

**České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská**

**Katedra fyziky
Obor: Matematická fyzika**



Energetické ztráty nabité částice v plazmatu

Energy losses of charged particle in the plasma

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval: Bc. Hana Zemanová
Vedoucí práce: RNDr. David Břeň, Ph.D.
Rok: 2013

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svůj výzkumný úkol vypracovala samostatně a použila jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č.121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne

.....
Bc. Hana Zemanová

Poděkování

Děkuji RNDr. Davidu Břeňovi, Ph.D. za vedení mého výzkumného úkolu a za podnětné návrhy, které ji obohatily. Též děkuji Michalovi Špačkovi, Jiřímu Hanušovi a mé rodině, bez jejichž podpory by tato práce nikdy nevznikla.

Bc. Hana Zemanová

Obsah

Seznam symbolů	6
Úvod	8
1 Lineární vlny v plazmatu	9
1.1 Plazma	9
1.2 Cyklotronní a plazmová frekvence	10
1.3 Elektromagnetické vlny	11
1.3.1 R a L vlny	13
2 Teorie	15
2.1 Pohybová rovnice	15
2.2 Kinetická teorie	16
3 Závěry z pohybové rovnice	17
3.1 Závislost tvaru kvadratury na změně fyzikálních podmínek pro elektron- elektronové srážky	18
3.2 Srážky elektronů s různými druhy částic	19
Závěr	21
Seznam použitých zdrojů	22
Přílohy	23
A Coulombova interakce	24
A.1 Debyeova stínicí vzdálenost	24
A.2 Chandrasekharova a chybová funkce	25

Seznam symbolů

∇_x	nabla od polohy částice
$\mathbf{A}$	vektorový potenciál
b	záměrný parametr
b_0	kritický záměrný parametr
c	rychlost šíření světla
$d\sigma$	diferenciální účinný průřez
e	elementární náboj,
e	Eulerovo číslo
E	velikost intenzity elektrického pole
E_{prah}	velikost prahové intenzity elektrického pole
f_α	hustota pravděpodobnosti výskytu částic druhu α
g	velikost vektoru relativní vzájemné rychlosti
$G_{\alpha\beta}$	druhý Rosenbluthův potenciál
$H_{\alpha\beta}$	první Rosenbluthův potenciál
$\mathbf{k}$	jednotkový vektor ve směru relativní vzájemné rychlosti
k_B	Boltzmannova konstanta
$\ln \Lambda$	Coulombův logaritmus
m_α	hmotnost částic druhu α
$\mathbb{M}$	matice M
N_m	koncentrace molekul vzduchu
n_α	koncentrace částic druhu α
Q_α	náboj částic druhu α
$\mathbf{S}_{\alpha\beta}$	Boltzmannův srážkový integrál
T_α	teplota částic druhu α
$\mathbf{v}_T$	těžišťová rychlost
$\mathbf{v}_{\alpha\beta}$	relativní vzájemná rychlost částic druhu α a β
z	výška nad zemským povrchem
z_{prum}	průměrný náboj atomového jádra molekul dusíku a kyslíku
Z	stupeň ionizace plazmatu, dvojnásobek průměrného náboje atomového jádra molekul dusíku a kyslíku

ε	energie částice
ε_0	permitivita vakua
ε_i	ionizační energie
ε_l	energie vyraženého elektronu
λ_D	Debyova stínící vzdálenost
μ	redukována hmotnost
$\phi(x)$	chybová funkce
ϕ_1	potenciální funkce bouřkového oblaku před začátkem blesku
ϕ_2	sekundární potenciální funkce výbojového kanálu
ϕ_L	potenciální funkce na povrchu zpětného výboje
χ	úhel rozptylu
$\psi(x)$	Chandrasekharova funkce

Úvod

Téma bouřky jsem si vybrala, protože mě bouřky fascinují. Studuji chování elektronu vzniklého z kosmického záření a v neposlední řadě na podmínky, za kterých bude urychlován.

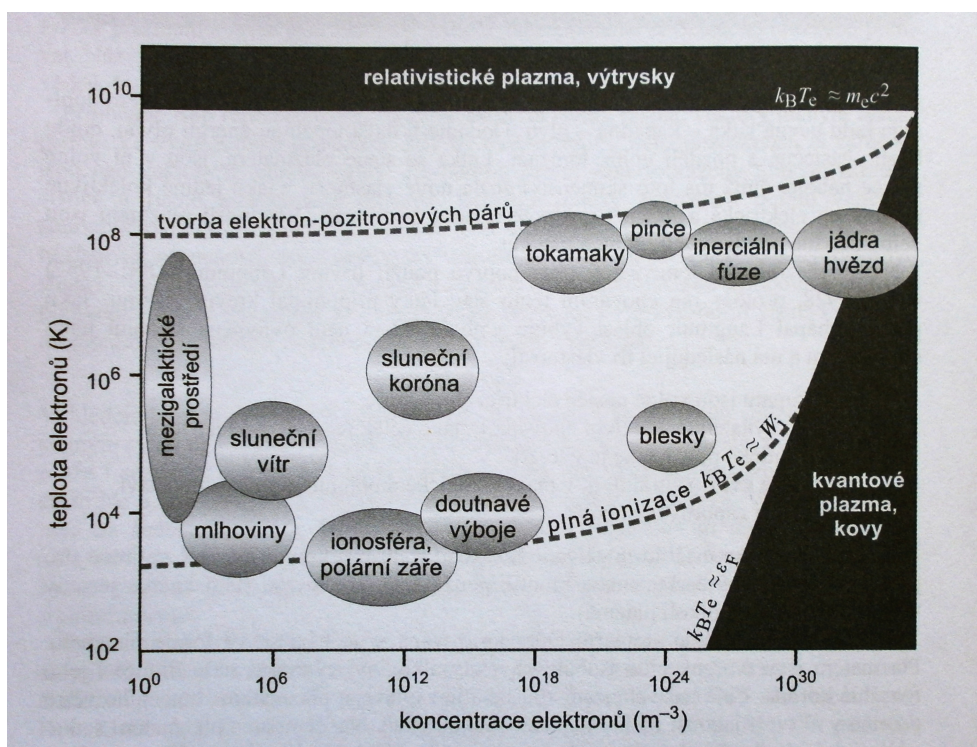
Jedním z cílů mé práce je ověřit, zda se elektrony opravdu urychlují v poli bouřkového oblaku. Za tímto účelem jsem sestavila pohybovou rovnici pro elektron vycházející z Fokkerovy-Planckovy rovnice, což je varianta Boltzmannovy rovnice. Jmenované rovnice jsou sestaveny, aniž by byly vzaty v úvahu relativistické efekty. Nejpodstatnějším členem v pohybové rovnici, na jehož studium jsem se zaměřila, je příspěvek od R vlny.

Kapitola 1

Lineární vlny v plazmatu

1.1 Plazma

Plazma je kvazineutrální oblast výboje v plynu obsahující volné nosiče náboje, která vykazuje kolektivní chování [1]. Plazma se dělí podle různých kriterií na druhy, například podle stupně ionizace či zda se tvoří v něm tvoří elektron-pozitronové páry. Nejčastěji se plazma klasifikuje podle koncentrace elektronů a teploty elektronů, jak lze vidět na následujícím obrázku:



Obrázek 1.1: Diagram znázorňující různé druhy plazmatu pro vodíkové plazma [1].

