České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Zbyšek Štěpáník

Integrabilita Poissonových-Lieových T-duálních σ-modelů

Integrability of Poisson-Lie T-dual σ-models

Katedra fyziky

Obor:	Matematické inženýrství
Zaměření:	Matematická fyzika
Vedoucí:	**Ing. Libor Šnobl, Ph.D.**
Rok	**2012**

Poděkování

Rád bych tímto poděkoval vedoucímu své bakalářské práce, Ing. Liboru Šnoblovi, Ph.D., a to nejen za trpělivé vedení a podnětné konzultace, ale také za obětavou pomoc při obstarávání relevantní literatury.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 3. ledna 2012

....
Zbyšek Štěpáník

Abstrakt

Název práce: **Integrabilita Poissonových-Lieových T-duální σ-modelů**
Autor: Zbyšek Štěpáník
Obor: Matematické inženýrství
Zaměření: Matematická fyzika
Druh práce: Bakalářská práce
Školitel: Ing. Libor Šnobl, Ph.D.

Abstrakt: V této práci se zabýváme integrabilitou jisté třídy Poissonových-Lieových T-duálních σ-modelů definovaných na kompaktní, prosté, souvislé a jednoduše souvislé grupové varietě. Konkrétně se jedná o Yangův-Baxterův σ-model, který lze chápat jako Poissonovu-Lieovu deformaci hlavního chirálního modelu. V první části práce se zabýváme integrabilitou v kontextu klasické teorie pole, tj. pro systémy s nekonečně mnoha stupni volnosti popsané hustotou Lagrangeovy či Hamiltonovy funkce. Dospíváme k závěru, že integrabilita takového systému je zajištěna, existuje-li odpovídající Laxův pár. Ve druhé části se pak zabýváme konstrukcí Laxova páru pro Yangův-Baxterův σ-model a uvádíme některé explicitní příklady.

Klíčová slova: integrabilita, Yangův-Baxterův σ-model, Poissonova-Lieova T-dualita.

Title: **Integrability of Poisson-Lie T-dual σ-models**
Author: Zbyšek Štěpáník

Abstract: In this paper, we study the integrability of a certain class of Possion-Lie T-dual σ-models defined on a compact, simple, connected and simply connected group manifold. Namely, we study the Yang-Baxter σ-model, which can be interpreted as a Poisson-Lie deformation of a principal chiral model. In the first part of the paper, we concern ourselves with the integrability with respect to the classical theory of fields, i.e. the integrability of systems with infinite degrees of freedom that are described by the density of a Lagrange or Hamilton function. We arrive at the conclusion that the integrability of such a system is implied by the existence of a corresponding Lax pair. In the second part, we construct a Lax pair of the Yang-Baxter σ-model and give several explicit examples.

Key words: integrability, Yang-Baxter σ-model, Poisson-Lie T-duality.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Třída známých integrabilních nelineárních σ-modelů na grupové varietě není příliš rozsáhlá. Konkrétně je z literatury známo, že pro každou kompaktní poloprostou grupovou cílovou varietu G existuje Laxův pár hlavního chirálního modelu [44]. V posledních letech se však v literatuře objevila tvrzení o integrabilitě některých Poissonových-Lieových T-duálních σ-modelů. Přesněji v [26] se autor zabývá integrabilitou určité jednoparametrické deformace hlavního chirálního modelu na kompaktní grupové varietě G, jejíž akce je

$$S_\epsilon(g) = \int_W (g^{-1}\partial_+ g, (I - \epsilon R)^{-1} g^{-1}\partial_- g)_\mathfrak{g},$$

kde ϵ je deformační parametr, W je dvourozměrná světoplocha parametrizovaná souřadnicemi světelného kuželu (ξ^+, ξ^-) a $\partial_\pm$ jsou příslušné derivace. Dynamická pole modelu $g : W \to G$ jsou hladká zobrazení, $(\cdot,\cdot)_\mathfrak{g}$ je Killingova-Cartanova forma na Lieově algebře $\mathfrak{g}$. A nakonec I je identický operátor na $\mathfrak{g}$ a $R : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ je tzv. Yangův-Baxterův operátor [39]. V [25] je tento model nazýván Yangův-Baxterův σ-model a ukazuje se, že je symetrický v Poissonově-Lieově smyslu.

Autor navrhuje a posléze i dokazuje hypotézu, podle níž tento model je integrabilní pro každou kompaktní prostou grupovou cílovou varietu G. Motivace k této domněnce je následující. Vraťme se k hlavnímu chirálnímu modelu na kompaktní grupové cílové varietě G a položme $G = SU(2)$. Cherednik v [8] pro tento případ zkonstruoval Laxův pár pro speciální jednoparametrickou deformaci hlavního chirálního modelu, která se v literatuře obvykle nazývá anizotropický hlavní chirální model. Akce této deformace má tvar

$$S_\epsilon(g) = \frac{1}{1+\epsilon^2}\int_W (g^{-1}\partial_+ g, g^{-1}\partial_- g)_\mathfrak{g} + \frac{\epsilon^2}{1+\epsilon^2}\int_W ((g^{-1}\partial_+ g)_H, (g^{-1}\partial_- g)_H)_\mathfrak{g},$$

kde $(g^{-1}\partial_\pm g)_H$ jsou ortogonální projekce chirálních složek Maurerovy-Cartanovy formy na Cartanovu podalgebru algebry $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$. Ukazuje se, že pro volbu $G = SU(2)$ je Yangův-Baxterův σ-model identický s právě uvedeným anizotropickým hlavním chirálním modelem [25], který je integrabilní (neboť má Laxův pár).

Cílem této práce je

(i) pochopit, co znamená integrabilita v kontextu klasické teorie pole, tj. pro dynamické systémy s nekonečně mnoha stupni volnosti popsané hustotou Lagrangeovy či Hamiltonovy funkce a

(ii) ověřit integrabilitu Poissonových-Lieových T-duálních σ-modelů publikovanou v odborné literatuře [26].

Práce je v zásadě rozdělena do dvou částí. V první části se zabýváme vybudováním potřebného teoretického aparátu pro studium integrability Poissonových-Lieových T-duálních σ-modelů. Nejdříve zopakujeme a rozšíříme základní poznatky o Lieových algebrách a poté se zabýváme pojmem fibrované variety a konexe na ní definované. Dále je zaveden a rozebrán pojem σ-modelu se zvláštním ohledem na dvourozměrné nelineární σ-modely. Na výklad σ-modelů navazujeme rozborem pojmu Poissonova-Lieova T-dualita, resp. Poissonova-Lieova symetrie a konstrukcí Poissonova-Lieova duálního modelu k danému původnímu modelu. První část je pak uzavřena poněkud odděleně stojícím tématem integrability dynamických systémů, kde je zrevidován[1] současný stav teorie integrability a zavedeno její pojetí z pohledu klasické teorie pole.

Ve druhé části jsou pak dříve získané poznatky uvedeny do praxe. Jmenovitě ke studiu integrability Yangova-Baxterova σ-modelu, který vykazuje symetrii v Poissonově-Lieově smyslu. Postup této kapitoly sleduje postup článku [26], jehož tvrzení ověřujeme. Po vybudování základních struktur a představení hlavního chirálního modelu je sestaven obecný tvar Poissonova-Lieova T-duálního σ-modelu, jehož je Yangův-Baxterův model speciálním případem. Následuje odvození a ověření Laxova páru pro tento model. Celá druhá část je ukončena prezentací několika explicitních příkladů, na nichž ukazujeme tvar nalezeného Laxova páru při konkrétní volbě grupy G.

V textu využíváme známou Einsteinovu sumační konvenci. Podle ní ve výrazu, v němž se objeví dvakrát stejný index, jednou nahoře a jednou dole, přes tento index sčítáme (přes všechny hodnoty tohoto indexu). Například výraz

$$y = \sum_{i=1}^{n} c^i x_i$$

zapíšeme v této konvenci ve tvaru

$$y = c^i x_i.$$

[1] Ačkoliv autor si uvědomuje, že nikoliv vyčerpávajícím způsobem.

KAPITOLA 2

Teorie

Cílem této kapitoly je vybudovat teoretické základy pro studium vlastností Poissonových-Lieových T-duálních σ-modelů, které bude následovat v kapitole 3.

2.1 Lieovy grupy a algebry

Ústředním pojmem celého textu jsou tzv. σ-modely (viz odstavec 2.3), s nimiž budeme pracovat prostřednictvím aparátu teorie Lieových grup a algeber. Dále budeme předpokládat, že čtenář je obeznámen se základy této teorie (viz např. [12, 38]). Proto zde jen stručně shrneme základní pojmy, přičemž podrobněji rozebereme pouze pojmy a tvrzení, které nejsou známy ze základního kurzu matematiky a diferenciální geometrie.

2.1.1 Základní poznatky

Definice 2.1. **Lieova grupa** G je hladká varieta, na níž je zavedena grupová struktura tak, že grupové operace

(i) $\cdot : \quad G \times G \to G, \quad (g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2,$

(ii) ${}^{-1} : \quad G \to G, \quad g \mapsto g^{-1},$

jsou hladká zobrazení.

Poznámka. Ve shodě s literaturou zavedeme pro grupové násobení jednodušší značení $g \cdot h = gh$.

