

**České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská**

**Katedra fyziky
Obor: Matematické inženýrství
Zaměření: Matematická fyzika**



Urychlování elektronů v poli bouřkového oblaku

Accelerating of electrons in the storm cloud field

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

**Vypracoval: Hana Zemanová
Vedoucí práce: RNDr. David Břeň, Ph.D.
Rok: 2012**

Před svázáním místo téhle stránky

vložíte zadání práce

 s podpisem děkana
(bude to jediný oboustranný list ve Vaší práci) !!!!

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracovala samostatně a použila jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č.121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne

.....
Hana Zemanová

Poděkování

Děkuji RNDr. Davidu Břeňovi, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce a za podnětné návrhy, které ji obohatily. Stejně tak děkuji i všem ostatním, kteří si moji práci přečetli a přispěli tak k jejímu konečnému tvaru.

Hana Zemanová

Název práce:

Urychlování elektronů v poli bouřkového oblaku

Autor: Hana Zemanová

Obor: Matematické inženýrství

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: RNDr. David Břeň, Ph.D.

Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská,
České vysoké učení technické v Praze

Abstrakt: V první části práce popisuji, jaké existují druhy blesků a jak vzniká a vyvíjí se blesk mezi oblakem a zemí se zápornou polaritou. Poté z elektrostatického hlediska popisuji hustoty náboje v bouřkovém oblaku a na povrchu vodivého kanálu blesku v různých částech jeho vývoje. Nakonec odvozuji nerelativistickou pohybovou rovnici pro elektron v D vrstvě ionosféry. Z jejího řešení vyplývá, že působením elektrického pole ionosféry elektron překoná energetické ztráty způsobené srážkami s molekulami atmosféry a může být tak urychlován až na relativistické rychlosti. Tímto jsem potvrdila reálnou existenci elektrického průrazu vzduchu podníceném ubíhajícími elektrony.

Klíčová slova: blesk, bouřka, ubíhající elektrony, urychlování elektronů

Title:

Accelerating of electrons in the storm cloud field

Author: Hana Zemanová

Abstract: In the first part of work, I describe different types of lightning strokes and how the negative cloud-to-ground lightning develops. Then I describe from electrostatic perspective the charge distribution in the storm cloud and on the surface of lightning in various parts of its development. Finally, I derive unrelativistic motion equation for an electron in the D layer of ionosphere. From its solution it follows that by the work of electric field of ionosphere the electron surmounts energetic losses caused by collisions with air molecules and can be accelerated to the relativistic speeds. Therefore, I confirmed the existence of the runaway breakdown.

Key words: lightning, thunderstorm, runaway breakdown, accelerating of electrons

Obsah

Seznam symbolů	8
Úvod	10
1 Úvod do problematiky	11
1.1 Plazma	11
1.2 Coulombova interakce	12
1.2.1 Debyeova stínící vzdálenost	12
1.2.2 Coulombův rozptyl	12
1.2.3 Chandrasekharova a chybová funkce	13
1.3 Bouřkový oblak a druhy blesků	14
1.4 Vznik blesku	15
1.4.1 Separace nábojů	16
1.4.2 Krokový kanál	16
1.4.3 Kladný předvýboj a vznik vedoucího výboje	17
1.4.4 Zpětný výboj	17
1.4.5 Vznik blesku a elektrický průraz vzduchu ubíhajícími elektrony	17
2 Teoretický úvod	19
2.1 Elektrostatická teorie	19
2.1.1 Hustota náboje na vodivém sféroidu	19
2.1.2 Hustota náboje v bouřkovém oblaku	21
2.2 Elektrický průraz atmosféry podnícený ubíhajícími elektrony	22
2.2.1 Kvantitativní teorie tvorby ubíhajících elektronů	24

2.2.2	Porovnání konvečního průrazu a průrazu způsobeném ubíhajícími elektrony	25
3	Kinetická teorie	27
3.1	Odvození pohybové rovnice	27
3.1.1	Odvození Fokkerovy-Planckovy rovnice	27
3.1.2	Vyjádření Coulombických srážek	29
3.1.3	Přechod k pohybové rovnici	31
3.2	Kvadratura pohybové rovnice	33
4	Závěry z pohybové rovnice	36
4.1	Závislost tvaru kvadratury na změně fyzikálních podmínek pro elektron-elektronové srážky	37
4.2	Srážky elektronů s různými druhy částic	38
4.3	Relativistická pohybová rovnice	40
	Závěr	43
	Seznam použitých zdrojů	44

Seznam symbolů

∇_x	nabla od polohy částice
$\mathbf{A}$	vektorový potenciál
b	záměrný parametr
b_0	kritický záměrný parametr
c	rychlost šíření světla
$d\sigma$	diferenciální účinný průřez
e	elementární náboj,
e	Eulerovo číslo
E	velikost intenzity elektrického pole
E_{prah}	velikost prahové intenzity elektrického pole
f_α	hustota pravděpodobnosti výskytu částic druhu α
g	velikost vektoru relativní vzájemné rychlosti
$G_{\alpha\beta}$	druhý Rosenbluthův potenciál
$H_{\alpha\beta}$	první Rosenbluthův potenciál
$\mathbf{k}$	jednotkový vektor ve směru relativní vzájemné rychlosti
k_B	Boltzmannova konstanta
$\ln \Lambda$	Coulombův logaritmus
m_α	hmotnost částic druhu α
N_m	koncentrace molekul vzduchu
n_α	koncentrace částic druhu α
Q_α	náboj částic druhu α
$\mathbf{S}_{\alpha\beta}$	Boltzmannův srážkový integrál
T_α	teplota částic druhu α
$\mathbf{v}_T$	těžišťová rychlost
$\mathbf{v}_{\alpha\beta}$	relativní vzájemná rychlost částic druhu α a β
z	výška nad zemským povrchem
z_{prum}	průměrný náboj atomového jádra molekul dusíku a kyslíku
Z	stupeň ionizace plazmatu, dvojnásobek průměrného náboje atomového jádra molekul dusíku a kyslíku

ε	energie částice
ε_0	permitivita vakua
ε_i	ionizační energie
ε_l	energie vyraženého elektronu
λ_D	Debyova stínící vzdálenost
μ	redukovaná hmotnost
$\phi(x)$	chybová funkce
ϕ_1	potenciální funkce bouřkového oblaku před začátkem blesku
ϕ_2	sekundární potenciální funkce výbojového kanálu
ϕ_L	potenciální funkce na povrchu zpětného výboje
χ	úhel rozptylu
$\psi(x)$	Chandrasekharova funkce

Úvod

Téma bouřky jsem si vybrala, protože mě bouřky fascinují. V této práci nejprve uvádím různé druhy blesků spolu se vznikem a průběhem blesku se zápornou polaritou mezi nebem a zemí. Poté se zaměřuji na elektrický průraz vzduchu podnícený ubíhajícími elektrony, roli kosmického záření v celém procesu a v neposlední řadě na podmínky, za kterých bude elektron urychlován.

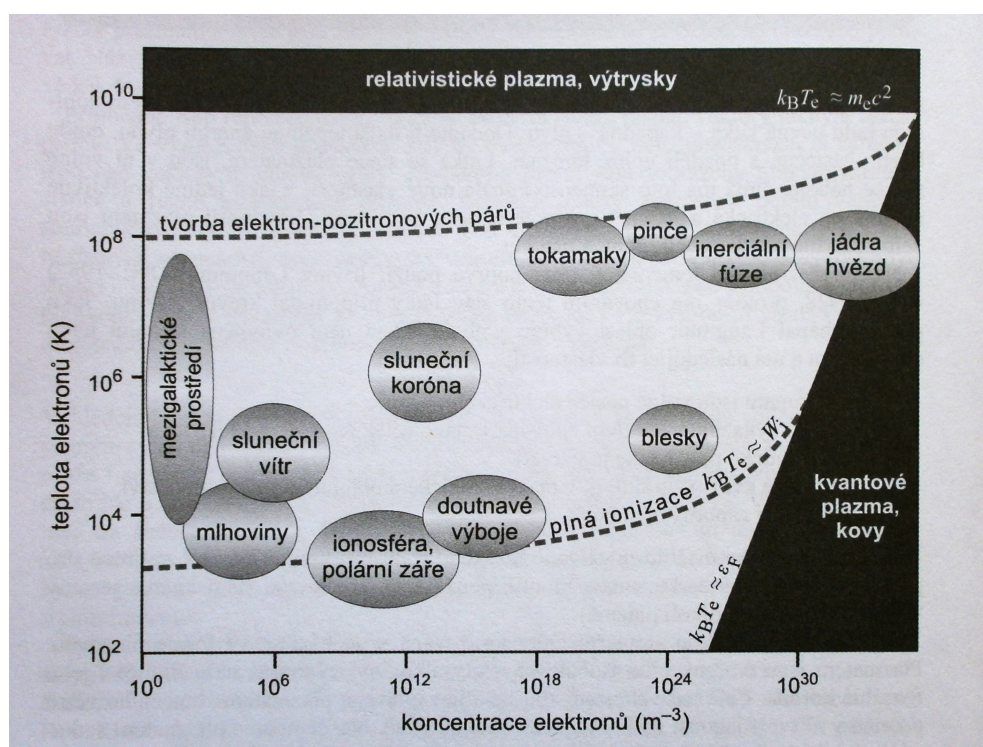
Jedním z cílů mé práce je seznámit čtenáře se současným stavem problematiky vzniku a vývoje blesků. Neméně důležitým cílem je ověřit, zda se elektrony opravdu urychlují v poli bouřkového oblaku. Za tímto účelem jsem sestavila pohybovou rovnici pro elektron vycházející z Fokkerovy-Planckovy rovnice, což je varianta Boltzmannovy rovnice. Jmenované rovnice jsou sestaveny, aniž by byly vzaty v úvahu relativistické efekty.

Kapitola 1

Úvod do problematiky

1.1 Plazma

Plazma je kvazineutrální oblast výboje v plynu obsahující volné nosiče náboje, která vykazuje kolektivní chování [1]. Plazma se dělí podle různých kritérií na druhy, například podle stupně ionizace či zda se tvoří v něm tvoří elektron-pozitronové páry. Nejčastěji se plazma klasifikuje podle koncentrace elektronů a teploty elektronů, jak lze vidět na následujícím obrázku:



Obrázek 1.1: Diagram znázorňující různé druhy plazmatu pro vodíkové plazma [1].

1.2 Coulombova interakce

1.2.1 Debyeova stínící vzdálenost

Mějme plazma složené z více druhů částic. Částice mají hmotnost m_α , náboj Q_α , kde α označuje příslušnost částice k druhu (přes indexy psané řeckými písmeny se nesčítá). Protože předpokládáme plazma blízko termodynamické rovnováhy, k vybrané testovací částici se přesunou částice opačné polarity a budou ji stínit, její potenciál bude exponenciálně ubývat. Na **Debyeově stínící vzdálenosti** λ_D pole i potenciál testovací částice poklesne na $1/e$ hodnoty dané Coulombovým zákonem. Proto můžeme brát v úvahu jen částice v Debyeově sféře testovací částice, což je koule se středem v testovací částici o poloměru λ_D . Pro Debyeovu stínící vzdálenost platí:

$$\lambda_D \equiv \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B}{\sum_{\alpha} Q_{\alpha}^2 n_{\alpha 0} / T_{\alpha}}}, \quad (1.1)$$

kde $n_{\alpha 0}$ jsou počáteční koncentrace částic druhu α , T_{α} jejich teplota, k_B Boltzmannova konstanta a ε_0 je permitivita vakua.

Pokud je Z násobně ionizované plazma složené jen z elektronů a iontů stejné teploty, pak pro Debyeovu stínící vzdálenost můžeme psát jednoduchý vztah:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T}{(1 + Z)n_{e0} e^2}}, \quad (1.2)$$

kde n_{e0} je počáteční koncentrace elektronů, e je elementární náboj, T je teplota plazmatu.

1.2.2 Coulombův rozptyl

Vyberme dvě částice z nalétávajícího a terčového svazku mající určitou hmotnost m_α , příp. m_β , náboj Q_α , příp. Q_β . Jako první přejdeme do *těžišťové soustavy*: k **relativní vzájemné rychlosti** $\mathbf{v}_{\alpha\beta}$ a k **těžišťové rychlosti** $\mathbf{v}_T$:

$$\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_T + \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \mathbf{v}_{\alpha\beta}. \quad (1.3)$$

Ze zákonů zachování energie a hybnosti vyplývá, že se při srážce nemění těžišťová rychlost obou částic a velikost vzájemné rychlosti, kterou označíme $g \equiv |\mathbf{v}_{\alpha\beta}|$. Zavedeme též **redukovanou hmotnost**

$$\mu \equiv \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}. \quad (1.4)$$

Jedinou veličinou, která se při srážce mění, je tedy směr vzájemné rychlosti, který označíme $\mathbf{k} \equiv \frac{\mathbf{v}_{\alpha\beta}}{|\mathbf{v}_{\alpha\beta}|}$. Pro **záměrný parametr** b platí

$$b = b_0 \cot \frac{\chi}{2}, \quad (1.5)$$

kde χ je úhel rozptylu a b_0 je **kritický záměrný parametr** odpovídající úhlu rozptylu 90° , pro který platí:

$$b_0 \equiv \frac{Q_\alpha Q_\beta}{4\pi\epsilon_0\mu g^2}. \quad (1.6)$$

Diferenciální účinný průřez lze odvodit jako

$$d\sigma = 2\pi b \, db = 2\pi b \left| \frac{db}{d\chi} \right| d\chi = \frac{b_0^2}{4 \sin^4 \frac{\chi}{2}} d\chi. \quad (1.7)$$

1.2.3 Chandrasekharova a chybová funkce

Chandrasekharova funkce ψ je definována vztahem:

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}x^2} \int_0^x \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi. \quad (1.8)$$

V limitě velkých a malých argumentů Chandrasekharova funkce přejde na tvar:

$$x \gg 1 : \psi(x) \approx \frac{1}{2x^2}; \quad x \ll 1 : \psi(x) \approx \frac{2}{3\sqrt{\pi}}x. \quad (1.9)$$

Chybová funkce ϕ je definována vztahem:

$$\phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi. \quad (1.10)$$

V limitě velkých a malých argumentů chybová funkce přejde na tvar:

$$x \gg 1 : \phi(x) \approx 1; \quad x \ll 1 : \phi(x) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}}x. \quad (1.11)$$

Chandrasekharova a chybová funkce jsou svázány jednoduchým vztahem:

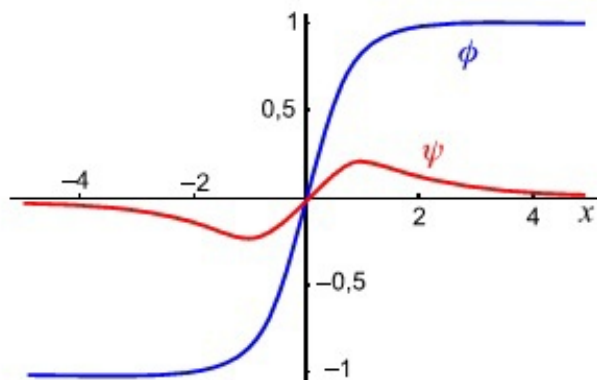
$$\psi(x) = \frac{\phi(x) - x\phi'(x)}{2x^2}. \quad (1.12)$$

Obě funkce jsou vykresleny na Obr. 1.2.

