případě jediného klasického bitu je jediným netriviálním hradlem hradlo negace, značené *NOT* či *X*. Jeho akcí je změna stavu 0 na stav 1 a naopak. Kvantová obdoba tohoto hradla působí stejně na bazické vektory – stav $|0\rangle$ tedy zamění za $|1\rangle$ a naopak ze stavu $|1\rangle$ vytvoří stav $|0\rangle$. Maticově lze tento operátor zapsat jako

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$



Obrázek 1.1: Blochova sféra, převzato z [6]

Na rozdíl od klasického bitu existuje v případě jediného qubitu ještě celá řada netriviálních kvantových hradel – my uvedeme pouze dvě další. První z nich mění znaménko u druhého bazického vektoru a značí se Z . Jeho akce na qubit $|\psi\rangle$ vypadá následovně

$$Z|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

Druhé se nazývá Hadamardovo hradlo a značí se H . Působí tak, že bazické stavy superponuje, a to následovně

$$H|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - \beta \end{pmatrix}. \quad (1.40)$$

Navíc platí $H^2 = I$.

Analogicky jako v případě jediného qubitu bychom pak mohli definovat kvantová hradla i pro kvantový registr. Uvedeme zde pouze jediný příklad, a to tzv. *CNOT* hradlo (název je zkratkou angl. slov *controlled NOT*) působící na dva qubity. Jeho princip je takový, že první qubit slouží pouze jako řídicí a zůstává nezměněn. V závislosti na jeho hodnotě se pak na druhém qubitu provede, nebo neprovede záměna bazických vektorů. Jeho akce je určena předpisem

$$CNOT \begin{pmatrix} \alpha_{00} \\ \alpha_{01} \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{00} \\ \alpha_{01} \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{00} \\ \alpha_{01} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{10} \end{pmatrix}. \quad (1.41)$$

Příkladem použití *CNOT* hradla je příprava tzv. Bellových stavů. Vstupní stav systému odpovídá některému z bazických vektorů $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ či $|11\rangle$. Na první qubit zapůsobíme Hadamardovým hradlem a vzniklý stav pak necháme projít *CNOT*

Vstupní stav	Výstupní stav
$ 00\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(00\rangle + 11\rangle)$
$ 01\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(01\rangle + 10\rangle)$
$ 10\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(00\rangle - 11\rangle)$
$ 11\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(01\rangle - 10\rangle)$

Tabulka 1.1: Příprava Bellových stavů pomocí Hadamardova hradla a hradla *CNOT*.

hradlem. Výsledné stavy již odpovídají Bellovým stavům a jejich tvary jsou uvedeny v tabulce 1.1. Všimněme si, že tyto stavy jsou kvantově provázané. Využívají se v řadě zajímavých protokolů, které není možno realizovat klasicky. Mezi základní aplikace patří například kvantová teleportace, husté kódování (*dense coding*) či Eckertův protokol distribuce klíče. Provázání má zásadní význam pro kvantové algoritmy a sílu kvantového počítání.

Kapitola 2

Koherentní stavy v kvantové optice

V této kapitole nejprve ukážeme ekvivalentní možnost popisu časového vývoje systému v rámci Heisenbergova obrazu. Dále se zaměříme na systém několika identických částic a definujeme Fockův prostor. Nakonec zavedeme pojem koherentních stavů a naznačíme postup kvantování elektromagnetického pole.

2.1 Interakční obrazy kvantové mechaniky

V první kapitole jsme všechna odvození prováděli v takzvaném Schrödingerově obraze. Veškerý časový vývoj systému byl reprezentován časovou změnou stavového vektoru systému, případně příslušného operátoru hustoty. Jak jsme však již uvedli, mají předpovědi kvantové mechaniky pravděpodobnostní charakter. Je tedy otázkou nakolik stavový vektor a zejména jeho časový vývoj reflektují skutečný stav systému a zda bychom nemohli k popisu systému (přesněji řečeno k vyjádření jeho časového vývoje) využít jiného přístupu, který by nám poskytoval ekvivalentní předpovědi.

Jedním z takových přístupů je tzv. Heisenbergův obraz. V tomto případě je časový vývoj zcela přenesen na operátory působící na stavovém prostoru a naopak stavové vektory jsou ponechány beze změny. Zmíněný požadavek, aby oba interakční obrazy vedly ke stejným předpovědím, můžeme omezit na neměnnost maticových elementů, neboť právě ty reprezentují zmíněné pravděpodobnosti. Zkoumejme nyní tedy maticový element $\langle \phi_S(t) | \hat{A}_S | \psi_S(t) \rangle$, kde $|\phi_S(t)\rangle, |\psi_S(t)\rangle \in \mathcal{H}$ jsou zcela libovolné stavové vektory v čase t a $\hat{A}_S$ je libovolný operátor na $\mathcal{H}$ (pro jednoduchost budeme uvažovat operátor, který není ve Schrödingerově obraze parametricky závislý na čase – pro libovolný okamžik t tak můžeme položit $\hat{A}_S(t) = \hat{A}_S$). Dolní index S označuje skutečnost, že pracujeme ve Schrödingerově obraze. Dále označíme indexem H vektory a operátory v Heisenbergově obraze a za předpokladu, že v čase $t = 0$ oba obrazy splývají ($|\phi_S(0)\rangle = |\phi_H(0)\rangle = |\phi_H\rangle, |\psi_S(0)\rangle = |\psi_H(0)\rangle = |\psi_H\rangle, \hat{A}_S = \hat{A}_H(0)$) jednoduchými úpravami obdržíme

$$\begin{aligned} \langle \phi_S(t) | \hat{A}_S | \psi_S(t) \rangle &= \langle \phi_S(0) | \hat{U}^\dagger(0, t) \hat{A}_S \hat{U}(0, t) | \psi_S(0) \rangle \\ &= \langle \phi_H(0) | \hat{U}^\dagger(0, t) \hat{A}_S \hat{U}(0, t) | \psi_H(0) \rangle. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Abychom nyní mohli psát $\langle \phi_S(t) | \hat{A}_S | \psi_S(t) \rangle = \langle \phi_H(t) | \hat{A}_H(t) | \psi_H(t) \rangle$, stačí zřejmě identifikovat

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^\dagger(0, t) \hat{A}_S \hat{U}(0, t). \quad (2.2)$$

Pohybové rovnice pro operátory v Heisenbergově obraze pak obdržíme derivací právě získaného vztahu

$$\frac{d\hat{A}_H(t)}{dt} = \frac{\partial \hat{U}^\dagger(0, t)}{\partial t} \hat{A}_S \hat{U}(0, t) + \hat{U}^\dagger(0, t) \hat{A}_S \frac{\partial \hat{U}(0, t)}{\partial t}. \quad (2.3)$$

Rovnost (1.24) (a také její hermitovské sdružení) dosadíme do (2.3) a dále využijeme unitarity operátoru časové evoluce, abychom získali

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{A}_H(t)}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} \left(\hat{U}^\dagger(0, t) \hat{A}_S \hat{H}_S \hat{U}(0, t) - \hat{U}^\dagger(0, t) \hat{H}_S \hat{A}_S \hat{U}(0, t) \right) \\ &= \frac{1}{i\hbar} \left(\hat{A}_H(t) \hat{H}_H(t) - \hat{H}_H(t) \hat{A}_H(t) \right) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}_H(t), \hat{H}_H(t)]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Pro operátory, které jsou ve Schrödigerově obraze parametricky závislé na čase (tj. $\frac{d\hat{A}_S(t)}{dt} \neq 0$) přejde pohybová rovnice do tvaru

$$\frac{d\hat{A}_H(t)}{dt} = \frac{\partial \hat{A}_H(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}_H(t), \hat{H}_H(t)], \quad (2.5)$$

kde jsme položili

$$\frac{\partial \hat{A}_H(t)}{\partial t} = \hat{U}^\dagger(0, t) \frac{d\hat{A}_S(t)}{dt} \hat{U}(0, t). \quad (2.6)$$

Odvozené výsledky samozřejmě platí v nezměněné formě pro popis pomocí matice hustoty.

Na závěr ještě dodáme, že kromě již uvedených obrazů se užívá ještě tzv. Diracova obrazu. V něm se část dynamiky systému promítá do časové změny stavových vektorů, část pak do změny operátorů na nich působících. Detailněji je o Diracově obraze pojednáno v [4].

2.2 Systémy nerozlišitelných částic

Jak jsme již uvedli v první kapitole, stavový prostor systému více částic odpovídá tenzorovému součinu stavových prostorů jednotlivých částic. Budeme nyní uvažovat systém tvořený několika stejnými částicemi (tj. takovými, jejichž časově neměnné charakteristiky, jako je například hmotnost či náboj, jsou stejné). V klasické mechanice jsme alespoň v principu schopni každé jednotlivé částici přiřadit trajektorii ve fázovém prostoru. A díky tomu, že se tyto trajektorie neprotínají, pak můžeme v libovolném časovém okamžiku každou částici identifikovat s její trajektorií a tak částice rozlišovat.

V kvantové mechanice naproti tomu takový postup nemá smysl, neboť stav částice nepopisujeme v rámci fázového prostoru, ale přiřazujeme mu stavový vektor ze stavového prostoru. Částice tak nemá obecně přesně danou polohu ani hybnost (přínejmenším z Heisenbergových relací neurčitosti víme, že částice nemůže mít v tomtéž okamžiku přesně danou polohu i přesně danou hybnost) a my nejsme schopni, a to ani v principu, částice vzájemně odlišit – mluvíme o systému nerozlišitelných částic.

Tento fakt nás vede k požadavku, aby projekční operátory odpovídající libovolnému měření provedenému na systému nerozlišitelných částic byly invariantní vůči

záměně libovolných dvou faktorů v tenzorovém součinu stavového vektoru. Neplatil-li by obecně zmíněný požadavek, bylo by možné pomocí jistého měření částice odlišit (částice bychom například mohli formálně očíslovat jejich pořadím v tenzorovém součinu). Tato invariance je však ekvivalentní (detailní odvození viz v [4]) tomu, že při záměně libovolných dvou faktorů v tenzorovém součinu je výsledný vektor roven původnímu, nebo je k němu opačný, tedy stavové vektory musí být buď symetrické (záměnou libovolné dvojice faktorů se nezmění), nebo totálně antisymetrické (záměna libovolných dvou faktorů vede k vynásobení vektoru číslem -1).¹ V přírodě se vyskytují částice vyhovující jak první, tak i druhé podmínce. První druh částic nazýváme bosony a příslušný stavový prostor značíme $\mathcal{H}_{Sy}$, druhý druh částic pak nazýváme fermiony a jim příslušející stavový prostor značíme $\mathcal{H}_A$. Bosony se vyznačují dále tím, že jejich spin nabývá hodnot celých čísel, naproti tomu fermiony mají hodnoty spinu polocíselné. V rámci této práce však budeme pracovat pouze s bosony a fermiony se tedy nebudeme dále zabývat.

2.3 Obsazovací čísla, Fockův prostor

Mějme tedy systém několika bosonů. Stav takového systému můžeme popsat buď již uvedeným způsobem (tedy pomocí symetrických stavových vektorů), nebo můžeme pouze udat, kolik částic se nalézá ve kterém stavu – zřejmě obě možnosti popisu jsou vzhledem k nerozlišitelnosti částic ekvivalentní. Označme $\mathcal{H}$ stavový prostor jediné částice, $\mathcal{H}_{Sy}^N$ stavový prostor N částic a $\{|\psi_i\rangle\}$ ortonormální bázi prostoru $\mathcal{H}$. V případě dvoučásticového systému tak budeme ztotožňovat vektory

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_i\rangle|\psi_j\rangle + |\psi_j\rangle|\psi_i\rangle) = |0, \dots, n_i = 1, \dots, n_j = 1, \dots, 0\rangle, \quad (2.7)$$

kde čísla n_i udávají, kolik částic se nalézá v i -tém stavu $|\psi_i\rangle$, a nazýváme je obsazovacími čísly.

Budeme-li dále uvažovat systém s proměnným počtem částic, bude vhodné přiřadit takovému systému stavový prostor, který vytvoříme jako direktní součet stavových prostorů bezčásticového systému, jediné částice, dvou částic atd. Přiřadíme-li bezčásticovému systému prostor komplexních čísel $\mathbb{C}$, potom můžeme výsledný prostor zapsat

$$\mathcal{F}_{Sy}(\mathcal{H}) = \mathbb{C} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_{Sy}^2 \oplus \mathcal{H}_{Sy}^3 \oplus \dots \quad (2.8)$$

a nazveme jej Fockovým prostorem příslušným Hilbertovu prostoru $\mathcal{H}$. Dolní index Sy značí, že se jedná o Fockův prostor příslušný systému bosonů. Vektory z Fockova prostoru budeme zapisovat ve tvaru $|n_1, n_2, \dots\rangle$, kde n_i jsou již zmíněná obsazovací čísla.

