České Vysoké Učení Technické
v Praze

Fakulta Jaderná a Fyzikálně
Inženýrská

Katedra Fyziky

Bakalářská práce

Kohraniční lieovské bialgebry

Adam Brus

2012

Školitel:RNDr.Ladislav Hlavatý, DrSc.

Thesis tittle: **Coboundary Lie bialgebras**
Author: Adam Brus

Department: Department of Physics FNSPE CTU in Prague
Branch of study: Mathematical Physics
Kind of thesis: Bachelor's Degree Project

Supervisor: RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.

Abstract: We research Lie bialgebras of dimension 3 finding which of them are coboundary by finding their r-matrixes. For coboundary Lie bialgebras we apply classical Yang-Baxter equation and find which of them satisfy these equations.

Keywords: coboundary Lie bialgebras, classical Yang-Baxter equation, r-matrix

Název práce: **Kohraniční lieovské bialgebry**
Autor: Adam Brus

Katedra: Katedra Fyziky FJFI ČVUT v Prahe
Obor : Matematická fyzika
Druh práce: Bakalářská práce

Školitel: RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.

Abstrakt: V této práci zkoumáme lieovské bialgebry dimenze 3 a hledáme, které z nich jsou kohraniční tím, že nalezneme způsob jak určit jejich r-matice. Pro kohraniční bialgebry kontrolujeme zda nalezené r-matice splňují klasické Yang-Baxterovy rovnice.

Klíčová slova: kohraniční lieovská bialgebra, klasické Yang-Baxterovy rovnice, r-matice

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou (bakalářskou)práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady(literaturu, projekty, SW atd) uvedené v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu §60 Zákona č.121/2000 Sb. ,o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů(autorský zákon).

V Praze dne ....

Adam Brus

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce za trpělivé vedení, kvalitní konzultace a za kontrolu výpočetních metod.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Úkolem této práce je seznámit se s pojmem lieovská bialgebra. Pomocí této teorie zadefinovat kohraniční lieovské bialgebry a najít podmínky, kdy je lieovská bialgebra kohraniční. Dále zadefinovat pojem r-matice a klasické Yang-Baxterovy rovnice. Ukážeme, že klasické Yang-Baxterovy rovnice jsou postačující podmínkou pro to aby $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ byla r-matice. Tyto poznatky aplikujeme k nalezení r-matic k lieovským bialgebrám dimenze 3 a pro nalezené r-matice ověříme zda splňují klasické Yang-Baxterovy rovnice.

Kapitola 2

Lieovské bialgebry

2.1 Kohomologie lieovských algeber

Abychom mohli správně zadefinovat lieovskou bialgebru budeme potřebovat následující teorii

Definice(2.1.1):
Množinu G nazveme **grupou**, pokud
(i) je definována asociativní operace $G \times G \ni [g, g'] \to gg' \in G$
(ii) existuje tzv. jednotkový prvek $e \in G$ takový, že $eg = ge = g$ pro všechna $g \in G$
(iii) ke každému $g \in G$ existuje inverzní prvek g^{-1} splňující $g^{-1}g = gg^{-1} = e$

Definice(2.1.2):
Mějme množinu M vybavenou dvojicí binárních operaci

$$\varphi_1(a, b) := a + b,$$

$$\varphi_2(a, b) := ab,$$

pak trojici $(\mathbb{R}, \varphi_1, \varphi_2)$ nazveme **okruhem**, jsou-li splněny následující podmínky
(i) $(\mathbb{R}, \varphi_1)$ je komutativní grupa
(ii) φ_1 a φ_2 jsou distributivní operace: platí $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$ pro všechna $a, b, c \ni \mathbb{R}$

Definice(2.1.3):
Nechť $\mathscr{A}$ je vektorový prostor nad tělesem F. Sčítání vektorů mu dává strukturu komutativní grupy, zavedeme-li na $\mathscr{A}$ novou binární, distributivní operaci $\psi : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ stane se z $\mathscr{A}$ okruh, který nazveme **algebrou** nad tělesem F.

Definice(2.1.4):
Algebru nazveme **lieovskou** pokud $\psi(a,b) := [a,b]$ splňuje následující podmínky
(i) je antisymetrická : $[a,b] = -[b,a]$ pro všechna $a,b \in \mathscr{A}$
(ii) splňuje Jacobiho identitu : $[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0$ pro všechna $a,b,c \in \mathscr{A}$

Definice(2.1.5):
Nechť Π je množina vlastností a vztahů struktury X. Reprezentací struktury X nazveme strukturu Y, která je obrazem X přes izomorfismus zachovávající Π

Definice(2.1.6):
Nechť $\mathfrak{g}$ je lieovská algebra nad tělesem reálných nebo komplexních čísel a M je vektorový prostor reprezentace ρ na $\mathfrak{g}$, říkáme, že $\mathfrak{g}$ působí na M,a nebo M je $\mathfrak{g}-modul$. Pro $x \in \mathfrak{g}, a \in M$, pro jednoduchost značíme $(\rho(x))(a) := x \triangleright a$