1.2 Cyklotronní a plazmová frekvence

Cyklotronní frekvence ω_c je spojena s *pohybem nabité částice v homogenním magnetickém poli $\mathbf{B}$* . Pokud se částice s nábojem Q o hmotnosti m začne pohybovat kolmo na magnetické pole rychlostí $v_\perp$, bude rotovat v rovině kolmé na magnetické pole po kružnici s **Larmorovým poloměrem** R_L s **cyklotronní frekvencí** ω_c :

$$R_L \equiv \frac{mv_\perp}{QB}, \quad \omega_c \equiv \frac{QB}{m} \quad (1.1)$$

kde B je velikost vektoru magnetické indukce: $B = |\mathbf{B}|$. Pokud rychlost nabité částice bude mít složku rovnoběžnou s magnetickým polem, pak výsledný pohyb bude probíhat po šroubovici, protože je složen z popsané **Larmorovy rotace (gyrace)** a rovnoměrného přímočarého pohybu ve směru pole.

Plazmová frekvence souvisí s plazmovými oscilacemi. Mějme plazma *bez magnetického pole*, ale s elektrickým polem $\mathbf{E}$. Vlna procházející plazmatem v něm vyvolá tři druhy módů: **plazmové oscilace** a **plazmové a iontové vlny**. Jak vyplývá z Maxwellovy rovnice ($\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$), jedná se v tomto případě o podélné vlny, tj. $\mathbf{k} \parallel \delta \mathbf{E}$. Na podnět zvenku se nejprve posune pole elektronů, protože elektrony mají menší hmotnost. Vznikne tak elektrické pole, neboť se pohnou i ionty. Díky rozdílné hmotnosti ionty i elektrony oscilují na jiných frekvencích a musíme použít dvoutekutinový model. V tomto případě máme disperzní relaci:

$$\left[(\omega^2 - \omega_{pe}^2)(\omega^2 - \omega_{pi}^2) - \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 \right]^2 \left[(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - c_e^2 k^2)(\omega^2 - \omega_{pi}^2 - c_i^2 k^2) - \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 \right] = 0, \quad (1.2)$$

kde ω je úhlová frekvence vlny, $\mathbf{k}$ její vlnový vektor a c_e^2 , resp. c_i^2 jsou „**rychlost zvuku**“ elektronů, resp. iontů dané vztahy:

$$c_e^2 \equiv \frac{\gamma_e k_B T_e}{m_e}, \quad \text{resp.} \quad c_i^2 \equiv \frac{\gamma_i k_B T_i}{m_i}.$$

V těchto vztazích γ_e , resp. γ_i značí polytropický koeficient pro elektrony, resp. ionty, k_B značí Boltzmannovu konstantu, T_e , resp. T_i je teplota elektronů, resp. iontů, m_e , resp. m_i jsou hmotnosti elektronů, resp. iontů.

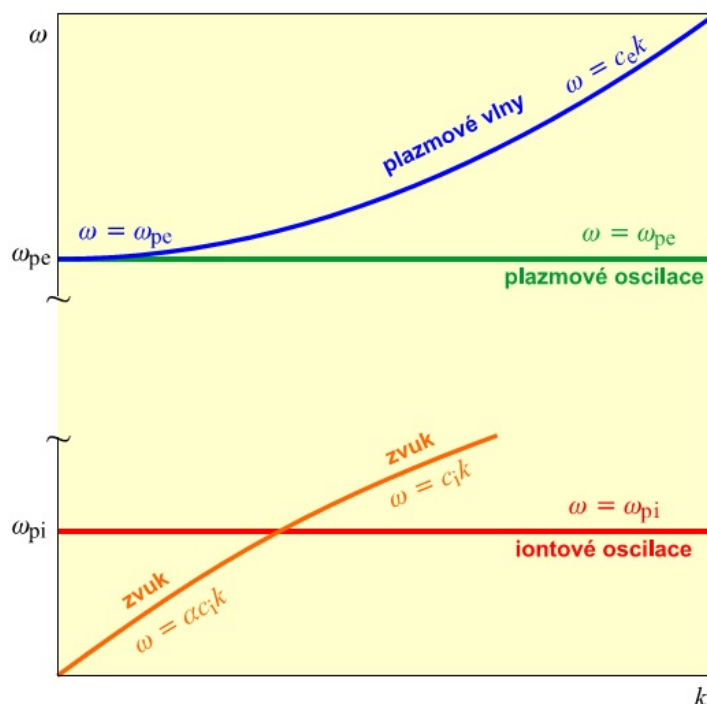
V disperzní relaci se také vyskytuje **plazmová frekvence elektronů** ω_{pe} , resp. **iontů** ω_{pi} dané vztahy:

$$\omega_{pe}^2 \equiv \frac{n_{e0} e^2}{m_e \epsilon_0}, \quad \text{resp.} \quad \omega_{pi}^2 \equiv \frac{n_{i0} e^2}{m_i \epsilon_0}, \quad (1.3)$$

kde n_{e0} , resp. n_{i0} jsou koncentrace elektronů, resp. iontů, e je elementární náboj, m_e , resp. m_i jsou hmotnosti elektronů, resp. iontů a ϵ_0 je permitivita vakua.

První závorka v disperzní relaci (1.2) odpovídá plazmovým oscilacím, protože neobsahuje vlnový vektor. Jedná se o oscilace elektronů a iontů na frekvenci $\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2$. Protože hmotnost elektronů je mnohem menší než hmotnost iontů, druhý člen je zanedbatelný. V limitním případě nekonečné hmotnosti iontů, dochází k oscilacím přesně na plazmové frekvenci elektronů a ionty by zůstávaly nehybné.

V druhé závorce (1.2) se již vlnový vektor vyskytuje, jedná se o plazmové vlny. Jako vždy, systém se chová jinak, pokud má vlna nízkou nebo vysokou frekvenci. Pro vysoké frekvence, které odpovídají limitnímu případu nekonečně hmotných iontů, se pohybují jen elektrony. Pro nízké frekvence, které odpovídají limitnímu případu nehmotných elektronů, se ionty pohybují na záporném pozadí elektronů, protože elektrony zareagují na podnět okamžitě a vždy jsou tam, kde jsou potřeba.



Obrázek 1.2: Zobrazení disperzní relace (1.2) pro plazma bez magnetického pole [1].

1.3 Elektromagnetické vlny

Mějme plazma složené z iontů a elektronů o koncentraci n_e s konstantním magnetickým polem $\mathbf{B}_0$. Plazmatem prochází vysokofrekvenční elektromagnetická vlna $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \exp(i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t))$, kde $\mathbf{E}_1$ je amplituda vlny, $\mathbf{k}$ její vlnový vektor a ω její úhlová frekvence, $\mathbf{x}$, t jsou její souřadnice. Jelikož ionty jsou mnohem hmotnější než elektrony, bude elektromagnetická vlna interagovat především s elektrony a pohyb iontů můžeme zanedbat. Pohyb elektronů také budí elektrické pole.

Při výpočtu disperzní relace jsme zavedli následující předpoklady:

- Předpokládáme (limitně) nekonečnou hmotnost iontů, které se tedy nehýbají.
- Máme chladné plazma, tj. zanedbáváme tepelný/chaotický pohyb a gradient tlaku je nulový.
- Díky Maxwellovým rovnicím platí: $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \neq 0$ a nelze zanedbat elektrické pole.