Na Fockově prostoru nyní definujeme operátor $\hat{a}_i^\dagger$ předpisem

$$\hat{a}_i^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \alpha_{n_i}^+ |n_1, n_2, \dots, n_i + 1, \dots\rangle, \quad \alpha_{n_i}^+ \in \mathbb{C}. \quad (2.9)$$

Vidíme, že operátor působí tak, že vytvoří jednu částici v i -tém stavu, a nazveme jej tedy kreačním operátorem. Zřejmě operátory $\hat{a}_i^\dagger$ a $\hat{a}_j^\dagger$ komutují. Označíme-li tedy vakuový stav systému (tj. bezčásticový stav) jako $|0\rangle$, pak můžeme celý Fockův prostor

¹Množiny takových vektorů tvoří podprostory původního stavového prostoru zkonstruovaného jako tenzorový součin stavového prostoru jediné částice.

generovat působením kreačních operátorů na vakuový stav, neboť pro libovolný vektor platí

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = \frac{\hat{a}_1^{\dagger n_1}}{\alpha_0^+ \alpha_1^+ \dots \alpha_{n_1-1}^+} \frac{\hat{a}_2^{\dagger n_2}}{\alpha_0^+ \alpha_1^+ \dots \alpha_{n_2-1}^+} \dots |0\rangle. \quad (2.10)$$

Působení operátoru $\hat{a}_i$ hermitovsky sdruženého ke kreačnímu operátoru zjistíme ze skalárního součinu

$$\begin{aligned} \langle m_1, \dots, m_i, \dots | \hat{a}_i | n_1, \dots, n_i, \dots \rangle &= \bar{\alpha}_{m_i}^+ \langle m_1, \dots, m_i + 1, \dots | n_1, \dots, n_i, \dots \rangle \\ &= \bar{\alpha}_{m_i}^+ \delta_{m_1, n_1} \dots \delta_{m_i+1, n_i} \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

Předpokládejme tedy, že pro $j \neq i$ platí $m_j = n_j$ a navíc $\alpha_{m_i}^+ \neq 0$. Potom platí

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{m_i}^+ \delta_{m_i+1, n_i} &= \langle n_1, n_2, \dots, m_i, \dots | \hat{a}_i | n_1, n_2, \dots, n_i, \dots \rangle \\ &= \alpha_{n_i}^- \langle n_1, n_2, \dots, m_i, \dots | n_1, n_2, \dots, \tilde{n}_i, \dots \rangle = \alpha_{n_i}^- \delta_{m_i, \tilde{n}_i}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

odkud již dostáváme $\tilde{n}_i = m_i = n_i - 1$ a navíc $\alpha_{n_i}^- = \bar{\alpha}_{n_i-1}^+$. Nyní již můžeme napsat působení operátoru $\hat{a}_i$

$$\hat{a}_i |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle = \alpha_{n_i}^- |n_1, \dots, n_i - 1, \dots\rangle = \bar{\alpha}_{n_i-1}^+ |n_1, \dots, n_i - 1, \dots\rangle. \quad (2.13)$$

Operátor $\hat{a}_i$ tedy odebere jednu částici z i -tého stavu a nazýváme jej proto anihilačním operátorem. Budeme-li nyní požadovat $\alpha_0^+ = 1$ a navíc

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger] = \hat{I}, \quad (2.14)$$

tj. $|\alpha_{n_i}^+|^2 - |\alpha_{n_i-1}^+|^2 = 1$, můžeme zvolit

$$\alpha_{n_i}^+ = \sqrt{n_i + 1}, \quad \alpha_{n_i}^- = \sqrt{n_i}. \quad (2.15)$$

Nakonec ještě definujeme operátor $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$. Jedná se zřejmě o operátor hermitovský a na libovolný vektor působí následovně

$$\hat{n}_i |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i} \hat{a}_i^\dagger |n_1, \dots, n_i - 1, \dots\rangle = n_i |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle. \quad (2.16)$$

Nazýváme jej tedy operátorem počtu částic v i -tém stavu. Platí pro něj komutační relace

$$[\hat{n}_i, \hat{a}_i^\dagger] = [\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger] = \hat{a}_i^\dagger [\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger] + [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_i^\dagger] \hat{a}_i = \hat{a}_i^\dagger. \quad (2.17)$$

Hermitovským sdružením tohoto vztahu odvodíme i

$$[\hat{n}_i, \hat{a}_i] = -\hat{a}_i. \quad (2.18)$$

2.4 Koherentní stavy

Nyní definujeme takzvané koherentní stavy fotonů (blíže viz [7, 8, 12]). Pro jednoduchost a přehlednost nyní budeme uvažovat tzv. jednomódový Fockův prostor (bude se vztahovat k systému s proměnným počtem částic, avšak tyto částice se mohou vyskytovat pouze v jediném stavu). Na tomto prostoru tak máme jediný anihilační operátor $\hat{a}$. Nechť je nyní vektor $|\alpha\rangle \in \mathcal{F}_{Sy}$ vlastním vektorem anihilačního operátoru příslušný vlastní hodnotě $\alpha \in \mathbb{C}$, tj.

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle. \quad (2.19)$$

Potom řekneme, že $|\alpha\rangle$ je koherentním stavem.

Pokusíme se najít obecný tvar takového stavu vyjádřený pomocí vektorů $|n\rangle$, které tvoří ortonormální bázi Fockova prostoru. Klademe tedy

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n |n\rangle, \quad c_n \in \mathbb{C}. \quad (2.20)$$

Dosadíme-li (2.20) do definičního vztahu koherentního stavu (2.19), obdržíme

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \hat{a} |n\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} c_n |n\rangle. \quad (2.21)$$

Porovnáním koeficientů u stejných bazických vektorů pak snadno získáme jejich rekurentní vyjádření

$$c_n = \frac{\alpha c_{n-1}}{\sqrt{n}}. \quad (2.22)$$

Iterací tohoto vztahu pak nalezneme

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0. \quad (2.23)$$

Konstantu c_0 určíme z požadavku na jednotkovou normu vektoru

$$1 = \langle \alpha | \alpha \rangle = |c_0|^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\bar{\alpha}^n \alpha^m}{\sqrt{n!m!}} \langle n | m \rangle = |c_0|^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |c_0|^2 e^{|\alpha|^2} \quad (2.24)$$

a dospíváme tak k obecnému tvaru koherentního stavu ve formě

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.25)$$

Využijeme-li nyní kreačního operátoru $\hat{a}^\dagger$, můžeme zapsat libovolný koherentní stav pouze pomocí vakuového stavu $|0\rangle$ a právě kreačního operátoru

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n \hat{a}^{\dagger n}}{n!} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \exp[\alpha \hat{a}^\dagger] |0\rangle. \quad (2.26)$$

Uvědomíme-li si navíc, že

$$\exp[-\bar{\alpha} \hat{a}] |0\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\bar{\alpha})^n \hat{a}^n}{n!} |0\rangle = |0\rangle, \quad (2.27)$$

můžeme psát

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \exp[\alpha \hat{a}^\dagger] \exp[-\bar{\alpha} \hat{a}] |0\rangle. \quad (2.28)$$

Operátor $\hat{D}(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \exp[\alpha \hat{a}^\dagger] \exp[-\bar{\alpha} \hat{a}] = \exp[\alpha \hat{a}^\dagger - \bar{\alpha} \hat{a}]$ se pak nazývá Glauberovým dislokačním operátorem.²

²Z angl. *Glauber displacement operator*. Převedení exponenciálních funkcí na jediný základ jsme provedli na základě vztahu $\exp[\hat{A} + \hat{B}] = \exp[\hat{A}] \exp[\hat{B}] \exp[-[\hat{A}, \hat{B}]/2]$, neboť platí $[\alpha \hat{a}^\dagger, -\bar{\alpha} \hat{a}] = -|\alpha|^2 [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = |\alpha|^2$.

Někteří autoři nedefinují koherentní stavy jako vlastní vektory anihilačního operátoru, ale využívají právě Glauberova operátoru (samozřejmě se jedná o ekvivalentní definice). Důležitou vlastností koherentních stavů je to, že minimalizují Heisenbergovy relace neurčitosti (Erwin Schrödinger koherentní stavy dokonce takto definoval; Heisenbergovy relace však minimalizují i stavy, které dnes jako koherentní neoznačujeme). Pole, jež jsou svým tvarem blízka koherentním stavům, generují například lasery.

2.5 Kvantování elektromagnetického pole

Na závěr této kapitoly stručně naznačíme postup kvantování elektromagnetického pole (detailní postup uveden například v [12]). Uvažujme rovinné elektromagnetické vlny ve vakuu v krychli o hraně délky L . Hustota energie pole je dána výrazem (viz [9])

$$w = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{x}, t) \right), \quad (2.29)$$

kde $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ jsou vektory elektrické intenzity, resp. magnetické indukce a ε_0 , μ_0 je permitivita, resp. permeabilita vakua. Energii H pole v krychli tak získáme integrací přes objem krychle

$$H = \frac{1}{2} \int_{L^3} \left(\varepsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{x}, t) \right) d^3x. \quad (2.30)$$

Vyjádříme vektory elektrické intenzity a magnetické indukce pomocí jejich rozvoje v módy příslušné vlnovým vektorům $\mathbf{k}$ a polarizacím $s = 1, 2$ (přejímáme z [12])

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{i}{\sqrt{\varepsilon_0 L^3}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \omega_{\mathbf{k}} (c_{\mathbf{k}s} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} \mathcal{E}_{\mathbf{k}s} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} - \text{c.c.}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \frac{i}{\sqrt{\varepsilon_0 L^3}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s (c_{\mathbf{k}s} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} (\mathbf{k} \times \mathcal{E}_{\mathbf{k}s}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} - \text{c.c.}), \end{aligned} \quad (2.31)$$

kde $\omega_{\mathbf{k}} = ck$ značí úhlovou frekvenci módu $\mathbf{k}$, $c_{\mathbf{k}s}$ jsou koeficienty ve Fourierově rozvoji elektromagnetického potenciálu $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ podle módů, $\mathcal{E}_{\mathbf{k}s}$ jsou ortonormální vektory splňující $\mathbf{k} \cdot \mathcal{E}_{\mathbf{k}s} = 0$, $\bar{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}s} \cdot \mathcal{E}_{\mathbf{k}s'} = \delta_{ss'}$, $\mathcal{E}_{\mathbf{k}1} \times \mathcal{E}_{\mathbf{k}2} = \mathbf{k}/k$ a c.c. značí komplexně sdružený člen. Dosazením obdržíme

$$H = 2 \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \omega_{\mathbf{k}}^2 |c_{\mathbf{k}s} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}|^2. \quad (2.32)$$

Definujeme-li nyní kanonické proměnné³ $q_{\mathbf{k}s}(t) = c_{\mathbf{k}s} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} + \bar{c}_{\mathbf{k}s} e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}$ a $p_{\mathbf{k}s}(t) = -i\omega_{\mathbf{k}} (c_{\mathbf{k}s} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} - \bar{c}_{\mathbf{k}s} e^{i\omega_{\mathbf{k}} t})$, můžeme psát

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s (p_{\mathbf{k}s}^2(t) + \omega_{\mathbf{k}}^2 q_{\mathbf{k}s}^2(t)). \quad (2.33)$$

Nyní již provedeme samotné kvantování pole – všem klasickým pozorovatelným přiřadíme na základě principu korespondence operátory značené stejným písmenem

³Snadno se ověří, že platí $\frac{\partial H}{\partial p_{\mathbf{k}s}} = \frac{\partial q_{\mathbf{k}s}}{\partial t}$ a $\frac{\partial H}{\partial q_{\mathbf{k}s}} = -\frac{\partial p_{\mathbf{k}s}}{\partial t}$.

jako v případě klasickém doplněné stříškou. U hermitovských operátorů $\hat{q}_{\mathbf{k}s}$, $\hat{p}_{\mathbf{k}s}$ předpokládáme, že pro jejich komutátor platí $[\hat{q}_{\mathbf{k}s}, \hat{p}_{\mathbf{k}s}] = i\hbar$. Dále přejdeme k operátorům $\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t)$, $\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t)$ definovaným vztahy

$$\begin{aligned}\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}} (\omega_{\mathbf{k}}\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t) + i\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t)) \\ \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}} (\omega_{\mathbf{k}}\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t) - i\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t)).\end{aligned}\tag{2.34}$$

Tak konečně dospíváme k vyjádření hamiltoniánu

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t)\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t) + \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t)\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) \right).\tag{2.35}$$

Pro operátory $\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t)$, $\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t)$ navíc platí komutační relace

$$\begin{aligned}\left[\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger(t) \right] &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(3)} \delta_{ss'} \\ \left[\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}(t) \right] &= 0 \\ \left[\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t), \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger(t) \right] &= 0.\end{aligned}\tag{2.36}$$

S jejich využitím můžeme psát

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t)\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) + \frac{1}{2} \right).\tag{2.37}$$

Navíc tyto operátory můžeme ztotožnit s příslušnými kreačními a anihilačními operátory na Fockově prostoru (detailní odvození opět v [12]).

Kapitola 3

Sestupná parametrická frekvenční konverze

Jednou z možností realizace qubitu je foton a jednou z perspektivních technik získávání provázaných párů fotonů je sestupná parametrická frekvenční konverze. Jedná se o jev založený na nelineární odezvě některých krystalů na dopadající elektromagnetické pole. V této kapitole přiblížíme základní vlastnosti tohoto jevu a nastíníme jeho kvantový popis.