Poznámka. Na Lieově grupě G máme přirozeně k dispozici dvě třídy difeomorfismů (pro každé $g \in G$):

(i) $L_g : G \to G, \quad L_g(h) := gh,$

(ii) $R_g : G \to G, \quad R_g(h) := hg.$

Tato zobrazení nazýváme postupně *levé* a *pravé násobení.*

Definice 2.2. Buďte G a H Lieovy grupy a hladké zobrazení $\phi : G \to H$. Potom řekneme, že ϕ je **homomorfismus** grup, právě když

$$\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2), \qquad \forall g_1, g_2 \in G.$$

Definice 2.3. Nechť G je Lieova grupa. Potom **jednoparametrickou podgrupou** grupy G nazveme libovolný homomorfismus grup $(\mathbb{R}, +)$ a G.

Definice 2.4. **Lieovou algebrou** $\mathfrak{g}$ nazveme libovolný vektorový prostor $\mathfrak{g}$ (nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$), na kterém je zavedeno zobrazení $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, které splňuje následující axiomy:

(i) je bilineární,

(ii) $\forall X, Y \in \mathfrak{g}: \quad [X, Y] = -[Y, X]$ (tj. je *antisymetrické*),

(iii) $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}: \quad [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (tzv. *Jacobiho identita*).

Zobrazení $[\cdot, \cdot]$ nazveme **Lieova závorka** na $\mathfrak{g}$.

Poznámka. Lieovy algebry budeme zpravidla značit lomeným písmem $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{n}$ atd.

Definice 2.5. (i) Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je **abelovská** právě tehdy, když $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{0\}$.

(ii) **Podalgebrou** $\mathfrak{h}$ Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je libovolný lineární podprostor v $\mathfrak{g}$ splňující $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. Skutečnost, že $\mathfrak{h}$ je podalgebra $\mathfrak{g}$ označíme $\mathfrak{h} \subset\subset \mathfrak{g}$.

(iii) **Ideál** $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$ je podprostor, který splňuje $[\mathfrak{i}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{i}$.

(iv) Nechť $\mathfrak{h}$ je ideál, potom **faktoralgebra** $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} := \{X + \mathfrak{h} \mid X \in \mathfrak{g}\}$. Na faktoralgebře definujeme Lieovu závorku $[X + \mathfrak{h}, Y + \mathfrak{h}] := [X, Y] + \mathfrak{h}$.

(v) **Normalizátor** podalgebry $\mathfrak{h} \subset\subset \mathfrak{g}$ je množina $\{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}$.

Definice 2.6. Nechť $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{h}$ jsou Lieovy algebry (nad stejným tělesem). Potom

(i) Lineární zobrazení $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ je **homomorfismus** $\Leftrightarrow$ $[\phi(X), \phi(Y)] = \phi([X, Y])$ pro každé $X, Y \in \mathfrak{g}$.

(ii) Homomorfismus $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ je **endomorfismus** $\Leftrightarrow \mathfrak{h} = \mathfrak{g}$.

(iii) Homomorfismus $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ je **izomorfismus** $\Leftrightarrow \ker \phi = \{0\} \wedge \phi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$.

(iv) Izomorfismus $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ je **automorfismus** $\Leftrightarrow \mathfrak{h} = \mathfrak{g}$.

(v) Zobrazení $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ nazveme **derivací** $\Leftrightarrow \forall X, Y \in \mathfrak{g}: \quad D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY]$.

Poznámka. Označíme $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$, resp. $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, množinu všech endomorfismů, resp. automorfismů, algebry $\mathfrak{g}$.

Poznámka. Příkladem Lieovy algebry nekonečné dimenze je množina všech hladkých vektorových polí $\mathfrak{X}(M)$ na n-rozměrné hladké varietě M. Lieova závorka je definována vztahem:

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M): \quad [X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Ke každé Lieově grupě G lze zkonstruovat Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ všech levoinvariantních vektorových polí na G (a analogicky i pravoinvariantních). Pro určitost nechť $\dim G = n \in \mathbb{N}$. Konstrukci $\mathfrak{g}$ lze provést tak, že vezmeme bázi $(E_i)_{i=1}^n$ prostoru T_eG (tečný prostor ke G v grupové jednotce e) a pak prostřednictvím zobrazení L_g definujeme vektorová pole T_i na G takto:

$$\forall g \in G: \quad T_i|_g := L_{g*}E_i.$$

Lieovou algebru $\mathfrak{g}$ pak definujeme jako

$$\mathfrak{g} := \mathrm{span}\{T_i \mid i = 1, \ldots, n\}.$$

Speciálně platí

$$\mathfrak{g} \simeq T_e G,$$

a tedy i $\dim \mathfrak{g} = \dim T_e G = \dim G < \infty$. Platí $\mathfrak{g} \subset\subset \mathfrak{X}(G)$, neboť komutátor dvou levoinvariantních polí je opět levoinvariantní pole). Vzhledem k jednoznačnému vztahu mezi $\mathfrak{g}$ a $T_e G$ se oba objekty často ztotožňují.

Poznámka. Pro účely tohoto textu budeme uvažovat výhradně *konečněrozměrné* Lieovy algebry vybudované jako *algebry levoinvariantních či pravoinvariantních vektorových polí.*

Definice 2.7. Nechť G je Lieova grupa, $\mathfrak{g}$ je příslušná Lieova algebra. Potom definujeme exponenciální zobrazení $\exp : \mathfrak{g} \to G$ předpisem

$$\exp X := \phi_X(1), \qquad \forall X \in \mathfrak{g},$$

kde ϕ_X je jednoparametrická podgrupa generovaná[1] vektorovým polem $X \in \mathfrak{g}$.

Definice 2.8. Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra, $\dim \mathfrak{g} = n \in \mathbb{N}$ a nechť $(T_i)_{i=1}^n$ je báze $\mathfrak{g}$. Potom čísla ${c_{jk}}^i \in \mathbb{C}$ pro $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$, daná vztahy

$$[T_j, T_k] =: {c_{jk}}^i T_i,$$

nazveme **strukturní konstanty** algebry $\mathfrak{g}$.

Poznámka. Fakt, že ${c_{jk}}^i$ jsou skutečně konstanty, je zajištěn levoinvariantností vektorových polí T_i.

Poznámka. Máme-li Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ s bází $(T_i)_{i=1}^n$, můžeme zavést duální bázi $(\theta^i)_{i=1}^n$ duálního prostoru $\mathfrak{g}^*$ vztahy $\theta^i(T_j) = \delta^i_j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Lineární funkcionály θ^i jsou pak levoinvariantní 1-formy. Lze ukázat, že tato duální báze splňuje velice důležitou rovnici:

$$\mathrm{d}\theta^i = -\frac{1}{2} {c_{jk}}^i \, \theta^j \wedge \theta^k. \tag{2.1}$$

Definice 2.9. Rovnice (2.1) se nazývá **Maurerova-Cartanova strukturní rovnice**.

Definice 2.10. Nechť G Lieova grupa a $\mathfrak{g} \simeq T_e G$ je její Lieova algebra. Potom 1-forma θ s hodnotami v $\mathfrak{g}$ daná předpisem

$$\theta : T\,G \to T_e G, \quad X \mapsto (L_{g^{-1}})_* X = (L_g)_*^{-1} X, \quad X \in T_g G$$

se nazývá **kanonická 1-forma** nebo **Maurerova-Cartanova forma** na G.

Poznámka. Kanonická 1-forma θ splňuje vztah

$$\theta = T_i \otimes \theta^i,$$

kde $(T_i)_{i=1}^n$ je báze $\mathfrak{g}$ a $(\theta^i)_{i=1}^n$ je příslušná duální báze. Rovněž splňuje rovnici

$$\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}[\theta \wedge \theta] = 0,$$

kde $\mathrm{d}\theta := T_i \otimes \mathrm{d}\theta^i$ a $[\theta \wedge \theta] := [T_i, T_j] \otimes \theta^i \wedge \theta^j$.

[1] Z diferenciální geometrie je známo, že existuje korespondence 1:1 mezi 1-parametrickými podgrupami grupy G a levoinvariantními vektorovými poli na G [34].

Definice 2.11. Nechť G je Lieova grupa a M hladká varieta. Potom (**levá**) **akce grupy** G na M je libovolné zobrazení
$$\phi : G \times M \to M$$
splňující
$$\phi(g_1 g_2, m) = \phi(g_1, \phi(g_2, m)), \qquad \forall g_1, g_2 \in G, m \in M,$$
$$\phi(e, m) = m, \qquad \forall m \in M.$$

Poznámka. Analogicky se zavede *pravá akce grupy* G na varietě M jako zobrazení $\tilde{\phi} : M \times G \to M$ splňující
$$\tilde{\phi}(m, g_1 g_2) = \tilde{\phi}(\tilde{\phi}(m, g_1) g_2), \qquad \forall g_1, g_2 \in G, m \in M,$$
$$\tilde{\phi}(m, e) = m, \qquad \forall m \in M.$$

Definice 2.12. Reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ na komplexním vektorovém prostoru V je homomorfismus algeber $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Poznámka. Je-li ρ reprezentace $\mathfrak{g}$ na V, máme dáno zobrazení $\mathfrak{g} \times V \to V$ vztahem $\rho(X)(v) \in V$, kde $X \in \mathfrak{g}$ a $v \in V$. Říkáme, že $\mathfrak{g}$ *má akci na* V.

Definice 2.13. (i) **Adjungovaná akce grupy** G je zobrazení $\phi : G \times G \to G$ definované vztahem $\phi(g, h) := ghg^{-1} = L_g R_{g^{-1}} h$.

(ii) **Adjungovaná reprezentace grupy** G je zobrazení $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ definované jako $\mathrm{Ad}_g = \mathrm{Ad}(g) := L_{g*} R_{g^{-1}*}$.

(iii) **Adjungovaná reprezentace algebry** $\mathfrak{g}$ je zobrazení $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ definované vztahem $\mathrm{ad}_X Y = \mathrm{ad}(X) Y := \mathrm{Ad}_*(X) Y$.