Za těchto předpokladů sestavíme výchozí soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div}(n_e \mathbf{u}_e) &= 0, \\
m_e n_e \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} + m_e n_e (\mathbf{u}_e \cdot \nabla) \mathbf{u}_e &= -en_e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \\
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\operatorname{rot} \mathbf{E}, \\
\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}; \quad \mathbf{j} = -en_e \mathbf{u}_e,
\end{aligned} \tag{1.4}$$

kde m_e je hmotnost elektronů, $\mathbf{u}_e$ jejich rychlost. $\mathbf{E}$, resp. $\mathbf{B}$ jsou elektrické, resp. magnetické pole a $\mathbf{j}$ je proudová hustota. ε_0 je permitivita vakua a μ_0 je permeabilita vakua.

Standartními úpravami (linearizace, Fourierova transformace, snižování řádu soustavy, viz [1]) dostaneme následující soustavu rovnic pro poruchu elektrického pole $\delta \mathbf{E}$:

$$\mathbb{M}_E \cdot \delta \mathbf{E} = 0. \tag{1.5}$$

Při volbě souřadné soustavy tak, že vektor magnetické indukce $\mathbf{B}_0$ míří ve směru osy z a vlnový vektor $\mathbf{k}$ leží v rovině xz , tj.

$$\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0), \mathbf{k} = (k \sin \alpha, 0, k \cos \alpha),$$

má matice soustavy $\mathbb{M}_E$ tvar:

$$\mathbb{M}_E = \begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2 \cos^2 \alpha, & i \frac{\omega_c}{\omega} (\omega^2 - c^2 k^2), & c^2 k^2 \cos \alpha \sin \alpha, \\ -i \frac{\omega_c}{\omega} (\omega^2 - c^2 k^2 \cos^2 \alpha), & \omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2, & -i \frac{\omega_c}{\omega} c^2 k^2 \cos \alpha \sin \alpha, \\ c^2 k^2 \cos \alpha \sin \alpha, & 0, & \omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2 \sin^2 \alpha. \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

kde c je rychlost světla ve vakuu, ω_c je cyklotronní frekvence, ω_p je plazmová frekvence, α je úhel mezi směrem šíření vlny a magnetického pole.

Z podmínky na nenulovost řešení vyplývá, že determinant matice soustavy musí být nulový. Z této podmínky vyjde disperzní relace elektromagnetického komplexu:

$$\begin{aligned}
& -[c^4 k^4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha] \cdot \left[(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2) - \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 (\omega^2 - c^2 k^2) \right] + [\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2 \sin^2 \alpha] \cdot \\
& \cdot \left[(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2 \cos^2 \alpha) \cdot (\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2) - \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 (\omega^2 - c^2 k^2) (\omega^2 - c^2 k^2 \cos^2 \alpha) \right] = 0.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Když se bude elektromagnetická vlna pohybovat kolmo na magnetické pole ($\alpha = 90^\circ$), vznikne tak řádná a mimořádná vlna, které jsou známé i z optiky. Ovšem v této práci jsou podstatné jevy vzniklé při šíření vlny podél pole, tj. $\alpha = 0$. V tomto případě disperzní relace 1.7 přejde na tvar:

$$[\omega^2 - \omega_p^2] \cdot \left[(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2)^2 - \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 (\omega^2 - c^2 k^2)^2 \right] = 0. \tag{1.8}$$

První závorka odpovídá plazmových oscilacím elektronů na plazmové frekvenci ω_p . Druhá závorka odpovídá dvěma dalším módům, R a L vlně.

1.3.1 R a L vlny

Pro R a L vlnu, tedy máme disperzní relaci odvozenou z (1.8):

$$\left(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2\right)^2 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 \left(\omega^2 - c^2 k^2\right)^2 = 0. \quad (1.9)$$

Tato disperzní relace se snadněji rozřeší vzhledem k ck :

$$c^2 k^2 = \omega^2 - \frac{\omega_p^2}{1 \mp \omega_c/\omega}. \quad (1.10)$$

Zavádí se nová veličina, **index lomu** daný vztahem

$$N(\omega) \equiv \frac{ck(\omega)}{\omega}. \quad (1.11)$$

Index lomu závisí nejen na frekvenci, ale i na magnetickém poli (díky cyklotronní frekvenci) a koncentraci (díky plazmové frekvenci), viz (1.1) a (1.3). V tomto případě index lomu má tvar:

$$N^2 = 1 - \frac{(\omega_p/\omega)^2}{1 \mp \omega_c/\omega}. \quad (1.12)$$

Pokud je N^2 záporná, pak je index lomu imaginární a vlna je utlumena. Aby se vlna šířila, druhá mocnina indexu lomu musí nabývat hodnot mezi nulou a nekonečnem. V krajních bodech dochází k zvláštnímu chování plazmatu. V případě, že se index lomu blíží nekonečnu, tj. fázová rychlost $v_f \rightarrow 0$, dochází k **mezní situaci**, tzv. „**cut-off**“, který označuje hranici mezi šířením a nešířením vlny. Pravou a levou mezní frekvenci lze snadno odvodit z (1.12):

$$\omega_{R,L} \equiv \mp \frac{\omega_c}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}. \quad (1.13)$$

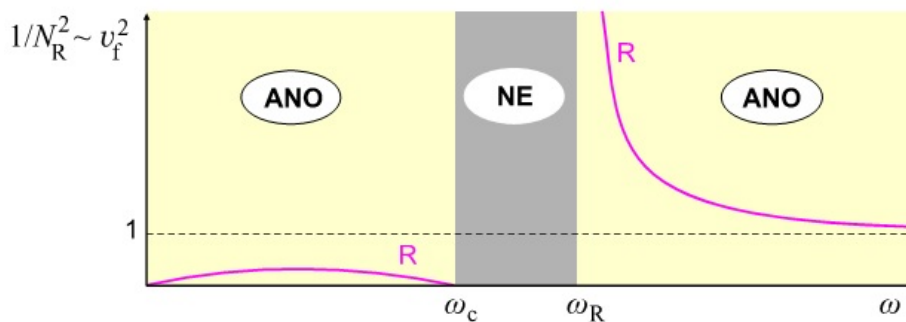
V případě, že se index lomu blíží nule, tj. fázová rychlost $v_f \rightarrow \infty$, dochází k **rezonanci**. Ta nastává pouze pro R vlnu při frekvenci $\omega = \omega_c$. Protože elektron běží po pravotočivé šroubovici podél magnetické siločáry (rychlostí ω_c) stejně jako elektrické pole, dochází k mnohem většímu urychlení elektronů podél magnetických siločár a vznikají tak „zabijácké elektrony“. Studium elektronů urychlených R-vlnou je předmětem této práce.

Abychom zjistili, jak jsou vlny polarizované, musíme provést směrovou analýzu. Matice soustavy pro poruchu elektrického pole (1.6) získá tvar:

$$\mathbb{M}_E = \begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2, & i\frac{\omega_c}{\omega}(\omega^2 - c^2 k^2), & 0, \\ -i\frac{\omega_c}{\omega}(\omega^2 - c^2 k^2), & \omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2, & 0, \\ 0, & 0, & \omega^2 - \omega_p^2. \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Po dosazení z (1.10) dostaneme:

$$\delta E_y = \pm i \delta E_x, \quad \delta E_z = 0.$$



Obrázek 1.3: Disperzní relace R vlny. K šíření vlny dochází jen ve světlých pásech. [1]

Tedy x -ová složka vlny kmitá posunutě vůči y -ové, protože i znamená zpoždění o $\frac{\pi}{2}$. Vlna je tedy kruhově polarizovaná, konec vektoru poruchy elektrického pole kmitá po kružnici. Jedná se tedy o pravotočivě (R , dolní znaménko) a levotočivě (L , horní znaménko) polarizovanou kruhovou vlnu. Z rovnic také vyplývá, že porucha elektrického je kolmá na homogenní magnetické pole, $\delta \mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$. Vlna se tedy šíří ve směru osy z : $\delta E_x = A \exp(i(kz - \omega t))$. Reálná část je rovna: $\text{Re} \delta E_x = A \cos(\omega t)$ (prostorová část vlny byla zahrnuta do A) a stejně tak reálná část $\text{Re} E_y = \pm A \sin(\omega t)$.