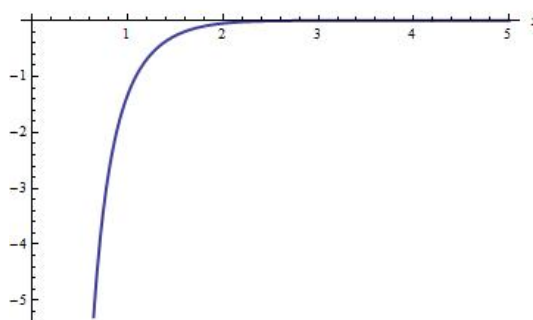
V dalším textu budu používat Chandrasekharovu funkci pro velké rychlosti, kterou odhadnu funkcí $\frac{1}{2x^2}$ (viz (1.9)). Relativní chyba, které se tímto odhadem dopustím, je určena funkcí

$$m(x) \equiv \frac{\psi(x) - \frac{1}{2x^2}}{\psi(x)},$$

která je znázorněna na Obr. 1.3. Jak lze nahlédnout, chyba této aproximace pro $x > 2$ se blíží nule.



Obrázek 1.2: Grafy Chandrasekharovy a chybové funkce [1].



Obrázek 1.3: Graf funkce $m(x)$ určující relativní chybu odhadu Chandrasekharovy funkce funkcí $\frac{1}{2x^2}$.

1.3 Bouřkový oblak a druhy blesků

Bouřky vznikají v oblacích nazývaných *cumulonimbus* (z lat.: dešťový sloupec). Mají tvar kovádliny nebo hříbu, jejich spodní „základna“ je téměř rovinná a bývá ve výškách kolem 300 m. Jejich vrchol sahá až do výšek kolem 12 km. Pro cumulonimby je také typické značné vertikální proudění podporující separaci náboje, jak je popsáno níže [10].

Poté, co dojde k separaci náboje, vytvoří se v oblaku nábojová centra. Podle některých teorií [5] jsou dvě, spodní centrum ve střední a spodní části oblaku se záporným nábojem a větší vrchní centrum s kladným nábojem. Dle některých teorií [2] (viz Obr. 2.2a) existuje ještě třetí nábojové centrum na „základně“ oblaku s malým množstvím kladného náboje, tzv. **jadérko**.

Podle místa úderu existuje několik druhů blesků [5]:

- uvnitř oblaku – pokud se oblak pohybuje rychle, jednotlivé výboje nerozlišíme a vidíme tzv. *plošný blesk*,
- mezi oblaky – první dva druhy tvoří až 75 % všech blesků,
- z oblaku do vzduchu,

- z oblaku na zem:
 - blesk se zápornou polaritou (90–95 procent blesků mezi oblakem a zemí)
 - vychází ze záporně nabitě „základny“ oblaku a míří směrem dolů k zemi, tomuto druhu se věnuji podrobně v následující kapitole,
 - blesk s kladnou polaritou (5–10 procent blesků mezi oblakem a zemí)
 - záporně nabitý předvýboj vychází ze Země, kladně nabitý předvýboj vybíhá z horní vrstvy oblaku, většinou nejprve horizontálně a poté se skloní k zemi. Proto se oba předvýboje mohou spojit a blesk udeřit i v místě, kde není bouřka. Blesky s kladnou polaritou trvají většinou desetkrát déle než blesky se zápornou polaritou a také jimi proteče desetkrát větší proud v porovnání s druhým druhem,
- modré výtrysky (anglicky: *blue jets*) – míří z horních vrstev oblaku ve výšce přibližně 15 km směrem vzhůru do ionosféry do výšky přibližně 45–50 km. Tyto modré výboje se směrem vzhůru rozšiřují.
- červené přízraky (anglicky: *sprites*) – vyskytují se na dolním okraji ionosféry kolem 80 km,
- elfové (anglicky: *elves* z *Emissions of Light and Very Low Frequency Perturbations from Electromagnetic Pulse Sources*) – mají tvar toroidu kolem červených přízraků.

První čtyři druhy spolu s rozložením náboje uvnitř bouřkového oblaku jsou zobrazeny na Obr. 1.4. Vznik posledních tří druhů je stále předmětem intenzivních výzkumů. Jakou polaritu má blesk mezi oblakem a zemí lze určit z větvení blesku a tedy i z toku náboje.

1.4 Vznik blesku

V celé této podkapitole se budu zabývat bleskem mezi oblakem a zemí se zápornou polaritou (nebude-li řečeno jinak).

Základní teorii vzniku blesku podal Heinz Kasemir [2], podle které vznik a průběh blesku probíhá v několika částech [5]:

1. separace nábojů,
2. tvorba **krokového kanálu** (anglicky: *the stepped leader channel*), což je záporně nabitý předvýboj směřující z oblaku na zem (v případě blesku s kladnou polaritou je směr opačný),
3. vznik **kladného předvýboje** – pokud je na Zemi vyvýšená vodivá oblast,
4. propojení obou předvýbojů za vzniku vodivého kanálu **vedoucího výboje** (anglicky: *the main stroke*), kdy část záporného náboje z oblaku přeteče do země,

5. zpětný výboj (anglicky: *the return stroke*) – kladný náboj ze země teče do oblaku.

Po této sekvenci mohou následovat další výboje (tvořené vedoucím a zpětným výbojem), které probíhají ve stejném vodivém kanálu jako první výboj. Tyto následující výboje (anglicky: *the re-strike*) jsou většinou slabší než první z nich a dohromady tvoří stroboskopický efekt, který je občas pozorován. Mezi jednotlivými sekvencemi je „klidové období“ dlouhé 30 až 50 ms [5].

1.4.1 Separace nábojů

Nejprve se zatím nepříliš zřejmým mechanismem akumuluje náboj, který se shlučuje do vrstev¹. Jako nejpravděpodobnější se v současné době jeví dva mechanismy:

1. **Hypotéza srážek částic oblaku:** Vzestupné vzdušné proudy vynášejí vodní kapky nahoru, které se tímto podchlazují. Tyto kapky se pak srážejí s ledovými krystalky a vytvářejí směsici ledu a vody. Protože ledové krystalky jsou lehčí než směsice ledu a vody a také se při srážkách s ní polarizují kladně, vytváří se tak na vrcholu oblaku přebytek kladného náboje. Obdobně se uprostřed a ve spodní části oblaku akumuluje záporný náboj. Tento proces pokračuje tak dlouho, než v oblaku vznikne dostatečné silné elektrické pole pro vznik blesku.
2. **Hypotéza polarizačního mechanismu** má dvě části. Nejprve se padající kapky ledu a deště polarizují při pádu skrz zemské magnetické pole. Poté se částice oblaku, které se srážejí s padajícími kapkami ledu a deště, nabíjejí opačným nábojem.

1.4.2 Krokový kanál

Nejprve se indukují náboj stejné velikosti, ale opačného znaménka, než má spodní část oblaku, na zemském povrchu pod ním – tento indukovaný náboj se pohybuje spolu s oblakem.

Výboj začíná ze záporně nabitě oblasti směsi ledu a vody v oblaku. Záporně nabitý **krokový kanál** (= koridor ionizovaného vzduchu) se při postupu dolů může rozvětvit v množství částí. Tento kanál se nazývá krokový, protože sestupuje dolů po jednotlivých krocích trvajících okolo 50 ms [5] – v nich se může větvit hledaje spojení se zemí, jak ukazují tato videa [11] [12]. Když se krokový kanál dostatečně přiblíží k zemi, přítomnost opačného náboje na zemi zvýší intenzitu elektrického pole (ta je nejvyšší na vysokých objektech spojených se zemí).

¹V této části popisují vznik dvou velkých nábojových center.

1.4.3 Kladný předvýboj a vznik vedoucího výboje

Pokud je intenzita elektrického pole dostatečně veliká, z míst nejvyšší intenzity se může vyvinout vodivý výboj směřující vzhůru nazývaný **kladný předvýboj** (anglicky: *the positive streamer*). Se zvětšující se intenzitou elektrického pole se kladný předvýboj stává teplejší a může se spojit se sestupujícím krokovým kanálem za vzniku kanálu vodivého vzduchu nazývaného **vedoucí výboj**.

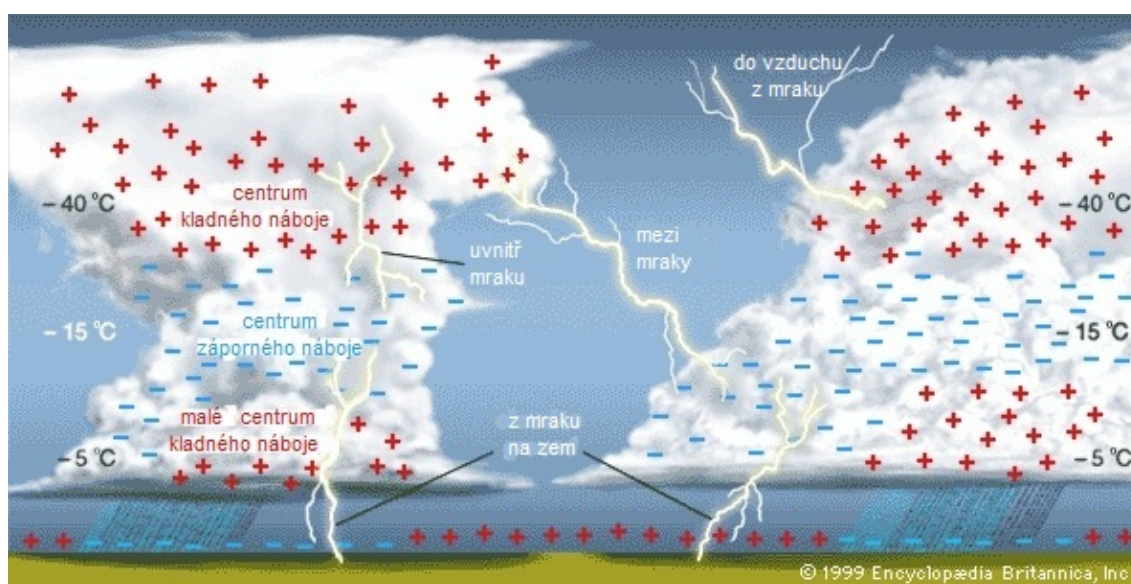
1.4.4 Zpětný výboj

Vodivý kanál, vzniklý v předchozím kroku, je cestou nejmenšího odporu, a proto jím může procházet relativně velký elektrický proud (cca $3 \cdot 10^4$ A [5]) ze země do oblaku. Tuto část nazývanou **zpětný výboj** vnímáme jako blesk. Průchodem elektrického proudu se vodivý kanál zahřívá až na teplotu $3 \cdot 10^4$ K [5]. Protože tlak uvnitř zpětného výboje nabývá hodnot až 5 atmosfér, vodivý kanál se prudce rozpíná způsobuje zvukovou rázovou vlnu známou jako hrom.

1.4.5 Vznik blesku a elektrický průraz vzduchu ubíhajícími elektrony

Aby se mohl krokový kanál začít tvořit, musí nejprve vzniknout oblast výboje uvnitř bouřkového oblaku. Protože v oblaku intenzita elektrického pole nedosahuje hodnot potřebných ke konvenčnímu průrazu, musí tato oblast vzniknout jiným mechanismem. Elektrický průraz vzduchu ubíhajícími elektrony spolu s kosmickými částicemi, který navrhli Alexandr V. Gurevič, Gennady M. Milikh a Robert Roussel-Dupre [3] v roce 1992, je kandidátem na potřebný mechanismus.

Částice kosmického záření přilétající převážně od Slunce ionizují při průletu atmosférou její molekuly. Pokud síla elektrického pole převáží nad ztrátami energie způsobené srážkami s molekulami atmosféry, částice bude urychlována až na relativistické rychlosti. Jak je uvedeno v kapitole (4), nejnižší, prahová rychlost potřebná k urychlení v ionosféře je okolo 70 ms^{-1} – pro elektron-elektronové srážky. Pokud tedy přilétávající částice kosmického záření vyrazí elektron, který bude mít při průletu ionosférou alespoň tuto rychlost, tento elektron se bude urychlovat a ionizovat molekuly vzduchu okolo dráhy. Některé vyražené elektrony mohou mít rychlost větší než prahovou, a tak budou také urychlovány a budou též ionizovat. Tímto způsobem může vzniknout sprška ubíhajících elektronů a dojde k elektrickému průrazu vzduchu způsobeném ubíhajícími elektrony (anglicky: *the runaway breakdown*). Není ovšem jasné, jakým způsobem se z této prostorově rozlehlé spršky, stane úzký koridor ionizovaného vzduchu, jakým krokový a posléze vedoucí kanál jsou (šířka vedoucího kanálu je kolem 5 cm [5]). Na tento nedostatek upozorňují někteří kritici teorie ubíhajících elektronů.