Poznámka. Pro zobrazení ad lze odvodit jednoduché vyjádření: $\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y]$ pro každé $X, Y \in \mathfrak{g}$. Dále se snadno přesvědčíme, že ad_X je derivace $\mathfrak{g}$.

Poznámka. Direktní součet dvou Lieových algeber $\mathfrak{g}_1$ a $\mathfrak{g}_2$ je Lieova algebra, kterou značíme $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. Tuto algebru zavádíme tak, že jako vektorový prostor je direktním součtem $\mathfrak{g}_1$ a $\mathfrak{g}_2$ a Lieovu závorku definujeme „po složkách“ $[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] := ([X_1, X_2], [Y_1, Y_2])$. Potom $\mathfrak{g}_1$ a $\mathfrak{g}_2$ (tj. množiny prvků typu $(X, 0)$ a $(0, Y)$) jsou ideály v direktním součtu a $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = \{0\}$. Tento direktní součet také nazýváme *vnější.*

Naopak, jsou-li $\mathfrak{g}_1$ a $\mathfrak{g}_2$ dva ideály v $\mathfrak{g}$ takové, že $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ jako lineární prostor a zároveň $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = \{0\}$, potom zobrazení $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \ni (X, Y) \mapsto X + Y \in \mathfrak{g}$ je izomorfismus algeber $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ a $\mathfrak{g}$ (hovoříme o tzv. *vnitřním direktním součtu*).

Pro zjednodušení nebudeme v textu mezi oběma případy rozlišovat.

Definice 2.14. Řekneme, že Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je:

(i) **prostá** $\Leftrightarrow$ její jediné ideály jsou $\mathfrak{g}$ a $\{0\}$ a $\dim \mathfrak{g} > 1$,

(ii) **poloprostá** $\Leftrightarrow$ její jediný abelovský ideál je $\{0\}$.

Poznámka. Řekneme, že netriviální grupa G je *prostá* právě tehdy, když nemá netriviální normální podgrupy. *Triviální podgrupou* grupy G je podgrupa $\{e\}$ a grupa G samotná. *Normální podgrupou* grupy G rozumíme každou její podgrupu N splňující $gNg^{-1} \subset N$ pro všechna $g \in G$.

Lze ukázat, že Lieova algebra prosté Lieovy grupy G je prostá. Důkaz spočívá ve využití skutečnosti, že každé podalgebře algebry $\mathfrak{g}$ odpovídá podgrupa grupy G. Speciálně pak ideálu odpovídá normální podgrupa grupy G. Předpokládáme-li potom, že algebra $\mathfrak{g}$ není prostá, dostáváme se okamžitě do sporu s prostotou grupy G.

Definice 2.15.

(i) **Derivovanou sérií** algebry $\mathfrak{g}$ rozumíme sérii $\mathfrak{g}^{(0)} := \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(k)} := [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]$.

(ii) **Dolní centrální sérií** algebry $\mathfrak{g}$ rozumíme sérii $\mathfrak{g}^1 := \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{k+1} := [\mathfrak{g}^k, \mathfrak{g}]$.

Definice 2.16. Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra. Řekneme, že $\mathfrak{g}$ je **řešitelná** $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : \mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$. Řekneme, že $\mathfrak{g}$ je **nilpotentní** $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : \mathfrak{g}^k = \{0\}$.

Poznámka. Zřejmě $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$. Důsledkem je, že každá nilpotentní algebra je řešitelná.

Poznámka. Pojem nilpotentnosti a řešitelnosti lze rozšířit i na ideály algeber. Navíc platí, že průnik a součet řešitelných (nilpotentních) ideálů je opět řešitelný (nilpotentní) ideál. V každé Lieově algebře $\mathfrak{g}$ tedy existuje maximální řešitelný ideál zvaný *radikál* a maximální nilpotentní ideál zvaný *nilradikál.*

Poznámka. Ke každé reálné Lieově algebře $\mathfrak{g}$ existuje právě jedna komplexní Lieova algebra $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, kterou nazveme *komplexifikací* $\mathfrak{g}$. Algebru $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ lze definovat jako

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} + \mathrm{i}\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Lieova závorka na $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ je dána vztahem

$$[X + \mathrm{i}Y, U + \mathrm{i}V]_{\mathbb{C}} := ([X, U] - [Y, V]) + \mathrm{i}([Y, U] + [X, V]).$$

Zřejmě platí: $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$.

Naopak, ke každé komplexní Lieově algebře $\mathfrak{g}$ existuje jediná reálná Lieova algebra $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, kterou sestrojíme tak, že ke zvolené bázi $(T_i)_{i=1}^n$ algebry $\mathfrak{g}$ přidáme soubor $(\mathrm{i}T_j)_{j=1}^n$. Soubor $(T_j, \mathrm{i}T_k)_{j,k=1}^n$ pak tvoří bázi algebry $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$. Všechny rozklady do této báze provádíme nad tělesem $\mathbb{R}$. Odtud je i vidět, že platí: $\dim \mathfrak{g}^{\mathbb{R}} = 2 \dim \mathfrak{g}$.

Lze se přesvědčit, že komplexifikace prosté reálné Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je poloprostá. Důkaz tohoto tvrzení plyne jednoduše z věty 2.23, neboť nedegenerovanost Killingovy formy se komplexifikací nepoškodí.

Definice 2.17. Reálná forma komplexní Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je libovolná reálná Lieova algebra $\tilde{\mathfrak{g}}$ taková, že $\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}$.

Definice 2.18. Nechť ω je symetrická bilineární forma na $\mathfrak{g}$. Potom řekneme, že ω je:

(i) **invariantní vůči automorfismům** na $\mathfrak{g} \Leftrightarrow \forall \phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) : \omega(\phi(X), \phi(Y)) = \omega(X, Y)$,

(ii) **ad-invariantní** (resp. **invariantní**) $\Leftrightarrow \omega([X, Y], Z) + \omega(Y, [X, Z]) = 0$.

Definice 2.19. Buď V vektorový prostor, $\dim V = n \in \mathbb{N}$, nechť $(\cdot,\cdot)$ je symetrická bilineární forma na V.

(i) Řekneme, že $X, Y \in V$ jsou **ortogonální**, právě když $(X, Y) = 0$. Ortogonalitu vektorů značíme $X \perp Y$.

(ii) Nechť $M \subset V$, potom množinu $M^\perp := \{Y \in V \mid (X, Y) = 0,\ \forall X \in M\}$ nazveme **ortogonální doplněk** M vzhledem k formě $(\cdot,\cdot)$.

Poznámka. Nechť U je podprostor v konečněrozměrném vektorovém prostoru V s bilineární symetrickou formou $(\cdot,\cdot)$. Potom platí

$$\dim V = \dim U + \dim U^\perp - \dim(U \cap V^\perp).$$

Je-li navíc forma $(\cdot,\cdot)$ nedegenerovaná, platí $V^\perp = \{0\}$ a tudíž

$$\dim V = \dim U + \dim U^\perp.$$

Obecně neplatí $U \cap U^\perp = \{0\}$ — k tomu by byla zapotřebí definitnost formy $(\cdot,\cdot)$.

Definice 2.20. Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra. Potom formu $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ danou předpisem

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g} : \quad \kappa(X, Y) := \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_X \circ \operatorname{ad}_Y)$$

nazveme **Killingova forma**[2] na $\mathfrak{g}$.

Poznámka. Killingovu formu na Lieově algebře $\mathfrak{g}$ budeme často značit symbolem $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{g}}$.

Poznámka. Snadno se přesvědčíme, že Killingova forma je symetrická, bilineární a invariantní vůči automorfismům na $\mathfrak{g}$. V důsledku toho splňuje i vztah

$$\kappa([X, Y], Z) + \kappa(Y, [X, Z]) = 0,$$

který ovšem lze snadno odvodit i přímo z definice κ.

Definice 2.21. Killingova forma κ na $\mathfrak{g}$ je **nedegenerovaná** právě tehdy, když platí implikace

$$\forall Y \in \mathfrak{g} : \kappa(X, Y) = 0 \implies X = 0.$$

Definice 2.22. (i) Operátor $A \in \mathfrak{gl}(V)$ je **diagonalizovatelný** (**poloprostý**) právě tehdy, když existuje báze vektorového prostoru V tvořená jeho vlastními vektory.

(ii) Soubor operátorů $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je **současně diagonalizovatelný** právě tehdy, když existuje báze V tvořená společnými vlastními vektory všech operátorů A_α.

(iii) Operátor $A \in \mathfrak{gl}(V)$ je **nilpotentní**, právě když existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že $A^k = 0$.

Věta 2.23 (2. Cartanovo kritérium). *Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je poloprostá právě tehdy, když její Killingova forma je nedegenerovaná.*

Definice 2.24. Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}$ Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je nilpotentní podalgebra, která se rovná svému normalizátoru v $\mathfrak{g}$.

Poznámka. Pro poloprosté komplexní Lieovy algebry lze tuto definici ekvivalentně přeformulovat: *Cartanova podalgebra* $\mathfrak{h}$ je maximální abelovská podalgebra taková, že ad_H je poloprostý (diagonalizovatelný) pro všechna $H \in \mathfrak{h}$.

[2] Setkáme se také s názvem Killingova-Cartanova forma.