3.1 Princip sestupné parametrické frekvenční konverze

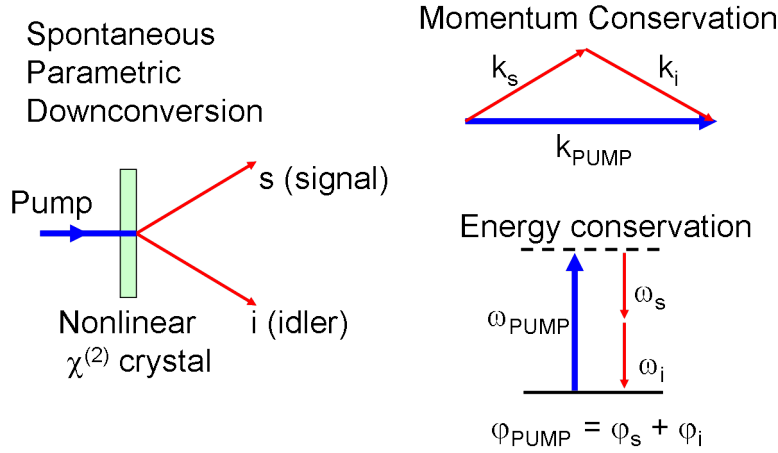
Sestupná parametrická frekvenční konverze (též SPDC, z angl. *spontaneous parametric down-conversion*) je tedy jednou z možností, jak získávat korelované páry fotonů. Na nelineární krystal (typicky např. KNBO_3 , LiNBO_3 či $\beta - \text{BaB}_2\text{O}_4$) dopadá silný paprsek koherentního světla, jehož zdrojem je laser s vhodně zvolenou vlnovou délkou. Uvnitř krystalu pak s velmi malou pravděpodobností dochází k přeměně čerpacího fotonu (takto budeme nazývat vstupní fotony z laseru) na dva jiné fotony s frekvencemi nižšími než je frekvence čerpacího fotonu (odtud označení sestupná konverze). Tento jev je zprostředkován nelineární interakcí fotonu s optickým prostředím krystalu. Vzhledem k relativně nízké četnosti takových přeměn můžeme parametry vstupního svazku považovat za konstantní, odkud plyne charakterizace tohoto jevu jako parametrického.¹ Sestupná parametrická frekvenční konverze je tak vlastně inverzním procesem ke generaci vyšších harmonických frekvencí, kdy se dva fotony čerpacího svazku (opět prostřednictvím interakce s nelineárním prostředím) přemění na foton jediný s frekvencí rovnou součtu jejich původních frekvencí.

Při sestupné parametrické frekvenční konverzi se zachovává energie záření. Označíme-li dva výstupní fotony jako signální a jalový foton (angl. *signal* a *idler*) lze tuto podmínku zapsat ve tvaru

$$E_0 = E_s + E_i, \quad (3.1)$$

kde jsme označili E_0 , E_s a E_i po řadě energií čerpacího, signálního a jalového fotonu. Sužitím Planckových vztahů pro energii elektromagnetického záření lze tuto

¹Díky tomu, že se vstupní pole frekvenční konverzí prakticky nemění, jej lze považovat za pevný parametr. Proto jej lze popsat klasickým vlnovým formalismem a není třeba užívat kvantový popis.



Obrázek 3.1: Sestupná parametrická frekvenční konverze. Vlevo vidíme schematickou ilustraci konverze čerpacího fotonu v nelineárním krystalu se susceptibilitou χ na dva nové fotony. Vpravo jsou pak znázorněny podmínky zachování hybnosti a energie. Převzato z [10]

podmínku přepsat následovně

$$\hbar\omega_0 = \hbar\omega_s + \hbar\omega_i, \quad (3.2)$$

kde ω značí úhlovou frekvenci příslušného fotonu. Odsud snadno získáme podmínku svazující frekvence čerpacího, signálního a jalového fotonu

$$\omega_0 = \omega_s + \omega_i. \quad (3.3)$$

Vidíme tedy, že součet frekvencí obou vzniklých fotonů je roven frekvenci původního čerpacího fotonu. Mimoto ještě platí zachování hybnosti záření. Analogicky jako v případě energie a frekvence obdržíme užitím Planckových vztahů podmínku pro vlnové vektory

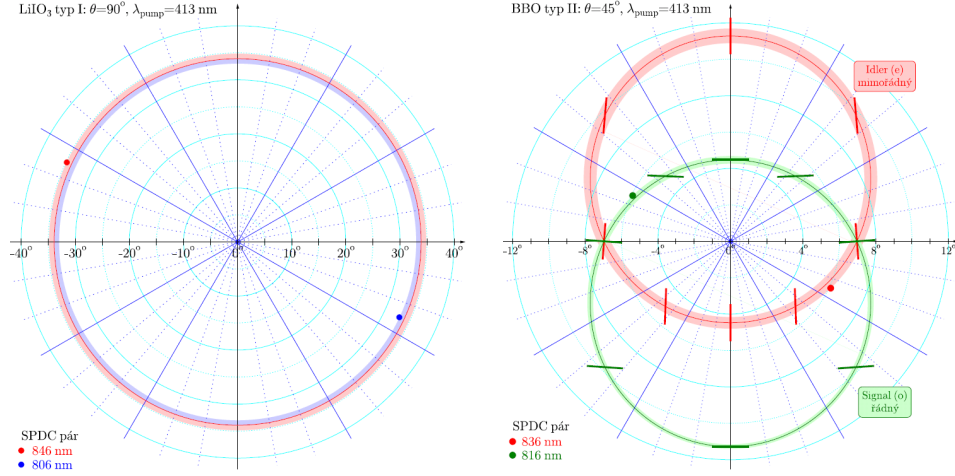
$$\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i. \quad (3.4)$$

Grafické znázornění těchto podmínek vidíme na obrázku 3.1 a budeme se na ně odvolávat jako na fázovou synchronizaci.

V závislosti na polarizacích čerpacího fotonu a výstupních fotonů pak rozlišujeme sestupnou parametrickou frekvenční konverzi typu I a typu II. V prvním případě se čerpací pole v krystalu šíří jako mimořádný paprsek (je polarizován v rovině určené optickou osou krystalu a směrem šíření paprsku) a signální i jalové fotony jsou pak polarizovány řádně (v rovině kolmé k optické ose krystalu). Ve druhém případě má čerpací pole opět mimořádnou polarizaci, ale signální a jalové fotony mají polarizaci vzájemně opačnou – signální fotony jsou polarizovány řádně a jalové mimořádně. Signální a jalové pole za krystalem je pro oba případy znázorněno na obrázku 3.2.

3.2 Dvumódový popis interakce

Nejprve uvedeme hamiltonián interakce a řešení příslušných pohybových rovnic při uvážení pouze dvou módů vyžadujících kvantový popis. Jedná se pouze o hrubé přiblí-



Obrázek 3.2: Tvar signálního a jalového pole generovaného průchodem čerpacího paprsku nelineárním krystalem. Vlevo vidíme sfázování typu I, vpravo sfázování typu II. Převzato z [4].

žení skutečného chování elektromagnetického pole v nelineárním prostředí, avšak i tak můžeme na získaném řešení demonstrovat některé zajímavé vlastnosti sestupné parametrické frekvenční konverze.² Jak jsme již výše uvedli, předpokládáme, že čerpací paprsek je dostatečně intenzivní a lze jej popsat klasicky. Do interakčního hamiltoniánu pak zahrneme pouze dva módy (viz [12]) – signální (značený indexem 1) a jalový (značený indexem 2):

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^2 \hbar \omega_i \left(\hat{n}_i + \frac{1}{2} \right) + \hbar g \left[\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger v_0 e^{-i\omega_0 t} + \text{h.c.} \right], \quad (3.5)$$

kde h.c. značí hermitovsky sdružený člen a kde čerpací pole je popsáno módem $a_0 = v_0 e^{-i\omega t}$. Odtud plyne rovnost

$$\left[\hat{n}_1 - \hat{n}_2, \hat{H} \right] = \hbar g \left(\left[\hat{n}_1 - \hat{n}_2, \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \right] v_0 e^{-i\omega_0 t} + \bar{v}_0 e^{i\omega_0 t} \left[\hat{n}_1 - \hat{n}_2, \hat{a}_2 \hat{a}_1 \right] \right) = 0, \quad (3.6)$$

kde jsme využili toho, že operátory $\hat{a}_1$ a $\hat{a}_2$ (a tedy samozřejmě i operátory $\hat{a}_1^\dagger$ a $\hat{a}_2^\dagger$) komutují a že platí

$$[\hat{n}_i, \hat{a}_j] = -\delta_{ij} \hat{a}_j, \quad [\hat{n}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij} \hat{a}_j^\dagger. \quad (3.7)$$

Rovnost (3.6) znamená, že operátor $\hat{n}_1 - \hat{n}_2$ je integrálem pohybu a pro libovolný okamžik t platí

$$\hat{n}_1(t) - \hat{n}_2(t) = \hat{n}_1(0) - \hat{n}_2(0). \quad (3.8)$$

Uvažujeme-li počáteční stav (tj. stav v čase $t = 0$) signálního a jalového pole jako vakuový, platí $\hat{n}_1(t) = \hat{n}_2(t)$ pro libovolný okamžik t . Tato rovnost vyjadřuje skutečnost, že signální a jalový foton vznikají vždy současně v páru.

²Uvidíme, že takto získané výsledky nám umožní demonstrovat pouze časovou korelaci mezi signálními a jalovými fotony. Při použití přesnějšího popisu uvedeného v následujícím paragrafu odvodíme například i korelaci spektrální.

Se znalostí hamiltoniánu nyní můžeme řešit pohybové rovnice v Heisenbergově obraze

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{a}_1(t)}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{a}_1(t), \hat{H}] = -i\omega_1\hat{a}_1(t) - ig\hat{a}_2^\dagger(t)v_0e^{-i\omega_0t} \\ \frac{d\hat{a}_2(t)}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{a}_2(t), \hat{H}] = -i\omega_2\hat{a}_2(t) - ig\hat{a}_1^\dagger(t)v_0e^{-i\omega_0t}.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Přejdeme k operátorům $\hat{\mathcal{A}}_1$ a $\hat{\mathcal{A}}_2$ definovaným vztahem

$$\hat{\mathcal{A}}_j(t) = \hat{a}_j(t)e^{i\omega_j t}. \quad (3.10)$$

Snadno se ověří, že tyto operátory splňují stejné komutační relace jako operátory $\hat{a}_j$.³ Pohybové rovnice přejdou do tvaru

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\mathcal{A}}_1(t)}{dt} &= (-i\omega_1\hat{a}_1(t) - ig\hat{a}_2^\dagger(t)v_0e^{-i\omega_0t} + i\omega_1\hat{a}_1(t))e^{i\omega_1 t} = -ig\hat{\mathcal{A}}_2^\dagger(t)v_0e^{i(\omega_1+\omega_2-\omega_0)t} \\ \frac{d\hat{\mathcal{A}}_2(t)}{dt} &= (-i\omega_2\hat{a}_2(t) - ig\hat{a}_1^\dagger(t)v_0e^{-i\omega_0t} + i\omega_2\hat{a}_2(t))e^{i\omega_2 t} = -ig\hat{\mathcal{A}}_1^\dagger(t)v_0e^{i(\omega_1+\omega_2-\omega_0)t},\end{aligned}\quad (3.11)$$

kde jsme využili toho, že hermitovsky sdružený operátor $\hat{\mathcal{A}}_j^\dagger(t) = \hat{a}_j^\dagger(t)e^{-i\omega_j t}$. Uvědomíme-li si navíc, že díky vyjádření zákona zachování energie (3.3) platí $\omega_1 + \omega_2 - \omega_0 = 0$, můžeme psát

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\mathcal{A}}_1(t)}{dt} &= -igv_0\hat{\mathcal{A}}_2^\dagger(t) \\ \frac{d\hat{\mathcal{A}}_2(t)}{dt} &= -igv_0\hat{\mathcal{A}}_1^\dagger(t).\end{aligned}\quad (3.12)$$

Zderivujeme-li tyto rovnice a substituujeme-li v nich za operátory $\frac{d\hat{\mathcal{A}}_j^\dagger(t)}{dt}$ (hermitovsky sdružíme (3.12)), získáme separované rovnice

$$\begin{aligned}\frac{d^2\hat{\mathcal{A}}_1(t)}{dt^2} &= -igv_0\frac{d\hat{\mathcal{A}}_2^\dagger(t)}{dt} = g^2|v_0|^2\hat{\mathcal{A}}_1(t) \\ \frac{d^2\hat{\mathcal{A}}_2(t)}{dt^2} &= -igv_0\frac{d\hat{\mathcal{A}}_1^\dagger(t)}{dt} = g^2|v_0|^2\hat{\mathcal{A}}_2(t).\end{aligned}\quad (3.13)$$

Položíme-li $v_0 = |v_0|e^{i\vartheta}$, můžeme jejich obecné řešení zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{A}}_1(t) &= \hat{\mathcal{A}}_1(0) \cosh(g|v_0|t) - ie^{i\vartheta}\hat{\mathcal{A}}_2^\dagger(0) \sinh(g|v_0|t) \\ \hat{\mathcal{A}}_2(t) &= \hat{\mathcal{A}}_2(0) \cosh(g|v_0|t) - ie^{i\vartheta}\hat{\mathcal{A}}_1^\dagger(0) \sinh(g|v_0|t).\end{aligned}\quad (3.14)$$

³ Platí $[\hat{\mathcal{A}}_j, \hat{\mathcal{A}}_k^\dagger] = [\hat{a}_j, \hat{a}_k^\dagger] e^{i(\omega_j - \omega_k)t} = \delta_{jk} e^{i(\omega_j - \omega_k)t} = \delta_{jk}$ a $[\hat{\mathcal{A}}_j, \hat{\mathcal{A}}_k] = 0$. Navíc platí i obdoba vztahů (3.7) $[\hat{n}_j, \hat{\mathcal{A}}_k] = -\delta_{jk}\hat{\mathcal{A}}_k$, $[\hat{n}_j, \hat{\mathcal{A}}_k^\dagger] = \delta_{jk}\hat{\mathcal{A}}_k^\dagger$.