Kapitola 2

Teorie

Tématem této práce je ověřit, jak urychlované elektrony v bouřkových oblacích budou reagovat na R vlnu. Přestože se jedná o relativistický problém, lze ho v určitém přiblížení studovat nerelativisticky. Jako výchozí rovnice byla zvolena Fokkerova-Planckova rovnice (2.4), jejíž rozšíření do oblasti speciální relativity se zatím nepodařilo nalézt.

2.1 Pohybová rovnice

Elektrony z kosmického záření při „padání na zem“ procházejí i oblastí, kde vznikají bouřkové oblaky. Při vzniku blesku se v oblaku vytváří oblast plazmatu, ve které prolítávající elektron může způsobit jev zvaný "runaway breakdown"[4]. Tuto situaci lze matematicky popsat jako monochromatický svazek α nalétávající do homogenního izotropního maxwellovského plazmatu (částice druhu β), který je v něm brzděn na rychlost $\mathbf{v}(t)$. V plazmatu zároveň působí slabé elektrické pole s intenzitou E urychlující svazek α . Hustota pravděpodobnosti monochromatického svazku, jehož částice mají stejnou rychlost a koncentraci, je dána Diracovou distribucí a hustota pravděpodobnosti terče je dána Maxwellovým rozdělením:

$$f_{\alpha} = n_{\alpha} \delta(\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}(t)); \quad f_{\beta} = n_{\beta} \left(\frac{m_{\beta}}{2\pi k_B T_{\beta}} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{mv_{\beta}^2}{2k_B T_{\beta}} \right).$$

V této práci je intenzita elektrického pole v bouřkovém oblaku složena ze dvou příspěvků: z homogenního magnetického pole E_0 a z R vlny $E = E_1 \cos(kx - \omega t)$, tj. $E = E_0 + E_1 \cos(kx - \omega t)$. Do rovnice byla přidána R vlna, protože jak R vlna, tak studovaný elektron se pohybují po pravotočivé šroubovici kolem siločáry magnetického pole. Magnetické pole nebylo zahrnuto, protože nepřispívá k urychlování nabitých částic. Za těchto podmínek lze z kinetické teorie odvodit pohybovou rovnici:

$$\ddot{x} = \frac{QE_0}{m_{\alpha}} - C \cdot \psi \left(\frac{v}{v_{0\beta}} \right) + \frac{QE_1}{m_{\alpha}} \cos(kx - \omega t), \quad (2.1)$$

kde ψ je Chandrasekharova funkce (A.5) a

$$v_{0\beta} = \sqrt{\frac{2k_B T_\beta}{m_\beta}}, \quad (2.2)$$

$$C = 2n_\beta \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta} K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} v_{0\beta}^{-2}. \quad (2.3)$$

2.2 Kinetická teorie

Použitá pohybová rovnice byla odvozena pomocí kinetické teorie. Mějme plazma blízko termodynamické rovnováhy: svazek terčových částic druhu β , do kterého nalétává svazek částic druhu α . Interakce obou svazků je popsána pomocí Coulombovských srážek vybraných částic z nalétávajícího a terčového svazku, majících určitou hmotnost m_α , příp. m_β , náboj Q_α , příp. Q_β . Při studiu srážek se přechází do *těžišťové soustavy*: k **těžišťové rychlosti** $\mathbf{v}_T$ a k **relativní vzájemné rychlosti**, kterou označíme $\mathbf{g} \equiv \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_T + \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \mathbf{v}_{\alpha\beta}$.

Jako výchozí rovnice byla zvolena používaná Fokkerova-Planckova rovnice [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_\alpha + (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} (\mathbf{F}_\alpha \cdot \nabla_{\mathbf{v}}) f_\alpha &= S_{\alpha\beta}; \\ S_{\alpha\beta} &= K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \left[-\frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta} \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (f_\alpha \nabla_{\mathbf{v}} H_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2} (\nabla_{\mathbf{v}} \nabla_{\mathbf{v}}) : (f_\alpha \nabla_{\mathbf{v}} \nabla_{\mathbf{v}} G_{\alpha\beta}) \right], \end{aligned} \quad (2.4)$$

kde $f_\alpha = f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha)$ je hledaná hustota pravděpodobnosti výskytu částic druhu α a

$$K_{\alpha\beta} \equiv 4\pi \left(\frac{Q_\alpha Q_\beta}{4\pi\epsilon_0 m_\alpha} \right)^2; \quad \ln \Lambda_{\alpha\beta} \equiv \ln \left(\frac{\lambda_D}{b_0} \right) \quad (2.5)$$

a

$$H_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha) \equiv \int \frac{1}{g} f_\beta d^3 \mathbf{v}_\beta; \quad G_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha) \equiv \int g f_\beta d^3 \mathbf{v}_\beta. \quad (2.6)$$

$\ln \Lambda$ se nazývá Coulombův logaritmus, $:$ je dvojný skalární součin, λ_D je Debyeova stínící vzdálenost (A.4) a b_0 je kritický záměrný parametr (A.2) Coulombova rozptylu, $H_{\alpha\beta}$ a $G_{\alpha\beta}$ jsou Rosenbluthovy potenciály. Protože monochromatický svazek je ekvivalentní jedné vyslané částici, nebude jevit difúzi a Rosenbluthův potenciál $G_{\alpha\beta}$ bude roven nule.

V této situaci první moment Fokkerovy-Planckovy rovnice bude mít tvar:

$$\frac{\partial \mathbf{v}(t)}{\partial t} + \frac{Q_\alpha \mathbf{E}}{m_\alpha} = \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta} K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} 2v_{0\beta}^{-2} \psi \left(\frac{v}{v_{0\beta}} \right) \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad (2.7)$$

což je již pohybová rovnice (2.1).

Kapitola 3

Závěry z pohybové rovnice

Za výchozí bod urychlování jsem zvolila **D-vrstvu ionosféry**, která se nachází ve výšce přibližně 80 km (ve dne leží mezi 60 km a 90 km výšky) [2] [3]. V této výšce je teplota přibližně 200 K [3]. Jak už název napovídá, v ionosféře dochází k ionizaci molekul vzduchu. Protože koncentrace neutrálních částic je větší než koncentrace elektronů a iontů, má ionosféra vlastnosti slabě ionizovaného plazmatu [2]. V dané výšce je koncentrace elektronů přibližně 10^4 cm^{-3} , iontů NO^+ přibližně 10^3 cm^{-3} a iontů O_2^+ přibližně $5 \cdot 10^2 \text{ cm}^{-3}$ [2]. Tuto nejspodnější vrstvu ionosféry jsem zvolila ze dvou důvodů: prvním jsou vlastnosti ionosféry (ionosféra obsahuje volné elektrony) a druhým je blízkost k zemi, a tedy i nejkratší dolet elektronů do bouřkových oblaků.