Obrázek 1.4: Hustota náboje v bouřkovém oblaku [13].

Kapitola 2

Teoretický úvod

2.1 Elektrostatická teorie

V této části se budu zabývat okrajovými podmínkami pro soustavu diferenciálních rovnic popisujících vývoj krokového kanálu [2]. V této teorii je na krokový kanál pohlíženo jako na vodič v elektrostatickém poli, jehož jednotlivé kroky jsou odděleny okrajovými podmínkami.

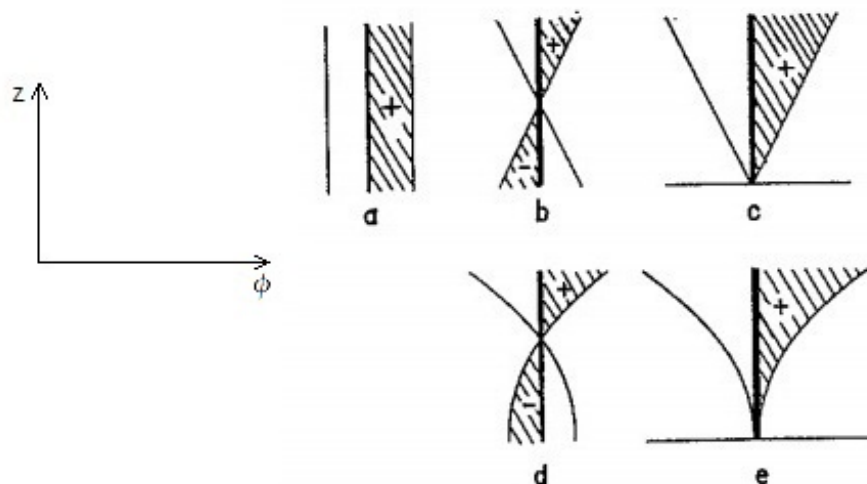
Okrajové podmínky v čase $t = 0$ těsně před začátkem blesku jsou určeny potenciální funkcí bouřkového oblaku ϕ_1 . Poté, co úder blesku skončí v čase $t = T$, máme okrajové podmínky určeny počáteční potenciální funkcí ϕ , kterou lze zapsat jako superpozici potenciálních funkcí ϕ_1 a ϕ_2 . Sekundární potenciální funkci nábojové hustoty výbojového kanálu ϕ_2 lze spočítat z počáteční potenciální funkce bouřkového oblaku ϕ_1 a z tvaru výbojového kanálu zacházející s bleskem jako s vodičem v elektrostatickém poli. Detailní popis ϕ_2 viz dále.

2.1.1 Hustota náboje na vodivém sféroidu

V této části se budu zabývat hustotou náboje na vodivém sféroidu v různých elektrických polích [2]. Blesk je představován protáhlým sféroidem umístěným v elektrickém poli oblaku.

Na povrchu vodivého kanálu se vytvoří hustota náboje, která vyvolá druhotnou potenciální funkci ϕ_2 takovou, že superpozice potenciálů ϕ_1 a ϕ_2 vyústí na povrchu zpětného výboje v konstantní potenciál ϕ_L . Hodnota ϕ_2 pro výboj v oblacích je též určena podmínkou, aby souhrnný náboj výboje byl nula. Pro výboj mezi oblakem a Zemí tato podmínka neplatí, protože Země je kondenzátor o velké kapacitě.

Na Obr. 2.1 je zobrazena hustota náboje (šrafované oblasti), která vytváří potenciální funkci ϕ_2 , pro různé tvary vodivých kanálů. Tlustá svíslá čára reprezentuje blesk a plná čára představuje potenciální funkci ϕ_2 . Protože potenciál na povrchu zpětného výboje je referenční potenciál, lze ho zvolit nulový: $\phi_L = 0$. Odtud a



Obrázek 2.1: Hustota náboje: (a) na nabitém sféroidu, (b) na nenabitém sféroidu v homogenním elektrickém poli, (c) na nabitém sféroidu v homogenním elektrickém poli, (d) na nenabitém sféroidu v nehomogenním elektrickém poli, (e) na nabitém sféroidu v nehomogenním elektrickém poli [2].

z $\phi_L = \phi_1 + \phi_2 = 0$ lze vidět, že $\phi_2 = -\phi_1$. Proto potenciální funkce ϕ_2 má na povrchu vodivého kanálu stejnou velikost, ale opačnou polaritu než potenciální funkce ϕ_1 generovaná nabitými částicemi oblaku, a tedy hranice šrafované oblasti je zrcadlovým obrazem potenciální funkce ϕ_1 .

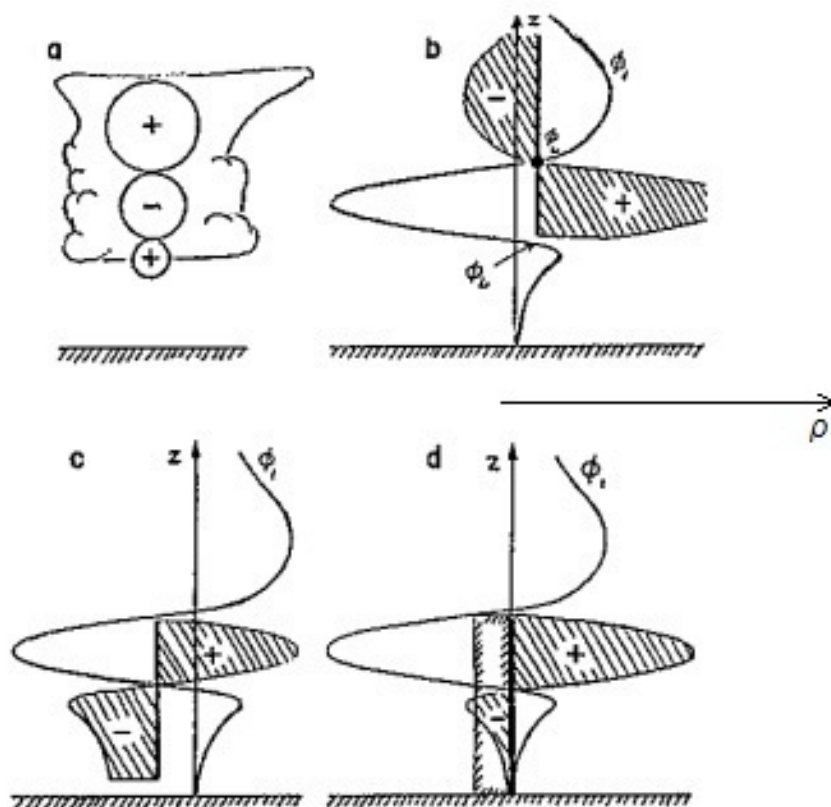
Na Obr. 2.1b je vykreslena hustota náboje na nenabitém sféroidu v homogenním elektrickém poli. Náboj uprostřed sféroidu je nulový a lineárně vzrůstá/klesá směrem k hornímu/spodnímu konci sféroidu. Souhrnný náboj je nulový. Tato situace odpovídá nábojové hustotě krokového kanálu před kontaktem se zemí, pokud blesk začíná ze spodní základny oblaku a pokračuje dolů směrem k zemi a nahoru dovnitř oblaku.

Na Obr. 2.1c je vykreslena hustota náboje na nabitém sféroidu v homogenním elektrickém poli. Hustota náboje opět lineárně vzrůstá, ale je nulová na povrchu Země, protože potenciál bouřkového oblaku ϕ_1 (a tedy i nábojová hustota sféroidu) je na zemském povrchu nulový – zemský potenciál je již převzat výbojem. Tento obrázek tedy odpovídá krokovému kanálu těsně po kontaktu se zemí.

Na Obr. 2.1a je vykreslena hustota náboje na nabitém sféroidu. Zde je hustota náboje konstantní a tedy i náboj na jednotku délky je konstantní. Tato situace odpovídá nábojové hustotě vedoucího výboje.

Poslední dva obrázky popisují obdobně situaci pro nehomogenní elektrické pole. V tomto případě přesně neplatí vztah zrcadlení mezi hustotou náboje a potenciální funkcí ϕ_1 . Ovšem pro velmi protáhlé sféroidy, jakým vodivý kanál je¹, se chyba tohoto přiblížení ukázala velmi malá. Souhrnný náboj je opět nula.

¹Délka bývá kolem 0,5 km a šíře kolem 5 cm.



Obrázek 2.2: Hustota náboje: (a) v bouřkovém oblaku podle Simpsona Wilsona, (b) blesku uvnitř oblaku, (c) krokového kanálu blesku mezi oblakem a zemí, (d) blesku mezi oblakem a zemí po dokončení vedoucího výboje [2].

2.1.2 Hustota náboje v bouřkovém oblaku

Využivše závěrů předchozí podsekcce se budu v této podsekcce zabývat rozdělením náboje v bouřkovém oblaku. Potenciální funkci bouřkového oblaku ϕ_1 jako první zavedli Simpson a Wilson [2]: potenciál oblaku je modelován jako tři vertikálně se dotýkající se koule rovnoměrně vyplněné nábojem (viz Obr. (2.2a)). Vrchní koule představuje centrum kladného náboje ve vrchní části oblaku, prostřední koule představuje centrum záporného náboje ve spodní části oblaku a spodní koule reprezentuje jádérko, tj. kapsu kladného náboje na „základně“ oblaku.

Na Obr. 2.2b–d je zobrazena potenciální funkce ϕ_1 na (svislé) ose rotace z . Svislá tlustá černá čára reprezentuje vodivý kanál blesku. Šrafované oblasti opět zobrazují rozložení náboje na vodivém kanálu blesku. Jejich hranice je opět zrcadlovým obrazem potenciální funkce ϕ_1 s osou zrcadlení ve vodivém kanálu blesku.

Na Obr. 2.2 je zobrazena hustota náboje pro blesk uvnitř mraku. Na povrchu vodivého kanálu je potenciál ϕ_L určený průsečíkem tlusté svislé čáry a potenciální funkce ϕ_1 . Výboj začne z místa označeného černou tečkou a bude se rozšiřovat na obě strany než opět protne potenciální funkci ϕ_1 . V těchto bodech je elektrické napětí (rozdíl potenciálů mezi konci výboje a okolním vzduchem), a tedy i elek-

trické pole, nulové. Blesk ovšem přestane růst dokonce ještě předtím, než dosáhne těchto bodů, konkrétně tehdy, když síla pole na koncích výboje klesne pod prahovou hodnotu nezbytnou pro ionizaci [2]. Horní, záporně nabitá část výboje roste do centra kladného náboje na vrchu oblaku a spodní, kladně nabitá část výboje oproti tomu roste do centra záporného náboje uprostřed oblaku. Tímto způsobem vznikne vodivé spojení obou centrech náboje a dojde k jejich vybití.

Na posledních dvou obrázcích je vyobrazena hustota náboje blesku mezi oblakem a zemí: na Obr. 2.2c krokového kanálu tešně před kontaktem se zemí, na Obr. 2.2d vedoucího výboje. Poté, co se výboj dotkne Země, část záporného náboje oblaku přeteče do země, a proto oblast kladného náboje se zvětší a oblast záporného náboje se zmenší. Tento rozdíl je na obrázku znázorněn šrafovaným obdélníkem.

2.2 Elektrický průraz atmosféry podnícený ubíhajícími elektrony

V této části se budu zabývat elektrickým průrazem vzduchu způsobeným klasicky a ubíhajícími elektrony a jejich rozdíly. Jako první se jimi zabýval A. V. Gurevič [3] [4]. Rychlé elektrony s energií 10 – 20 eV jsou schopny ionizovat okolní molekuly a vytvářet tak nové volné elektrony. Pomalejší elektrony jsou zachyceny molekulami vzduchu a rekombinují s nimi. Pokud elektrické pole převyší prahovou hodnotu E_{prah} , tvorba nových elektronů převyší rekombinaci, a tedy počet volných elektronů začne exponenciálně růst a dojde k průrazu. Pro konveční průraz je prahová intenzita elektrického pole E_{prah} přímo úměrná koncentraci molekul vzduchu. Ve vzduchu při atmosférickém tlaku je $E_{\text{prah}} \approx 2,3 \text{ MV/m}$ [6]. Ovšem v bouřkových oblacích intenzita elektrického pole takových hodnot nedosahuje, jak vyplývá z měření [4]. Proto byla vyslovena domněnka, že elektrický průraz je způsoben ubíhajícími elektrony vyraženými z molekul vzduchu kosmickým zářením.