2.1.2 Kořenový rozklad a kompaktní forma

Poznámka. Buď $\mathfrak{g}$ komplexní Lieova algebra, $X \in \mathfrak{g}$. Víme, že ad_X je lineární operátor na $\mathfrak{g}$ a z lineární algebry je známo, že existuje rozklad

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda} \mathfrak{g}_{\lambda}(X),$$

kde λ probíhá vlastní hodnoty operátoru ad_X a $\mathfrak{g}_{\lambda}(X) := \{Y \in \mathfrak{g} | \exists k \in \mathbb{N} : (\mathrm{ad}_X - \lambda)^k Y = 0\}$. Výraz $\mathfrak{g}_{\lambda}(X)$ má smysl pro libovolné λ, nicméně netriviální je pouze pro λ, které je vlastní hodnotou ad_X. Snadno si rozmyslíme, že $\mathfrak{g}_0(X) \neq \{0\}$ pro každé $X \in \mathfrak{g}$. Lze se přesvědčit, že prostory $\mathfrak{g}_{\lambda}(X)$ splňují

$$[\mathfrak{g}_{\lambda}(X), \mathfrak{g}_{\mu}(X)] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}(X).$$

Definice 2.25. (i) Podprostory $\mathfrak{g}_{\lambda}(X)$ nazveme **zobecněné vlastní podprostory** operátoru ad_X.

(ii) **Nulitou** ad_X nazveme dimenzi podprostoru $\mathfrak{g}_0(X)$.

(iii) Prvek $X \in \mathfrak{g}$ nazveme **regulární** $\Leftrightarrow$ nulita ad_X je nejmenší možná.

Poznámka. Lze ukázat, že každá komplexní Lieova algebra $\mathfrak{g}$ má Cartanovu podalgebru (důkaz viz např. [37]). Je-li $X \in \mathfrak{g}$ regulární, je Cartanovou podalgebrou například $\mathfrak{g}_0(X)$.

Nechť $\mathfrak{h}$ je Cartanova podalgebra poloprosté algebry $\mathfrak{g}$. Z definice Cartanovy podalgebry víme, že ad_H je diagonalizovatelný operátor pro každé $H \in \mathfrak{h}$ a navíc $\{\mathrm{ad}_H | H \in \mathfrak{h}\}$ je množina vzájemně komutujících operátorů. Odtud plyne existence báze algebry $\mathfrak{g}$, v níž jsou tyto operátory současně diagonalizovatelné. Potom pro libovolné $H \in \mathfrak{h}$ jsou vlastní hodnoty operátoru ad_H kořeny charakteristické rovnice

$$\det(\mathrm{ad}_H - \alpha(H)) = 0.$$

Řešení této rovnice jsou ve skutečnosti lineární funkcionály na $\mathfrak{h}$, což snadno nahlédneme ze vztahu

$$\mathrm{ad}_H X_{\alpha} = \alpha(H) X_{\alpha},$$

pro nějaké $0 \neq X_{\alpha} \in \mathfrak{g}$ a pro každé $H \in \mathfrak{h}$.

Definice 2.26. (i) Lineární funkcionály $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, $\alpha \neq 0$, pro které existuje $0 \neq X_{\alpha} \in \mathfrak{g}$ tak, že pro každé $H \in \mathfrak{h}$ platí $[H, X_{\alpha}] = \alpha(H) X_{\alpha}$, nazveme **kořeny** $\mathfrak{g}$ vzhledem k $\mathfrak{h}$.

(ii) Příslušné vektory X_{α} nazveme **kořenové vektory**.

(iii) Podprostory $\mathfrak{g}_{\alpha} := \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \alpha(H)X, \forall H \in \mathfrak{h}\}$ nazveme **kořenové podprostory**.

(iv) Množinu všech kořenů označíme Φ.

Poznámka. Ukazuje se, že kořenové podprostory $\mathfrak{g}_{\alpha}$ jsou jednorozměrné. Navíc, Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ lze rozložit do direktního součtu

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha} \right),$$

kde $\mathfrak{g}_0$ je Cartanova podalgebra algebry $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{g}_\alpha$ jsou kořenové podprostory. Uvedený rozklad nazýváme *kořenovým rozkladem* $\mathfrak{g}$. Vzhledem ke konečné dimenzi algebry $\mathfrak{g}$ je zřejmé, že množina Φ je konečná.

Kořenové podprostory splňují vztah

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}.$$

Zřejmě $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = \{0\}$, pokud funkcionál $\alpha + \beta$ není kořen nebo 0.

Lemma 2.27. *(i) Nechť $\alpha, \beta \in \Phi \cup \{0\}$. Potom $\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\beta$ pro $\alpha + \beta \neq 0$, tj. speciálně $\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\alpha$ pro všechna $\alpha \in \Phi$.*

(ii) Zúžení Killingovy formy κ na $\mathfrak{g}_0$ je opět nedegenerovaná forma. Proto pro každý kořen α existuje právě jedno $H_\alpha \in \mathfrak{g}_0$ tak, že $\alpha(H) = \kappa(H, H_\alpha)$ pro každé $H \in \mathfrak{g}_0$.

(iii) Je-li $\alpha \in \Phi$, pak $-\alpha \in \Phi$ a pro libovolné $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ a $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ platí: $[X, Y] = \kappa(X, Y)H_\alpha$.

(iv) $\alpha(H_\alpha) = \kappa(H_\alpha, H_\alpha) \neq 0$.

Definice 2.28. Vezměme H_α z předchozího lemmatu. Definujme

$$\alpha^\vee := \frac{2}{\kappa(H_\alpha, H_\alpha)} H_\alpha, \qquad \alpha \in \Phi.$$

Prvek $\alpha^\vee \in \mathfrak{g}_0$ nazveme **kokořen** kořene α. Vidíme také, že $\alpha(\alpha^\vee) = 2$.

Poznámka. Lze ukázat, že čísla $a_{\beta\alpha}$ definovaná předpisem

$$a_{\beta\alpha} := \beta(\alpha^\vee) = 2\frac{\kappa(H_\beta, H_\alpha)}{\kappa(H_\alpha, H_\alpha)}$$

jsou celá. Nazýváme je *Cartanova celá čísla.*

Poznámka. Nechť $\alpha \in \Phi$. Z předchozího lemmatu ihned plyne platnost

$$\mathfrak{g}_{-\alpha} \perp \mathfrak{g}_\beta, \qquad \text{kde } \beta \in \big((\Phi \cup \{0\}) \setminus \{\alpha\}\big).$$

Předpokládejme navíc, že rovněž $\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Potom pro každé $X \in \mathfrak{g}$ a pro každé $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ dostáváme $\kappa(X, Y) = 0$ a z nedegenerovanosti κ plyne $\mathfrak{g}_{-\alpha} = \{0\}$, což je spor s konstrukcí.

Odtud plyne, že vždy existuje $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ a $E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tak, že

$$\kappa(E_\alpha, E_{-\alpha}) \neq 0.$$

Zvolme $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ a $E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tak, aby platilo

$$\kappa(E_\alpha, E_{-\alpha}) = \frac{2}{\kappa(H_\alpha, H_\alpha)}.$$

Potom platí

$$\begin{aligned}
[E_\alpha, E_{-\alpha}] &= \kappa(E_\alpha, E_{-\alpha}) H_\alpha = \alpha^\vee, \\
[\alpha^\vee, E_{\pm\alpha}] &= \frac{2}{\kappa(H_\alpha, H_\alpha)} [H_\alpha, E_{\pm\alpha}] \\
&= \frac{2}{\alpha(H_\alpha)} (\pm\alpha)(H_\alpha) E_{\pm\alpha} \\
&= \pm 2 E_{\pm\alpha}.
\end{aligned}$$

Věta 2.29 (Weylova-Chevalleyova normální forma)**.** *Buď $\mathfrak{g}$ komplexní poloprostá algebra a $\mathfrak{g}_0$ její Cartanova podalgebra. Pak $\mathfrak{g}$ je direktním součtem $\mathfrak{g}_0$ a jednorozměrných kořenových podprostorů takovým, že*

(i) $[H, E_\alpha] = \alpha(H)E_\alpha, \qquad \alpha \in \Phi,\ H \in \mathfrak{g}_0,\ E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha,$

(ii) $[E_\alpha, E_\beta] \begin{cases} \in \mathfrak{g}_0 & \textit{pro } \alpha + \beta = 0 \\ = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} & \textit{pro } \alpha + \beta \in \Phi \\ = 0 & \textit{jinak} \end{cases}$

Poznámka. Bázi $\mathfrak{g}$ lze zvolit tak, že $N_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$ a

$$N_{(-\alpha)(-\beta)} = -N_{\alpha\beta} = \pm(-p+1),$$

kde $p \leq 0$ je nejmenší celé číslo takové, že $\beta + p\alpha \in \Phi$.

Definice 2.30. Buď $\mathfrak{g}$ komplexní poloprostá Lieova algebra a $\mathfrak{h}$ je její Cartanova podalgebra. Zvolme $H_0 \in \mathfrak{h}$ takové, že $\alpha(H_0) \neq 0$, $\forall \alpha \in \Phi$ (takové H_0 jistě existuje). Potom řekneme, že

(i) $\alpha \in \Phi$ je **kladný kořen** $\Leftrightarrow$ $\alpha(H_0) > 0$. Množinu kladných kořenů označíme Φ^+.

(ii) $\alpha \in \Phi$ je **záporný kořen** $\Leftrightarrow$ $\alpha(H_0) < 0$. Množinu záporných kořenů označíme Φ^-.

(iii) $\alpha \in \Phi^+$ je **prostý kořen** $\Leftrightarrow$ neexistuje $\beta, \gamma \in \Phi^+$ tak, že $\alpha = \beta + \gamma$. Množinu všech prostých kořenů označíme Φ^p.

Definice 2.31. Řekneme, že reálná Lieova algebra je **kompaktní**, právě když její Killingova forma je definitní.