Definice(2.1.7):
Každá lieovská algebra $\mathfrak{g}$ působí na sebe samu **adjungovanou reprezentací**, $ad : x \in \mathfrak{g} \mapsto \text{End } \mathfrak{g}$, definovanou pro $y \in \mathfrak{g}$, jako $ad_x(y) := [x,y]$
Obecně $\mathfrak{g}$ působí na jakýkoliv tenzorový součet $\mathfrak{g}$ sám se sebou následovně, pro rozdělitelné prvky, $y_1 \otimes \cdots \otimes y_p$ z $\mathfrak{g} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{g}(p\text{-krát})$,

$$x \triangleright (y_1 \otimes \cdots \otimes y_p) = ad_x^{(p)}(y_1 \otimes \cdots \otimes y_p)$$

$$= ad_x y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_p + y_1 \otimes ad_x y_2 \otimes y_3 \otimes \cdots \otimes y_p + \ldots$$

$$y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_{(p-1)} \otimes ad_x y_p$$

pro $p = 2$ tedy

$$ad_x^{(2)}(y_1 \otimes y_2) = ad_x y_1 \otimes y_2 + y_1 \otimes ad_x y_2 = [x, y_1] \otimes y_2 + y_1 \otimes [x, y_2]$$

Definice(2.1.8):
Pro každé nezáporné celé číslo k, vektorový prostor antisymetrických k-lineárních zobrazení na $\mathfrak{g}$ do M, kde M je vektorový prostor reprezentací na $\mathfrak{g}$, se nazývá prostorem k-**kořetězů** na $\mathfrak{g}$ s hodnotami v M

Definice(2.1.9):
Kohranicí k-kořetězu u z $\mathfrak{g}$ do M je $(k+1)$-kořetěz δu do M definován vztahem

$$\delta u(x_0, x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i x_i \triangleright (u(x_0, x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_k))$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} u([x_i, x_j], x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_k),$$

pro $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \mathfrak{g}$, kde $\hat{x}_i$ značí, že prvek x_i je vynechán.

Tvrzení(2.1.1):
$\delta(\delta u) = 0$ pro každý k-kořetěz u, $k \geq 0$

Definice(2.1.10):
k-kořetěz u nazveme k-**kocyklem** pokud $\delta u = 0$. k-kořetěz u nazveme k-**kohraniční** pokud existuje $(k-1)$-kořetěz v takový, že $u = \delta v$

Definice(2.1.11):
2-lineární formu $\langle , \rangle$ nad $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ splňující:

$$\langle X_i, X_j \rangle = 0, \langle \tilde{X}_i, \tilde{X}^j \rangle = 0, \langle X_j, \tilde{X}_i \rangle = \langle \tilde{X}_i, X_j \rangle = \delta^i_j$$

kde X_i jsou prvky $\mathfrak{g}$ a $\tilde{X}_i$ jsou prvky $\mathfrak{g}^*$ nazveme přirozeným skalárním produktem.

2.2 Definice Lieovské bialgebry

Definice(2.2.1):
Lieovská bialgebra je lieovská algebra $\mathfrak{g}$ s lineárním zobrazením $\gamma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ takovým, že
(i) ${}^t\gamma : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ definuje lieovskou závorku na $\mathfrak{g}^*$ (splňující antisymetrii a Jacobiho identitu)
(ii) γ je 1-kocyklem na $\mathfrak{g}$ s hodnotami v $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, kde $\mathfrak{g}$ působí na $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ adjungovanou reprezentací $ad^{(2)}$
Podmínka (ii) značí, že 2-kořetěz $\delta\gamma = 0$, tedy pro $x, y \in \mathfrak{g}$

$$ad_x^{(2)}(\gamma(y)) - ad_y^{(2)}(\gamma(x)) - \gamma([x, y])) = 0$$

Zaveďme značení:

$$[\xi, \eta]_{\mathfrak{g}^*} :=^t \gamma(\xi \otimes \eta),$$

pro $\xi, \eta \in \mathfrak{g}^*$ tedy

$$\langle [\xi, \eta]_{g^*}, x \rangle = \langle \gamma x, \xi \otimes \eta \rangle$$

Poznámka: zobrazení $\gamma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ splňující podmínky definice(2.2.1) nazýváme lieovským koproduktem.

2.3 Koadjungovaná reprezentace

Pro další práci budeme potřebovat následující definici.
Nechť $\mathfrak{g}$ je lieovská algebra a $\mathfrak{g}^*$ je její dualní prostor, pro $x \in \mathfrak{g}$ zavádíme značení

$$ad_x^* := -^t(ad_x)$$

tudíž ad_x^* je endomorfismus splňující

$$\langle \xi, ad_x y \rangle = -\langle ad_x^* \xi, y \rangle$$

Definice(2.3.1):
Reprezentaci $x \mapsto ad_x^*$ z $\mathfrak{g}$ do $\mathfrak{g}^*$ nazveme koadjungovanou reprezentací na $\mathfrak{g}$

2.4 Symetrie lieovské bialgebry

Pomocí zápisů zavedených v předchozích částech můžeme podmínku (ii) z definice(1.2.1) přepsat jako:

$$\langle [\xi, \eta]_{\mathfrak{g}^*}, [x, y] \rangle + \langle [ad_x^* \xi, \eta]_{g^*}, y \rangle + \langle [\xi, ad_x^* \eta]_{g^*}, y \rangle$$

$$-\langle [ad_z^* \xi, \eta]_{g^*}, x \rangle - \langle [ad_y^* \xi, ad_y^* \eta]_{g^*}, x \rangle = 0$$