Brzdicí síla působící na energetický elektron ve vzduchu v nerelativistické oblasti je dána vztahem [4]:

$$F = \frac{4\pi N_m Z e^4}{m v^2} \ln(m v^2 / z \varepsilon_i), \quad (2.1)$$

kde N_m je koncentrace molekul vzduchu, e je elementární náboj, v velikost rychlosti příslušného elektronu, ε_i je charakteristická ionizační energie a $Z = 2z_{\text{prum}} \approx 14,5$, kde z_{prum} je průměrný náboj atomového jádra molekul dusíku a kyslíku. V relativistické oblasti pro $\varepsilon \gg mc^2$, kde ε je energie elektronu, je brzdicí síla dána vztahem:

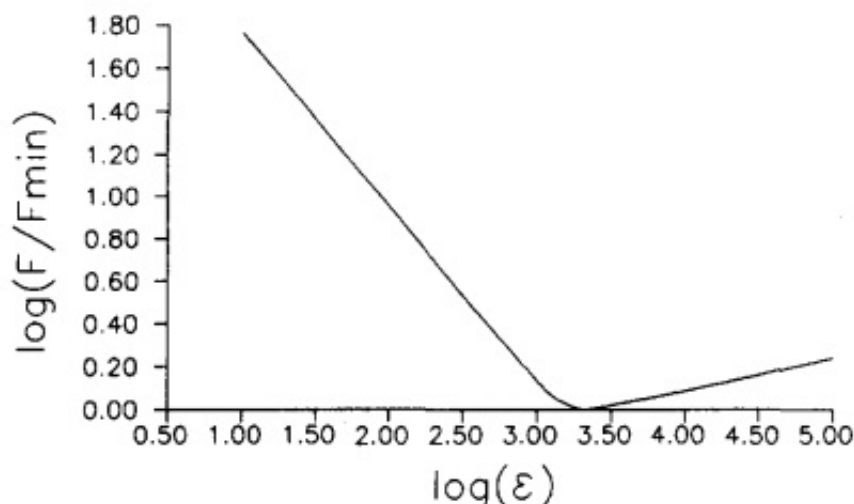
$$F = \frac{4\pi N_m Z e^4}{m c^2} \ln[(m c^2 / \varepsilon_1) \gamma], \quad (2.2)$$

kde $\gamma = \varepsilon / m c^2 = (1 - v^2 / c^2)^{-1/2}$ a $\varepsilon_1 \approx 270 \text{ eV}$ – tato konstanta je převzata přímo z původního článku [4], ve kterém ji autor blíže nevysvětloval. Průběh brzdicí síly je znázorněn na Obr. 2.3. Pro malé rychlosti $v^2 \ll c^2$ brzdicí síla klesá se vzrůstající

velikostí rychlosti elektronu a v této oblasti platí: $F \sim v^{-2} \ln v^2$. V relativistické oblasti brzdící síla začne pomalu růst: $F \sim \ln \gamma$. Brzdící síla nabývá minimální hodnoty:

$$F_{\min} \approx \frac{4\pi N_m Z e^4}{mc^2} a, \quad a \approx 10 \quad (2.3)$$

pro $\gamma_{\min} \approx 3 - 4$. Konstanta a je převzata přímo z původního článku [4], ve kterém ji autor blíže nevysvětloval.



Obrázek 2.3: Průběh brzdící síly působící na rychlé elektrony ve vzduchu, kde ε je energie příslušného elektronu [3].

Protože nás zajímají podmínky, za kterých bude elektron urychlován, vyřešíme rovnici rovnováhy mezi elektrickým polem a brzdící silou:

$$eE - F(v) = 0. \quad (2.4)$$

Pokud bezrozměrný parametr

$$\delta_0 = \frac{Emc^2}{4\pi N_m Ze^3 a} = 0,5 \frac{E}{1 \text{ kV/cm}} \frac{2,7 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}}{N_m} \frac{10}{a}$$

bude větší než jedna, pak rovnice rovnováhy (2.4) bude mít dva kořeny. První nestabilní kořen v nerelativistické oblasti $v_1^2 \approx c^2/\delta_0$ a druhý stabilní kořen v relativistické oblasti: $\gamma_2 \approx \exp[a(\delta_0 - 1)]$, $v_2 \approx c$.

V případě, že elektron bude mít na začátku rychlost větší jak v_1 , bude se urychlovat do té doby, než získá rychlost odpovídající stabilnímu rovnovážnému stavu γ_2 . Protože elektron v tomto stavu má velkou energii, bude ionizovat okolní molekuly vzduchu. Některé vyražené elektrony budou mít energii větší než v_1 a celý proces se bude opakovat. Tímto způsobem brzy dojde k exponenciálnímu vzrůstu počtu volných elektronů, takzvané **spršce ubíhajících elektronů** (anglicky: *an avalanche of runaway electrons*). Tento proces se nazývá **elektrický průraz vzduchu způsobený ubíhajícími elektrony** (anglicky: *the air breakdown by runaway electrons*, zkráceně *runaway breakdown*).

2.2.1 Kvantitativní teorie tvorby ubíhajících elektronů

Pokud bude mít elektron energii větší než kritickou, pak za přítomnosti elektrického pole většího než

$$E_c = \frac{F_{min}}{e} = \frac{4\pi N_m Z e^3}{mc^2} a \quad (2.5)$$

bude urychlován (viz předchozí odstavec). Kritická energie ε_c odpovídá rychlosti v_l a je rovna [6]:

$$\varepsilon_c \approx \frac{E_c}{2E} mc^2. \quad (2.6)$$

Rychlé elektrony většinu své energie ztrácejí ionizací okolních molekul. Ionizací vznikne nový elektron s energií ε_l . Počet vyražených elektronů s energií větší než ε_l na jednotku dráhy ds je roven [6]:

$$\frac{dN(\varepsilon_l)}{ds} = \frac{\pi N_m Z e^4}{mc^2 \varepsilon_l}. \quad (2.7)$$

Pokud $\varepsilon_l \geq \varepsilon_c$, pak všechny vyražené elektrony budou ubíhající a **charakteristická vzdálenost tvorby nových ubíhajících elektronů** l_a , kterou lze odvodit z (2.6) a (2.7), bude rovna:

$$l_a = \left(\frac{dN(\varepsilon_l)}{ds} \right)_{\varepsilon_l=\varepsilon_c}^{-1} = \frac{(mc^2)^2}{2\pi N_m Z e^4} \frac{E_c}{E}. \quad (2.8)$$

Označíme-li N_f počet elektronů s energií vyšší než kritickou (2.6), pak celkový přírůstek ubíhajících elektronů je roven [3]:

$$\frac{dN}{ds} = \frac{1}{l_a} N_f. \quad (2.9)$$

Označme s_0 **charakteristickou vzdálenost urychlování**, tj. vzdálenost, na které elektron získá energii ε_c . Pokud vyražený elektron má energii alespoň ε_c , pak na vzdálenosti s_0 bude mít energii minimálně $2\varepsilon_c$ a může vyrazit elektron s energií větší než kritickou ponechav si energii $\varepsilon \geq \varepsilon_c$. Dostaneme tak dva ubíhající elektrony. Proto je počet ubíhajících elektronů roven $N_f = N(s - s_0)$ a předchozí rovnice (2.9) získá tvar

$$\frac{dN}{ds} = \frac{N(s - s_0)}{l_a},$$

jejíž řešení [6] je

$$N = N_0 \exp\left(\frac{s}{l_1}\right),$$

kde l_1 je určeno implicitně

$$\frac{l_1}{l_a} \exp\left(-\frac{s_0}{l_1}\right) = 1.$$

Za předpokladu že $s_0/l_1 \ll 1$ (což bývá v atmosféře splněno [3]), rovnice (2.9) má řešení

$$N = N_0 \exp\left(\frac{s}{l_1}\right), \quad l_1 = l_a \left(1 + \frac{s_0}{l_1}\right) \simeq l_a. \quad (2.10)$$

Za daných předpokladů ubíhající elektrony vytvoří spršku, která bude exponenciálně růst na své charakteristické vzdálenosti:

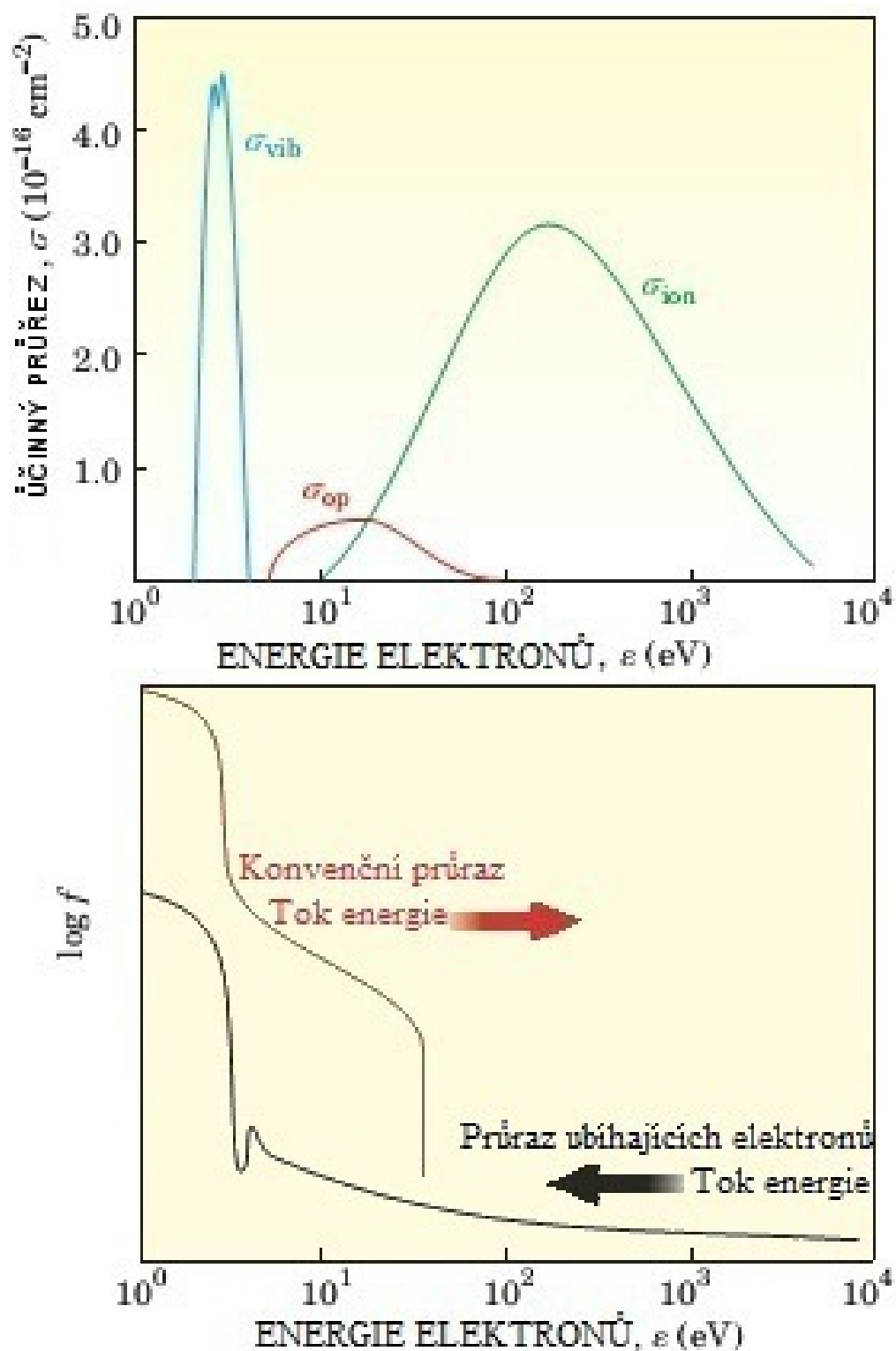
$$l_a = \frac{(mc^2)^2}{2\pi N_m Z e^4} \frac{E_c}{E} \approx 50 \text{ m} \cdot \frac{E_c}{E} \left(\frac{N_m}{2,7 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}} \right)^{-1}. \quad (2.11)$$

Tato vzdálenost je při zemském povrchu rovna desítkám metrů a roste se zvyšující se výškou (kvůli úbytku molekul a tím i hustoty vzduchu). Stejně jako počet rychlých elektronů, roste exponenciálně i počet pomalých elektronů. Proto elektrická vodivost vzduchu rychle roste až dojde k elektrickému průrazu.

2.2.2 Porovnání konvečního průrazu a průrazu způsobeném ubíhajícími elektrony

Aby mohlo dojít ke konvenčnímu průrazu, je potřeba intenzita elektrického pole převyšující prahovou hodnotu zhruba 2 MV/m. Díky dostatečně silnému elektrickému poli elektrony překonávají ztráty způsobené srážkami s ostatními částicemi a vytvářejí tak tok energie z tepelných elektronů na supratepelné elektrony. Protože energie většiny z nich má hodnotu do 10 eV, elektrony ztrácejí energii nejvíce optickou emisí a excitací vibračních hladin dusíku. Pouze málo elektronů konvenčního průrazu ztrácí energii ionizací a také nepozorujeme žádné záblesky záření gamma [4].

Naproti tomu průraz způsobený ubíhajícími elektrony probíhá již při prahové hodnotě intenzity elektrického pole rovné desetinně prahové hodnoty konvenčního průrazu. Pomalé elektrony se nemohou stát ubíhajícími, neboť síla elektrického pole nestačí vyrovnávat ztráty způsobené srážkami. Oproti tomu pro relativistické elektrony převládá vliv urychlování elektrickým polem než srážkové ztráty, proto se mohou stát ubíhajícími. Distribuční funkce relativistických ubíhajících elektronů klesá pouze jako $\varepsilon^{-1/2}$. V tomto případě tok energie směřuje od relativistických elektronů k elektronům tepelným. Energie je převážně ztracena ionizací a také dochází k emisím gamma záření [4].



Obrázek 2.4: Srovnání konvenčního průřezu a průřezu způsobeném ubíhajícími elektrony. Horní obrázek zobrazuje účinný průřez pro 3 reakce, kterými volné elektrony mohou ztrácet energii: σ_{vib} - excitace vibrací molekul, σ_{op} - emise elektromagnetického záření, σ_{ion} - ionizace molekul. Spodní obrázek zobrazuje distribuční funkci f elektronů pro oba druhy průřezu. Šipky zobrazují směr toku energie [4].

Kapitola 3

Kinetická teorie

Přestože elektrony, které jsou tématem práce, se budou urychlovat až na relativistické rychlosti, v prvním přiblížení je lze studovat nerelativisticky. Tímto přibližným výpočtem chci ověřit, že elektrony jsou skutečně ubíhající. V dalších pracích se chci věnovat sestavení relativistické pohybové rovnice.