Tato řešení nyní využijeme pro výpočet některých statistických charakteristik signálního a jalového pole. Uvažujme počáteční stav obou módů jako vakuový, tj. $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$. Nejprve určíme střední hodnotu počtu částic v prvním módu

$$\begin{aligned}\langle n_1(t) \rangle &= \langle 0 | \hat{\mathcal{A}}_1^\dagger(t) \hat{\mathcal{A}}_1(t) | 0 \rangle = \sinh^2(g|v_0|t) \langle 0 | \hat{\mathcal{A}}_2(0) \hat{\mathcal{A}}_2^\dagger(0) | 0 \rangle \\ &= \sinh^2(g|v_0|t) \langle 0 | \hat{n}_2(0) + 1 | 0 \rangle = \sinh^2(g|v_0|t).\end{aligned}\quad (3.15)$$

Zřejmě stejný výsledek bychom obdrželi i pro střední hodnotu částic ve druhém módu. Dále vyjádříme $\langle n_1^2(t) \rangle$ (opět stejný výsledek i pro $\langle n_2^2(t) \rangle$)

$$\begin{aligned}\langle n_1^2(t) \rangle &= \langle 0 | \hat{\mathcal{A}}_1^\dagger(t) \hat{\mathcal{A}}_1(t) \hat{\mathcal{A}}_1^\dagger(t) \hat{\mathcal{A}}_1(t) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \hat{\mathcal{A}}_1^\dagger(t) \hat{\mathcal{A}}_1(t) + \hat{\mathcal{A}}_1^{\dagger 2}(t) \hat{\mathcal{A}}_1^2(t) | 0 \rangle \\ &= \sinh^2(g|v_0|t) + \sinh^4(g|v_0|t) \langle 0 | \hat{\mathcal{A}}_2^2(0) \hat{\mathcal{A}}_2^{\dagger 2}(0) | 0 \rangle \\ &= \sinh^2(g|v_0|t) + \sinh^4(g|v_0|t) \langle 0 | (\hat{n}_2(0) \hat{\mathcal{A}}_2^2(0) + 2 \hat{\mathcal{A}}_2^2(0) \hat{\mathcal{A}}_2^{\dagger 2}(0)) | 0 \rangle \\ &= \sinh^2(g|v_0|t) + \sinh^4(g|v_0|t) \langle 0 | (\hat{n}_2(0) + 1)(\hat{n}_2(0) + 2) | 0 \rangle \\ &= \sinh^2(g|v_0|t) + 2 \sinh^4(g|v_0|t) = \langle n_1(t) \rangle + 2 \langle n_1(t) \rangle^2,\end{aligned}\quad (3.16)$$

kde jsme využili komutační relace (2.14) a (3.7).

Nyní již snadno spočteme střední kvadratickou odchylku počtu částic v prvním a druhém módu

$$\begin{aligned}\Delta(n_i(t)) &= \sqrt{\langle n_i^2(t) \rangle - \langle n_i(t) \rangle^2} = \sqrt{\langle n_i(t) \rangle (1 + \langle n_i(t) \rangle)} \\ &= \sqrt{\sinh^2(g|v_0|t) (1 + \sinh^2(g|v_0|t))} \\ &= \sqrt{\sinh^2(g|v_0|t) \cosh^2(g|v_0|t)}.\end{aligned}\quad (3.17)$$

Nakonec ještě určíme jejich vzájemnou kovarianci a korelaci. K tomu budeme potřebovat výraz

$$\begin{aligned}\langle n_1(t) n_2(t) \rangle &= \langle 0 | \hat{\mathcal{A}}_1^\dagger(t) \hat{\mathcal{A}}_1(t) \hat{\mathcal{A}}_2^\dagger(t) \hat{\mathcal{A}}_2(t) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \hat{\mathcal{A}}_1^\dagger(t) \hat{\mathcal{A}}_2^\dagger(t) \hat{\mathcal{A}}_2(t) \hat{\mathcal{A}}_1(t) | 0 \rangle \\ &= \sinh^2(g|v_0|t) \langle 0 | \hat{\mathcal{A}}_2(0) \hat{\mathcal{A}}_2^\dagger(t) \hat{\mathcal{A}}_2(t) \hat{\mathcal{A}}_2^\dagger(0) | 0 \rangle \\ &= \sinh^2(g|v_0|t) \langle 0 | \hat{\mathcal{A}}_2(0) \hat{\mathcal{A}}_2^\dagger(0) \hat{\mathcal{A}}_2(0) \hat{\mathcal{A}}_2^\dagger(0) \cosh^2(g|v_0|t) \\ &\quad + \hat{\mathcal{A}}_2(0) \hat{\mathcal{A}}_1(0) \hat{\mathcal{A}}_1^\dagger(0) \hat{\mathcal{A}}_2^\dagger(0) \sinh^2(g|v_0|t) | 0 \rangle \\ &= \sinh^2(g|v_0|t) \langle 0 | (\hat{n}_2(0) + 1)^2 \cosh^2(g|v_0|t) \\ &\quad + (\hat{n}_1(0) + 1)(\hat{n}_2(0) + 1) \sinh^2(g|v_0|t) | 0 \rangle \\ &= \sinh^2(g|v_0|t) (\cosh^2(g|v_0|t) + \sinh^2(g|v_0|t)).\end{aligned}\quad (3.18)$$

Odtud je kovariance

$$\begin{aligned}(\Delta n_1(t) \Delta n_2(t)) &= \langle n_1(t) n_2(t) \rangle - \langle n_1(t) \rangle \langle n_2(t) \rangle \\ &= \sinh^2(g|v_0|t) (\cosh^2(g|v_0|t) + \sinh^2(g|v_0|t)) - \sinh^4(g|v_0|t) \\ &= \sinh^2(g|v_0|t) \cosh^2(g|v_0|t)\end{aligned}\quad (3.19)$$

a korelační koeficient

$$\sigma_{12} = \frac{(\Delta n_1(t)\Delta n_2(t))}{\Delta(n_1(t))\Delta(n_2(t))} = \frac{\sinh^2(g|v_0|t) \cosh^2(g|v_0|t)}{\sinh^2(g|v_0|t) \cosh^2(g|v_0|t)} = 1. \quad (3.20)$$

Vidíme tedy, že signální a jalové fotony jsou úplně korelovány (každému přírůstku počtu signálních fotonů odpovídá stejný přírůstek jalových fotonů).

3.3 Vícemódové řešení

V tomto paragrafu zpřesníme v několika ohledech popis interakce. Ve skutečnosti totiž fotony vzniklé při frekvenční konverzi mohou mít různé polarizace, různé směry šíření a také různé frekvence. Všechna tato upřesnění se tak promítnou do interakčního hamiltoniánu (přejímáme jej opět z [12])

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) = & \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}_s, s_s} \sum_{\mathbf{k}_i, s_i} V_l \chi_{lij}^{(2)}(\omega_0, \omega_s, \omega_i) (\bar{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}_s, s_s})_i (\bar{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}_i, s_i})_j \\ & \times \int_{\mathcal{V}} e^{i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{x}} e^{i(\omega_s + \omega_i - \omega_0)t} \hat{a}_{\mathbf{k}_s, s_s} \hat{a}_{\mathbf{k}_i, s_i}^\dagger d^3x + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

kde $\mathbf{k}_0$ je vlnový vektor čerpací vlny s amplitudou $\mathbf{V}$ (čerpací vlnu opět popisujeme klasicky), $\mathcal{V}$ je aktivní oblast nelineárního média (uvažujeme ji jako rovnoběžnostěn) a $\chi_{lij}^{(2)}$ je tenzor nelineární susceptibility třetího řádu. Módům signálního a jalového pole pak přísluší vlnové vektory $\mathbf{k}_s$, resp. $\mathbf{k}_i$ a polarizace s_s , resp. s_i . Abychom předešli komplikacím spojeným s odrazy na hranicích aktivní oblasti nelineárního média, uvažujeme aktivní oblast obklopenou lineárním dielektrikem o stejném indexu lomu.

Nyní budeme na rozdíl od předešlého paragrafu pracovat ve Schrödingerově obraze. Předpokládáme výchozí stav signálního i jalového pole jako vakuový, tj. $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$. Stav pole v čase t je pak určen

$$|\psi(t)\rangle = \exp \left[\frac{1}{i\hbar} \int_0^t \hat{H}(t') dt' \right] |0\rangle. \quad (3.22)$$

Pro časy t dostatečně malé (menší než je průměrná doba mezi dvěma přeměnami čerpacího fotonu) můžeme tento stav aproximovat Taylorovým rozvojem exponenciální funkce do prvního řádu

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle \approx & |0\rangle + \frac{1}{i\hbar} \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}_s, s_s} \sum_{\mathbf{k}_i, s_i} V_l \chi_{lij}^{(2)}(\omega_0, \omega_s, \omega_i) (\bar{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}_s, s_s})_i (\bar{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}_i, s_i})_j \\ & \times \prod_{m=1}^3 \frac{\sin(\frac{1}{2}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i)_m l_m)}{\frac{1}{2}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i)_m} e^{\frac{i}{2}(\omega_s + \omega_i - \omega_0)t} \\ & \times \frac{\sin(\frac{1}{2}(\omega_s + \omega_i - \omega_0)t)}{\frac{1}{2}(\omega_s + \omega_i - \omega_0)} |\mathbf{k}_s, s_s\rangle |\mathbf{k}_i, s_i\rangle. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Aktivní oblast jsme uvažovali jako kvádr o hranách l_1 , l_2 a l_3 se středem v počátku souřadnic a $|\mathbf{k}_s, s_s\rangle$, $|\mathbf{k}_i, s_i\rangle$ jsme označili módy signálního, resp. jalového pole.

Výraz $|\psi(t)\rangle$ ještě dále zjednodušíme – předpokládáme, že signální a jalové fotony mají stejné polarizace a že směry jejich šíření jsou dobře určeny pomocí clon. Potom

lze uvažovat parametry s_s , s_i a $\mathbf{k}_s$, $\mathbf{k}_i$ jako fixní a počítat pouze přes frekvence

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &\approx M|0\rangle + \frac{\eta V \delta \omega}{2\pi} \sum_{\omega'} \sum_{\omega''} \Phi(\omega_s, \omega_i) e^{\frac{i}{2}(\omega_s + \omega_i - \omega_0)t} \\ &\times \frac{\sin(\frac{1}{2}(\omega_s + \omega_i - \omega_0)t)}{\frac{1}{2}(\omega_s + \omega_i - \omega_0)} |\omega_s\rangle |\omega_i\rangle, \end{aligned} \quad (3.24)$$

kde funkce $\Phi(\omega_s, \omega_i)$ je symetrická vzhledem ke svým proměnným (nabývá maxima pro $\omega_s = \omega_i = \omega_0/2$) a zahrnuje frekvenční závislost různých faktorů obsažených v sumě v rovnici (3.23). Parametr η reprezentuje míru příspěvku opravy prvního řádu a určuje velikost parametru M (tak, aby byl stav normován). Faktor $\delta \omega$ na konci výpočtu (kdy nahradíme sumy integrály) pošleme v limitě k nule. V této souvislosti budeme také požadovat, aby spektrální funkce $\Phi(\omega_s, \omega_i)$ byla normována

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} |\Phi(\omega, \omega_0 - \omega)|^2 d\omega = 1. \quad (3.25)$$

Z požadavku na jednotkovou normu stavu $|\psi(t)\rangle$ dostáváme pro $\delta \omega \rightarrow 0$

$$|M|^2 + \frac{|\eta V|^2}{4\pi^2} \iint_0^{+\infty} d\omega_s d\omega_i |\Phi(\omega_s, \omega_i)|^2 \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}(\omega_s + \omega_i - \omega_0)t)}{\frac{1}{2}(\omega_s + \omega_i - \omega_0)} \right)^2 = 1. \quad (3.26)$$

V integrálu nyní provedeme substituci $\Omega = \omega_s + \omega_i - \omega_0$

$$|M|^2 + \frac{|\eta V|^2}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} d\omega_s \int_{\omega_s - \omega_0}^{+\infty} d\Omega |\Phi(\omega_s, \Omega + \omega_0 - \omega_s)|^2 \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}\Omega t)}{\frac{1}{2}\Omega} \right)^2 = 1. \quad (3.27)$$

Je-li $|\Phi(\omega_s, \omega_i)|^2$ dostatečně pomalu se měnící funkce vzhledem k proměnné ω_i , můžeme dále aproximovat záměnou $|\Phi(\omega_s, \Omega + \omega_0 - \omega_s)|^2$ za $|\Phi(\omega_s, \omega_0 - \omega_s)|^2$. Integrace se tak podstatně zjednoduší a s využitím vztahu

$$\int_{\omega_s - \omega_0}^{+\infty} \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}\Omega t)}{\frac{1}{2}\Omega} \right)^2 d\Omega \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}\Omega t)}{\frac{1}{2}\Omega} \right)^2 d\Omega = 2\pi t \quad (3.28)$$

a vztahu (3.25) již můžeme psát

$$1 = |M|^2 + \frac{|\eta V|^2}{4\pi^2} (2\pi)(2\pi t) = |M|^2 + |\eta V|^2 t. \quad (3.29)$$

Spolehlivost provedené aproximace tak závisí na splnění podmínky $|\eta V|^2 t \ll 1$.

3.4 Kvantové provázání signálních a jalových fotonů

Získané řešení opět využijeme k demonstraci některých vlastností generovaného fotonového páru plynoucích z faktu, že se jedná o kvantově provázaný stav.