Zavedeme-li značení

$$ad_\xi \eta := [\xi, \eta]_{\mathfrak{g}^*}$$

$$\langle ad_\xi \eta, x \rangle := -\langle \eta, ad_\xi^* x \rangle$$

pro $\xi, \eta \in \mathfrak{g}^*, x \in \mathfrak{g}$, tudíž $\xi \in \mathfrak{g}^* \mapsto \mathrm{End}\ \mathfrak{g}^*$ je koadjungovaná reprezentace na $\mathfrak{g}^*$ v dual $\mathfrak{g}^*$ (izomorfním s $\mathfrak{g}$)
použijeme-li toto značení pak vztah (ii) z definice(1.2.1) přepíšeme na

$$\langle [\xi, \eta]_{\mathfrak{g}^*}, [x, y] \rangle + \langle ad_x^* \xi, ad_\eta^* y \rangle + \langle ad_x^* \eta_{g^*}, ad_\xi^* y \rangle - \langle ad_y^* \xi, ad_\eta^* x \rangle - \langle ad_y^* \eta, ad_\xi^* x \rangle = 0.$$

odtud vidíme, že $\mathfrak{g}^*$ a $\mathfrak{g}$ mají v struktuře lieovské bialgebry symetrickou roli.

Tvrzení(2.4.1):
Pokud $(\mathfrak{g}, \gamma)$ je lieovská Bialgebra, a μ je její lieovská závorka na $\mathfrak{g}$ potom $(\mathfrak{g}^*, {}^t\mu)$ je lieovská bialgebra a ${}^t\gamma$ je lieovská závorka na $\mathfrak{g}^*$.

2.5 Maninovy Trojice

Tvrzení(1.5.1):
Nechť $(\mathfrak{g}, \gamma)$ je lieovská bialgebra s duálem $(\mathfrak{g}^*, {}^t\mu)$, pak existuje právě jedna lieovská algebra nad vektorovým prostorem $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ taková, že $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{g}^*$ jsou její lieovské subalgebry a přirozený skalární produkt na $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ je invariantní.

Definice(2.5.1):
Nechť $\mathfrak{g}$ je lieovská bialgebra, $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ s lieovskou závorkou $[,]_\delta$ definované jako:

$$\text{pro } x, y \text{ z } \mathfrak{g} \text{ a } \eta, \xi \text{ z } \mathfrak{g}^*$$

$$[x, y]_\delta = [x, y]_\mathfrak{g}$$

$$[x, \eta]_\delta = -ad^*_\eta x + ad^*_x \eta$$

$$[\eta, \xi]_\delta = [\eta, \xi]_{\mathfrak{g}^*}$$

nazveme doublem $\mathfrak{g}$ a značíme $\mathfrak{g} \bowtie \mathfrak{g}^*$ nebo δ

Definice(2.5.2):
Maninova trojice je trojice $(\mathfrak{p}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, kde $\mathfrak{p}$ je lieovská algebra s invariantní, nedegenerovanou, symetrickou bilineární formou, a $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ jsou její doplňující se($a \oplus b = p$ izotropní lieovské podalgebry.

Teorém(2.5.1):
Na konečné dimenzi existuje pro každou Maninovu trojici právě jedna lieovská bialgebra.

2.6 Příklad

Mějme lieovskou algebru $\mathfrak{g} = (so(3))$ s bází X_1, X_2, X_3 s lieovskou závorkou $[X_i, X_j]_\mathfrak{g} = a^k_{ij} X_k$ se strukturními koeficienty

$$a^3_{12} = a^1_{23} = a^2_{31} = 1 \; a^3_{21} = a^1_{32} = a^2_{13} = -1$$

a její dualní lieovskou algebru s bází $\tilde{X}^1, \tilde{X}^2, \tilde{X}^3$ a podle definice přirozeného skalárního produktu $\langle \tilde{X}^i, X_j \rangle = \delta^i_j$.

Uvažujme lieovskou závorkou na $\mathfrak{g}^*$ definovanou, jako $[\tilde{X}^i, \tilde{X}^j]_{\mathfrak{g}^*} = b^k_{ij} \tilde{X}^k$ se strukturními koeficienty

$$b^3_{13} = b^3_{12} = -2, b^3_{21} = b^3_{31} = 2.$$

Nyní vybudujeme lieovskou algebru na $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ značenou jako $\mathfrak{g} \bowtie \mathfrak{g}^*$ kde $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{g}^*$ její lieovské subalgebry.

Díky přirozenému skalárnímu produktu, který je ad-invariantní můžeme určit koeficienty $\tilde{f}_{ij}^k, f_{ij}^k$, které určují lieovskou závorku $[X_i, \tilde{X}^j]$:

$$\langle \tilde{f}_{ij}^k \tilde{X}^k + f_{ij}^k X_k, X_k \rangle = \langle [X_i, \tilde{X}^j], X_k \rangle = -\langle \tilde{X}^j, [X_i, X_k] \rangle = -\langle \tilde{X}^j, a_{ik}^l X_l \rangle = -\delta_l^j.$$

Odtud

$$\tilde{f}_{ij}^k = -a_{ik}^j.$$

Dále

$$\langle \tilde{X}^k, [X_i, \tilde{X}^j] \rangle = \langle [\tilde{X}^k, \tilde{X}^j], X_i \rangle = \langle b_{kj}^l \tilde{X}^l, X_i \rangle = \delta_l^i.$$

Odtud

$$f_{ij}^k = b_{kj}^i.$$

a tedy

$$[X_i, \tilde{X}^j] = \tilde{f}_{ij}^k \tilde{X}^k + f_{ij}^k X_k = -a_{ik}^j \tilde{X}^k + b_{kj}^i X_k.$$