Detailní studium pohybové rovnice (2.1) a její kvadratury jsem provedla pro případ elektron-elektronových srážek. Vzhledem k jejímu tvaru jsem její kvadraturu našla numericky, pomocí programovacího jazyka Fortran 90, viz příloha B. Její řešení jsem hledala na oblasti, kde se elektron může stát ubíhajícím, tj. pro rychlosti splňující

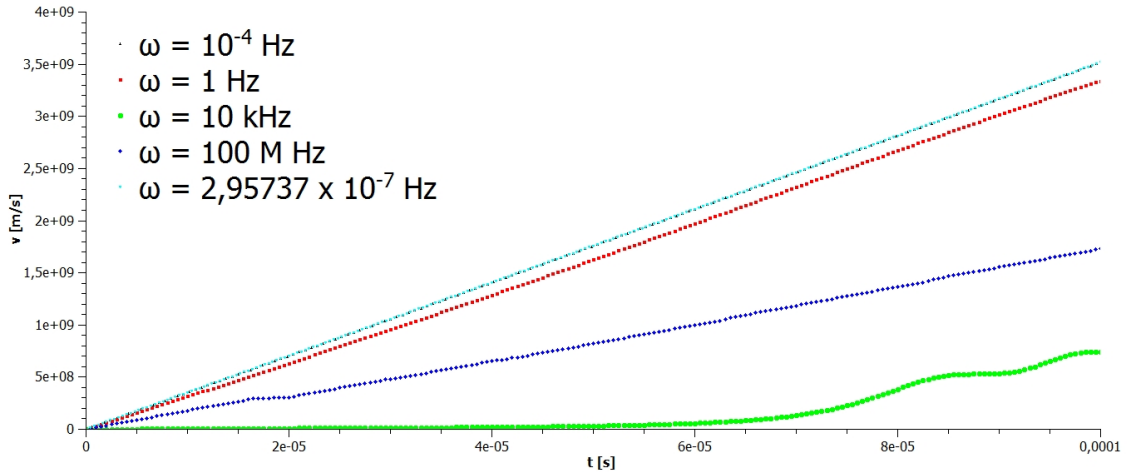
$$\psi\left(\frac{v}{v_{0\beta}}\right) < \frac{QE}{mC} \doteq 6,87 \cdot 10^5. \quad (3.1)$$

Pro počáteční rychlost v_0 ležící na spodní hranici této oblasti je kvadratura pohybové rovnice vyobrazena na následujících dvou obrázcích 3.1 a 3.2. Souřadnice polohy byla zvolena tak, že míří směrem dolů k Zemi a její počátek leží na zemském povrchu. Počáteční poloha byla zvolena ve výšce 80 km nad zemským povrchem. Výpočtem lze také zjistit, že urychlený elektron dosáhne zemského povrchu (uletí přibližně 80 kma jeho x -ová souřadnice bude nulová) řádově za stovky μs , viz tabulka 3. Z tabulky je také patrné, že elektron bude urychlován více pro malé frekvence R vlny. V situaci bez R vlny elektron dorazil na zemský povrch za $9,6 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ s rychlostí $1,7 \cdot 10^9 \text{ ms}^{-1}$ [4]. Z tohoto porovnání je zřejmé, že R vlna elektron urychluje nejvíce pro malé frekvence.

Jak je zřejmé z uvedeného, podle tohoto modelu tedy rychlost překročí za určitý čas rychlost světla (dokonce ještě předtím, než dosáhne zemského povrchu), což je v rozporu s fyzikálními zákony. Tento rozpor pramení z nerelativistického pojetí a předesílá nutnost relativistického řešení. Ovšem nalézt srážkový člen Fokkerovy-Planckovy rovnice v speciálně relativistickém oboru je velice obtížné.

úhlová frekvence	čas nárazu	rychlost při nárazu
1 Hz	$7,03 \cdot 10^{-5}$ s	$2,34 \cdot 10^9$ m/s
$\omega_c/2$	$9,38 \cdot 10^{-5}$ s	$1,7 \cdot 10^9$ m/s
10^7 Hz	$9,35 \cdot 10^{-5}$ s	$1,705 \cdot 10^9$ m/s

Tabulka 3.1: Dosažení zemského povrchu elektronem při počáteční rychlosti $v_0 = 66$ m/s.

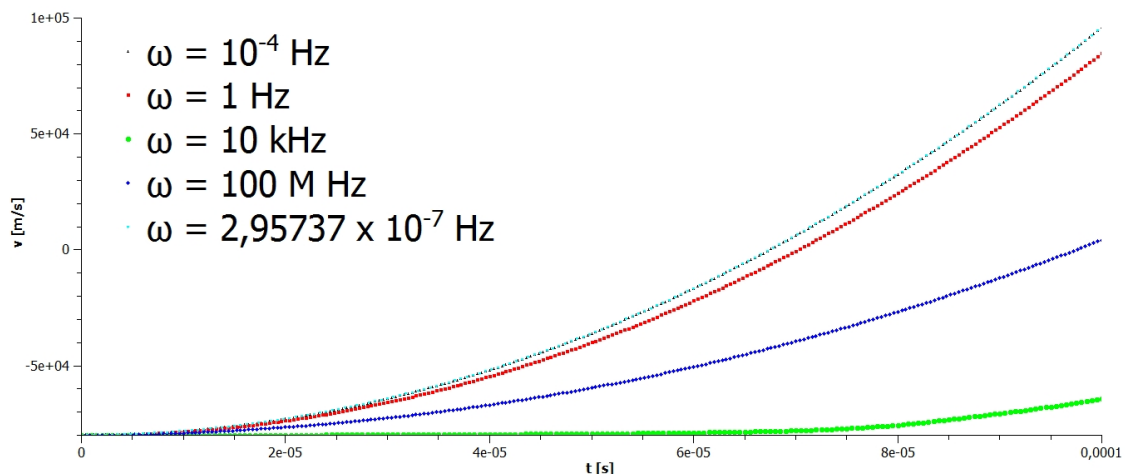


Obrázek 3.1: Graf závislosti rychlosti na čase pro $v_0 = 66$ m/s a $E_0 = E_1 = 100$ V/m.

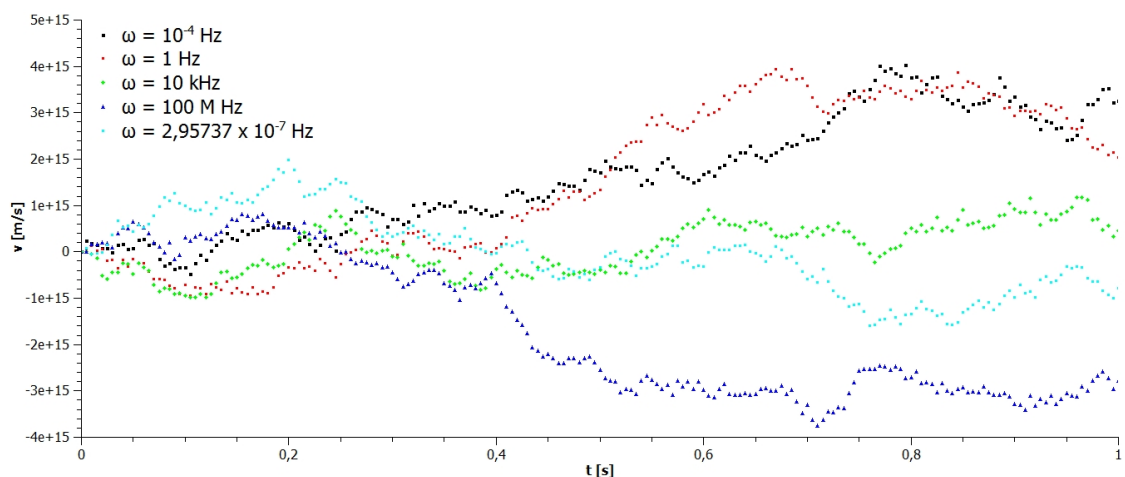
3.1 Závislost tvaru kvadratury na změně fyzikálních podmínek pro elektron-elektronové srážky

Jak lze nahlédnout z obrázku A.1, se zvýšením intenzity elektrického pole se průsečík grafu Chandrasekharovy funkce s konstantou $\frac{QE}{m_0 c}$ posune směrem doleva (v oblastech velkých rychlostí). Vzhledem k (3.1) to také znamená, že při zmenšování intenzity elektrického pole se bude zvyšovat nejmenší možná rychlost, aby elektron mohl být urychlován, což je v souladu s očekáváním. Protože intenzity elektrického pole v bouřkovém oblaku nedosahují nijak zvlášť velkých hodnot, je lepší stavět model ubíhajících elektronů na nižších rychlostech. V souladu s tímto uvádím veškeré vypočítané hodnoty pro intenzitu elektrického pole $E_0 = 10^2$ V/m.