Představme si, že do dráhy signálních fotonů (směr jejich šíření je určen clonami) umístíme frekvenční filtr propouštějící pouze fotony o frekvenci ω_F . Takový postup můžeme interpretovat jako provedení kvantového měření na systému, jemuž odpovídá projekční operátor

$$\hat{\mathcal{P}} = |\omega_s = \omega_F\rangle \langle \omega_s = \omega_F|. \quad (3.30)$$

Stav vzniklého pole popíšeme maticí hustoty

$$\hat{\rho} = K\hat{\mathcal{P}}|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|, \quad (3.31)$$

kde K je normovací konstanta.

Stav samotného jalového pole pak určíme pomocí parciální stopy

$$\hat{\rho}_i = K\text{Tr}_s\hat{\mathcal{P}}|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|. \quad (3.32)$$

Za stejného předpokladu jako v předešlém paragrafu ($|\Phi(\omega_s, \omega_i)|^2$ dostatečně pomalu se měnící funkce vzhledem k ω_i) můžeme psát

$$\hat{\rho}_i = K|\eta V|^2|\Phi(\omega_F, \omega_0 - \omega_F)|^2|\omega_i = \omega_0 - \omega_F\rangle\langle\omega_i = \omega_0 - \omega_F|. \quad (3.33)$$

Vidíme tedy, že v důsledku výběru frekvence ω_F signálního fotonu má jalový foton přiřazenu frekvenci $\omega_0 - \omega_F$ a je tak splněna podmínka (3.3). Stav jalového fotonu je ovlivněn měřením provedeným na signálním fotonu, navíc k redukci stavu dochází najednou v celém prostoru.⁴ Takové chování je typické právě pro kvantově provázané stavy.

⁴K redukci stavu dojde v okamžiku provedení měření na signálním fotonu. Stav jalového fotonu se tak změní dříve než by k němu mohla dosáhnout libovolná fyzikální interakce šířící se od signálního fotonu od okamžiku měření.

Kapitola 4

Šíření EM pole v soustavě vlnovodů

Tato kapitola je věnována chování elektromagnetického pole v soustavě vlnovodů, přičemž odvodíme tvar pohybových rovnic v soustavě lineárních i nelineárních vlnovodů (čerpáme z článku [13]).

4.1 Soustava lineárních vlnovodů

Nejprve popíšeme chování elektromagnetického pole v soustavě vlnovodů, které nevykazují nelineární chování. Uvažujme tedy soustavu N lineárních vlnovodů umístěných vedle sebe. Vlnovody představují změny indexu lomu n_0 v jinak homogenním a izotropním prostředí.¹ Šíření monochromatické rovinné vlny je pak určeno rovnicí

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} n^2(x)\right) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\nabla \left(\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot (\nabla \varepsilon) \right), \quad (4.1)$$

kde ω je frekvence vlny, c je rychlost světla ve vakuu, $n(\mathbf{x})$ je index lomu uvažovaného materiálu při dané frekvenci ω , $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ je vektor elektrické intenzity a ε je permitivita materiálu. Za předpokladu, že změna permitivity je v rámci jedné vlnové délky mnohem menší než jedna, případně mění-li se permitivita pouze ve směrech kolmých ke směru polarizace vlny, můžeme pravou stranu zanedbat a získáme tak homogenní rovnici

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} n^2(x)\right) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (4.2)$$

Nechť jsou vlnovody orientovány tak, že všechny leží v rovině určené směry x a z a elektromagnetické pole se v nich šíří ve směru z . Označíme lokalizovanou poruchu indexu lomu v j -tém vlnovodu jako $\delta n_j(x) \ll n_0$. Pro index lomu celé soustavy pak máme

$$n(x) = n_0 + \sum_{j=1}^N \delta n_j(x). \quad (4.3)$$

¹Soustava může být vyrobena například z destičky z křemenného skla, v níž jsou jednotlivé vlnovody vytvořeny pomocí laseru. Laserový puls lokálně způsobí trvalou změnu indexu lomu a postupným podélným posouváním destičky se do ní „zapíše“ celý vlnovod.

Pro jeho kvadrát pak při zanedbání členů řádu $\delta n_j(x)\delta n_k(x)$ dostáváme

$$n^2(x) \approx n_0^2 + 2 \sum_{j=1}^N n_0 \delta n_j(x) = n_0^2 + \sum_{j=1}^N \Delta n_j^2(x), \quad (4.4)$$

kde jsme položili $\Delta n_j^2(x) = 2n_0 \delta n_j(x)$. Navíc uvažujeme

$$\Delta n_j^2(x) = \begin{cases} n_j^2(x) - n_0^2 & \text{uvnitř } j\text{-tého vlnovodu} \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases} \quad (4.5)$$

Označme dále $\mathcal{E}_j(x, y)$ řešení neporušené rovnice pro j -tý vlnovod

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} n_j^2(x) \right) \mathcal{E}_j(x, y) = \beta_j^2 \mathcal{E}_j(x, y), \quad (4.6)$$

kde $n_j(x) = n_0 + \delta n_j(x)$ je index lomu samotného j -tého vlnovodu a β_j je odpovídající propagační konstanta. Pro j -tý vlnovod je potom příslušný mód (řešení (4.2)) ve tvaru

$$\mathcal{E}_j(x, y) e^{i(\omega t - \beta_j z)}. \quad (4.7)$$

Řešení (4.2) v celé soustavě pak můžeme zapsat jako

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^2 \psi_j(z) \mathcal{E}_j(x, y) e^{i(\omega t - \beta_j z)}, \quad (4.8)$$

kde módové amplitudy $\psi_j(z)$ jsou funkce pomalu se měnící v proměnné z .

Nyní určíme tok výkonu pole procházející rovinou kolmou ke směru z

$$P(z) = \iint \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \times \overline{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)) \cdot \hat{z} \, dx \, dy, \quad (4.9)$$

kde $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$ značí intenzitu magnetického pole a $\hat{z}$ je jednotkový vektor ve směru z . Předpokládejme, že pro jednotlivé módy platí normovací podmínka

$$\alpha_j \iint \mathcal{E}_j(x, y) \cdot \overline{\mathcal{E}}_j(x, y) \, dx \, dy = 1, \quad (4.10)$$

kde jsme položili

$$\alpha_j = \frac{\beta_j}{2\omega\mu_0} = \frac{1}{2} n_j c \varepsilon_0 \approx \frac{1}{2} c n_0 \varepsilon_0. \quad (4.11)$$

Za předpokladu, že

$$\iint \mathcal{E}_j(x, y) \cdot \overline{\mathcal{E}}_k(x, y) \, dx \, dy \ll \iint \mathcal{E}_j(x, y) \cdot \overline{\mathcal{E}}_j(x, y) \, dx \, dy \quad (4.12)$$

a s využitím (4.10) tak můžeme psát

$$P(z) \approx \sum_{j=1}^N |\psi_j(z)|^2 \left(\alpha_j \iint |\mathcal{E}_j(x, y)|^2 \, dx \, dy \right) \approx \sum_{j=1}^N |\psi_j(z)|^2. \quad (4.13)$$

Ozáríme-li tedy jeden z vlnovodů (označme jej k), je vstupní výkon určen výrazem

$$P_{\text{peak}} = |\psi_k(0)|^2.$$

Nyní určíme výraz $\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$. Využijeme tzv. Fresnelovu aproximaci, kdy zanedbáme druhé derivace módových amplitud $\psi_j(z)$, neboť předpokládáme, že se mění v proměnné z dostatečně pomalu

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &\approx -2i \sum_{j=1}^N \beta_j \frac{d\psi_j(z)}{dz} \mathcal{E}_j(x, y) e^{i(\omega t - \beta_j z)} + \sum_{j=1}^N \psi_j(z) (\nabla^2 \mathcal{E}_j(x, y)) e^{i(\omega t - \beta_j z)} \\
&\quad - \sum_{j=1}^N \beta_j^2 \psi_j(z) \mathcal{E}_j(x, y) e^{i(\omega t - \beta_j z)} = -2i \sum_{j=1}^N \beta_j \frac{d\psi_j(z)}{dz} \mathcal{E}_j(x, y) e^{i(\omega t - \beta_j z)} \\
&\quad - \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{j=1}^N n_j^2(x) \psi_j(z) \mathcal{E}_j(x, y) e^{i(\omega t - \beta_j z)} \\
&\approx -2i \sum_{j=1}^N \beta_j \frac{d\psi_j(z)}{dz} \mathcal{E}_j(x, y) e^{i(\omega t - \beta_j z)} \\
&\quad - \frac{\omega^2}{c^2} n_0^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) - \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{j=1}^N \Delta n_j^2(x) \psi_j(z) \mathcal{E}_j(x, y) e^{i(\omega t - \beta_j z)}. \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Dále jsme použili postupně vztahy (4.6) a (4.5). Výsledek dosadíme do rovnice (4.2) a s využitím (4.4) obdržíme

$$2i \sum_{j=1}^N \beta_j \frac{d\psi_j(z)}{dz} \mathcal{E}_j(x, y) e^{i(\omega t - \beta_j z)} \approx \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{j=1}^N \Delta n_j^2(x) \left(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) - \psi_j(z) \mathcal{E}_j(x, y) e^{i(\omega t - \beta_j z)} \right). \tag{4.15}$$

Vynásobíme-li nyní skalárně obě strany rovnice faktorem $\bar{\mathcal{E}}_k(x, y)$ a následně integrujeme přes rovinu určenou směry x a y , obdržíme

$$i \frac{d\psi_k(z)}{dz} \approx \frac{\omega^2 \alpha_k}{2c^2 \beta_k} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N \psi_l(z) e^{i(\beta_k - \beta_l)z} \sum_{j=1}^N \iint \Delta n_j^2(x) \mathcal{E}_l(x, y) \cdot \bar{\mathcal{E}}_k(x, y) dx dy, \tag{4.16}$$

kde jsme opět použili vztahy (4.4), (4.10) a (4.12).

Pro další zjednodušení budeme uvažovat pouze integrály obsahující přímo sousedící módy (předpokládáme, že vlnovody jsou od sebe dostatečně vzdálené, aby mohly být přítomností pole v j -tém vlnovodu ovlivněny pouze bezprostředně sousedící vlnovody). Označíme-li tyto integrály

$$\Omega_k \approx \frac{\omega \varepsilon_0}{4} \iint \Delta n_{k\pm 1}^2(x) \mathcal{E}_k(x, y) \cdot \bar{\mathcal{E}}_k(x, y) dx dy, \tag{4.17}$$

$$\mathcal{J}_{k,k\pm 1} \approx \frac{\omega \varepsilon_0}{4} \iint \Delta n_k^2(x) \mathcal{E}_{k\pm 1}(x, y) \cdot \bar{\mathcal{E}}_k(x, y) dx dy, \tag{4.18}$$

můžeme pohybové rovnice pro módové amplitudy zapsat ve tvaru

$$i \frac{d\psi_k(z)}{dz} \approx \Omega_k \psi_k(z) + \mathcal{J}_{k,k-1} \psi_{k-1}(z) e^{i(\beta_k - \beta_{k-1})z} + \mathcal{J}_{k,k+1} \psi_{k+1}(z) e^{i(\beta_k - \beta_{k+1})z}. \tag{4.19}$$

Položíme-li navíc $\psi_k(z) = \phi_k(z) e^{-i\Omega_k z}$ a $\beta'_k = \beta_k + \Omega_k$, obdržíme

$$i \frac{d\phi_k(z)}{dz} \approx \mathcal{J}_{k,k-1} \phi_{k-1}(z) e^{i(\beta'_k - \beta'_{k-1})z} + \mathcal{J}_{k,k+1} \phi_{k+1}(z) e^{i(\beta'_k - \beta'_{k+1})z}. \quad (4.20)$$

Pro skoro stejné vlnovody ($\beta'_k \approx \beta'_{k\pm 1}$) pak můžeme provést poslední přiblížení

$$i \frac{d\phi_k(z)}{dz} \approx \mathcal{J}_{k,k-1} \phi_{k-1}(z) + \mathcal{J}_{k,k+1} \phi_{k+1}(z). \quad (4.21)$$

Obdželi jsme tedy rovnice popisující šíření elektromagnetického vlnění v soustavě lineárních vlnovodů.

4.2 Soustava nelineárních vlnovodů

Nyní odvodíme pohybové rovnice i pro případ nelineárních vlnovodů. V rovnici (4.6) provedeme záměnu $\beta_j \rightarrow \tilde{\beta}_j(\omega)$ a $n^2(x) \rightarrow \tilde{n}^2(x)$, kde

$$\tilde{n}^2(x) \approx n^2(x) + 2n_0\kappa(x)|\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)|^2. \quad (4.22)$$

Funkce $\kappa(x)$ je tzv. Kerrův koeficient.