Proto

$$[X_1, \tilde{X}^1] = -a_{1k}^1 \tilde{X}^k + b_{k1}^1 X_k = 0$$

$$[X_1, \tilde{X}^2] = -a_{1k}^2 \tilde{X}^k + b_{k2}^1 X_k = \tilde{X}^k$$

$$[X_1, \tilde{X}^3] = -a_{1k}^3 \tilde{X}^k + b_{k3}^1 X_k = -\tilde{X}^2$$

$$[X_2, \tilde{X}^1] = -a_{2k}^1 \tilde{X}^k + b_{k1}^3 X_k = -\tilde{X}^3 + 2X_3$$

$$[X_2, \tilde{X}^2] = -a_{2k}^2 \tilde{X}^k + b_{k2}^2 X_k = 0$$

$$[X_2, \tilde{X}^3] = -a_{2k}^3 \tilde{X}^k + b_{k3}^2 X_k = \tilde{X}^1$$

$$[X_3, \tilde{X}^1] = -a_{3k}^1 \tilde{X}^k + b_{k1}^3 X_k = \tilde{X}^2 + 2X_2$$

$$[X_3, \tilde{X}^2] = -a_{3k}^2 \tilde{X}^k + b_{k2}^3 X_k = -\tilde{X}^1 - 2X_1$$

$$[X_3, \tilde{X}^3] = -a_{3k}^3 \tilde{X}^k + b_{k3}^3 X_k = -2X_1$$

Kapitola 3

Kohraniční Lieovské bialgebry a r-matice.

V této kapitole se seznámíme s pojmy kohraniční lieovská bialgebra a r-matice. Ukážeme si, jak poznat, kdy je lieovská bialgebra kohraniční a jak najít r-matici, jejiž kohranice definuje lieovský koprodukt lieovské bialgebry.

3.1 Teorie

Definice(3.1.1):
Lieovskou bialgebru s lieovskou algebrou $\mathfrak{g}$ s lieovským koproduktem γ takovým, že $\gamma = \delta r$,kde r je 0-kořetěz nazveme kohraniční lieovskou bialgebrou.

Na koprodukt γ v definici lieovské bialgebry jsme kladli 2 podmínky
(i) ${}^t\gamma : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ definuje lieovskou závorku na $\mathfrak{g}^*$
(ii) γ je 1-kocyklem na $\mathfrak{g}$ s hodnotami v $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, kde $\mathfrak{g}$ působí na $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ adjungovanou reprezentací $ad^{(2)}$
pokud $\gamma = \delta r$ pak je podle tvrzení(2.1.1) automaticky kocyklem a tudíž musíme ověřovat pouze vlastnosti lieovské závorky ${}^t\gamma$:
(i) δr musí nabývat hodnot z $\bigwedge^2 \mathfrak{g}$(zajišťuje antisymetrii lieovské závorky na $\mathfrak{g}^*$)
(ii) lieovská závorka na $\mathfrak{g}^*$ musí splňovat Jacobiho identitu.

Zavedeme-li značení a pro antisymetrickou část a s pro symetrickou část r. Pak $r = a + s$ kde $a \in \bigwedge^2 \mathfrak{g}, s \in S^2\mathfrak{g}$.
každému r z $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ přiřadíme zobrazení $\underline{r} : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$ definované jako

$$\underline{r}(\eta)(\xi) = r(\eta, \xi)$$

Nechť ${}^t\underline{r} : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$ je transpozicí $\underline{r}$ pak

$$\underline{a} = \frac{1}{2}(\underline{r} -^t \underline{r}), \underline{s} = \frac{1}{2}(\underline{r} +^t \underline{r})$$

Nyní nechť $\gamma = \delta r$ pak dle definice

$$\gamma(x) = ad_x^{(2)} r = (ad_x \otimes 1 + 1 \otimes ad_x)(r) = r^{ij}(ad_x e_i \otimes e_j + e_i \otimes ad_x e_j)$$

kde (e_i) je bázi $\mathfrak{g}$ a $r = r^{ij} e_i \otimes e_j$ Pro $\eta, \xi \in \mathfrak{g}^*$ máme $[\xi, \eta]_{\mathfrak{g}^*} =^t \gamma(\xi \otimes \eta)$ nyní, když $\gamma = \delta r$ budeme užívat značení $[\xi, \eta]^r$ místo $[\xi, \eta]_{\mathfrak{g}^*}$. Podmínka na antisymetrii lieovské závorky je splněna právě tehdy když $\delta s = 0$, tedy s je invariantní v adjungované reprezentaci (ad-invariant).

$$ad_x^{(2)} s = 0$$

Tvrzení(3.1.1):
Když r je antisymetrická, pak $[\xi, \eta]^r = ad^*_{\underline{r}\eta}\xi - ad^*_{\underline{r}\xi}\eta$

Nyní zkoumejme podmínku na splnění Jacobiho identity na $\mathfrak{g}^*$. Zaveďme algebraickou Schoutenovu závorkou prvku $r \in \bigwedge^2 \mathfrak{g}$ sama se sebou, značenou jako $[\![r, r]\!]$, což je prvek $\bigwedge^3 \mathfrak{g}$ definovaný jako

$$[\![r, r]\!](\eta, \xi, \zeta) = -2 \circlearrowleft \langle \zeta, [\underline{r}\eta, \underline{r}\xi] \rangle,$$

kde $\circlearrowleft$ značí rotace prvků η, ξ, ζ.

Tvrzení(3.1.2):
Nutnou a postačující podmínkou pro $\gamma = \delta r$, $r \in \bigwedge^2 \mathfrak{g}$ aby definovalo lieovskou závorku na $\mathfrak{g}^*$ je aby $[\![r, r]\!] \in \bigwedge^3 \mathfrak{g}$ byl ad-invariant.