Ovšem intenzita elektrického pole R vlny tímto omezená není, proto ji lze volit libovolně. Jak lze nahlédnout z porovnání obrázků 3.1 a 3.3, se zvyšováním intenzity R vlny je rychlost čím dál více „rozvlněná“. V tomto případě se projevila závislost na frekvenci R vlny, což je v souladu s očekáváním. V případě menší intenzity R vlny „rozvlnění“ tak výrazné není, což je dáno tím, že R vlna má v tomto případě menší vliv na pozorovaný děj.



Obrázek 3.2: Graf závislosti polohy na čase pro $v_0 = 66$ m/s a $E_0 = E_1 = 100$ V/m.



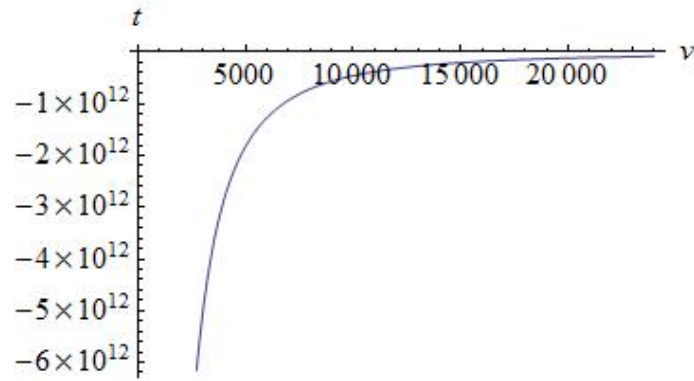
Obrázek 3.3: Graf závislosti rychlosti na čase pro $E_1 = 10^6$ V/m, $v_0 = 66$ m/s a $E_0 = 100$ V/m.

3.2 Srážky elektronů s různými druhy částic

V situaci, kdy se zanedbá R vlna, působící síla pro elektron-elektronové srážky je menší než v případě srážek elektronů s ionty O_2^+ , jak lze vidět z Obr. 3.4. Pro velké rychlosti ovšem rozdíl klesá k nule a síla pro všechny druhy srážek je přibližně stejná.

Ovšem v této práci je podstatné, jak chování systému změní R vlna. Protože R vlna rozkmitá převážně elektrony, mnohem hmotnější ionty naopak utlumí. Rychlost se po strmém poklesu ustálí na hodnotě okolo 5 – 10 m/s v závislosti na počáteční rychlosti a frekvenci R vlny. Pro velmi vysoké počáteční rychlosti bude elektron urychlován, obdobně jako v případě elektron-elektronových srážek.

Na závěr uvedu hodnoty konstant podstatných pro chování elektronu v ionosféře – viz Tab. 3.2. V prvním řádku je uvedena částice, se kterou se daný elektron sráží.



Obrázek 3.4: Graf rozdílu působící síly (bez R vlny) mezi elektron-elektronovými srážkami a srážkami elektronů s ionty O_2^+ .

	elektron	NO^+	O_2^+
n_β	10^{10} m^{-3}	10^9 m^{-3}	$5 \cdot 10^9 \text{ m}^{-3}$
$\{C\}$	$2,56 \cdot 10^7$	$9,74 \cdot 10^{10}$	$5,47 \cdot 10^{10}$
$v_{0\beta}$	77862 ms^{-1}	331 ms^{-1}	321 ms^{-1}
$v(0)$	$66,3 \text{ ms}^{-1}$	$17,5 \text{ ms}^{-1}$	$12,7 \text{ ms}^{-1}$
λ_D	$6,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$2,2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$	$3,1 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
b_0	$5,64 \cdot 10^{-5} \text{ m}$	$2,81 \cdot 10^{-5} \text{ m}$	$2,81 \cdot 10^{-5} \text{ m}$

Tabulka 3.2: Přehled použitých konstant pro srážky elektronu s různými částicemi.

Závěr

Ověřila jsem, že R vlna opravdu přispěje k urychlení elektronu za podmínky, že dominantní budou srážky s elektrony. Tyto jsem považovala za dominantní, protože srážející částice mají stejnou hmotnost, a proto si vymění nejvíce energie. V případě, že se elektron bude srážet s ionty vzduchu (NO^+ , a O_2^+), dojde naopak k jeho zpomalení na malé rychlosti.

Seznam použitých zdrojů

- [1] KULHÁNEK, Petr. *Úvod do teorie plazmatu*. Vyd. 1. Praha: AGA, 2011, 375 s. ISBN: 978-80-904582-2-2. Dostupné na: <<http://www.aldebaran.cz/studium/fpla.pdf>>.
- [2] PAPON, Jeremie, Morris COHEN, Benjamin COTTS a Naoshin HAQUE. *Ionospheric Morphology*. In: DEPARTMENT OF ELECTRICAL ENGINEERING, Stanford University. *STAR Lab: Science, Telecommunications, and Radioscience Laboratory* [online]. [cit. 2012-07-02]. Dostupné na: <http://nova.stanford.edu/~vlf/IHY_Test/Tutorials/TheIonosphere/-IonosphericMorphology.pdf>.
- [3] Ionosphere: Tutorial. GNSS RESEARCH GROUP, Royal Observatory of Belgium. *GNSS@ROB - Ionosphere* [online]. 2010 [cit. 2012-07-03]. Dostupné na: <http://gnss.be/ionosphere_tutorial.php>.
- [4] ZEMANOVÁ, Hana. *Urychlování elektronů v poli bouřkového oblaku*. Praha, 2012. Dostupné na: <http://physics.fjfi.cvut.cz/publications/mf/2011/bac_thesis_zemanova.pdf>. Bakalářská práce. FJFI ČVUT v Praze. Vedoucí práce RNDr. David Břeň, Ph.D.