Stejným postupem jako v minulém paragrafu (záměnu $n^2(x) \rightarrow \tilde{n}^2(x)$ provedeme i v rovnici (4.2), kde položíme $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^N \psi_j(z) \mathcal{E}_j(x, y) e^{i(\omega t - \beta_j z)}$ a opět uijeme Fresnelovu aproximaci) obdržíme

$$2i \sum_{j=1}^N \beta_j \frac{d\psi_j(z)}{dz} \mathcal{E}_j(x, y) e^{i(\omega t - \beta_j z)} \approx \sum_{j=1}^N \left[(\tilde{\beta}_j^2 - \beta_j^2) - \frac{\omega^2}{c^2} (\tilde{n}^2(x) - n_j^2(x)) \right] \times \psi_j(z) \mathcal{E}_j(x, y) e^{i(\omega t - \beta_j z)}. \quad (4.23)$$

Jelikož platí

$$\tilde{n}^2(x) - n_j^2(x) \approx \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N \Delta n_l^2(x) + 2n_0\kappa(x)|\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)|^2, \quad (4.24)$$

můžeme po vynásobení rovnice funkcí $\bar{\mathcal{E}}_k(x, y)$ a integraci přes rovinu xy psát

$$\begin{aligned} i \frac{d\psi_k(z)}{dz} &= \Omega_k \psi_k(z) + \mathcal{J}_{k,k-1} \psi_{k-1}(z) e^{i(\beta_k - \beta_{k-1})z} \\ &+ \mathcal{J}_{k,k+1} \psi_{k+1}(z) e^{i(\beta_k - \beta_{k+1})z} + \frac{1}{2\beta_k} \left(\tilde{\beta}_k^2(\omega) - \beta_k^2 \right) \psi_k(z) \\ &+ \sum_{j,l,l'} \psi_l(z) \bar{\psi}_{l'}(z) \psi_j(z) \mathcal{K}_{k,j,l,l'} e^{i(\beta_k + \beta_{l'} - \beta_j - \beta_l)z}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

kde jsme položili

$$\mathcal{K}_{k,j,l,l'} = \frac{\omega^2 n_0}{c^2 \beta_k} \frac{\iint \kappa(x) \bar{\mathcal{E}}_k(x, y) \cdot \mathcal{E}_j(x, y) \mathcal{E}_l(x, y) \cdot \bar{\mathcal{E}}_{l'}(x, y) dx dy}{\iint |\mathcal{E}_k(x, y)|^2 dx dy}. \quad (4.26)$$

Funkci $\mathcal{K}_{k,j,l,l'}$ nyní podstatně zjednodušíme (předpokládáme, že integrál v čitateli bude pro nestejné módy zanedbatelný)

$$\mathcal{K}_{k,j,l,l'} \approx \frac{\omega^2 n_0 \kappa_{\text{eff}}}{c^2 \beta_k} \eta \delta_{kj} \delta_{kl} \delta_{kl'}, \quad (4.27)$$

kde je $\kappa_{\text{eff}} \approx \kappa(x)$ a

$$\eta = \frac{\iint |\mathcal{E}_k(x, y)|^4 dx dy}{\iint |\mathcal{E}_k(x, y)|^2 dx dy}. \quad (4.28)$$

Položíme-li nyní

$$A_{\text{eff}} = \frac{(\iint |\mathcal{E}_k(x, y)|^2 dx dy)^2}{\iint |\mathcal{E}_k(x, y)|^4 dx dy}, \quad (4.29)$$

můžeme psát $\eta = 1/(\alpha_k A_{\text{eff}})$. Uvažujeme-li navíc $\alpha_k = \beta_k/(2\omega\mu_0) = n_k c \varepsilon_0/2 \approx n_0 c \varepsilon_0/2$, obdržíme

$$\begin{aligned} i \frac{d\psi_k(z)}{dz} \approx & \Omega_k \psi_k(z) + \mathcal{J}_{k,k-1} \psi_{k-1}(z) e^{i(\beta_k - \beta_{k-1})z} + \mathcal{J}_{k,k+1} \psi_{k+1}(z) e^{i(\beta_k - \beta_{k+1})z} \\ & + \frac{1}{2\beta_k} \left(\tilde{\beta}_k^2(\omega) - \beta_k^2 \right) \psi_k(z) + \frac{2\pi \tilde{\kappa}_{\text{eff}}}{\lambda A_{\text{eff}}} |\psi_k(z)|^2 \psi_k(z). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Přitom jsme provedli záměnu $\kappa_{\text{eff}} = \tilde{\kappa}_{\text{eff}} n_0 \varepsilon c/2$ a frekvenci ω jsme nahradili vlnovou délkou λ .

Dále budeme uvažovat $\tilde{\beta}_k(\omega) \approx \beta_k$, čímž zanedbáme předposlední člen rovnice. Položíme

$$\gamma = \frac{2\pi \tilde{\kappa}_{\text{eff}}}{\lambda A_{\text{eff}}} \quad (4.31)$$

a $\psi_k(z) = \sqrt{P_{\text{peak}}} \psi'_k(z)$, což nás vede ke vztahu

$$\begin{aligned} i \frac{d\psi'_k(z)}{dz} \approx & (\Omega_k + \gamma P_{\text{peak}}) \psi'_k(z) + \mathcal{J}_{k,k-1} \psi'_{k-1}(z) e^{i(\beta_k - \beta_{k-1})z} \\ & + \mathcal{J}_{k,k+1} \psi'_{k+1}(z) e^{i(\beta_k - \beta_{k+1})z}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Nyní již pouze přejdeme k funkcím $\phi_k(z)$ definovaným $\psi'_k(z) = \phi_k(z) e^{-i\Omega_k z}$ a můžeme psát výsledné pohybové rovnice určující šíření elektromagnetického pole v soustavě nelineárních vlnovodů

$$\begin{aligned} i \frac{d\phi_k(z)}{dz} \approx & \gamma P_{\text{peak}} |\phi_k(z)|^2 \phi_k(z) + \mathcal{J}_{k,k-1} \phi_{k-1}(z) e^{i(\beta'_k - \beta'_{k-1})z} \\ & + \mathcal{J}_{k,k+1} \phi_{k+1}(z) e^{i(\beta'_k - \beta'_{k+1})z}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

kde jsme opět položili $\beta'_k = \beta_k + \Omega_k$.

Stejně jako v minulém paragrafu ještě uvedeme pohybové rovnice pro případ téměř shodných vlnovodů

$$i \frac{d\phi_k(z)}{dz} \approx \gamma P_{\text{peak}} |\phi_k(z)|^2 \phi_k(z) + \mathcal{J}_{k,k-1} \phi_{k-1}(z) + \mathcal{J}_{k,k+1} \phi_{k+1}(z). \quad (4.34)$$

Vidíme tedy, že oproti soustavě lineárních vlnovodů se nám zde objevil člen závislý na vstupním výkonu čerpaném do ozářeného vlnovodu. Pro dostatečně velké výkony je pak jeho příspěvek natolik velký, že téměř vůbec nedochází k šíření pole do sousedních vlnovodů.

Kapitola 5

SPDC v soustavě nelineárních vlnovodů

V této poslední kapitole se budeme zabývat sestupnou parametrickou frekvenční konverzí v soustavě nelineárních vlnovodů, jak je popsána v článcích [14, 15]. Uvedeme jak teoretický model interakce, tak jeho porovnání s experimentálními daty.

5.1 Hamiltonián interakce a výstupní stav

Uvažujeme proces, v němž je laserem ozářen jeden kanál soustavy nelineárních vlnovodů. V ozářeném vlnovodu dochází k sestupné parametrické frekvenční konverzi typu I a vznikající signální a jalové fotony se pak dále šíří soustavou (znázorněno na obrázku 5.1). Opět budeme předpokládat, že elektromagnetické pole v některém z vlnovodů ovlivňuje jen nejbližší okolní vlnovody, a díky tomu platí pro propagační konstantu disperzní relace

$$\beta(\omega, k^\perp) = \beta_0(\omega) + 2C(\omega) \cos(k^\perp), \quad (5.1)$$

kde $\beta_0(\omega) = n_{\text{eff}}(\omega)\omega/c$ je propagační konstanta samotného vlnovodu při dané frekvenci ω a $C(\omega)$ je parametr určující míru interakce mezi sousedními vlnovody.¹

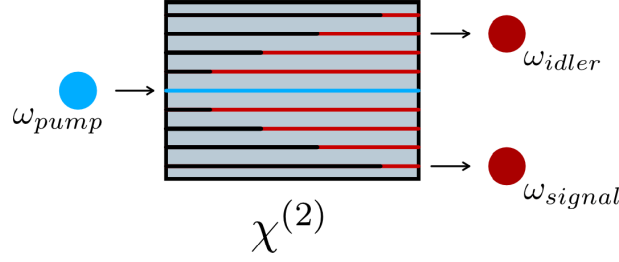
Signální a jalové pole v j -tém vlnovodu můžeme zapsat ve tvaru

$$\hat{E}_j(z, t) = B \int_{-\pi}^{\pi} dk^\perp \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{ik^\perp n} e^{i(\beta(\omega, k^\perp)z - \omega t)} \hat{a}(\omega, k^\perp) + \text{h.c.}, \quad (5.2)$$

kde h.c. značí hermitovsky sdružený člen. Všechny konstanty jsme zahrnuli do faktoru B . Čerpací pole uvažujeme opět dostatečně intenzivní a popisujeme jej tedy klasicky. Navíc předpokládáme, že se čerpací pole mezi vlnovody nešíří a zůstává pouze v ozářeném vlnovodu.² Čerpací pole v j -tém vlnovodu tak uvažujeme

¹Parametr $C(\omega)$ je předně ovlivněn vzdáleností mezi jednotlivými vlnovody, dále závisí na frekvenci vlny. Detailnější informace lze nalézt v [15].

²Oprávněnost tohoto předpokladu souvisí s tím, že čerpací fotony mají přibližně poloviční vlnovou délku oproti signálním a jalovým fotonům, a díky tomu je pro ně parametr $C(\omega)$ malý natolik, že můžeme šíření čerpacího pole mezi vlnovody zanedbat.



Obrázek 5.1: Schéma sestupné parametrické frekvenční konverze v soustavě nelineárních vlnovodů. Převzato z [15].

$$\begin{aligned}
 E_{0,j}(z, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_0 A(j) \alpha(\omega_0) e^{i(\beta^{(0)}(\omega_0)z - \omega_0 t)} + \text{c.c.} \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} dk_0^{\perp} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_0 \alpha(\omega_0) \tilde{A}(k_0^{\perp}) e^{i(\beta^{(0)}(\omega_0)z - \omega_0 t)} + \text{c.c.}, \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

kde $\alpha(\omega_0)$ určuje spektrální tvar čerpací vlny, $A(j)$ je amplituda čerpacího pole v j -tém vlnovodu a c.c. značí komplexně sdružený člen. Funkce $\tilde{A}(k_0^{\perp})$ je dána Fourierovou transformací

$$\tilde{A}(k_0^{\perp}) = \frac{1}{2\pi} \sum_j A(j) e^{-ik_0^{\perp} j}. \quad (5.4)$$

Nyní již můžeme uvést tvar interakčního hamiltoniánu odpovídající sestupné parametrické frekvenční konverzi v soustavě nelineárních vlnovodů

$$\hat{H}(t) = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{-L}^0 \sum_j \chi^{(2)} \left(E_{0,j}^{(+)}(z, t) \hat{E}_j^{(-)}(z, t) \hat{E}_j^{(-)}(z, t) + \text{h.c.} \right) dz, \quad (5.5)$$

kde L je délka vlnovodu, $\chi^{(2)}$ je tenzor nelineární susceptibility třetího řádu a indexem (+), resp. (−) jsme označili tu část příslušných polí, která závisí na kreačním, resp. anihilačním operátoru (v případě čerpacího pole pak klademe $E_{0,j}^{(+)}(z, t) = \overline{E_{0,j}^{(-)}}(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_0 A(j) \alpha(\omega_0) e^{i(\beta^{(0)}(\omega_0)z - \omega_0 t)}$). Uvážíme-li počáteční stav signálního a jalového pole jako vakuový, můžeme určit jejich stav dlouho po interakci ($t \rightarrow +\infty$) v prvním řádu přiblížení jako

$$|\psi\rangle \approx |0\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{H}(t) |0\rangle dt. \quad (5.6)$$

Umístíme-li navíc za soustavu frekvenční filtry, které odfiltrují fotony čerpacího pole, můžeme tento stav (po příslušné normalizaci) uvažovat

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{H}(t) |0\rangle dt.$$

Po integraci obdržíme

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_s \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_i \int_{-\pi}^{\pi} dk_s^{\perp} \int_{-\pi}^{\pi} dk_i^{\perp} f(\omega_s, \omega_i, k_s^{\perp}, k_i^{\perp}) \\
 &\quad \times \hat{a}^{\dagger}(\omega_s, k_s^{\perp}) \hat{a}^{\dagger}(\omega_i, k_i^{\perp}) |0\rangle, \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

kde jsme využili $\omega_0 = \omega_s + \omega_i$ a položili jsme

$$\begin{aligned}
 2f(\omega_s, \omega_i, k_s^\perp, k_i^\perp) &= \alpha(\omega_0) \sum_n A(n) e^{-i(k_s^\perp + k_i^\perp)} \\
 &\times \int_{-L}^0 e^{-i(\beta(\omega_s, k_s^\perp) + \beta(\omega_i, k_i^\perp) - \beta^{(0)}(\omega_s + \omega_i))z} dz \\
 &= 2\alpha(\omega_s + \omega_i) \tilde{A}(k_s^\perp + k_i^\perp) e^{-i(\beta^{(0)}(\omega_s + \omega_i) - \beta(\omega_s, k_s^\perp) + \beta(\omega_i, k_i^\perp)) \frac{L}{2}} \\
 &\times \frac{\sin((\beta^{(0)}(\omega_s + \omega_i) - \beta(\omega_s, k_s^\perp) + \beta(\omega_i, k_i^\perp)) \frac{L}{2})}{(\beta^{(0)}(\omega_s + \omega_i) - \beta(\omega_s, k_s^\perp) + \beta(\omega_i, k_i^\perp)) \frac{L}{2}}. \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

Dále označíme

$$\Delta\beta(\omega_s, \omega_i, k_s^\perp, k_i^\perp) = \beta^{(0)}(\omega_s + \omega_i) - \beta(\omega_s, k_s^\perp) + \beta(\omega_i, k_i^\perp), \quad (5.9)$$

$$\varphi(\omega_s, \omega_i, k_s^\perp, k_i^\perp) = e^{-i\Delta\beta(\omega_s, \omega_i, k_s^\perp, k_i^\perp) \frac{L}{2}}, \quad (5.10)$$

$$\Phi(\omega_s, \omega_i, k_s^\perp, k_i^\perp) = \frac{\sin(\Delta\beta(\omega_s, \omega_i, k_s^\perp, k_i^\perp) \frac{L}{2})}{\Delta\beta(\omega_s, \omega_i, k_s^\perp, k_i^\perp) \frac{L}{2}}. \quad (5.11)$$

Můžeme tak psát

$$f(\omega_s, \omega_i, k_s^\perp, k_i^\perp) = \alpha(\omega_s + \omega_i) \tilde{A}(k_s^\perp + k_i^\perp) \varphi(\omega_s, \omega_i, k_s^\perp, k_i^\perp) \Phi(\omega_s, \omega_i, k_s^\perp, k_i^\perp). \quad (5.12)$$

Funkce $f(\omega_s, \omega_i, k_s^\perp, k_i^\perp)$ tak v sobě zahrnuje informaci o spektrálních a prostorových vlastnostech čerpacího pole (prostřednictvím $\alpha(\omega_s + \omega_i)$ a $\tilde{A}(k_s^\perp + k_i^\perp)$), díky funkcím $\varphi(\omega_s, \omega_i, k_s^\perp, k_i^\perp)$ a $\Phi(\omega_s, \omega_i, k_s^\perp, k_i^\perp)$ pak odráží i vlastnosti soustavy vlnovodů (její nelineární chování, ale i prostorové uspořádání).