Definice(3.1.2):
Nechť r je prvkem $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, s symetrickou části s a antisymetrickou částí a pokud s a $[\![a, a]\!]$ jsou ad invariant, pak r nazýváme klasickou r-maticí. Pokud r je antisymetrická a $[\![r, r]\!] = 0$, pak r nazýváme trojúhelníkovou r-maticí.

Položíme-li si otázku: kdy je lieovská bialgebra s koproduktem γ kohraniční, pak musíme najít r-matici r, vyřešením rovnice $\gamma = \delta r$ resp. ukázat, že takováto r-matice neexistuje a tudíž lieovská bialgebra není kohraniční.

3.2 Řešení rovnice $\gamma = \delta r$

Nechť T_i je báze $\mathfrak{g}$. Zavedeme-li tenzorový zápis

$$\gamma(T_i) = \tilde{f}_i^{jk} T_j \otimes T_k$$

$$r = r^{kl} T_k \otimes T_l$$

a f je lieovská závorka na $\mathfrak{g}$ tudíž

$$f(T_i \otimes T_j) = f_{ij}^k T_k,$$

pak

$$\gamma(T_i) = \delta r(T_i) = T_i \triangleright r =$$

$$= T_i \triangleright (r^{kl} T_k \otimes T_l) =$$

$$= r^{kl}((T_i \triangleright T_k) \otimes T_l + T_k \otimes (T_i \triangleright T_l)) =$$

$$= r^{kl}((f_{ik}^m T_m) \otimes T_l + T_k \otimes (f_{il}^n T_n)) =$$

$$= r^{kl} f_{ik}^m T_m \otimes T_l + r^{kl} f_{il}^n T_k \otimes T_n.$$

Odtud

$$\tilde{f}_i^{jk} T_j \otimes T_k = r^{kl} f_{ik}^m (T_m \otimes T_l) + r^{kl} f_{il}^n (T_k \otimes T_n)$$

Nyní přejmenujeme indexy

$$\tilde{f}_i^{pq} T_p \otimes T_q = r^{kq} f_{ik}^p (T_p \otimes T_q) + r^{pl} f_{il}^q (T_p \otimes T_q)$$

Jelikož T_i je bází $\mathfrak{g}$ pak $T_i \otimes T_j$ je bází $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ a tudíž strany se rovnají právě tehdy, když se rovnají koeficienty u bázových vektorů a odtud získáváme podmínky pro koeficienty r-matice:

$$\tilde{f}_i^{pq} = \sum_{k,l} r^{kq} f_{ik}^p + r^{pl} f_{il}^q$$

Toto je v dimenzi 3 soustava 27 rovnic pro 9 členu (resp. v dimenzi 2 soustava 8 rovnic pro 4 členy) 0-kořetězu $r = r^{kl} T_k \otimes T_l$ v bázi T_i

Kapitola 4

Klasické Yang-Baxterovy rovnice (CYBE)

Nyní si zavedeme klasické Yang-Baxterovy rovnice a ukážeme, že pro kohraniční lieovské bialgebry jsou ekvivalentní podmínkám kladených na její lieovský koprodukt v kapitole 3.

4.1 Teorie

Nechť r je prvkem $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ zaveďme zobrazení $\underline{\langle r, r \rangle} : \bigwedge^2 \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$ definované jako

$$\underline{\langle r, r \rangle}(\xi, \eta) = [\underline{r}\xi, \underline{r}\eta] - \underline{r}[\xi, \eta]^r$$

a

$$\langle r, r \rangle(\xi, \eta, \zeta) = \langle \zeta, \underline{\langle r, r \rangle}(\xi, \eta) \rangle$$

zobrazení $\underline{\langle r, r \rangle}$ je určeno prvkem $\langle r, r \rangle \in \bigwedge^2 \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.Dále ukážeme, že když symetrická část r je ad-invariant pak $\langle r, r \rangle$ je z $\bigwedge^3 \mathfrak{g}$.

Teorém(4.1.1):
(i) nechť $a \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ je antisymetrická, pak $\langle a, a \rangle$ je z $\bigwedge^3 \mathfrak{g}$ a

$$\langle a, a \rangle = -\frac{1}{2} [\![a, a]\!],$$

(ii) nechť $s \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ je symetrická a ad-invariant. Pak $\langle s, s \rangle$ je ad-invariantní prvek $\bigwedge^3 \mathfrak{g}$ a

$$\underline{\langle s, s \rangle}(\xi, \eta) = [\underline{s}\xi, \underline{s}\eta],$$

(iii) Pro $r = a + s$, kde a je antisymetrická a s symetrická ad-invariant, $\langle r, r\rangle$ je z $\bigwedge^3 \mathfrak{g}$ a

$$\langle r, r\rangle = \langle a, a\rangle + \langle s, s\rangle$$

Tvrzení(4.1.1):

Nechť $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}, r = a + s$, kde a je antisymetrická část a s symetrická a ad-invariant část. Postačující podmínkou proto aby $[\![a, a]\!]$ byl ad-invariant je

$$\langle r, r\rangle = 0.$$

tedy prvek $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ s ad-invariant symetrickou částí splňující $\langle r, r\rangle = 0$ je klasická r-matice.

Definice(4.1.1):

Podmínku $\langle r, r\rangle = 0$. nazýváme klasickou Yang-Baxterovou rovnicí. r-matice splňující klasickou Yang-Baxterovou rovnici nazýváme kvazi-trojúhelníkovou.