3.1 Odvození pohybové rovnice

3.1.1 Odvození Fokkerovy-Planckovy rovnice

Mějme plazma blízko termodynamické rovnováhy. Jako základní rovnici kinetické teorie jsem zvolila používanou Fokkerovu-Planckovu rovnici [1], což je speciální případ Boltzmannovy rovnice [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_\alpha + (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} (\mathbf{F}_\alpha \cdot \nabla_{\mathbf{v}}) f_\alpha = \sum_{\beta} \mathbf{S}_{\alpha\beta}, \quad (3.1)$$

kde $f_\alpha = f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha)$ je hledaná hustota pravděpodobnosti výskytu částic druhu α . Členy na pravé straně se nazývají Boltzmannův srážkový integrál (vyjadřuje změnu hustoty pravděpodobnosti danou srážkovými procesy).

V limitě slabých, mnohonásobně opakovaných párových Coulombovských srážek lze srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice psát:

$$S = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} = \frac{f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - f(t - \Delta t, \mathbf{x}, \mathbf{v})}{\Delta t}.$$

Pro markovský řetězec srážek (průběh srážení si nepamatuje historii) je pravděpodobnost $P(\mathbf{v}, \Delta \mathbf{v})$ $d^3(\Delta \mathbf{v})$ změny rychlosti částice z hodnoty $\mathbf{v}$ na hodnotu $\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$ za čas Δt časově nezávislá a navíc výsledná hustota pravděpodobnosti přechodu v čase t jako superpozici všech možných přechodů z času $t - \Delta t$:

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \int f(t - \Delta t, \mathbf{x}, \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}) P(\mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}, \Delta \mathbf{v}) d^3(\Delta \mathbf{v}), \quad (3.2)$$

kde pravděpodobnost $P(\mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v})$ změny rychlosti částice z hodnoty $\mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}$ na hodnotu $\mathbf{v}$ za čas Δt , je normována k jedné, tj.

$$\int P(\mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v}) d^3(\Delta\mathbf{v}) = 1. \quad (3.3)$$

Za předpokladu, že za malý sledovaný časový úsek Δt bude změna rychlosti $\Delta\mathbf{v}$ malá, můžeme integrand ve výrazu (3.2) rozvinout do Taylorovy řady do druhého řádu v argumentu $\mathbf{v}$. Výsledek po integraci s využitím (3.3) je

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - f(t - \Delta t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \int \left[-\Delta v_l \frac{\partial(fP)}{\partial v_l} + \frac{1}{2} \Delta v_l \Delta v_k \frac{\partial^2(fP)}{\partial v_l \partial v_k} \right] d^3(\Delta\mathbf{v}).$$

Po Taylorovském rozvinutí $f(t - \Delta t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ na pravé straně do nultého řádu v čase (postačující v lineárním přiblížení, protože oba integrály jsou úměrné Δt) dostáváme pravou stranu rovnice (3.1):

$$S = -\frac{1}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial v_l} f \int \Delta v_l P d^3(\Delta\mathbf{v}) + \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial^2}{\partial v_l \partial v_k} f \int \Delta v_l \Delta v_k P d^3(\Delta\mathbf{v}).$$

Shrňme zvolené podmínky pro párovou Coulombovu interakci [1]:

- Směr rychlosti každé částice v plazmatu se mění velmi málo při jednotlivých srážkách. Přestože je srážek mnoho, celková změna rychlosti $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$ za daný malý časový interval Δt je malá.
- Dochází jen k pružným srážkám, při kterých se energie nemění na jiné formy energie.
- Uvažujeme pouze interakci s částicemi v Debyeově sféře, které sledovaná částice vnímá jako bodové. Potenciál v místě sledované částice je superpozicí potenciálů částic uvnitř její Debyeovy sféry. Tento předpoklad v jistém smyslu omezuje zkoumanou situaci jen na párové srážky.
- Uvažujeme jen srážky, při nichž úhel rozptylu není příliš veliký. Srážky, při nichž dochází k velké změně vektoru relativní rychlosti, jsou v plazmatu málo pravděpodobné. Ve Fokkerově-Planckově přiblížení se za horní mez úhlu rozptylu uvažovaných srážek volí úhel 90° , což odpovídá záměrnému parametru b většímu než b_0 .
- Předpokládáme, že průběh srážení si nepamatuje historii, tj. srážky představují markovský řetězec. Proto je pravděpodobnost $P(\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v}) d^3(\Delta\mathbf{v})$ změny rychlosti částice z hodnoty $\mathbf{v}$ na hodnotu $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ za čas Δt časově nezávislá.

Za těchto předpokladů Boltzmannově rovnici říkáme Fokkerova-Planckova rovnice [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_\alpha + (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_\mathbf{x}) f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} (\mathbf{F}_\alpha \cdot \nabla_\mathbf{v}) f_\alpha = -\frac{1}{\Delta t} \frac{\partial f \langle \Delta v_l \rangle}{\partial v_l} + \frac{1}{2\Delta t} \frac{\partial^2 f \langle \Delta v_l \Delta v_k \rangle}{\partial v_l \partial v_k}, \quad (3.4)$$

kde

$$\langle \Delta v_l \rangle \equiv \int \Delta v_l P d^3(\Delta \mathbf{v}), \quad (3.5)$$

$$\langle \Delta v_l \Delta v_k \rangle \equiv \int \Delta v_l \Delta v_k P d^3(\Delta \mathbf{v}) \quad (3.6)$$

jsou střední hodnota (první obecný moment) změny rychlosti a druhý obecný moment změny rychlosti. Ze vztahu (3.4) je vidět, že srážkový člen má dvě části:

1. dynamický třecí člen (výraz obsahující $\langle \Delta v_l \rangle$) - odpovídá brzdění částic nalétávajícího svazku srážkami s částicemi terče,
2. difuzní člen (výraz obsahující $\langle \Delta v_l \Delta v_k \rangle$) - odpovídá rozptylu nalétávajícího svazku interakcí s částicemi terče.

3.1.2 Vyjádření Coulombických srážek

K přesnému určení tvaru Fokkerovy-Planckovy rovnice zbývá nalézt střední hodnotu (první obecný moment) změny rychlosti $\langle \Delta v_l \rangle$ a druhý obecný moment změny rychlosti $\langle \Delta v_l \Delta v_k \rangle$. Mějme plazma blízko termodynamické rovnováhy: svazek terčových částic druhu β , do kterého nalétává svazek částic druhu α . Vyberme dvě částice z nalétávajícího a terčového svazku, mající určitou hmotnost m_α , příp. m_β , náboj Q_α , příp. Q_β . Přejdeme do *těžišťové soustavy*: k **těžišťové rychlosti** $\mathbf{v}_T$ a k **relativní vzájemné rychlosti**, kterou označíme $\mathbf{g} \equiv \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_T + \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \mathbf{v}_{\alpha\beta}$. Z vyjádření těžišťových souřadnic pomocí kartézských souřadnic (1.3) nalezneme změnu relativní rychlosti obou částic při srážce:

$$\Delta \mathbf{v}_\alpha = \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \Delta \mathbf{g}. \quad (3.7)$$

Element pravděpodobnosti $P d^3(\Delta \mathbf{v})$ je úměrný hustotě pravděpodobnosti výskytu částic terče f_β , velikosti relativní vzájemné rychlosti g , časovému intervalu Δt a účinnému průřezu srážky:

$$P d^3(\Delta \mathbf{v}) = f_\beta g \Delta t d\sigma d^3(\Delta \mathbf{v}_\beta),$$

a tedy podle vyjádření účinného průřezu (1.7):

$$P d^3(\Delta \mathbf{v}) = 2\pi b f_\beta g \Delta t db d^3(\Delta \mathbf{v}_\beta).$$

Pro první a druhý moment změny rychlosti tedy, podle předchozí rovnice, (3.7), (3.5) a (3.6), máme:

$$\langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle \equiv 2\pi \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \int \Delta \mathbf{g} b f_\beta g \Delta t db d^3(\Delta \mathbf{v}_\beta), \quad (3.8)$$

$$\langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle \equiv 4\pi^2 \left(\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \right)^2 \int \Delta \mathbf{g} \Delta \mathbf{g} b f_\beta g \Delta t db d^3(\Delta \mathbf{v}_\beta). \quad (3.9)$$

Protože se integrace přes účinný průřez týká jen součinitelů obsahující relativní rychlost $\mathbf{g}$, můžeme integraci rozdělit na dvě části: nejprve vypočítat pomocné koeficienty γ_k a ξ_{kl} :

$$\gamma_k \equiv \int \Delta g_k g \, d\sigma = 2\pi \int \Delta g_k g b \, db, \quad (3.10)$$

$$\xi_{kl} \equiv \int \Delta g_k \Delta g_l g \, d\sigma = 2\pi \int \Delta g_k \Delta g_l g b \, db \quad (3.11)$$

a poté vypočítat oba momenty:

$$\begin{aligned} \langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle &\equiv \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \Delta t \int \vec{\gamma} f_\beta(\mathbf{v}_\beta) \, d^3(\Delta \mathbf{v}_\beta), \\ \langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle &\equiv \left(\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \right)^2 \Delta t \int \vec{\xi} f_\beta(\mathbf{v}_\beta) \, d^3(\Delta \mathbf{v}_\beta). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Koeficienty γ_k a ξ_{kl} vzhledem k jejich symetrii musí mít tvar

$$\gamma_k = L g_k; \quad \xi_{kl} = M \delta_{kl} + N g_k g_l. \quad (3.13)$$

Konstanty L , M a N lze bez újmy na obecnosti vypočítat v libovolné souřadnicové soustavě: zvolíme proto jednoduchý případ, kdy vektor $\mathbf{g} \equiv \mathbf{v}_{\alpha\beta}$ míří v ose z a vektor $\mathbf{g}'$ leží v rovině xz . A tedy složky vektoru $\Delta \mathbf{g}$ budou mít velikost (s použitím vztahů mezi goniometrickými funkcemi a (1.5)):

$$\begin{aligned} \Delta g_1 &= g \sin \chi = g \frac{2bb_0}{b^2 + b_0^2}; \\ \Delta g_2 &= 0; \\ \Delta g_3 &= -g(1 - \cos \chi) = -g \frac{2b_0^2}{b^2 + b_0^2}. \end{aligned}$$

Vzhledem k volbě souřadnicové soustavy bude mít integrál (3.10) jediný nenulový člen v ose e_3 , ze kterého lze určit konstantu $L = \frac{\gamma_3}{g}$ (integrujeme od nuly, protože srážek se záměrným parametrem menším než b_0 je málo, a předpokládáme, že $\lambda_D \gg b_0$):

$$L = \frac{\gamma_3}{g} \equiv \frac{1}{g} 2\pi \int_0^{\lambda_D} \Delta g_3 g b \, db = -2\pi b_0^2 g \ln [b^2 + b_0^2]_0^{\lambda_D} \approx -4\pi b_0^2 g \ln \left(\frac{\lambda_D}{b_0} \right).$$

Obdobně určíme konstantu $M = \xi_{11}$ (viz (3.13) a volba souřadnicové soustavy):

$$M = \xi_{11} = 2\pi \int_0^{\lambda_D} \Delta g_1 \Delta g_1 g b \, db = 2\pi g^3 b_0^2 \left(\frac{b_0^2}{b^2 + b_0^2} \right) + \ln [b^2 + b_0^2]_0^{\lambda_D} \approx 4\pi g^3 b_0^2 \ln \left(\frac{\lambda_D}{b_0} \right).$$

Ve zvolené souřadnicové soustavě a (3.13) lze konstantu N vypočítat z $\xi_{33} = M + N g^2$ (poslední krok plyne z toho, že výsledek integrace neobsahuje podstatný logaritmický člen, a proto je řádově menší než L a M):

$$M + N g^2 = \xi_{33} \equiv 2\pi \int_0^{\lambda_D} \Delta g_3 \Delta g_3 g b \, db = \left[-\frac{1}{b^2 + b_0^2} \right]_0^{\lambda_D} \approx 0$$

a tedy $N = -\frac{B}{g^2}$. Souhrně tedy máme:

$$L \approx -4\pi b_0^2 g \ln\left(\frac{\lambda_D}{b_0}\right); \quad M \approx -4\pi g^3 b_0^2 \ln\left(\frac{\lambda_D}{b_0}\right); \quad N \approx -4\pi b_0^2 g \ln\left(\frac{\lambda_D}{b_0}\right). \quad (3.14)$$

Vypočtené konstanty dosadíme do (3.12) a vypočteme třetí a dynamický člen:

$$\begin{aligned} \langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle &\approx -\Delta t \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \int \frac{g_k}{g^3} f_\beta \, d^3(\Delta \mathbf{v}_\beta) = \\ &= \Delta t \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial g_k} \int \frac{1}{g} f_\beta \, d^3(\Delta \mathbf{v}_\beta) = \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial H_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha)}{\partial g_k} \Delta t, \\ \langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle &\approx \Delta t K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \int \frac{g^2 \delta_{kl} - g_k g_l}{g^3} f_\beta \, d^3(\Delta \mathbf{v}_\beta) = \\ &= \Delta t K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial g_k \partial g_l} \int g f_\beta \, d^3(\Delta \mathbf{v}_\beta) = K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 G_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha)}{\partial g_k \partial g_l} \Delta t, \end{aligned}$$

kde

$$K_{\alpha\beta} \equiv 4\pi \left(\frac{Q_\alpha Q_\beta}{4\pi\epsilon_0 m_\alpha} \right)^2$$

a

$$H_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha) \equiv \int \frac{1}{g} f_\beta \, d^3 \mathbf{v}_\beta; \quad G_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha) \equiv \int g f_\beta \, d^3 \mathbf{v}_\beta.$$

Funkce $\ln \Lambda_{\alpha\beta} \equiv \ln\left(\frac{\lambda_D}{b_0}\right)$ se nazývá Coulombův logaritmus a byla vytknuta z integrace, protože se mění jen velmi pomalu.