Poznámka. Killingova forma kompaktní reálné algebry je automaticky *negativně definitní.* Operátory ad_X jsou reálné (neboť algebra je reálná) a z invariance Killingovy formy dále vyplývá, že jsou navíc také antisymetrické (vzhledem k nedegenerované Killingově formě). Je vidět, že mají pouze ryze imaginární vlastní čísla. Odtud pak vlastní čísla a stopa operátoru $\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_X$ jsou reálná a menší nebo rovna 0.

Poznámka. Uvažujme dále reálnou poloprostou algebru $\mathfrak{g}$ (např. ve Weylově-Chevalleyově normální formě). Nechť $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ je její komplexifikace

$$\mathfrak{g}^\mathbb{C} := \mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} \mathfrak{g} = \mathfrak{g} \oplus \mathrm{i}\mathfrak{g}.$$

Cílem je popsat abstraktně $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}^\mathbb{C}$ pomocí nějaké operace na $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$.

Buď $\phi : \mathfrak{g}^\mathbb{C} \to \mathfrak{g}^\mathbb{C}$ zobrazení definované vztahem

$$\phi(X + \mathrm{i}Y) = X - \mathrm{i}Y, \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Zobrazení ϕ má následující vlastnosti

(i) $\phi \circ \phi = \mathrm{id}$, tj. ϕ je *involuce*,

(ii) $\phi(\lambda X) = \bar{\lambda}\, \phi(X)$ pro každé $X \in \mathfrak{g}^\mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, tj. ϕ je *antilineární*,

(iii) $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$ pro každé $X, Y \in \mathfrak{g}^\mathbb{C}$, tj. ϕ zachovává Lieovu závorku.

Dohromady dostáváme, že ϕ je *involutivní antilineární automorfismus* komplexní algebry $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ a $\mathfrak{g}$ je jejím reálným podprostorem takovým, že $\phi|_{\mathfrak{g}} = \mathrm{id}$.

Mějme nyní naopak pouze komplexní Lieovu algebru $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ a nějaký involutivní antilineární automorfismus ψ algebry $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Potom existuje rozklad

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = V + \mathrm{i}V,$$

kde V je reálný podprostor algebry $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ takový, že $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, $\psi|_V = \mathrm{id}$ a $\psi|_{\mathrm{i}V} = -\,\mathrm{id}$. Protože pro každé $X, Y \in V$ platí

$$\psi([X,Y]) = [\psi(X), \psi(Y)] = [X,Y],$$

vidíme, že V je reálná podalgebra $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ a vzhledem k rovnosti dimenzí dostáváme, že V je reálná forma komplexní algebry $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Je také zřejmé, že všechny reálné formy mají tyto vlastnosti pro nějaké ψ. Nalezení všech reálných forem dané komplexní algebry je tedy ekvivalentní úloze nalezení všech involutivních antilineárních automorfismů a vyloučení ekvivalentních algeber.

Poznámka. Buď $\mathfrak{g}$ komplexní poloprostá Lieova algebra ve Weylově-Chevalleyově normální formě s $N_{(-\alpha)(-\beta)} = -N_{\alpha\beta}$. Potom existují vždy alespoň dvě reálné formy:

(i) Tzv. *split-forma*, kterou označíme $\mathfrak{g}_{\text{split}}$ a definujeme jako

$$\mathfrak{g}_{\text{split}} := \mathbb{R}\text{-span}\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Phi^p} \oplus \mathbb{R}\text{-span}\{E_\alpha\}_{\alpha\in\Phi},$$

Jediné nenulové maticové elementy Killingovy formy κ jsou $\kappa(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$ a $\kappa(H_\alpha, H_\beta)$ pro $\alpha, \beta \in \Phi^p$ a navíc je zúžení Killingovy formy $\kappa|_{\mathbb{R}\text{-span}\{H_\alpha\}}$ pozitivně definitní. Odtud plyne, že κ má signaturu

$$\left(l + \frac{n-l}{2}, \frac{n-l}{2}\right),$$

kde $l := \dim \mathfrak{g}_0$.

(ii) Tzv. *kompaktní forma* $\mathfrak{g}_{\text{komp}}$ definovaná zobrazením $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ s vlastnostmi $\psi|_{\mathfrak{g}_0} = -\,\mathrm{id}$ a $\psi(E_\alpha) = -E_{-\alpha}$ pro každé $\alpha \in \Phi$. $\mathfrak{g}_{\text{komp}}$ zapíšeme ve tvaru

$$\mathfrak{g}_{\text{komp}} := \mathbb{R}\text{-span}\{\mathrm{i}H_\alpha\}_{\alpha\in\Phi^p} \oplus \text{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(E_\alpha - E_{-\alpha}), \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(E_\alpha + E_{-\alpha})\right\}_{\alpha\in\Phi^+},$$

Nenulové maticové elementy Killingovy formy jsou

$$\begin{aligned} \kappa(\mathrm{i}H_\alpha, \mathrm{i}H_\beta) &= -\kappa(H_\alpha, H_\beta), \\ \kappa\left((E_\alpha - E_{-\alpha})/\sqrt{2}\ ,\ (E_\alpha - E_{-\alpha})/\sqrt{2}\right) &= -1, \\ \kappa\left(\mathrm{i}(E_\alpha + E_{-\alpha})/\sqrt{2}\ ,\ \mathrm{i}(E_\alpha + E_{-\alpha})/\sqrt{2}\right) &= -1. \end{aligned}$$

Killingova forma na $\mathfrak{g}_{\text{komp}}$ je tedy negativně definitní.

Další případné reálné formy $\mathfrak{g}$ mohou, ale nemusí existovat.

Věta 2.32 (Weylova věta). *Buď $\mathfrak{g}$ reálná poloprostá Lieova algebra, G příslušná souvislá a jednoduše souvislá Lieova grupa. Potom G je kompaktní právě tehdy, když Killingova forma na $\mathfrak{g}$ je negativně definitní.*

Poznámka. Lze ukázat, že ke každé poloprosté komplexní Lieově algebře existuje právě jedna *kompaktní reálná forma* (tj. reálná forma s negativně definitní Killingovou formou).

2.1.3 Lieova bialgebra, Drinfeldův double

Naším cílem je zavést pojem *Drinfeldův double*, který budeme později potřebovat pro zavedení Poissonovy-Lieovy T-duality. Za tímto účelem je třeba zavést několik pojmů z oblasti Lieových bialgeber, které objasní strukturu Drinfeldova doublu. Podrobnější výklad včetně důkazů je obsažen v literatuře [28].

Poznámka. Každá Lieova algebra $\mathfrak{g}$ má akci sama na sebe prostřednictvím adjungované reprezentace $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ definované předpisem $\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y]$. Pomocí ad můžeme zavést akci $\mathfrak{g}$ na libovolný tenzorový součin $\bigotimes^p \mathfrak{g}$. Například pro $p = 2$ zavedeme pro $Y_1 \otimes Y_2 \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$

$$\mathrm{ad}_X^{(2)}(Y_1 \otimes Y_2) := \mathrm{ad}_X Y_1 \otimes Y_2 + Y_1 \otimes \mathrm{ad}_X Y_2 = [X, Y_1] \otimes Y_2 + Y_1 \otimes [X, Y_2].$$

Zobrazení $\mathrm{ad}^{(2)} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})$ je adjungovaná reprezentace $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.

Definice 2.33. Nechť $k \in \mathbb{Z}_+$ a buď ρ reprezentace $\mathfrak{g}$ na V. Vektorový prostor všech totálně antisymetrických k-lineárních zobrazení na $\mathfrak{g}$ s hodnotami ve V nazveme prostorem **k-kořetězců** na $\mathfrak{g}$ s hodnotami ve V. Tento prostor označíme $\Lambda^k(\mathfrak{g}, V)$.

Definice 2.34. Nechť $k \in \mathbb{Z}_+$. Potom operátor

$$\delta : \Lambda^k(\mathfrak{g}, V) \to \Lambda^{k+1}(\mathfrak{g}, V)$$

daný předpisem[3]

$$\begin{aligned} \delta u(X_0, \ldots, X_k) := &\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \rho(X_i)(u(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_k)) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} u([X_i, X_j], X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_k), \end{aligned}$$

pro $u \in \Lambda^k(\mathfrak{g}, V)$ a $X_0, X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{g}$, nazveme **kohomologickým operátorem**.

Definice 2.35. Buď $u \in \Lambda^k(\mathfrak{g}, V)$. Potom $(k+1)$-kořetězec δu nazveme **kohranicí** k-kořetězce u.

Poznámka. Speciálně se podívejme na případ $k = 0, 1$. Z definice zřejmě

$$\Lambda^0(\mathfrak{g}, V) = V \qquad \text{a} \qquad \Lambda^1(\mathfrak{g}, V) = \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, V).$$

Pro $k = 0$ je tedy 0-kořetězec na $\mathfrak{g}$ s hodnotami ve V jednoduše nějaký prvek $u \in V$. Potom pro $u \in V$ a $X \in \mathfrak{g}$ dostáváme

$$\delta u(X) = \rho(X)(u).$$

Pro $k = 1$ je 1-kořetězec v lineární zobrazení z $\mathfrak{g}$ do V a pro $X, Y \in \mathfrak{g}$ dostaneme

$$\delta v(X, Y) = \rho(X)(v(Y)) - \rho(Y)(v(X)) - v([X, Y]).$$

Poznámka. Nechť u je k-kořetězec, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$. Potom $\delta(\delta u) = 0$.

[3] Zde $\hat{X}_i$ znamená, že prvek X_i je vynechán.