5.2 Spektrálně-prostorové korelace

Jak jsme již uvedli, sestupná parametrická frekvenční konverze nastává v krystalu s velmi malou pravděpodobností a nastane-li, je téměř přesně splněna podmínka fázové synchronizace, kterou zde můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\Delta\beta(\omega_s, \omega_i, k_s^\perp, k_i^\perp) \approx 0. \quad (5.13)$$

Pro lepší názornost nyní funkci $\Delta\beta$ rozdělíme na část odrážející vlastnosti jediného vlnovodu a závisující pouze na frekvenci čerpacího pole $\Delta\beta_\omega$ a na část odrážející přítomnost celé soustavy vlnovodů $\Delta\beta_A$. Klademe tedy

$$\Delta\beta(\omega_s, \omega_i, k_s^\perp, k_i^\perp) = \Delta\beta_\omega(\omega_s, \omega_i) + \Delta\beta_A(k_s^\perp, k_i^\perp, \omega_s, \omega_i), \quad (5.14)$$

kde

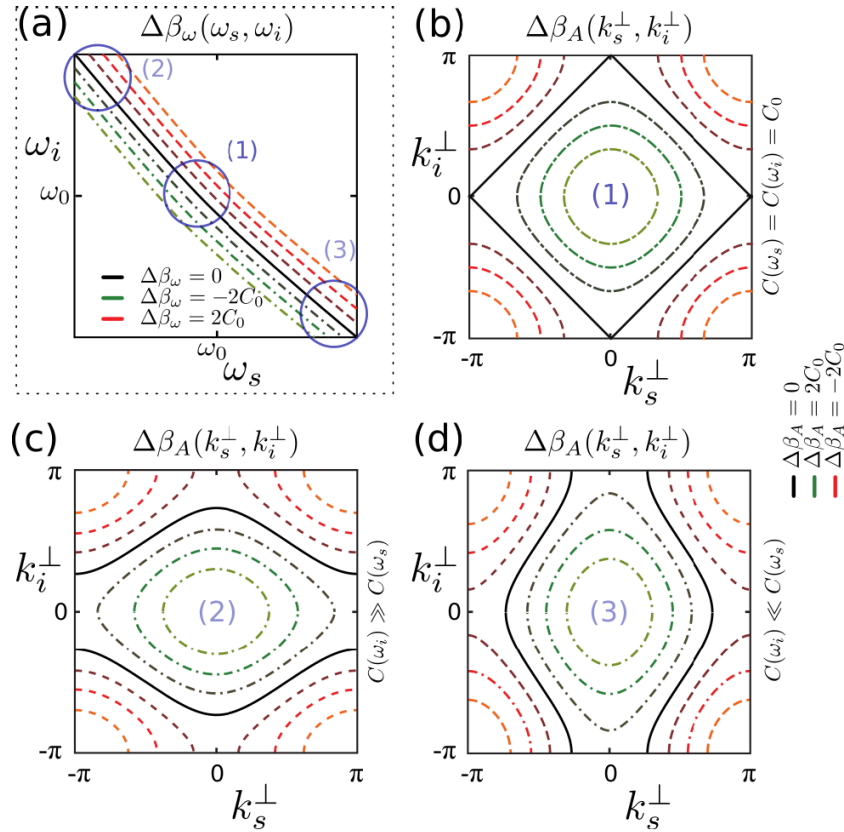
$$\Delta\beta_\omega(\omega_s, \omega_i) = \beta_0(\omega_s + \omega_i) - \beta_0(\omega_s) - \beta_0(\omega_i), \quad (5.15)$$

$$\Delta\beta_A(k_s^\perp, k_i^\perp, \omega_s, \omega_i) = -2C(\omega_s) \cos(k_s^\perp) - 2C(\omega_i) \cos(k_i^\perp). \quad (5.16)$$

Podmínku fázové synchronizace (5.13) tak můžeme přepsat na

$$\Delta\beta_\omega(\omega_s, \omega_i) \approx -\Delta\beta_A(k_s^\perp, k_i^\perp). \quad (5.17)$$

Právě z této podmínky plynou tvary spektrálně-prostorových korelací mezi generovanými signálními a jalovými fotony. Zaměříme se nyní na tři speciální případy, které mohou nastat pro frekvence signálních a jalových fotonů. Nejprve budeme uvažovat situaci, kdy frekvence obou fotonů budou téměř shodné ($\omega_s \approx \omega_i$) a v dalších dvou případech se naopak budou výrazně lišit ($\omega_s \ll \omega_i$, resp. $\omega_s \gg \omega_i$). Od toho se bude odvíjet nejen tvar funkce $\Delta\beta_\omega(\omega_s, \omega_i)$, ale i tvar parametru $C(\omega)$.



Obrázek 5.2: Závislost funkcí $\Delta\beta_\omega$ a $\Delta\beta_A$ na frekvencích ω_s , ω_i a na vlnových číslech $k_s^\perp$, $k_i^\perp$ signálních a jalových fotonů. Barevné linky v částech (b), (c) a (d) odpovídají linkám v části (a) tak, aby byla splněna podmínka $\Delta\beta_\omega + \Delta\beta_A = 0$. Převzato z [15].

Na obrázku 5.2(a) vidíme závislost funkce $\Delta\beta_\omega(\omega_s, \omega_i)$ na frekvencích signálních a jalových fotonů. Vidíme, že hodnota $\Delta\beta_\omega = 0$ je soustředěna přibližně na ose druhého a čtvrtého kvadrantu ($\omega_i \approx 2\omega_0 - \omega_s$). Nad touto osou pak funkce nabývá hodnot kladných, pod ní hodnot záporných. Označíme hodnotu parametru $C(\omega)$ v degenerovaném případě $\omega_s \approx \omega_i \approx \omega_0/2$ jako $C_0 = C(\omega_s \approx \omega_i)$ a přistoupíme již k samotné diskusi zmíněných případů:

1. Je-li $\omega_s \approx \omega_i$, potom $C(\omega_s) = C(\omega_i) = C_0$ a funkci $\Delta\beta_A$ tak můžeme zapsat ve tvaru $\Delta\beta_A(k_s^\perp, k_i^\perp, \omega_s, \omega_i) = -2C_0 (\cos(k_s^\perp) + \cos(k_i^\perp))$. Je-li nyní $\Delta\beta_\omega = 0$ (tj. platí skoro přesně $\omega_s = \omega_i$), musí platit i $\Delta\beta_A = 0$ a tedy $\cos(k_s^\perp) + \cos(k_i^\perp) = 0$. Možná vlnová čísla $k_s^\perp$ a $k_i^\perp$ v tomto případě tvoří čtvercový obrazec. Dále uvažme $\Delta\beta_\omega = 2C_0$, tj. $\Delta\beta_A = -2C_0$ a tedy $\cos(k_s^\perp) + \cos(k_i^\perp) = 1$. Řešení leží na obrazci připomínající kružnici. Nakonec ještě připuštěme možnost

$\Delta\beta_\omega = -2C_0$ vedoucí k podmínce $\cos(k_s^\perp) + \cos(k_i^\perp) = -1$. Řešení pak nalezneme v prostoru $(k_s^\perp, k_i^\perp)$ v jeho rozích. Názorně vidíme tento případ rozebrán na obrázku 5.2(b).

2. Je-li $\omega_s \ll \omega_i$, platí i $C(\omega_s) \ll C(\omega_i)$. Řešení se do jisté míry podobají (ve všech třech případech $\Delta\beta_\omega = 0$, $\Delta\beta_\omega = 2C_0$ i $\Delta\beta_\omega = -2C_0$) případu předchozímu, vlivem podmínky $C(\omega_s) \ll C(\omega_i)$ dochází pouze k protažení ve směru osy $k_s^\perp$. Situaci odpovídá obrázek 5.2(c).
3. Je-li $\omega_s \ll \omega_i$, potom platí $C(\omega_s) \gg C(\omega_i)$. Rozdíl oproti předešlému bodu je pouze v tom, že k protažení dochází ve směru osy $k_i^\perp$. Tato skutečnost souvisí i s tím, že uvažujeme sestupnou parametrickou frekvenční konverzi typu I (generované fotony mají stejnou polarizaci) a signální a jalové fotony jsou tedy zaměnitelné.

Vidíme tedy, jak vypadají spektrálně-prostorové korelace výstupních fotonů. V následujícím paragrafu se budeme krátce věnovat problému, jak tyto korelace můžeme ovlivnit vlastnostmi čerpacího pole.

5.3 Kontrola výstupního stavu změnou parametrů čerpacího pole

V tomto paragrafu stručně naznačíme, jak lze změnami parametrů čerpacího pole kontrolovat tvar pole výstupního.

Výběrem jisté frekvence čerpacího paprsku ω_0 určíme v prostoru (ω_s, ω_i) přímkou splňující $\omega_s + \omega_i = \omega_0$. Tato přímka je rovnoběžná s osou druhého a čtvrtého kvadrantu a definuje jistou hodnotu funkce $\Delta\beta_\omega$, což na druhé straně vede k $\Delta\beta_A \approx -\Delta\beta_\omega$. Vidíme tedy, že již pouhou změnou frekvence čerpacího pole lze ovlivnit prostorové korelace generovaných fotonů.

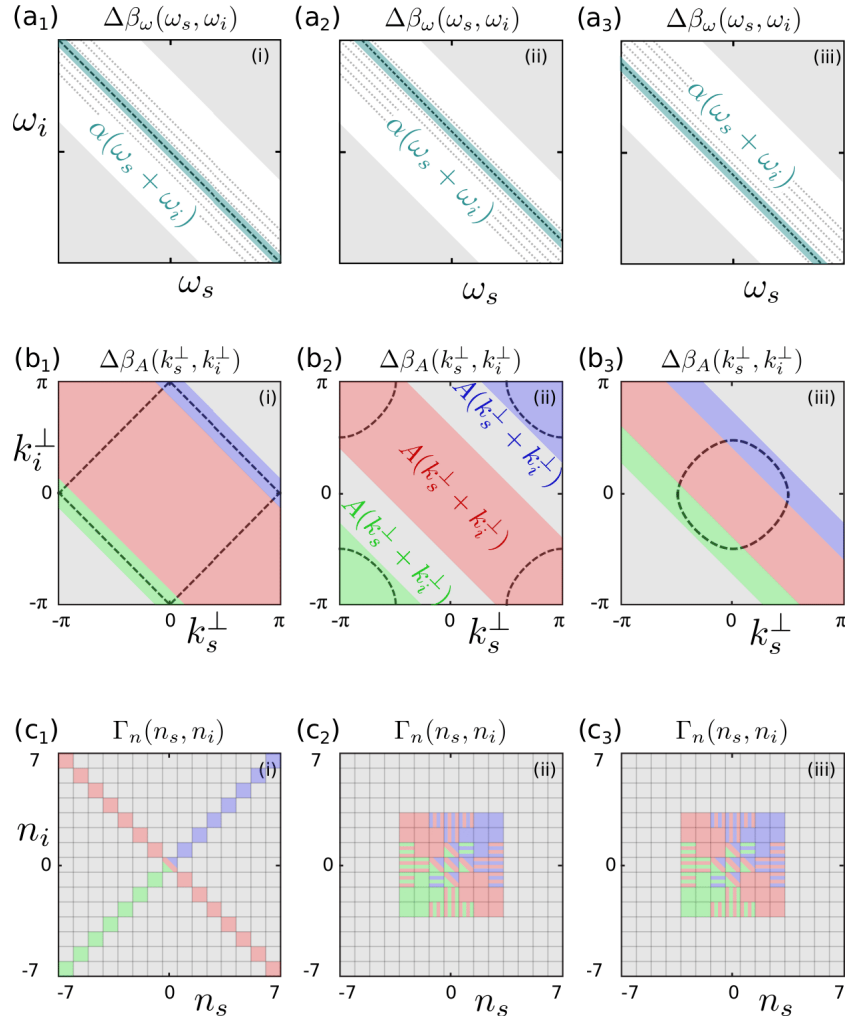
Máme-li již vybranou frekvenci čerpacího pole ω_0 , můžeme výstupní pole ještě ovlivnit prostorovým tvarem čerpacího pole (lze například současně ozářit více vlnovodů), neboť tak měníme tvar funkce $\tilde{A}(k_s^\perp + k_i^\perp)$.