Přílohy

Příloha A

Coulombova interakce

Při studiu Coulombova rozptylu se odvozuje vztah mezi **záměrným parametrem** b a úhlem rozptylu χ :

$$b = b_0 \cot \frac{\chi}{2}, \quad (\text{A.1})$$

kde b_0 je **kritický záměrný parametr** odpovídající úhlu rozptylu 90° , pro který platí:

$$b_0 \equiv \frac{Q_\alpha Q_\beta}{4\pi\epsilon_0\mu g^2}. \quad (\text{A.2})$$

Diferenciální účinný průřez lze odvodit jako

$$d\sigma = 2\pi b \, db = 2\pi b \left| \frac{db}{d\chi} \right| d\chi = \frac{b_0^2}{4 \sin^4 \frac{\chi}{2}} d\chi. \quad (\text{A.3})$$

A.1 Debyeova stínící vzdálenost

Mějme plazma složené z více druhů částic. Částice mají hmotnost m_α , náboj Q_α , kde α označuje příslušnost částice k druhu (přes indexy psané řeckými písmeny se nesčítá). Protože předpokládáme plazma blízko termodynamické rovnováhy, k vybrané testovací částici se přesunou částice opačné polarity a budou ji stínit, její potenciál bude exponenciálně ubývat. Na **Debyeově stínící vzdálenosti** λ_D pole i potenciál testovací částice poklesne na $1/e$ hodnoty dané Coulombovým zákonem. Proto můžeme brát v úvahu jen částice v Debyeově sféře testovací částice, což je koule se středem v testovací částici o poloměru λ_D . Pro Debyeovu stínící vzdálenost platí:

$$\lambda_D \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B}{\sum_\alpha Q_\alpha^2 n_{\alpha 0} / T_\alpha}}, \quad (\text{A.4})$$

kde $n_{\alpha 0}$ jsou počáteční koncentrace částic druhu α , T_α jejich teplota, k_B Boltzmannova konstanta a ϵ_0 je permitivita vakua.

Pokud je Z násobně ionizované plazma složené jen z elektronů a iontů stejné teploty, pak pro Debyeovu stínící vzdálenost můžeme psát jednoduchý vztah:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{(1+Z)n_e e^2}},$$

kde n_{e0} je počáteční koncentrace elektronů, e je elementární náboj, T je teplota plazmatu.

A.2 Chandrasekharova a chybová funkce

Chandrasekharova funkce ψ je definována vztahem:

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}x^2} \int_0^x \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi. \quad (\text{A.5})$$

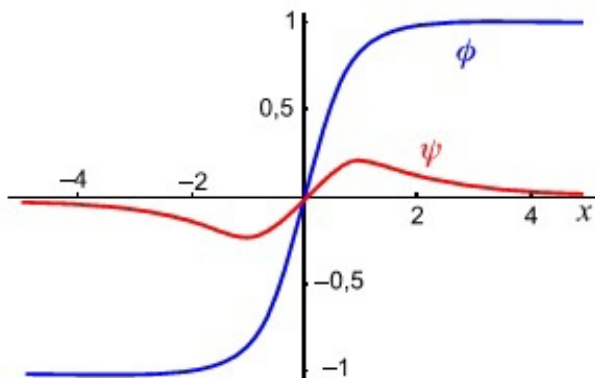
Chybová funkce ϕ je definována vztahem:

$$\phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi. \quad (\text{A.6})$$

Chandrasekharova a chybová funkce jsou svázány jednoduchým vztahem:

$$\psi(x) = \frac{\phi(x) - x\phi'(x)}{2\chi^2}. \quad (\text{A.7})$$

Obě funkce jsou vykresleny na Obr. A.1.



Obrázek A.1: Grafy Chandrasekharovy a chybové funkce [1].

Příloha B

Zdrojový kód programu

Programovací část práce jsem provedla v programovacím jazyce Fortran 90. Pro účely programu jsem zavedla bezrozměrnou rychlost $\bar{v}$ definovanou jako $\bar{v} = \frac{v}{v_{0\beta}}$. Zde je zdrojový kód programu:

```
PROGRAM RK_MovEq
USE IFunctions2
IMPLICIT NONE
CALL Main
CONTAINS
!*****
SUBROUTINE Main
IMPLICIT NONE
REAL(8) :: t0, v0, x0, w, k
REAL(8) :: a, b, num, E0, E1, C
CALL Pocatecni_podminka(t0, v0, x0, w, a, b, num, E0, E1, C)
CALL Integrace(v0, x0, w, k, a, b, num, E0, E1, C)
END SUBROUTINE Main
!*****
SUBROUTINE Pocatecni_podminka(t0, v0, x0, w, a, b, num, E0, E1, C)
REAL(8), INTENT (OUT) :: t0, v0, x0, a, b, num, E0, E1, C
REAL(8), INTENT(INOUT) :: w
REAL(8) :: w1, z
t0 = 0.
x0 = -8.D4 !pocatek urychlovani nad zemskym povrchem - v metrech
```

```

w = w_c/2 !uhlova frekvence R-vlny
v0 = 66.3822/v0b !pokud je v0 zadana pomoci Fazove rychlosti, pak se jiz nebezroz-
merizuje - jiz je bezrozmerna!!
w1 = Uhlova_frekvence(v0)
z = Fazova_rychlost(w1) !kontrola spravnosti vypoctu
write(*,*) 'Zadana rychlost je', v0
write(*,*) 'w1 je', w1
write(*,*) 'prislusna fazova rychlost je', z
write(*,*) 'rozdil v rychlostech je', v0-z !pokud vypocet spravne, tak by zde mela byt
nula
write(*,*) 'procentualni rozdil v rychlostech je', (v0-z)/v0
a = t0
b = a + 1. !dobre napsat b pomoci a - kdyz se zmeni a, nestane se, ze by b bylo nalevo
od a
num = 1.D3 !puvodne 1D7
E0 = 1.D2 !intenzita elektrickeho konstantniho pole, puvodne: 1D2
E1 = 1.D2 !amplituda R-vlny, puvodne: 1D2
C = Ckonst*1. !moznost prepinani mezi uplnou rovnici a rovnici bez treciho clenu
END SUBROUTINE Pocatecni_podminka
!*****

REAL(8) FUNCTION Disperzni_relace(w) !disperzni relace pro R- vlnu
REAL(8), INTENT(IN):: w
REAL(8) :: F, y
F = w**2 - w_p**2/(1-w_c/w)
write(*,*) 'F je', F
IF (F .GT. 0) THEN
Disperzni_relace = SQRT(w**2 - w_p**2/(1-w_c/w))/c_light
END IF
y = Fazova_rychlost(w)
write(*,*) 'Fazova rychlost je', y
END FUNCTION Disperzni_relace
!*****

REAL(8) FUNCTION Fazova_rychlost(w)

```

```

REAL(8), INTENT(IN):: w
REAL(8) :: N, N2
N2 = 1-((w_p/w)**2/(1-(w_c/w)))
write(*,*) 'N2 je', N2
N = DSQRT(N2)
Fazova_rychlost = c_light/(N*v0b) !deleni v0b pridane, aby vysledna rychlost byla
bezrozmerna
END FUNCTION Fazova_rychlost
!***** SUBROUTINE Integrace( v0, x0, w, k, a, b, num, E0, E1, C)
REAL(8), ALLOCATABLE :: V(:), X(:)
REAL(8), INTENT(IN) :: v0, x0, a, b, num
REAL(8), INTENT(INOUT) :: w, k, E0, E1, C
REAL(8) :: t1, dt1
INTEGER :: N, l, p, r, s, m
N = floor(num) !"zaokrouhli" hodnotu num dolu, aby vysledkem byl integer (potreba
pro allocate)
allocate(V(N+1)) !vektor rychlosti !plus 1 diky pouziti pocatecniho bodu
allocate(X(N+1)) !vektor polohy !plus 1 diky pouziti pocatecniho bodu
V(1)=v0
X(1)=x0
l = 1
t1=a
dt1=(b-a)/num
DO WHILE (t1 .LT. b)
l=l+1
V(l)= Integracni_krokV(t1, dt1, V(l-1), X(l-1), w, k, E0, E1, C)
X(l)= Integracni_krokX(t1, dt1, V(l-1), X(l-1), w, k, E0, E1, C)
t1=a+dt1*(l-1) !minus 1 diky pocitani k od jedne ne od nuly
END DO
!cast ukladajici do souboru
open (unit=2, file='rychlost.txt', status='replace', action='write') !otevreni souboru
na pozici 2
DO p=1, N+1