Definice 2.36. k-kořetězec u nazveme k-**kocykl**, právě když $\delta u = 0$. k-kořetězec u $(k \geq 1)$ se nazývá k-**kohranice** právě tehdy, když existuje $(k-1)$-kořetězec v takový, že $u = \delta v$.

Poznámka. Buď $\mathfrak{g}$ Lieova algebra a nechť γ je lineární zobrazení $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Označme ${}^t\gamma : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ *transpozici* zobrazení γ (tj. ${}^t\gamma(\psi)(X) := \psi(\gamma(X))$, pro $X \in \mathfrak{g}$ a $\psi \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*$). Z lineární algebry je známo, že lineární zobrazení z $\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*$ do $\mathfrak{g}^*$ lze ztotožnit s bilineárním zobrazením na $\mathfrak{g}^*$.

Definice 2.37. **Lieova bialgebra** je každá Lieova algebra $\mathfrak{g}$ vybavená lineárním zobrazením $\gamma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ takovým, že

(i) ${}^t\gamma : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ definuje Lieovu závorku na $\mathfrak{g}^*$, tj. je to antisymetrické bilineární zobrazení na $\mathfrak{g}^*$, které vyhovuje Jacobiho identitě,

(ii) γ je 1-kocykl na $\mathfrak{g}$ s hodnotami v $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, kde $\mathfrak{g}$ má akci na $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ prostřednictvím adjungované reprezentace $\mathrm{ad}^{(2)}$.

Definice 2.38. Buď $\mathfrak{g}$ Lieova algebra a $\mathfrak{g}^*$ nechť je duální vektorový prostor ke $\mathfrak{g}$. Potom zobrazení $\mathrm{ad}^* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^*)$ dané vztahem

$$\mathrm{ad}^*_X := -{}^t(\mathrm{ad}_X), \qquad X \in \mathfrak{g}$$

nazveme **koadjungovaná reprezentace** $\mathfrak{g}$.

Poznámka. Buď $(\mathfrak{g}, \gamma)$ Lieova bialgebra, označme μ Lieovu závorku na $\mathfrak{g}$. Potom $(\mathfrak{g}^*, {}^t\mu)$ je také Lieova bialgebra, kde ${}^t\gamma$ je Lieova závorka na $\mathfrak{g}^*$. Lieovu bialgebru $(\mathfrak{g}^*, {}^t\mu)$ nazveme *duálem* k $(\mathfrak{g}, \gamma)$.

Věta 2.39. *Buď $(\mathfrak{g}, \gamma)$ Lieova bialgebra a $(\mathfrak{g}^*, {}^t\mu)$ její duál. Potom lze na vektorovém prostoru $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ jednoznačným způsobem zavést strukturu Lieovy algebry tak, že $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{g}^*$ jsou Lieovy podalgebry a kanonická bilineární forma na $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ je invariantní.*

Poznámka. Kanonická bilineární forma $(\cdot|\cdot)$ na $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ je dána vztahy

$$(X + \xi | Y + \eta) = \xi(Y) + \eta(X), \qquad X, Y \in \mathfrak{g},\ \xi, \eta \in \mathfrak{g}^*.$$

Definice 2.40. Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova bialgebra. Potom $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$, vybavená strukturou Lieovy algebry podle předchozí věty, se nazývá **double** Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ a označuje se $\mathfrak{d}$.

Definice 2.41. Buď D Lieova grupa a $\mathfrak{d}$ její Lieova algebra. Nechť $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je bilineární symetrická nedegenerovaná ad-invariantní forma na $\mathfrak{d}$.

(i) Řekneme, že D je **Drinfeldův double** právě tehdy, když $\mathfrak{d}$ lze rozložit na dvojici maximálních izotropních (viz dále) podalgeber $\mathfrak{g}$ a $\tilde{\mathfrak{g}}$ tak, že $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}$ jako vektorový prostor.

(ii) Libovolný takový rozklad zapsaný jako uspořádaná trojice $(\mathfrak{d}, \mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}})$, nazveme **Maninova trojice**.

Poznámka. Izotropní podprostor Lieovy algebry $\mathfrak{d}$ s bilineární symetrickou nedegenerovanou invariantní formou $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je každý podprostor $V \subset \mathfrak{d}$ splňující podmínku

$$\langle X, Y \rangle = 0, \qquad \forall X, Y \in V.$$

Izotropní podalgebra je izotropní podprostor, který je zároveň podalgebrou. *Maximální izotropní podprostor* znamená, že daný podprostor již nelze rozšířit při současném zachování jeho izotropie.

2.2 Fibrované variety, konexe, křivost

Definice 2.42. **Fibrovaná varieta** (hladká) (E, π, M, F, G) je objekt skládající se z následujících elementů:

(i) Hladké variety E nazývané **totální prostor**.

(ii) Hladké variety M nazývané **bázový prostor**.

(iii) Hladké variety F nazývané **vlákno** nebo též **typické vlákno**.

(iv) Surjektivního zobrazení $\pi : E \to M$ nazývaného **projekce**. Vzor $\pi^{-1}(p) =: F_p \simeq F$ (tj. difeomorfní variety) se nazývá **vlákno nad** $p \in M$.

(v) Lieovy grupy G nazývané **strukturní grupa** a její levé akce na F.

(vi) Otevřené pokrytí $\{U_i\}$ variety M s difeomorfismy $\phi_i : U_i \times F \to \pi^{-1}(U_i)$ takovými, že $\pi \circ \phi_i(p, f) = p$. Zobrazení ϕ_i se nazývá **lokální trivializace**, neboť ϕ_i^{-1} zobrazuje $\pi^{-1}(U_i)$ na kartézský součin $U_i \times F$.

(vii) Zobrazení $\phi_{i,p} : F \to F_p$ definované předpisem $\phi_{i,p}(f) := \phi_i(p, f)$ musí být difeomorfismus. Je-li $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, pak požadujeme, aby zobrazení $t_{ij}(p) := \phi_{i,p}^{-1} \circ \phi_{j,p} : F \to F$ odpovídalo akci nějakého elementu $g \in G$, ozn. $t_{ij}(p) = g$. Potom ϕ_i a ϕ_j jsou spojeny hladkým zobrazením $t_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ vztahem $\phi_j(p, f) = \phi_i(p, t_{ij}(p)f)$. Zobrazení t_{ij} nazýváme **přechodové funkce**.

Poznámka. (a) Fibrovaná varieta (E, π, M, F, G) se často označuje $E \xrightarrow{\pi} M$ a označuje se také jako *fibrace*.

(b) Z definice je vidět, že fibrovaná varieta má lokálně strukturu kartézského součinu $U \times F$, kde $U \subset M$.

(c) Striktně vzato jsme definovali tzv. *souřadnicovou varietu* $(E, \pi, M, F, G, \{U_i, \phi_i\})$. V matematice se obvykle zavádí fibrovaná varieta nezávisle na souřadnicích jako třída ekvivalence souřadnicových variet. My se tímto problémem nebudeme zabývat.

(d) V literatuře se rovněž často setkáme s definicí fibrace, v níž se explicitně neuvádí grupa G. V takovém případě se automaticky předpokládá, že grupa se vybere nejobecnější možná, aby zároveň zachovávala případné dodatečné struktury na F (např. grupa všech difeomorfismů F; je-li F vektorový prostor, volí se $GL(F)$ apod.).

Definice 2.43. Mějme fibraci (E, π, M, F, G). **Řezem** rozumíme hladké zobrazení $X : M \to E$ splňující podmínku $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$. Množinu všech řezů na M označíme $\Gamma(M, E)$.

Poznámka. (a) Nechť $U \subset M$. Můžeme pak hovořit o *lokálních řezech* definovaných pouze na U. $\Gamma(U, E)$ pak označuje množinu všech lokálních řezů na U. Ne každá fibrovaná varieta připouští existenci globálních řezů.

(b) Snadno si rozmyslíme, že $\Gamma(M, T\,M)$ představuje vlastně množinu hladkých vektorových polí na M, tj. $\mathfrak{X}(M)$.

Definice 2.44. Fibraci $E \xrightarrow{\pi} M$ nazveme **vektorovou** $\Leftrightarrow$ její vlákno F je vektorový prostor a $G \subset GL(F)$.

Definice 2.45. Řekneme, že fibrace $P \xrightarrow{\pi} M$ je **hlavní** $\Leftrightarrow$ její vlákno $F = G$ a akce G na G je levé násobení.

Poznámka. Hlavní fibrace se často označuje $P(M, G)$ a nazývá se také G-fibrace (hlavní G-fibrace).

Poznámka (Pravá akce grupy G). U hlavní fibrace lze zavést také pravou akci G na $F = G$. Buď $\phi_i : U_i \times G \to \pi^{-1}(U_i)$ lokální trivializace, $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_i(u))$, kde $u \in \pi^{-1}(U_i)$ a $p = \pi(u)$. Pravá akce G na $\pi^{-1}(U_i)$ je definovaná vztahem $\phi_i^{-1}(ua) := (p, g_i(u)a)$, tj.

$$ua := \phi_i(p, g_i(u)a), \qquad \forall a \in G, u \in \pi^{-1}(p).$$

Je-li $p \in U_i \cap U_j$, pak

$$ua = \phi_j(p, g_j(u)a) = \phi_j(p, t_{ji}(p)g_i(u)a) = \phi_i(p, g_i(u)a).$$

A tedy pravá akce je ve skutečnosti definována nezávisle na lokálních trivializacích (využili jsme komutativnosti pravého a levého násobení na G). Celkem dostáváme zobrazení $P \times G \to P$, $(u, a) \mapsto ua = R_a u$, s následujícími vlastnostmi:

(a) Je *tranzitivní* na $\pi^{-1}(p) = G_p \simeq G$, neboť pravá akce G na G prostřednictvím pravého násobení je tranzitivní. Podle definice tedy pro každé $u_1, u_2 \in \pi^{-1}(p)$ existuje $a \in G$ tak, že $u_1 = u_2 a$. Potom je-li $\pi(u) = p$, lze zkonstruovat celé vlákno jako $\pi^{-1}(p) = \{ua \mid a \in G\}$.