Takovýto postup je detailně znázorněn na obrázku 5.3. V prvním kroku (tři modelové případy znázorněny na (a₁–a₃)) tedy vybereme frekvenci čerpacího pole a určíme tak, i hodnotu funkce $\Delta\beta_\omega$. Odpovídající řešení funkce $\Delta\beta_A = -\Delta\beta_\omega$ jsou v prostoru $(k_s^\perp, k_i^\perp)$ vytažena přerušovanou černou čarou (situaci vidíme na (b₁–b₃)). Zde však ještě můžeme výsledná řešení dále ovlivnit prostorovým tvarem čerpacího pole, čímž změníme funkci $\tilde{A}(k_s^\perp + k_i^\perp)$. Konečně ve třetím řádku (c₁–c₃) jsou pak pro vybrané čerpací frekvence ω_0 a vybrané tvary funkce $\tilde{A}(k_s^\perp + k_i^\perp)$ znázorněny výsledné prostorové korelace signálních a jalových fotonů (zvoleným hodnotám funkce $\tilde{A}(k_s^\perp + k_i^\perp)$ provedeným v (b₁–b₃) barevně odpovídají řešení v (c₁–c₃)).

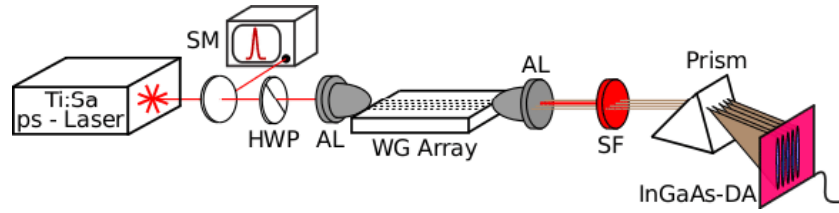
Změna parametrů čerpacího pole nám tak umožňuje měnit tvary prostorových korelací mezi signálními a jalovými fotony. Můžeme tak například získávat korelace ve formě tzv. *bunchingu* (signální a jalové fotony opouštějí soustavu stejným vlnovodem $n_s = n_i$) či *anti-bunchingu* (označíme-li centrální vlnovod $n = 0$, potom $n_s = -n_i$).

5.4 Experimentální ověření

Teoretický model byl úspěšně experimentálně ověřen skupinou kvantové optiky na paderbornské univerzitě.



Obrázek 5.3: Kontrola korelací výstupních stavů. V prvním řádku (a₁–a₃) vlastně provádíme volbu frekvence čerpacího pole. V druhém řádku (b₁–b₃) pak určujeme tvar funkce $\tilde{A}(k_s^\perp + k_i^\perp)$ (prostřednictvím prostorových charakteristik čerpacího pole) a v posledním řádku (c₁–c₃) vidíme odpovídající řešení. Převzato z [15].

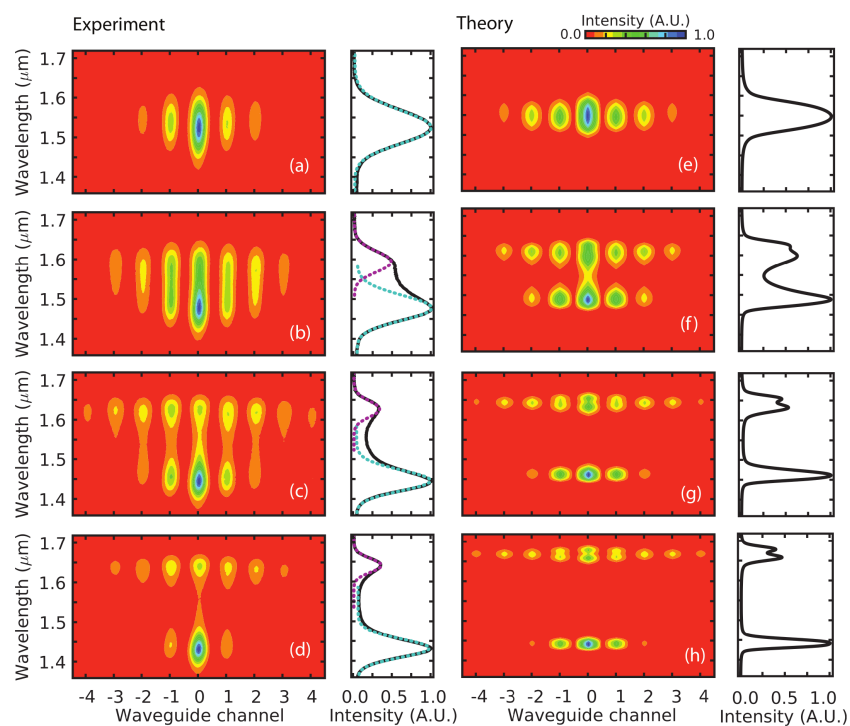


Obrázek 5.4: Schéma experimentální aparatury. Použité značení: SM – spektrometr, HWP – půlvlnná destička, AL – asférická čočka, WG Array – soustava vlnovodů, SF – spektrální filtr, InGaAs-DA – soustava fotonových detektorů. Převzato z [15].

Experimentální aparatura se skládala z laditelného pikosekundového titanovo-sařírového laseru (o centrální vlnové délce 775 nm) a 40 mm dlouhé soustavy sto jedna nelineárních vlnovodů (přičemž šířka celé soustavy činila 1,6 mm). Vlnovody byly umístěny v peci při teplotě $185^{\circ}\text{C} \pm 0,1^{\circ}\text{C}$. Část čerpacího paprsku byla odváděna do spektrometru pro průběžnou kontrolu kvality čerpacího pole, zbytek pak přiveden do jednoho z vlnovodů. V tomto vlnovodu docházelo k frekvenční konverzi a vzniklé signální a jalové fotony se pak šířily do dalších vlnovodů. Na výstupu soustavy byl umístěn frekvenční filtr, kterým bylo odstraněno čerpací pole, a signální a jalové fotony pak byly detekovány soustavou jednofotonových detektorů. Schéma experimentu je na obrázku 5.4.

Srovnání experimentálních dat a teoretických předpovědí na základě uvedeného modelu pak vidíme na obrázku 5.5. V případě (a) mají signální a jalové fotony téměř stejnou frekvenci (toho je dosaženo vyladěním vlnové délky laseru na hodnotu, při níž ve vlnovodech dochází ke generaci druhé harmonické frekvence). Vidíme, že pole se šíří pěti vlnovody a má spektrální šířku přibližně 100 nm. V dalších krocích dochází k pozvolnému krokovému snižování vlnové délky čerpacího paprsku (velikost kroku v rozmezí 0,3 – 0,4 nm). V případech (b) a (c) se tak pozvolně zvětšuje i spektrální šířka a v případě (d) je již zcela zřetelné oddělení dvou spektrálních oblastí, neboť signální a jalové fotony již nemají stejné frekvence a tedy ani vlnové délky. Zároveň si můžeme všimnout toho, že fotony s většími vlnovými délkami se šíří do sousedních vlnovodů snadněji než fotony s nižšími vlnovými délkami. Odpovídající teoretické předpovědi jsou uvedeny v pravém sloupci (e–h). Předpovědi se s experimentem dobře shodují, velice přesvědčivě pak zachycují zmíněné trendy. Teoretický model tedy velmi dobře koresponduje s experimentálními daty (jejich podrobnou analýzu lze nalézt v původním článku [15]).

V dalších experimentech pak lze očekávat zkoumání tvaru korelací a ověřování platnosti modelu i pro vícekanálové čerpání (je možné, že při čerpání do více než jednoho vlnovodu již nebude použitý rozvoj v prvním řádu dostačující). Dále je zajímavá otázka generace čtyř a více provázaných fotonů či zkoumání sestupné parametrické frekvenční konverze typu II.



Obrázek 5.5: Porovnání naměřených spektrálních intenzit na jednotlivých výstupech vlnovodů s teoretickou předpovědí. Převzato z [15].

Závěr

Účelem práce bylo seznámení s problematikou sestupné parametrické frekvenční konverze v soustavě nelineárních vlnovodů. Pro srozumitelnost textu se předpokládá znalost lineární algebry a základů teoretické fyziky. Nejzákladnější poznatky a formalismus kvantové teorie jsou popsány v úvodních kapitolách. V dalším textu jsou definovány potřebné pojmy a odvozeny či převzaty potřebné vztahy, aby v poslední kapitole mohl být popsán samotný proces.

Jak jsme již uvedli, je získávání kvantově provázaných fotonů nezbytným předpokladem k realizaci kvantových počítačů pracujících s qubity fyzikálně reprezentovanými fotony. Kvantové algoritmy by přitom měly přinést podstatné zefektivnění řešení vybraných úloh a dokonce některé problémy, které jsou z hlediska klasických počítačů považovány za neřešitelné, by mohly být s pomocí kvantových počítačů řešeny. Uvedeme například Shorův faktorizační algoritmus, který dovoluje hledat prvočinitele přirozených čísel. Počet elementárních operací potřebných k vyřešení problému v jeho případě roste polynomiálně s délkou vstupu, naproti tomu v případě nejlepších faktorizačních algoritmů dnes používaných na klasických počítačích roste počet kroků exponenciálně. Tato úloha tak náleží z hlediska kvantových počítačů do třídy složitosti P , z hlediska klasických počítačů pak do třídy NP .³ To vše činí z kvantového počítání velmi atraktivní disciplínu, a to obzvláště dnes, kdy miniaturizace výrobní technologie procesorů užívaných v klasických počítačích již naráží na své fyzikální limity.

Sestupná parametrická frekvenční konverze v soustavě nelineárních vlnovodů pak představuje jednu z možných cest, jak kvantově provázané stavy získávat (samotná frekvenční konverze má pak význam například v metrologii při stanovování kvantové účinnosti fotonových detektorů, dále na ní lze experimentálně demonstrovat porušení Bellových nerovností a ověřit tak platnost kvantové teorie). Důležitá je zejména možnost spolehlivě a snadno kontrolovat tvary výstupních korelací generovaných fotonových párů (jak jsme viděli, stačí k tomu měnit parametry čerpacího pole). Dalšími výhodami takového přístupu jsou mimo jiného dostupnost a ověřenost použitých komponent, malé rozměry samotného zařízení či možnost realizovat kvantové procházky přímo v soustavě vlnovodů (nedochází k tzv. dekoherenci kvantového stavu, která může být způsobena mimo jiného právě spojováním různých zařízení). Z experimentálního ověření pak plyne, že uvedený matematický model velmi dobře popisuje chování uvažovaného systému.

³Problémy patřící do třídy P lze řešit pomocí algoritmů v polynomiálním čase. Řešení problémů patřících do třídy NP lze v polynomiálním čase ověřit, ale nemusí existovat algoritmus, který by problém v polynomiálním čase řešil.

Literatura

- [1] Nielsen, M. A., Chuang, I. L. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. 676 s.
- [2] Blank, J., Exner, P., Havlíček, M. Lineární operátory v kvantové fyzice. Karolinum, Praha, 1993. 678 s.
- [3] Pytlíček, J. Lineární algebra a geometrie. ČVUT, Praha, 2008. 122 s.
- [4] Formánek, J. Úvod do kvantové teorie. Academia, Praha, 2004. 987 s.
- [5] Dušek, M. Koncepční otázky kvantové teorie. Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2002. 236 s.
- [6] <<http://www.hindawi.com/journals/amp/2010/482598/fig1/>> [cit. 6. 4. 2013]
- [7] Barnett, S. M., Radmore, P. M. Methods in Theoretical Quantum Optics. Oxford University Press, Oxford, 2005. 284 s.
- [8] Peřina, J. Quantum Statistics of Linear and Nonlinear Optical Phenomena. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1984. 310 s.
- [9] Tolar, J. Vlnění, optika a atomová fyzika. Skripta ČVUT, 2008. 142 s.
- [10] <http://en.wikipedia.org/wiki/Spontaneous_parametric_down-conversion> [cit. 21.4.2013]
- [11] Soubusta, J. Využití sestupné frekvenční parametrické konverze v optických experimentech. Habilitační práce, Olomouc, 2009.
- [12] Mandel, L., Wolf, E. Optical Coherence and Quantum Optics. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. 1166 s.
- [13] Bellec, M., Nikolopoulos, G. M., Tzortzakis, S. State transfer Hamiltonians in photonic lattices (Quantum State Transfer and Network Engineering). Springer, nevydáno.
- [14] Solntsev, A. S., Sukhorukov, A. A., Neshev, D. N., Kivshar, Y. S. Spontaneous Parametric Down-Conversion and Quantum Walks in Arrays of Quadratic Nonlinear Waveguides. Phys. Rev. Lett. 108, 023601(1-5) (2012).
- [15] Kruse, R., Katzschnmann, F., Christ, A., Schreiber, A., Wilhelm, S., Laiho, K., Gábris, A., Hamilton, C. S., Jex, I., Silberhorn, C. Spatio-spectral characteristics of parametric down-conversion in waveguide arrays. arXiv:1305.6806 [quant-ph].