Rovnice (3.4) tedy získá tvar [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_\alpha + (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} (\mathbf{F}_\alpha \cdot \nabla_{\mathbf{v}}) f_\alpha &= S_{\alpha\beta}; \\ S_{\alpha\beta} &= K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \left[-\frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta} \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (f_\alpha \nabla_{\mathbf{v}} H_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2} (\nabla_{\mathbf{v}} \nabla_{\mathbf{v}}) : (f_\alpha \nabla_{\mathbf{v}} \nabla_{\mathbf{v}} G_{\alpha\beta}) \right], \end{aligned} \quad (3.15)$$

kde

$$K_{\alpha\beta} \equiv 4\pi \left(\frac{Q_\alpha Q_\beta}{4\pi\epsilon_0 m_\alpha} \right)^2; \quad \ln \Lambda_{\alpha\beta} \equiv \ln\left(\frac{\lambda_D}{b_0}\right) \quad (3.16)$$

a

$$H_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha) \equiv \int \frac{1}{g} f_\beta \, d^3 \mathbf{v}_\beta; \quad G_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha) \equiv \int g f_\beta \, d^3 \mathbf{v}_\beta. \quad (3.17)$$

$\ln \Lambda$ se nazývá Coulombův logaritmus, : je dvojný skalární součin, $H_{\alpha\beta}$ a $G_{\alpha\beta}$ jsou Rosenbluthovy potenciály.

3.1.3 Přechod k pohybové rovnici

Mějme monochromatický svazek α , který nalétává do homogenního izotropního maxwellovského plazmatu a je v něm brzděn na rychlost $\mathbf{v}(t)$. V plazmatu zároveň působí slabé elektrické pole s intenzitou E urychlující svazek α . Hustota

pravděpodobnosti monochromatického svazku, protože jeho částice mají stejnou rychlost a koncentraci, je dána Diracovou distribucí a hustota pravděpodobnosti terče je dána Maxwellovým rozdělením:

$$f_\alpha = n_\alpha \delta(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}(t)); \quad f_\beta = n_\beta \left(\frac{m_\beta}{2\pi k_B T_\beta} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv_\beta^2}{2k_B T_\beta} \right).$$

Protože monochromatický svazek je ekvivalentní jedné vyslané částici, nebude jevit difúzi a Rosenbluthův potenciál $G_{\alpha\beta}$ bude roven nule.

Mějme Fokkerovu-Planckovu rovnici (3.15) a vynásobme ji rychlostí $\mathbf{v}_\alpha$ a vystředujeme přes ni. Druhý člen na levé straně bude roven nule, protože hustota pravděpodobnosti f_α nezávisí na poloze. Máme tedy:

$$\begin{aligned} \int \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial t} n_\alpha \delta(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}(t)) d^3\mathbf{v}_\alpha + \int \mathbf{v}_\alpha \frac{Q}{m_\alpha} (\mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}}) n_\alpha \delta(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}(t)) d^3\mathbf{v}_\alpha &= S_{\alpha\beta}; \\ S_{\alpha\beta} &= - \int K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \mathbf{v}_\alpha \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta} \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (n_\alpha \delta(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}(t)) \nabla_{\mathbf{v}} H_{\alpha\beta}) d^3\mathbf{v}_\alpha, \end{aligned} \quad (3.18)$$

kde $Q \equiv Q_\alpha$ označuje náboj nalétávající částice. Postupně upravíme všechny členy v rovnici. V prvním členu zaměníme derivaci a integrál ($\mathbf{v}_\alpha$ nezávisí na t) a využijeme vlastnosti δ funkce:

$$\int \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial t} n_\alpha \delta(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}(t)) d^3\mathbf{v}_\alpha = n_\alpha \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{v}_\alpha \delta(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}(t)) d^3\mathbf{v}_\alpha = n_\alpha \frac{\partial \mathbf{v}(t)}{\partial t}.$$

Druhý člen upravíme integrací per partes a pomocí vlastností δ funkce:

$$\int \mathbf{v}_\alpha \frac{Q}{m_\alpha} (\mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}}) n_\alpha \delta(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}(t)) d^3\mathbf{v}_\alpha = n_\alpha \frac{QE}{m}.$$

Pravou stranu upravíme podobně jako předchozí člen:

$$- \int K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \mathbf{v}_\alpha \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta} \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (n_\alpha \delta(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}(t)) \nabla_{\mathbf{v}} H_{\alpha\beta}) d^3\mathbf{v}_\alpha = n_\alpha \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta} K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial H(v(t))}{\partial \mathbf{v}(t)},$$

kde $H(v(t))$ se upraví na tvar:

$$H(v(t)) \equiv \int \frac{1}{g} n_\beta \left(\frac{m_\beta}{2\pi k_B T_\beta} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv_\beta^2}{2k_B T_\beta} \right) d^3v_\beta.$$

Integrál lze vyjádřit ve tvaru:

$$H(v(t)) = n_\beta \frac{1}{v_\alpha} \phi\left(\frac{v_\alpha}{v_{0\beta}} \right),$$

kde ϕ je chybová funkce (1.10). Rovnice (3.18) tedy přejde na tvar:

$$n_\alpha \frac{\partial \mathbf{v}(t)}{\partial t} + n_\alpha \frac{QE}{m} = n_\alpha \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta} K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial n_\beta \frac{1}{v_\alpha} \phi\left(\frac{v_\alpha}{v_{0\beta}} \right)}{\partial \mathbf{v}(t)}.$$

Upravíme derivaci na pravé straně

$$\frac{\partial n_\beta \frac{1}{v_\alpha} \phi\left(\frac{v_\alpha}{v_{0\beta}}\right)}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial v} n_\beta \frac{1}{v_\alpha} \phi\left(\frac{v_\alpha}{v_{0\beta}}\right) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\phi' \cdot \frac{v}{v_{0\beta}} - \phi}{v^2} \cdot \frac{\mathbf{v}}{v} = 2v_{0\beta}^{-2} \psi\left(\frac{v}{v_{0\beta}}\right) \frac{\mathbf{v}}{v}.$$

A tedy po vydělení n_α dostaneme pohybovou rovnici:

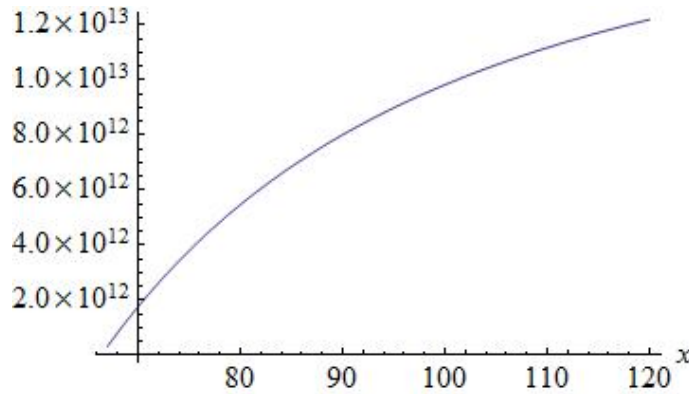
$$\dot{v} = \frac{QE}{m_\alpha} - C \cdot \psi\left(\frac{v}{v_{0\beta}}\right), \quad (3.19)$$

kde ψ je Chandrasekharova funkce a

$$v_{0\beta} = \sqrt{\frac{2k_B T_\beta}{m_\beta}}, \quad (3.20)$$

$$C = 2n_\beta \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta} K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} v_{0\beta}^{-2}. \quad (3.21)$$

Pravá strana pohybové rovnice je vykreslena na Obr. 3.1, ve kterém jsem zvolila za hodnotu intenzity elektrického pole $E = 10^2$ V/m, jak je uvedeno níže. Graf je vykreslen pro elektron-elektronové srážky a pro odhad Chandrasekharovy funkce $\psi(x)$ funkcí $\frac{1}{2x^2}$.



Obrázek 3.1: Graf pravé strany pohybové rovnice (3.19) pro $E = 10^2$ V/m, na svislé ose je vykreslena působící síla.

3.2 Kvadratura pohybové rovnice

Mějme rovnici (3.19). Budeme ji řešit na oblasti, kde se elektron může stát ubíhající, tj. pro rychlosti splňující

$$\psi\left(\frac{v}{v_{0\beta}}\right) < \frac{QE}{m_\alpha C} \doteq 6,87 \cdot 10^5,$$

Pro volbu $\psi\left(\frac{v}{v_{0\beta}}\right) = \frac{1}{2(v/v_{0\beta})^2}$, pro kterou budeme řešit pohybovou rovnici, podmínka na uvažované rychlosti je následující:

$$v > \sqrt{\frac{m_\alpha C}{2QE}} v_{0\beta}. \quad (3.22)$$

Nejprve provedeme substituci $x \equiv \frac{v}{v_{0\beta}}$ a $\dot{x} = \frac{1}{v_{0\beta}} \dot{v}$ (x je nová, zvolená proměnná). Rovnice (3.19) přejde na tvar

$$v_{0\beta} \dot{x} + C \cdot \psi(x) = \frac{QE}{m}.$$

Po označení $\Pi(x) \equiv \frac{1}{v_{0\beta}} \left(C \cdot \psi(x) - \frac{QE}{m_\alpha} \right)$ rovnice získá tvar

$$\dot{x} + \Pi(x) = 0.$$

Pro $\Pi(x) \neq 0$ ($\Pi(x) = 0 \Leftrightarrow \psi(x) = \frac{QE}{m_\alpha C}$ je na hranici mnou uvažované oblasti) máme separovatelnou rovnici

$$\frac{\dot{x}}{\Pi(x)} = -1, \quad (3.23)$$

jejímž řešením je

$$\int \frac{dx}{\Pi(x)} = -t + K, \quad (3.24)$$

kde K je libovolná integrační konstanta. Pro $\psi(x) = \frac{1}{2x^2}$ (Chandrasekharova funkce v limitě velkých rychlostí, viz 1.9) je integrál na levé straně rovnice (3.24) roven: $I \equiv \int \frac{dx}{\Pi(x)} = 2 \int \frac{d(x)}{\frac{C}{x^2} - \frac{2QE}{m_\alpha}} = \left(\frac{m_\alpha v_{0\beta}}{2QE} \right) \sqrt{\frac{m_\alpha C}{2QE}} \ln |1 + \sqrt{\frac{2QE}{m_\alpha C}} v_{0\beta} x| - \left(\frac{m_\alpha v_{0\beta}}{2QE} \right) \sqrt{\frac{m_\alpha C}{2QE}} \ln |1 - \sqrt{\frac{2QE}{m_\alpha C}} v_{0\beta} x| - \frac{m_\alpha}{QE} v_{0\beta} x = \left(\frac{m_\alpha v_{0\beta}}{2QE} \right) \sqrt{\frac{m_\alpha C}{2QE}} \ln \left(\sqrt{\frac{2QE}{m_\alpha C}} v_{0\beta} x + 1 \right) - \left(\frac{m_\alpha v_{0\beta}}{2QE} \right) \sqrt{\frac{m_\alpha C}{2QE}} \ln \left(\sqrt{\frac{2QE}{m_\alpha C}} v_{0\beta} x - 1 \right) - \frac{m_\alpha}{QE} v_{0\beta} x$. Poslední krok plyne z (3.22).

Proto řešením substituované pohybové rovnice (3.24) je:

$$\left(\frac{m_\alpha v_{0\beta}}{2QE} \right) \sqrt{\frac{m_\alpha C}{2QE}} \ln \left(\sqrt{\frac{2QE}{m_\alpha C}} v_{0\beta} x + 1 \right) - \left(\frac{m_\alpha v_{0\beta}}{2QE} \right) \sqrt{\frac{m_\alpha C}{2QE}} \ln \left(\sqrt{\frac{2QE}{m_\alpha C}} v_{0\beta} x - 1 \right) - \frac{m_\alpha}{QE} v_{0\beta} x = K - t \quad (3.25)$$

a kvadraturou pohybové rovnice (3.19) je

$$\frac{m_\alpha}{QE} v + \left(\frac{m_\alpha v_{0\beta}}{2QE} \right) \sqrt{\frac{m_\alpha C}{2QE}} \ln \left(\sqrt{\frac{2QE}{m_\alpha C}} v - 1 \right) - \left(\frac{m_\alpha v_{0\beta}}{2QE} \right) \sqrt{\frac{m_\alpha C}{2QE}} \ln \left(\sqrt{\frac{2QE}{m_\alpha C}} v + 1 \right) = t - K. \quad (3.26)$$

K dořešení počáteční úlohy zbývá poslední krok, kterým je použití počáteční podmínky:

$$v(0) = v_{0\beta} \sqrt{\frac{m_\alpha C}{2QE}} + \delta, \quad (3.27)$$

kde δ je malý kladný parametr zajišťující, aby počáteční rychlost byla o málo větší než kritická. Počáteční podmínka vyplývá z průsečíku grafu Chandrasekharovy funkce s hodnotou $\frac{QE}{m_\alpha C}$. Řešením počáteční úlohy je tedy:

$$\begin{aligned} & \frac{m_\alpha}{QE}v + \left(\frac{m_\alpha v_{0\beta}}{2QE}\right) \sqrt{\frac{m_\alpha C}{2QE}} \ln\left(\sqrt{\frac{2QE}{m_\alpha C}}v - 1\right) - \left(\frac{m_\alpha v_{0\beta}}{2QE}\right) \sqrt{\frac{m_\alpha C}{2QE}} \ln\left(\sqrt{\frac{2QE}{m_\alpha C}}v + 1\right) = \\ & = t + \frac{m_\alpha}{QE}v(0) + \left(\frac{m_\alpha v_{0\beta}}{2QE}\right) \sqrt{\frac{m_\alpha C}{2QE}} \ln\left(\sqrt{\frac{2QE}{m_\alpha C}}v(0) - 1\right) - \left(\frac{m_\alpha v_{0\beta}}{2QE}\right) \sqrt{\frac{m_\alpha C}{2QE}} \ln\left(\sqrt{\frac{2QE}{m_\alpha C}}v(0) + 1\right). \end{aligned}$$

Označíme-li kvadraturu

$$\Phi \equiv \frac{m_\alpha}{QE}v + \left(\frac{m_\alpha v_{0\beta}}{2QE}\right) \sqrt{\frac{m_\alpha C}{2QE}} \ln\left(\sqrt{\frac{2QE}{m_\alpha C}}v - 1\right) - \left(\frac{m_\alpha v_{0\beta}}{2QE}\right) \sqrt{\frac{m_\alpha C}{2QE}} \ln\left(\sqrt{\frac{2QE}{m_\alpha C}}v + 1\right) - t + K,$$

pak

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{1}{\Pi(x) \cdot v_{0\beta}} = \frac{1}{\frac{Cv_{0\beta}^2}{2v^2} - \frac{QE}{m}} \neq 0$$

z rovnice (3.23). Navíc Φ je spojitá funkce. Podle teorie implicitní funkce [7] existuje spojitá funkce $v = v(t)$, jejíž analytické vyjádření se mi ale nepovedlo nalézt.