(b) Je *volná*, tj. je-li $ua = u$ pro nějaké $u \in P$, pak $a = e \in G$. Skutečně, nechť $u = \phi_i(p, g_i)$ a předpokládejme $ua = u$. Potom $\phi_i(p, g_i a) = \phi_i(p, g_i)a = ua = u = \phi_i(p, g_i)$. Protože ϕ_i je bijekce, musí platit $g_i a = g_i$, tj. $a = e$.

Speciálně si všimněme, že z definice pravé akce vyplývá platnost vztahu

$$\pi(ua) = \pi(u).$$

Poznámka (Kanonická lokální trivializace). Nechť $U_i \subset M$ a s_i je lokální řez na U_i. Zavedeme speciální lokální trivializaci $\phi_i : U_i \times G \to \pi^{-1}(U_i)$ následujícím způsobem. Zřejmě pro každé $u \in \pi^{-1}(p)$, $p \in U_i$, existuje právě jedno $g_u \in G$ tak, že $u = s_i(p)g_u$. Potom definujeme ϕ_i vztahem

$$\phi_i^{-1}(u) := (p, g_u).$$

Takto definovaná lokální trivializace se nazývá *kanonická lokální trivializace.* Lze si všimnout, že podle definice lze psát

$$s_i(p) = \phi_i(p, e),$$
$$\phi_i(p, g) = \phi_i(p, e)g = s_i(p)g.$$

Je-li $p \in U_i \cap U_j$, potom prvky $s_i(p)$ a $s_j(p)$ jsou vázány přechodovými funkcemi $t_{ij}(p)$

$$s_i(p) = \phi_i(p, e) = \phi_j(p, t_{ji}(p)e) = \phi_j(p, e)t_{ji}(p) = s_j(p)t_{ji}(p).$$

V dalším textu zavedeme pojem *konexe* na hlavní fibraci P. Tento pojem lze zavést několika ekvivalentními způsoby. My se přidržíme čistě geometrického pojetí podle [34], které je založeno na rozkladu tečného prostoru $T_u P$ na vertikální a horizontální podprostory. Následně zavedeme také zvláštní 1-formu s hodnotami v $\mathfrak{g}$ (tzv. *1-forma konexe*) a ukážeme, že to je ekvivalentní způsob zavedení konexe na P.

Definice 2.46. Nechť $P(M,G)$ je hlavní fibrace, $u \in P(M,G)$ a G_p je vlákno nad $p = \pi(u)$. Potom **vertikální podprostor** V_uP je podprostor v T_uP, který je tečný ke G_p v bodě u. **Horizontálním podprostorem** H_uP rozumíme libovolný doplněk V_uP do T_uP.

Poznámka. Vertikální podprostor V_uP je v každé fibraci kanonicky díky projekci π. Jedná se vlastně o množinu $\ker \pi_{*u} \subset T_uP$.

Poznámka. Podívejme se na možnou konstrukci V_uP. Buď $A \in \mathfrak{g}$. Potom pomocí pravé akce G

$$R_{\exp(tA)}u = u \exp tA$$

je křivka v P procházející bodem u. Vzhledem k tomu, že $\pi(u) = \pi(u \exp tA) = p$, leží tato křivka v G_p. Definujeme vektor $A^{\#}|_u \in T_uP$ vztahem

$$A^{\#}|_u(f) = A^{\#}f(u) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(u \exp tA)|_{t=0},$$

pro všechny $f \in \mathcal{C}^{\infty}(P)$. Z definice je $A^{\#}|_u$ tečný k G_p a tedy leží v V_uP. Máme-li bázi $\{T_i\}$ v $\mathfrak{g}$, pak $V_uP = \mathrm{span}\{T_i^{\#}|_u\}$.

Provedeme-li přiřazení $A \mapsto A^{\#}|_u$ v každém bodě $u \in P$, dostaneme vektorové pole $A^{\#}$ na P, které se nazývá *fundamentální vektorové pole* generované A. Tím definujeme izomorfismus vektorových prostorů $\sharp : \mathfrak{g} \to \sharp(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{X}(P)$ daný $A \mapsto A^{\#}$. Lze ukázat, že zobrazení $\sharp$ zachovává i strukturu Lieovy algebry, tj. platí: $[A^{\#}, B^{\#}] = [A,B]^{\#}$.

Definice 2.47. Nechť $P(M,G)$ je hlavní fibrace. Řekneme, že na P je zavedena **konexe** právě tehdy, když máme pro každé $u \in P$ dán jednoznačný rozklad tečného prostoru T_uP na horizontální a vertikální podprostory H_uP a V_uP takový, že platí

(i) $T_uP = H_uP \oplus V_uP$.

(ii) Každé hladké vektorové pole X na P lze rozdělit na součet dvou hladkých vektorových polí X^H a X^V, jejichž hodnoty v bodě u leží postupně v H_uP a V_uP pro každé $u \in P$.

(iii) Pro libovolné $u \in P$ a $g \in G$ platí: $H_{ug}P = R_{g*}H_uP$.

Poznámka. Z poslední vlastnosti plyne, že horizontální podprostory H_uP a $H_{ug}P$ nad stejným vláknem spolu souvisí prostřednictvím lineárního zobrazení R_{g*} indukovaného pravou akcí. Lze říci, že podprostor H_uP generuje všechny horizontální podprostory nad stejným vláknem.

Definice 2.48. 1-forma konexe $\omega \in \mathfrak{g} \otimes T^*P$ je projekce T_uP na vertikální podprostor $V_uP \simeq \mathfrak{g}$ podél podprostoru H_uP.

Poznámka. Projekční vlastnost formy ω lze vyjádřit

(a) $\omega(A^{\#}) = A, \qquad A \in \mathfrak{g}$,

(b) $R_g^*\omega = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\omega$, tj. pro $X \in T_uP$ platí $R_g^*\omega(X) = \omega(R_{g*}X) = g^{-1}\omega(X)g$.

Poznámka. Přesvědčíme se, že zavedení 1-formy konexe je ekvivalentní způsob, jak zavést konexi na P. Je zřejmé, že máme-li zavedenu konexi, pak lze zavést 1-formu konexe podle uvedené definice. Předpokládejme naopak, že máme zavedenu 1-formu konexe ω s hodnotami v $\mathfrak{g}$ s výše uvedenými dvěma vlastnostmi. Horizontální podprostor H_uP definujeme jako jádro zobrazení ω

$$H_uP := \{X \in T_uP \mid \omega(X) = 0\}.$$

Vezmeme-li nyní $X \in H_uP$, potom $R_{g*}X \in T_{ug}P$, ale navíc

$$\omega(R_{g*}X) = R_g^*\omega(X) = g^{-1}\omega(X)g = 0,$$

neboť $\omega(X) = 0$. Vidíme tedy, že $R_{g*}X \in H_{ug}P$. Vzhledem k tomu, že zobrazení R_{g*} je invertibilní platí také, že pro každý vektor $Y \in H_{ug}P$ existuje nějaký vektor $X \in H_uP$ tak, že $Y = R_{g*}X$. Celkem dostáváme, že výše definované podprostory H_uP splňují vztah

$$R_{g*}H_uP = H_{ug}P$$

a oba způsoby zavedení konexe jsou ekvivalentní.

1-forma konexe ω, zavedená v předchozí definici, se v literatuře označuje také jako *Ehresmannova konexe.*

Poznámka. Mějme hladkou varietu M. *Vnější derivace* se zavádí jako zobrazení $\mathrm{d} : \Omega^r(M) \to \Omega^{r+1}(M)$, kde $\Omega^r(M)$ je prostor všech r-forem na M, tj. zobrazení

$$\eta : \bigwedge_{r\text{-krát}} T\,M \to \mathbb{R}.$$

Tuto operaci chceme nyní zobecnit tak, abychom mohli derivovat také r-formy s hodnotami v nějakém vektorovém prostoru V. Předpokládejme dále, že pracujeme na hlavní fibraci $P(M, G)$. Jedná se nám tedy o derivaci zobrazení $\mu \in V \otimes \Omega^r(P)$

$$\mu : \bigwedge_{r\text{-krát}} T\,P \to V,$$

kde V je vektorový prostor, $\dim V = k$. Nejobecnější tvar formy μ je zřejmě

$$\mu = e_\alpha \otimes \mu^\alpha,$$

kde $(e_\alpha)_{\alpha=1}^k$ je báze prostoru V a $\mu^\alpha \in \Omega^r(P)$ pro $\alpha = 1, \ldots, k$.

Definice 2.49. Nechť $P(M, G)$ je hlavní fibrace, V je vektorový prostor. Potom **vnější derivací r-formy s hodnotami ve** V rozumíme zobrazení

$$\mathrm{d}_P : V \otimes \Omega^r(P) \to V \otimes \Omega^{r+1}(P)$$

dané vztahem

$$\mathrm{d}_P\mu := e_\alpha \otimes (\mathrm{d}\mu^\alpha), \qquad \forall \mu \in V \otimes \Omega^r(P),$$

kde $\mu := e_\alpha \otimes \mu^\alpha$, $(e_\alpha)_{\alpha=1}^k$ je báze V, $\mu^\alpha \in \Omega^r(P)$ pro $\alpha = 1, \ldots, k$.