4.2 CYBE v tenzorovém tvaru

Nechť (T_i) je bazí $\mathfrak{g}$ a $r = \sum r^{ij} T_i \otimes T_j$ zaveďme r_{12}, r_{13}, r_{23} jako prvky $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ jako

$$r_{12} = r \otimes 1 = \sum r^{ij} T_i \otimes T_j \otimes 1,$$

$$r_{23} = 1 \otimes r = \sum r^{ij} 1 \otimes T_i \otimes T_j,$$

a

$$r_{13} = \sum r^{ij} T_i \otimes 1 \otimes T_j$$

Nyní na $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ definujme

$$[r_{12}, r_{13}] = [\sum r^{ij} T_i \otimes T_j \otimes 1, \sum r^{kl} T_k \otimes 1 \otimes T_l] = \sum r^{ij} r^{kl} [T_i, T_k] \otimes T_j \otimes T_l$$

$$= \sum r^{ij} r^{kl} f^g_{ik} T_g \otimes T_j \otimes T_l,$$

$$[r_{12}, r_{23}] = [\sum r^{ij} T_i \otimes T_j \otimes 1, \sum r^{kl} 1 \otimes T_k \otimes T_l] = \sum r^{ij} r^{kl} T_i \otimes [T_j, T_k] \otimes T_l$$

$$= \sum r^{ij} r^{kl} f^g_{jk} T_i \otimes T_g \otimes T_l,$$

$$[r_{13}, r_{23}] = [\sum r^{ij} T_i \otimes 1 \otimes T_j, \sum r^{ij} 1 \otimes T_i \otimes T_j] = \sum r^{ij} r^{kl} T_i \otimes T_k \otimes [T_j, T_l]$$

$$= \sum r^{ij} r^{kl} f^g_{jl} T_i \otimes T_k \otimes T_g,$$

Tvrzení(4.2.1):
V tenzorovém tvaru mají klasické Yang-Baxterovy rovnice tvar :

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0$$

Máme tedy

$$\sum r^{ij} r^{kl} f^g_{ik} T_g \otimes T_j \otimes T_l + \sum r^{ij} r^{kl} f^g_{jk} T_i \otimes T_g \otimes T_l + \sum r^{ij} r^{kl} f^g_{jl} T_i \otimes T_k \otimes T_g = 0$$

když (T_i) je báze $\mathfrak{g}$ pak $(T_i \otimes T_j \otimes T_k)$ je bazí $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ a levá strana je rovna 0 pravě tehdy, když se koeficienty u každého členu báze se rovnají 0. Zaměníme proto indexy a tedy

$$\sum r^{gj} r^{kl} f^i_{gk} T_i \otimes T_j \otimes T_l + \sum r^{ig} r^{kl} f^j_{gk} T_i \otimes T_j \otimes T_l + \sum r^{ij} r^{kg} f^l_{jg} T_i \otimes T_j \otimes T_l = 0$$

odtud máme 27 (resp. 8) rovnic pro pevné i,j,l

$$\sum r^{gj} r^{kl} f^i_{gk} + r^{ig} r^{kl} f^j_{gk} + r^{ij} r^{kg} f^l_{jg} = 0$$

Kapitola 5

Vlastní výpočet

5.1 Výsledky dim 2

Existují pouze následující typy neizomorfních 4 dimenzionálních Maninových trojic. Pro výpočet r-matic a klasických Yang-Baxterových rovnic jsem užil program Matlab.

1. abelovská Maninova trojice

   $[X_1, X_2] = 0$
   $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0$

$$r = lib.$$

splňuje CYBE

2. semiabelovská Maninova trojice

   $[X_1, X_2] = 0$
   $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^2$

$$r - neexistuje$$

3. semiabelovská Maninova trojice

$$[X_1, X_2] = X_2$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

splňuje CYBE

4. neabelovská Maninova trojice typu A

$$[X_1, X_2] = X_2$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = b\tilde{X}^2, b \neq 0$$

$$r - neexistuje$$

5. neabelovská Maninova trojice typu A

$$[X_1, X_2] = bX_2, b \neq 0$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^2$$

$$r - neexistuje$$

6. neabelovská Maninova trojice typu B

$$[X_1, X_2] = X_2$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^1$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

splňuje CYBE

7. neabelovská Maninova trojice typu B

$$[X_1, X_2] = X_1$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^2$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

splňuje CYBE

5.2 Bianchiho algebry

Každou tří-dimenzionální lieovskou algebru je možné převést na jeden z 11 vypsaných tvarů změnou báze. Tyto tvary reprezentují neizomorfní lieovské algebry a jsou známy jako Bianchiho algebry.

$9: \ [X_1, X_2] = X_3, [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2$ (so(3)),

$8: \ [X_1, X_2] = -X_3, [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2$ (sl(2,ʀR),

$7_a: \ [X_1, X_2] = -aX_2 + X_3, [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + aX_3, a > 0,$

$7_0: \ [X_1, X_2] = 0, [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2$

$6_a: \ [X_1, X_2] = -aX_2 - X_3, [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + aX_3, a \neq 1$

$6_0: \ [X_1, X_2] = 0, [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = -X_2$

$5: \ [X_1, X_2] = -X_2, [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_3$

$4: \ [X_1, X_2] = -X_2 + X_3, [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_3$

$3: \ [X_1, X_2] = -X_2 - X_3, [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + X_3$