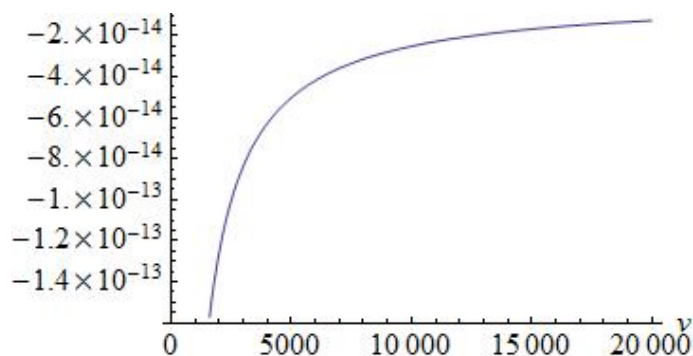
Kapitola 4

Závěry z pohybové rovnice

Za výchozí bod urychlování jsem zvolila **D-vrstvu ionosféry**, která se nachází ve výšce přibližně 80 km (ve dne leží mezi 60 km a 90 km výšky) [8] [9]. V této výšce je teplota přibližně 200 K [9]. Jak už název napovídá, v ionosféře dochází k ionizaci molekul vzduchu. Protože koncentrace neutrálních částic je větší než koncentrace elektronů a iontů, má ionosféra vlastnosti slabě ionizovaného plazmatu [8]. V dané výšce je koncentrace elektronů přibližně 10^4 cm^{-3} , iontů NO^+ přibližně 10^3 cm^{-3} a iontů O_2^+ přibližně $5 \cdot 10^2 \text{ cm}^{-3}$ [8]. Tuto nejspodnější vrstvu ionosféry jsem zvolila ze dvou důvodů: prvním jsou vlastnosti ionosféry (ionosféra obsahuje volné elektrony) a druhým je blízkost k zemi, a tedy i nejkratší dolet elektronů do bouřkových oblaků.

Detailní studium pohybové rovnice (3.19) a její kvadratury jsem provedla pro případ elektron-elektronových srážek. Kvadratura pohybové rovnice je vyobrazena na následujících dvou obrázcích 4.3 a 4.4. Jak je vidět z grafů 4.3 a 4.4, elektrony budou opravdu urychlovány. Průsečík grafu s osou x odpovídá počáteční rychlosti větší než $v(0)$. Protože rozdíl logaritmů v (3.26) roste k nule pro $v \rightarrow \infty$ (jak lze vidět z Obr. 4.1), pro velké rychlosti převládá lineární vliv prvního členu (3.26). Podle tohoto modelu tedy rychlost překročí za určitý čas rychlost světla, což je v rozporu s fyzikálními zákony. Tento rozpor pramení z nerelativistického pojetí a předesílá nutnost relativistického řešení, čemuž bych se v budoucnu ráda věnovala. V další části se budu věnovat přibližnému relativistickému řešení pouze pro konstantní sílu elektrického pole, abych ověřila, že elektron (alespoň v tomto zjednodušeném případě) nepřekročí rychlost světla.

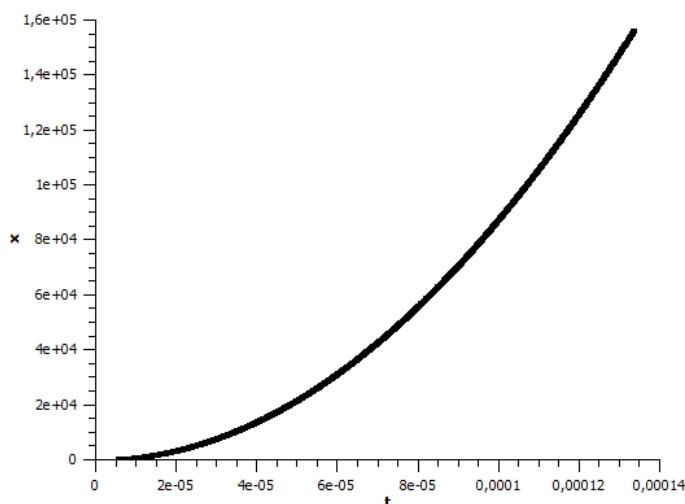
Protože se mi nepodařilo nalézt inverzní vyjádření kvadratury (3.26), a tedy i závislost rychlosti na čase, nemohla jsem analyticky vyjádřit závislost polohy na čase. Proto jsem tuto závislost našla pomocí Newtonova-Eulerova diferenčního schématu s krokem $\Delta t = 10^{-7} \text{ s}$ – je zobrazena na Obr. 4.2. Jak lze z grafu nahlédnout, urychlený elektron dosáhne zemského povrchu (uletí přibližně 80 km) za $9,6 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ – v tomto čase bude mít elektron rychlost $1,7 \cdot 10^9 \text{ ms}^{-1}$.



Obrázek 4.1: Graf druhého a třetího členu (logaritmy) v (3.26) pro $E = 10^2$ V/m.

Na svislé ose je vyobrazení logaritmu v (3.26): $\left(\frac{m_\alpha v_0}{2QE}\right) \sqrt{\frac{m_\alpha C}{2QE}} \ln\left(\sqrt{\frac{2QE}{m_\alpha C}}v - 1\right) - \left(\frac{m_\alpha v_0}{2QE}\right) \sqrt{\frac{m_\alpha C}{2QE}} \ln\left(\sqrt{\frac{2QE}{m_\alpha C}}v + 1\right)$.

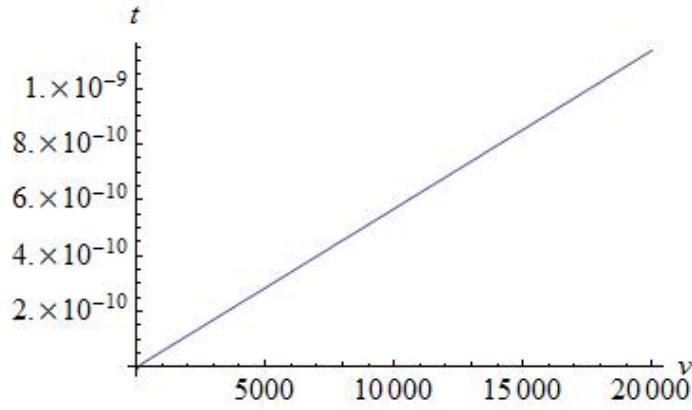
První člen pravé strany v téže rovnici je o čtyři až pět řádů větší.



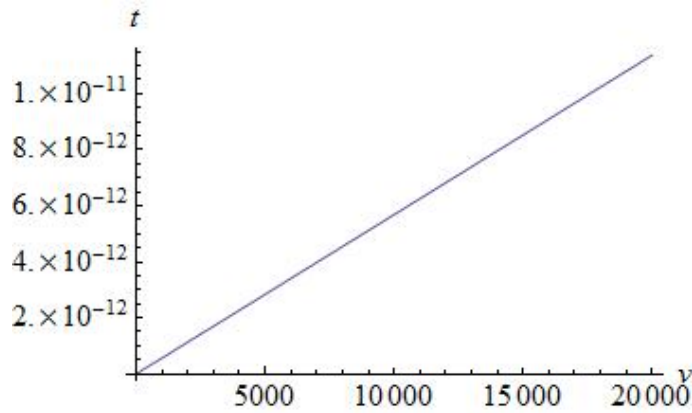
Obrázek 4.2: Závislost polohy na čase pro $E = 10^2$ V/m a elektron-elektronové srážky.

4.1 Závislost tvaru kvadratury na změně fyzikálních podmínek pro elektron-elektronové srážky

Jak lze vidět z Obr. 4.3 a Obr. 4.4, se zvýšením intenzity elektrického pole se průsečík grafu s osou x posune směrem doleva. To také znamená, že při zmenšování intenzity elektrického pole se bude zvyšovat nejmenší možná rychlost, aby elektron mohl být urychlován, což je v souladu s očekáváním. Protože intenzity elektrického pole v bouřkovém oblaku nedosahují nijak zvlášť velkých hodnot, je lepší stavět model ubíhajících elektronů na nižších rychlostech. V souladu s tímto uvádím veškeré vypočítané hodnoty pro intenzitu elektrického pole $E = 10^2$ V/m.



Obrázek 4.3: Graf kvadratury pohybové rovnice (3.26) pro $K = 0$, $E = 10^2$ V/m a elektron-elektronové srážky.



Obrázek 4.4: Graf kvadratury pohybové rovnice (3.26) pro $K = 0$, $E = 10^4$ V/m a elektron-elektronové srážky.

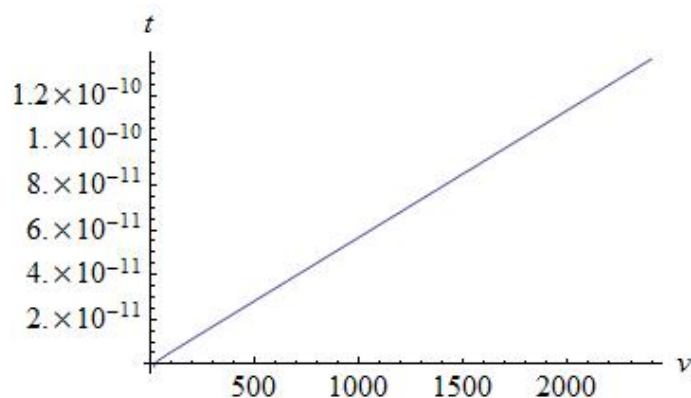
4.2 Srážky elektronů s různými druhy částic

Pro srážky nalétávajícího elektronu s jinými částicemi má kvadratura pohybové rovnice (3.26) podobný průběh jako pro srážky s elektronem (viz Obr. 4.5 a Obr. 4.6), a proto závěry uvedené výše se dají rozšířit i na ostatní případy. Jak lze vidět z Tab. 4.1 nejvyšší počáteční rychlost potřebná k urychlení je okolo 70 ms^{-1} pro srážky s elektrony.

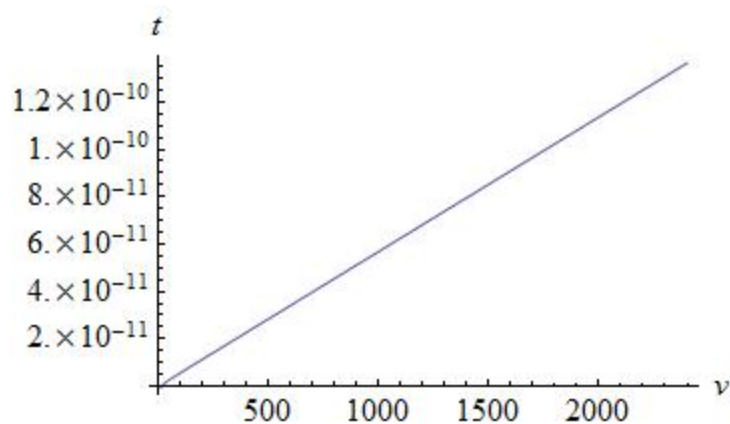
Jak lze vidět z Obr. 4.7 působící síla pro elektron-elektronové srážky je menší než v případě srážek elektronů s ionty O_2^+ . Pro velké rychlosti ovšem rozdíl klesá k nule a síla pro všechny druhy srážek je přibližně stejná.

Na závěr uvedu hodnoty konstant objevujících se v (3.26) a dalších významných konstant pro hodnoty v ionosféře – viz Tab. 4.1. V prvním řádku je uvedena částice, se kterou se uvažovaný elektron sráží. Konstanty A a B jsou určeny vztahy

$$A = \frac{QE}{m_\alpha}, \quad B = \frac{Cv_{0\beta}^2}{2},$$



Obrázek 4.5: Graf kvadratury pohybové rovnice (3.26) pro $K = 0$, $E = 10^4 \text{ V/m}$ a srážky elektronu s iontem NO^+ .