```

```

write (unit=2, fmt = '(ES15.5)') V(p)*v0b !8 oznacuje sirku pole outputu, 5 oznacuje
pocet mist za desetinnou teckou
END DO !nasobim v0b, aby vysledek byl v SI jednotkach
close (unit=2)
open (unit=3, file='cas.txt', status='replace', action='write') !otevreni souboru na
pozici 3
DO r=1, N+1
write (unit=3, fmt = '(f8.5)') a+dt1*(r-1) !8 oznacuje sirku pole outputu, 5 oznacuje
pocet mist za desetinnou teckou
END DO !pokud bude b vetsi nez 9, pak musim napsat 9 misto 8!
close (unit=3)
open (unit=7, file='poloha.txt', status='replace', action='write') !otevreni souboru
na pozici 7
DO s=1, N+1
write (unit=7, fmt = '(ES15.5)') X(s) !12 oznacuje sirku pole outputu, 5 oznacuje pocet
mist za desetinnou teckou
END DO
close (unit=7)
END SUBROUTINE Integrace
!*****
REAL(8) FUNCTION Integracni_krokX(t, krok, v, x, w, k, E0, E1, C)
REAL(8), INTENT(INOUT) :: t, krok
REAL(8), INTENT(INOUT):: v, x
REAL(8), INTENT(IN) :: w, k, E0, E1, C
REAL(8) :: K11, K21, K31, K41, K12, K22, K32, K42 !pomocne konstanty
REAL(8) :: G0, G1
G0 = G*E0
G1 = G*E1
K11 = v0b*v*krok
K12 = (G0 - C*Chandra(v) + G1*cos(k*x-w*t))*krok
K21 = v0b*(v + K12/2.)*krok
K22 = (G0 - C*Chandra(v+K12/2.) + G1*cos(k*(x+K11/2.)-w*(t+krok/2.)))*krok
K31 = v0b*(v + K22/2.)*krok

```

```

K32 = (G0 - C*Chandra(v+K22/2.) + G1*cos(k*(x+K21/2.)-w*(t+krok/2.)))*krok
K41 = v0b*(v + K32)*krok
K42 = (G0 - C*Chandra(v+K32) + G1*cos(k*(x+K31)-w*(t+krok)))*krok
Integracni_krokX = x + 1./6.*(K11+2*K21+2*K31+K41)
END FUNCTION Integracni_krokX
!*****

REAL(8) FUNCTION Integracni_krokV(t, krok, v, x, w, k, E0, E1, C)
REAL(8), INTENT(INOUT) :: t, krok
REAL(8), INTENT(INOUT):: v, x
REAL(8), INTENT(IN) :: w, k, E0, E1, C
REAL(8) :: K11, K21, K31, K41, K12, K22, K32, K42 !pomocne konstanty
REAL(8) :: G0, G1
G0 = G*E0
G1 = G*E1
K11 = v0b*v*krok
K12 = (G0 - C*Chandra(v) + G1*cos(k*x-w*t))*krok
K21 = v0b*(v + K12/2.)*krok
K22 = (G0 - C*Chandra(v+K12/2.) + G1*cos(k*(x+K11/2.)-w*(t+krok/2.)))*krok
K31 = v0b*(v + K22/2.)*krok
K32 = (G0 - C*Chandra(v+K22/2.) + G1*cos(k*(x+K21/2.)-w*(t+krok/2.)))*krok
K41 = v0b*(v + K32)*krok K42 = (G0 - C*Chandra(v+K32) + G1*cos(k*(x+K31)-
w*(t+krok)))*krok
Integracni_krokV = v + 1./6.*(K12+2*K22+2*K32+K42)
END FUNCTION Integracni_krokV
!*****

REAL(8) FUNCTION Uhlova_frekvence(v)
REAL(8), INTENT(IN) :: v
REAL(8) :: D2, D, alpha, beta
alpha = w_c/w_p
beta = (c_light/(v*v0b))**2 !v0b byla pridana, protoze vsechny rychlosti zde jsou
bezrozsmerne
D2 = alpha**2 * beta**2 - 4.* beta + 4.

```

```

IF (D2 .GE. 0) THEN
D = sqrt(D2)
ELSE
STOP 'Spatne zadana hodnota rychlosti.'
END IF

!write (*,*) 'D je', D
!write(*,*) '2w_p/D je', 2*w_p/D
Uhlova_frekvence = 2*w_p/(alpha*beta +D)
END FUNCTION Uhlova_frekvence
END PROGRAM RK_MovEq

A nakonec ještě vytvořené moduly:
MODULE Constants
SAVE
REAL(8), PARAMETER :: Pi = 3.141592653589793238462643D0
REAL(8), PARAMETER :: c_light = 2.997925D+8
REAL(8), PARAMETER :: m_el = 9.109534D-31
REAL(8), PARAMETER :: q_el = 1.602189D-19
REAL(8), PARAMETER :: permittivity = 8.854188D-12
REAL(8), PARAMETER :: permeability = 1.256637D-6
REAL(8), PARAMETER :: sigma = 5.67D-8
REAL(8), PARAMETER :: b = 0.00289
REAL(8), PARAMETER :: m_p = 1.672648D-27
REAL(8), PARAMETER :: Ckonst = 328.378 !preskalovana Ckonst z prave strany
REAL(8), PARAMETER :: G = 2.25888D+06 ! $Q/(v_0 b * m)$ , preskalovana konstanta u
elektrických poli
REAL(8), PARAMETER :: w_p = 5.64147D+06 !plasmova frekvence
REAL(8), PARAMETER :: w_c = 5.27643D+06 !cyklotronni frekvence, za predpo-
kladu B0 = 30 mikrotresla
REAL(8), PARAMETER :: v0b = 77862. ! $v_{0\beta}$  ... parametr ciloveho svazku
REAL(8), PARAMETER :: w_R = 8.86608D+06 !mezni frekvence R-vlny, zatim nikde
neni potreba
END MODULE Constants

A druhý:

```

```

MODULE IFunctions2
USE Constants
CONTAINS
!*****
REAL(8) FUNCTION Erf(X) ! Error function
REAL(8), INTENT (IN) :: X
REAL(8) EPS /1.0D-15/, X2, R, ER, C0
INTEGER(2) K
X2 = X*X
IF (DABS(X).LT.3.5D0) THEN
ER = 1.0D0
R=1.0D0
DO K=1,50
R=R*X2/(K+0.5D0)
ER=ER+R
IF (DABS(R).LE.DABS(ER)*EPS) EXIT
END DO
C0=2.0D0/DSQRT(PI)*X*DEXP(-X2)
Erf=C0*ER
ELSE
ER=1.0D0
R=1.0D0
DO K=1,12
R=-R*(K-0.5D0)/X2
END DO
ER=ER+R
C0=DEXP(-X2)/(DABS(X)*DSQRT(PI))
Erf=1.0D0-C0*ER
IF (X.LT.0.0) Erf=-Erf
ENDIF
END FUNCTION
! *****

```



```

REAL(8) FUNCTION Chandra(X) ! Chandrasekhar function
REAL(8), INTENT (IN) :: X
REAL(8) EPS /1.0D-2/
IF(DABS(X).LT.EPS) THEN
Chandra = 2*X/(3.*DSQRT(Pi))
ELSE
Chandra = (Erf(X)-2*X*DEXP(-X*X)/DSQRT(Pi))/(2.*X*X)
END IF
END FUNCTION
END MODULE IFunctions2

```