$2: \ [X_1, X_2] = 0, [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = 0$

$1: \ [X_1, X_2] = 0, [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = 0$

5.3 Výsledky dim 3

V této části uvádím pouze kohraniční lieovské bialgebry (tudíž pokud Bialgebra není uvedena pak r-matice k ní neexistuje a tedy není kohraniční). Budu užívat zápis Maninových trojic $(\mathbf{a}|\mathbf{b})$ kde $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ jsou doplňující se izotropní Lieovské podalgebry

1. Maninova trojice $(\mathbf{9}|\mathbf{1})$:

   $[X_1, X_2] = X_3,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$

   $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$

$$r = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

pro $c = 0$ splňuje CYBE

pro $c \neq 0$ nesplňuje CYBE

2. Maninova trojice $(\mathbf{9}|\mathbf{5}|\mathbf{b})$:

   $[X_1, X_2] = X_3,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$

   $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -b\tilde{X}^2,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = b\tilde{X}^3, b > 0.$

$$r = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & b \\ 0 & -b & c \end{pmatrix}$$

pro $c = 0$ splňuje CYBE

pro $c \neq 0$ nesplňuje CYBE

3. Maninova trojice $(\mathbf{8}|\mathbf{1})$:

$$[X_1, X_2] = -X_3,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

$$r = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}$$

pro $c = 0$ splňuje CYBE
pro $c \neq 0$ nesplňuje CYBE

4. Maninova trojice $(\mathbf{8}|\mathbf{5.i}|\mathbf{b})$:

$$[X_1, X_2] = -X_3,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -b\tilde{X}^2,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = b\tilde{X}^3, b > 0.$$

$$r = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & b \\ 0 & -b & -c \end{pmatrix}$$

pro $c = 0$ splňuje CYBE
pro $c \neq 0$ nesplňuje CYBE

5. Maninova trojice $(\mathbf{8}|\mathbf{5.ii}|\mathbf{b})$:

$$[X_1, X_2] = -X_3,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = b\tilde{X}^2, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = -b\tilde{X}^1, b > 0.$$

$$r = \begin{pmatrix} c & -b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}$$

pro $c = 0$ splňuje CYBE
pro $c \neq 0$ nesplňuje CYBE

6. Maninova trojice $(\mathbf{8}|\mathbf{5.iii})$:

$[X_1, X_2] = -X_3,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$
$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^2,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^2, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = -(\tilde{X}^1 + \tilde{X}^3).$

$$r = \begin{pmatrix} c & -1 & 0 \\ 1 & c & -1 \\ 0 & 1 & -c \end{pmatrix}$$

pro $c = 0$ splňuje CYBE
pro $c \neq 0$ nesplňuje CYBE

7. Maninova trojice $(\mathbf{7_a}|\mathbf{1})$:

$[X_1, X_2] = -aX_2 + X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + aX_3.$
$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

splňuje CYBE

8. Maninova trojice $(\mathbf{7_a}|\mathbf{2.i})$:

$[X_1, X_2] = -aX_2 + X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + aX_3.$
$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^1, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2a} \\ 0 & \frac{1}{2a} & 0 \end{pmatrix}$$

splňuje CYBE

9. Maninova trojice ($\mathbf{7_a}|\mathbf{2.ii}$):

$$[X_1, X_2] = -aX_2 + X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + aX_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = -\tilde{X}^1, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2a} \\ 0 & \frac{-1}{2a} & 0 \end{pmatrix}$$

splňuje CYBE

10. Maninova trojice ($\mathbf{7_0}|\mathbf{1}$):

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

$$r = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ -c_2 & -c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

splňuje CYBE

11. Maninova trojice ($\mathbf{7_0}|\mathbf{5.i}$):

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}^2,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = \tilde{X}^3.$$

$$r = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ -c_2 & -c_1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

splňuje CYBE

12. Maninova trojice $(\mathbf{6_a}|\mathbf{1})$:

$[X_1, X_2] = -aX_2 - X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + aX_3, a > 0, a \neq 1.$

$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

splňuje CYBE

13. Maninova trojice $(\mathbf{6_a}|\mathbf{2})$:

$[X_1, X_2] = -aX_2 - X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + aX_3, a > 0, a \neq 1.$

$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^1, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2a} \\ 0 & \frac{1}{2a} & 0 \end{pmatrix}$$

splňuje CYBE

14. Maninova trojice $(\mathbf{6_a}|\mathbf{6_{1/a}.ii})$:

$[X_1, X_2] = -aX_2 - X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + aX_3, a > 0, a \neq 1.$

$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^1,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \frac{a+1}{a-1}(\tilde{X}^2 + \tilde{X}^3), [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = \tilde{X}^1.$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{a-1} & \frac{1}{a-1} \\ \frac{1}{a-1} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{a-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

splňuje CYBE

15. Maninova trojice $(\mathbf{6_a}|\mathbf{6_{1/a}.iii})$:

$[X_1, X_2] = -aX_2 - X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + aX_3, a > 0, a \neq 1.$

$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^1,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \frac{a-1}{a+1}(-\tilde{X}^2 + \tilde{X}^3), [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = -\tilde{X}^1.$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{a+1} & \frac{-1}{a+1} \\ \frac{1}{a+1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

splňuje CYBE

16. Maninova trojice $(\mathbf{6_{1/a}.iii}|\mathbf{6_a})$:

$[X_1, X_2] = X_1,\ [X_2, X_3] = \frac{a-1}{a+1}(-X_2 + X_3), [X_3, X_1] = -X_1.$