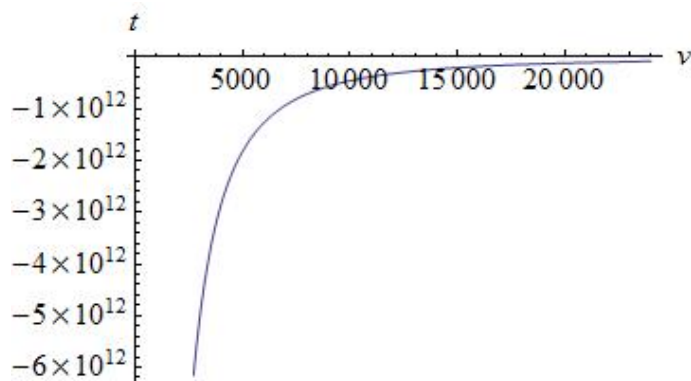


Obrázek 4.6: Graf kvadratury pohybové rovnice (3.26) pro $K = 0$, $E = 10^4 \text{ V/m}$ a srážky elektronu s iontem O_2^+ .

po jejich použití získá pohybová rovnice (3.19) jednoduchý tvar

$$\dot{v} = A - \frac{B}{v^2}.$$

.



Obrázek 4.7: Graf rozdílu pravých stran pohybové rovnice (3.19), tj. rozdíl působící síly mezi elektron-elektronovými srážkami a srážkami elektronů s ionty O_2^+ .

	elektron	NO^+	O_2^+
n_β	10^{10} m^{-3}	10^9 m^{-3}	$5 \cdot 10^9 \text{ m}^{-3}$
$\{A\}$	$1,76 \cdot 10^{13}$	$1,76 \cdot 10^{13}$	$1,76 \cdot 10^{13}$
$\{B\}$	$7,75 \cdot 10^{16}$	$5,36 \cdot 10^{15}$	$2,82 \cdot 10^{15}$
$\{C\}$	$2,56 \cdot 10^7$	$9,74 \cdot 10^{10}$	$5,47 \cdot 10^{10}$
$v_{0\beta}$	77862 ms^{-1}	331 ms^{-1}	321 ms^{-1}
$v(0)$	$66,3 \text{ ms}^{-1}$	$17,5 \text{ ms}^{-1}$	$12,7 \text{ ms}^{-1}$
λ_D	$6,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$2,2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$	$3,1 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
b_0	$5,64 \cdot 10^{-5} \text{ m}$	$2,81 \cdot 10^{-5} \text{ m}$	$2,81 \cdot 10^{-5} \text{ m}$

Tabulka 4.1: Přehled použitých konstant pro srážky elektronu s různými částicemi.

4.3 Relativistická pohybová rovnice

Protože Chandrasekharova funkce je dominantní pro malé, nerelativistické rychlosti, lze sestavit relativistickou pohybovou rovnici takovou, že na pravé straně bude jen konstantní síla elektrického pole:

$$\frac{d}{dt}(m_\alpha v) = QE = \text{konst.}, \quad (4.1)$$

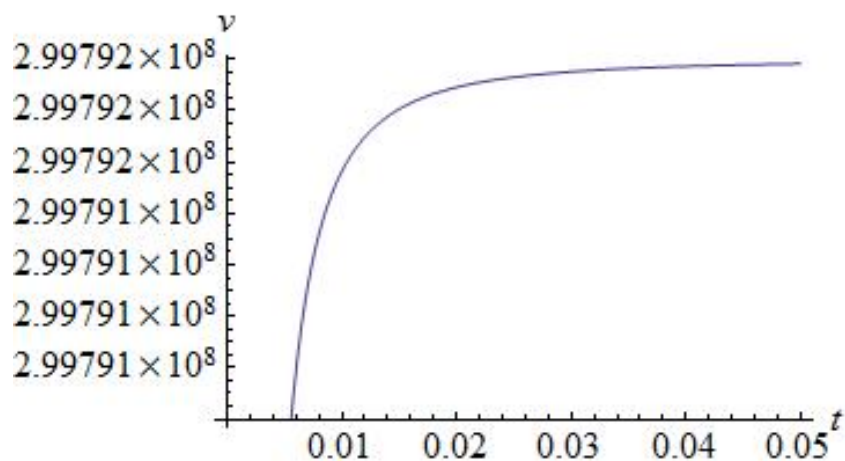
kde m je hmotnost nalétávajícího elektronu. Protože změna hybnosti se rovná konstantní síle, lze pro hybnost psát:

$$\frac{m_\alpha v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = QEt,$$

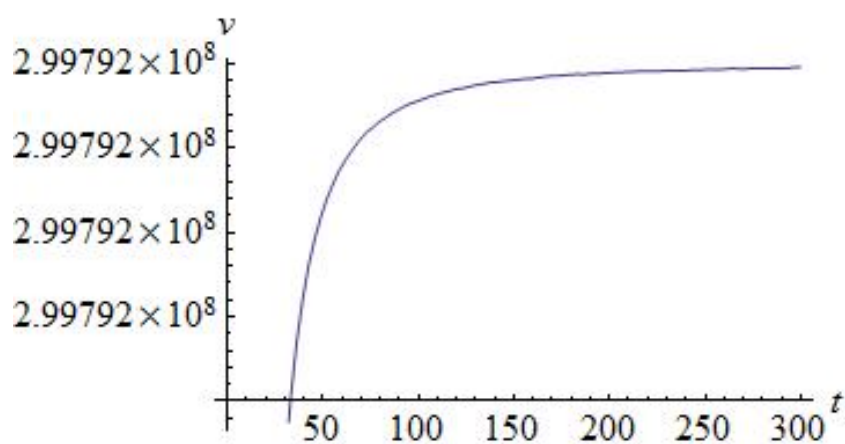
kde m_α je klidová hmotnost nalétávajícího elektronu. Inverzní funkcí k této funkci je

$$v = \frac{(cQEt)}{\sqrt{(QEt)^2 t^2 + (cm_\alpha)^2}}. \quad (4.2)$$

Rychlost elektronu je vykreslena na Obr. 4.8 a Obr. 4.9. Jak lze vidět, elektron bude opravdu urychlován a urychlování se bude postupně zpomalovat a přibližovat rychlosti světla díky relativistickým efektům.

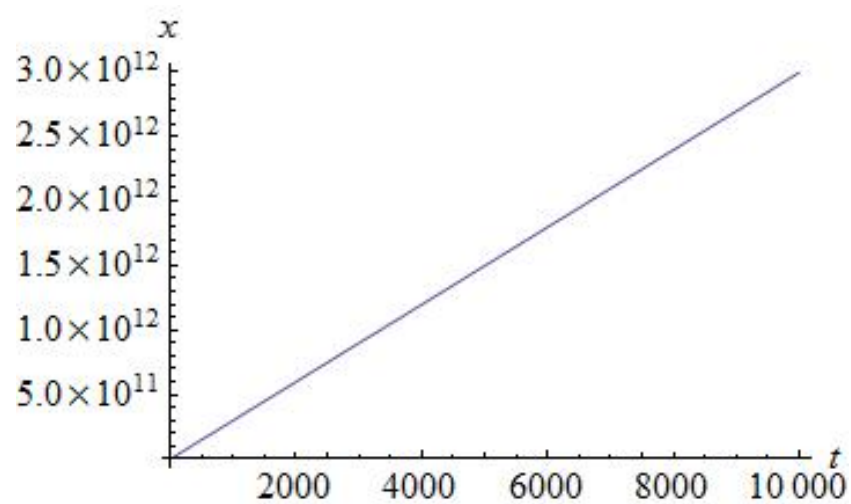


Obrázek 4.8: Graf řešení relativistické pohybové rovnice (4.1) pro malé časy.



Obrázek 4.9: Graf řešení relativistické pohybové rovnice (4.1).

Uražená dráha elektronu je vykreslena na Obr. 4.10. Jak lze vidět, dráha elektronu roste přímo úměrně s časem. Elektron urazí dráhu 80 km za zlomek sekundy (v řádech tisícín sekundy) a již na této vzdálenosti bude mít rychlost srovnatelnou s rychlostí světla.



Obrázek 4.10: Graf řešení relativistické pohybové rovnice (4.1).

Závěr

Mezi dvěma používanými teoriemi – Gurevičovou teorií a Fokkerovou-Planckovou rovnicí – existuje několik rozdílů:

- průběh brzdící síly – jak lze vidět z Obr. 2.3 brzdící síla nejprve klesá a pak roste. Z pohybové rovnice (3.19), tj. varianty Fokkerovy-Planckovy rovnice vyplývá, že brzdící síla pouze klesá. Tento rozdíl může být způsoben relativistickými efekty, které nejsou v Fokkerově-Planckově rovnici zahrnuty – například mění se hmotnost nalétávající částice, tvorba elektromagnetického pole nalétávající částicí, její interakce s vnějším elektromagnetickým polem. Interakce s vlastním polem částice je zahrnuta v Lorentzově-Diracově rovnici. Námi použitá pohybová rovnice je sestavena na základě Rutherfordova nerelativistického rozptylu, v budoucnu bych ráda zpřesnila své výpočty použitím Mottova relativistického rozptylu.
- částice, se kterými se elektron dominantně sráží – při řešení Fokkerovy-Planckovy rovnice jsem považovala za dominantní elektron-elektronové srážky, protože srážející částice mají stejnou hmotnost, a proto si vymění nejvíce energie. Naopak elektron-elektronové srážky Gurevič neuvažuje a považuje za dominantní srážky s ionty vzduchu.

Ověřila jsem, že fyzikální situace panující v atmosféře může dojít k urychlení elektronu až na relativistické rychlosti za podmínky, že její počáteční rychlost bude větší než hodnota $v(0)$. Dále jsem vypočítala, že se snižováním intenzity elektrického pole bude stále moci dojít k urychlení elektronů – nutná počáteční rychlost se ale bude zvyšovat, proto ubíhajících elektronů bude méně.

Seznam použitých zdrojů

- [1] KULHÁNEK, Petr. *Úvod do teorie plazmatu*. Vyd. 1. Praha: AGA, 2011, 375 s. ISBN: 978-80-904582-2-2. Dostupné na: <http://www.aldebaran.cz/studium/fpla.pdf>.
- [2] KASEMIR, Heinz W. *A Contribution to the Electrostatic Theory of a Lightning Discharge*. Journal of Geophysical Research. 1960, roč. 65, č. 7, s. 1873-1878. ISSN 0148-0227. DOI: 10.1029/JZ065i007p01873. Dostupné na: <http://www.agu.org/pubs/crossref/1960/JZ065i007p01873.shtml>.
- [3] GUREVICH, A.V., G.M. MILIKH a R. ROUSSEL-DUPRE. *Runaway electron mechanism of air breakdown and preconditioning during a thunderstorm*. Physics Letters A. 1992, roč. 165, 5-6, s. 463-468. ISSN 0375-9601. DOI: 10.1016/0375-9601(92)90348-P. Dostupné na: http://www.ees.lanl.gov/ees2/pdfs/Gurevich_RRD_1992.pdf.
- [4] GUREVICH, Alexander V. a Kirill P. ZYBIN. *Runaway Breakdown and the Mysteries of Lightning*. Physics Today. 2005, roč. 58, č. 5, s. 37-43. ISSN 00319228. DOI: 10.1063/1.1995746. Dostupné na: <http://www.phy.olemiss.edu/~jgladden/phys510/spring06/Gurevich.pdf>.
- [5] KULHÁNEK, Petr. *Blýskání, aneb, Třináctero vyprávění o plazmatu*. Vyd. 1. Praha: AGA, 2011, 295 s. ISBN 978-809-0458-239.
- [6] GUREVICH, Aleksandr V. a Kirill P. ZYBIN. *Runaway breakdown and electric discharges in thunderstorms*. Physics, Uspekhi. 2001, roč. 44, č. 11, 1119 – 1140. ISSN 1468-4780. DOI: 10.1070/PU2001v044n11ABEH000939. Dostupné na: http://www.physics-online.ru/PaperLogos/4/files/-Full_text_English_version.pdf.
- [7] MAKOVÍČKA, Jindřich. *Turistický průvodce matematickou analýzou 4: Kapitola 16: Řešení implicitní rovnice*. In: [online]. [cit. 2012-06-25]. Dostupné na: <http://wikiskripta.fjfi.cvut.cz/wiki/index.php/01MAA4:Kapitola16>.
- [8] PAPON, Jeremie, Morris COHEN, Benjamin COTTS a Naoshin HAQUE. *Ionospheric Morphology*. In: DEPARTMENT OF ELECTRICAL ENGINEERING, Stanford University. *STAR Lab: Science, Telecommunications, and Radioscience Laboratory* [online]. [cit. 2012-07-02]. Dostupné na: http://nova.stanford.edu/~vlf/IHY_Test/Tutorials/TheIonosphere/-IonosphericMorphology.pdf.

- [9] Ionosphere: Tutorial. GNSS RESEARCH GROUP, Royal Observatory of Belgium. *GNSS@ROB - Ionosphere* [online]. 2010 [cit. 2012-07-03]. Dostupné na: <http://gnss.be/ionosphere_tutorial.php>.
- [10] HUGNES, James. *Velká obrazová všeobecná encyklopedie*. 1. vyd. Praha: Svojtka and Co., 1999, 792 s. ISBN 80-723-7256-4.
- [11] PATTERSON, Robert. *Lightning in Super Slow Motion*. In: [online]. [cit. 2012-06-25]. Dostupné na: <<http://www.youtube.com/watch?v=RLWIBrweSU8>>.
- [12] WARNER, Tom A. *LiveLeak.com - Lightning slowed down 300x.flv*. In: [online]. [cit. 2012-06-25]. Dostupné na: <<http://www.youtube.com/watch?v=rsokWqplLLE>>.
- [13] *Electrical charge distribution in a thunderstorm*. In: ENCYCLOPAEDIA BRITANNICA, Inc. *Encyclopaedia Britannica: Facts matter* [online]. 1999 [cit. 2012-06-30]. Dostupné na: <<http://media-1.web.britannica.com/eb-media/78/7578-004-7C794BAD.gif>>.
- [14] HILL, E. L. Electromagnetic radiation from lightning strokes. *Journal of the Franklin Institute*. Philadelphia: The Franklin Institute, 1957, roč. 263, č. 2, 107 - 119. ISSN 0016-0032. Dostupné na: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0016003257907457>>.