$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -a\tilde{X}^2 - \tilde{X}^3,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = \tilde{X}^2 + a\tilde{X}^3, a > 0, a \neq 1.$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a+1}{2} & \frac{a+1}{2} \\ \frac{-a-1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-a-1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

splňuje CYBE

17. Maninova trojice $(\mathbf{6_0}|\mathbf{1})$:

$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = -X_2.$

$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$

$$r = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ -c_2 & -c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

splňuje CYBE

18. Maninova trojice $(\mathbf{4.ii}|\mathbf{6_0})$:

$$[X_1,X_2]=(-X_1+X_2+X_3),\ [X_2,X_3]=X_3,[X_3,X_1]=-X_3.$$
$$[\tilde{X}^1,\tilde{X}^2]=0,\ [\tilde{X}^2,\tilde{X}^3]=X_1,[\tilde{X}^3,\tilde{X}^1]=-X_2.$$

$$r=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

splňuje CYBE

19. Maninova trojice $(\mathbf{6_0}|\mathbf{5.i})$:

$$[X_1,X_2]=0,\ [X_2,X_3]=X_1,[X_3,X_1]=-X_2.$$
$$[\tilde{X}^1,\tilde{X}^2]=-\tilde{X}^2,\ [\tilde{X}^2,\tilde{X}^3]=0,[\tilde{X}^3,\tilde{X}^1]=\tilde{X}^3.$$

$$r=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ -c_2 & -c_1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

splňuje CYBE

20. Maninova trojice $(\mathbf{6_0}|\mathbf{5.ii})$:

$$[X_1,X_2]=0,\ [X_2,X_3]=X_1,[X_3,X_1]=-X_2.$$
$$[\tilde{X}^1,\tilde{X}^2]=-\tilde{X}^1+\tilde{X}^2,\ [\tilde{X}^2,\tilde{X}^3]=\tilde{X}^3,[\tilde{X}^3,\tilde{X}^1]=-\tilde{X}^3.$$

$$r=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & -1 \\ -c_2 & -c_1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

splňuje CYBE

21. Maninova trojice ($\mathbf{5.ii}|\mathbf{6_0}$):

$$[X_1, X_2] = -X_1 + X_2,\ [X_2, X_3] = X_3, [X_3, X_1] = -X_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^1, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = -\tilde{X}^2.$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

splňuje CYBE

22. Maninova trojice ($\mathbf{5}|\mathbf{1}$):

$$[X_1, X_2] = -X_2,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

splňuje CYBE

23. Maninova trojice ($\mathbf{5}|\mathbf{2.i}$):

$$[X_1, X_2] = -X_2,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^1, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

splňuje CYBE

24. Maninova trojice $(\mathbf{4}|\mathbf{1})$:

$$[X_1, X_2] = -X_2 + X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

splňuje CYBE

25. Maninova trojice $(\mathbf{4}|\mathbf{2.ii})$:

$$[X_1, X_2] = -X_2 + X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = -\tilde{X}^1, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

splňuje CYBE

26. Maninova trojice $(\mathbf{3}|\mathbf{1})$:

$$[X_1, X_2] = -X_2 - X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + X_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -c \\ 0 & -c & c \end{pmatrix}$$

splňuje CYBE

27. Maninova trojice $(\mathbf{3}|\mathbf{2})$:

$$[X_1, X_2] = -X_2 - X_3,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = X_2 + X_3.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^1, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -c - \frac{1}{2} \\ 0 & -c + \frac{1}{2} & c \end{pmatrix}$$

splňuje CYBE

28. Maninova trojice $(\mathbf{3}.\mathbf{ii}|\mathbf{3})$:

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_2 + X_3, [X_3, X_1] = 0.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}_2 - \tilde{X}_3,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = \tilde{X}_2 + \tilde{X}_3.$$

$$r = \begin{pmatrix} c & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

splňuje CYBE

29. Maninova trojice $(\mathbf{3}.\mathbf{iii}|\mathbf{3})$:

$$[X_1, X_2] = X_1,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = -X_1.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}_2 - \tilde{X}_3,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = \tilde{X}_2 + \tilde{X}_3.$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & c & -c \\ -1 & -c & c \end{pmatrix}$$

pro $c = 0$ splňuje CYBE
pro $c \neq 0$ nesplňuje CYBE

30. Maninova trojice $(\mathbf{2}|\mathbf{1})$:

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = 0.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

$$r = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & 0 & 0 \\ -c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

splňuje CYBE

31. Maninova trojice $(\mathbf{1}|\mathbf{1})$:

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = 0, [X_3, X_1] = 0.$$
$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 0,\ [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 0, [\tilde{X}^3, \tilde{X}^1] = 0.$$

$$r = lib.$$

splňuje CYBE

Literatura

[1] L. Hlavatý and L. Šnobl, *Classification of six-dimensional real drinfeld doubles*, International Journal of Modern Physics A, Vol. 17, No. 28 (2002) 4043-4067.

[2] L. Hlavatý and L. Šnobl, *Classification of Poisson-Lie T-dual models with two dimensional targets*, Mod.Phys.Lett. A17 (2002) 429-434.

[3] Y. Kosmann-Schwarybach , *Lie bialgebras, Poisson Lie groups and dressing transformations*, Lectures Notes in Physics 638, Springer 2004, pp. 107–173.

[4] A.O. Barut, R. Raczka, *Theory of group representation and applications,* PWN Warszawa, 1977

[5] J. Blank, P Exner and M. Havlíček, *Lineární operátory v kvantové fyzice*, Karolinum, 1993

[6] Program Matlab verze R2011b