Poznámka. Speciálně pro $G = \{e\}$ je $M \simeq P(M, G)$ a operátor d_P z předchozí definice je vlastně vnější derivací na $V \otimes \Omega^r(M)$.

Poznámka (Lokální tvar 1-formy konexe). Mějme hlavní fibraci $P(M, G)$. Nechť $\{U_i\}$ je otevřené pokrytí M a σ_i je lokální řez definovaný na každém U_i. Máme-li na P definovánu konexi ω, lze zavést lokální 1-formu $\mathcal{A}_i$ s hodnotami v $\mathfrak{g}$, definovanou na U_i vztahem

$$\mathcal{A}_i := \sigma_i^* \omega \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(U_i). \tag{2.2}$$

Postupovat lze také obráceně. Mějme na každém U_i dánu 1-formu $\mathcal{A}_i$ s hodnotami v $\mathfrak{g}$ a σ_i nechť je lokální řez na U_i. V případě, že formy $\mathcal{A}_i$ jsou navzájem kompatibilní, je možno zrekonstruovat 1-formu konexe ω, která splňuje vztah (2.2). Hledaná 1-forma má lokálně tvar

$$\omega_i := g_i^{-1} \pi^* \mathcal{A}_i g_i + g_i^{-1} \mathrm{d}_P g_i, \tag{2.3}$$

kde $g_i : \pi^{-1}(U_i) \to G$ jsou zobrazení dané kanonickou lokální trivializací definovanou vztahem $\phi_i^{-1}(u) := (p, g_i(u))$, tj. $g_i(u) := \sigma_i(p)^{-1} u$, kde $p = \pi(u) \in U_i$.

Pro ilustraci vztahu (2.3) se přesvědčíme, že platí $\sigma_i^* \omega_i = \mathcal{A}_i$. Nechť $X \in T_p M$ libovolné, $p \in U_i$. Zřejmě $\sigma_{i*} X \in T_{\sigma_i(p)} P$ a navíc vzhledem k definici g_i dostáváme $g_i(\sigma_i(p)) = e$ pro každé $p \in U_i$. Z definice řezu rovněž vyplývá $\pi_* \sigma_{i*} = \mathrm{id}_{T_p M}$ a dále $\mathrm{d}_P g_i(\sigma_{i*} X) = 0$, neboť $g_i = e$ podél křivky $\sigma_i \circ \varphi$, kde φ je libovolná křivka v U_i. Potom

$$\begin{aligned} \sigma_i^* \omega_i(X) = \omega_i(\sigma_{i*} X) &= \pi^* \mathcal{A}_i(\sigma_{i*} X) + \mathrm{d}_P g_i(\sigma_{i*} X) \\ &= \mathcal{A}_i(\phi_* \sigma_{i*} X) + \mathrm{d}_P g_i(\sigma_{i*} X) \\ &= \mathcal{A}_i(X). \end{aligned}$$

K ověření toho, že výše definované formy ω_i jsou lokálním tvarem globálně definované 1-formy konexe ω, bychom dále museli ověřit splnění definičních axiomů a jednoznačnost definice ω na P (tj. jednoznačnost rozkladu $T_u P = H_u P \oplus V_u P$). Globální 1-forma ω potom splňuje vztah $\omega|_{U_i} = \omega_i$. Jednoznačnost je zřejmě dána splněním podmínky $\omega_i = \omega_j$ na každém $U_i \cap U_j$, kterou lze v jazyce forem $\mathcal{A}_i$ zapsat ve tvaru

$$\mathcal{A}_j = t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} \mathrm{d} t_{ij}.$$

Obecně vzato, formy $\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega$ existují pouze lokálně, neboť netriviální[4] hlavní fibrace nepřipouštějí existenci globálních řezů. V kalibračních teoriích nazýváme formy $\mathcal{A}_i$ *kalibračními potenciály* (také *Yangovy-Millsovy potenciály*).

Připomeňme, že konexe na hlavní fibraci $P(M, G)$ nám dává jednoznačný rozklad $T_u P = H_u P \oplus V_u P$ a tedy také každý vektor $X \in T_u P$ lze jednoznačně napsat jako součet $X = X^H + X^V$, kde $X^H \in H_u P$ a $X^V \in V_u P$. Využijeme nyní 1-formy konexe k zavedení pojmu *křivosti na hlavní fibraci.*

Definice 2.50. Buď $P(M, G)$ hlavní fibrace s konexí a V vektorový prostor, $\dim V = k$. Potom **kovariantní derivace** je operátor $D : V \otimes \Omega^r(P) \to V \otimes \Omega^{r+1}(P)$ definovaný vztahem

$$(D\mu)(X_1, \ldots, X_{r+1}) := (\mathrm{d}_P \mu)(X_1^H, \ldots, X_{r+1}^H),$$

pro všechny $\mu \in V \otimes \Omega^r(P)$, $u \in P$ a $X_1, \ldots, X_{r+1} \in T_u P$.

Definice 2.51. Buď $P(M, G)$ hlavní fibrace, ω 1-forma konexe a D je kovariantní derivace. Potom 2-forma $\Omega := D\omega \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^2(P)$ se nazývá **2-forma křivosti**.

[4] Tj. fibrace nemající globálně strukturu kartézského součinu.

Věta 2.52. *Nechť $X, Y \in T_uP$. Potom formy Ω a ω splňují* ***Cartanovu strukturní rovnici***

$$\Omega(X,Y) = \mathrm{d}_P\omega(X,Y) + [\omega(X), \omega(Y)],$$

což také zapisujeme ve tvaru

$$\Omega = \mathrm{d}_P\omega + \omega \wedge \omega.$$

Poznámka (Lokální tvar 2-formy křivosti). Nechť $P(M,G)$ je hlavní fibrace, $U \subset M$ otevřená a σ je lokální řez na U. V analogii k 1-formě konexe zavedeme lokální tvar 2-formy křivosti vztahem

$$\mathcal{F} := \sigma^*\Omega.$$

Formu $\mathcal{F}$ lze také vyjádřit pomocí kalibračního potenciálu $\mathcal{A} = \sigma^*\omega$ jako

$$\mathcal{F} = \mathrm{d}\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}, \tag{2.4}$$

kde d značí vnější derivaci na $\mathfrak{g} \otimes \Omega^r(M)$ a

$$\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} := \frac{1}{2}[\mathcal{A}, \mathcal{A}] := \frac{1}{2}[T_\alpha, T_\beta] \otimes \eta^\alpha \wedge \eta^\beta$$

pro $\mathcal{A} := T_\alpha \otimes \eta^\alpha$, (T_α) je báze $\mathfrak{g}$ a $\eta^\alpha \in \Omega^1(U)$. Vztah (2.4) snadno dokážeme uvědomíme-li si, že $\sigma^*\mathrm{d}_P\omega = \mathrm{d}\sigma^*\omega$ a $\sigma^*(\zeta \wedge \eta) = \sigma^*\zeta \wedge \sigma^*\eta$. Potom totiž

$$\mathcal{F} = \sigma^*(\mathrm{d}_P\omega + \omega \wedge \omega) = \mathrm{d}\sigma^*\omega + \sigma^*\omega \wedge \sigma^*\omega = \mathrm{d}\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}.$$

Na vektorech z TM má $\mathcal{F}$ tvar

$$\mathcal{F}(X,Y) = \mathrm{d}\mathcal{A}(X,Y) + [\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y)],$$

kde jsme využili rovnosti

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}, \mathcal{A}](X,Y) &= [T_\alpha, T_\beta] \otimes (\eta^\alpha \wedge \eta^\beta)(X,Y) \\
&= [T_\alpha, T_\beta]\Big(\eta^\alpha(X)\eta^\beta(Y) - \eta^\alpha(Y)\eta^\beta(X)\Big) \\
&= [\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y)] - [\mathcal{A}(Y), \mathcal{A}(X)] \\
&= 2[\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y)].
\end{aligned}$$

Nechť x^μ jsou souřadnice na U. Potom kalibrační potenciál lze zapsat ve tvaru $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu \mathrm{d}x^\mu$ a pro $\mathcal{F}$ můžeme psát

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\nu}\ \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu.$$

Dosadíme-li nyní za $\mathcal{F}$ a $\mathcal{A}$ do (2.4), dostaneme

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathcal{A}_\nu - \partial_\nu\mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]. \tag{2.5}$$

Nechť (T_α) je báze algebry $\mathfrak{g}$. Vzhledem k tomu, že funkce $\mathcal{A}_\mu$ a $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ mají hodnoty v $\mathfrak{g}$, lze je vyjádřit ve zvolené bázi jako

$$\mathcal{A}_\mu = {A_\mu}^\alpha T_\alpha, \qquad \mathcal{F}_{\mu\nu} = {F_{\mu\nu}}^\alpha T_\alpha.$$

To nám pak umožňuje psát rovnost ve (2.5) tvaru

$${F_{\mu\nu}}^\alpha = \partial_\mu {A_\nu}^\alpha - \partial_\nu {A_\mu}^\alpha + {c_{\beta\gamma}}^\alpha {A_\mu}^\beta {A_\nu}^\gamma, \tag{2.6}$$

kde ${c_{\beta\gamma}}^\alpha$ jsou strukturní konstanty algebry $\mathfrak{g}$ dané vztahem $[T_\alpha, T_\beta] = {c_{\alpha\beta}}^\gamma T_\gamma$.

Poznámka. Řekneme, že kalibrační potenciál $\mathcal{A}$ je *čistá kalibrace*, právě když má tvar $\mathcal{A} = g^{-1}\mathrm{d}g$. Lze ukázat, že je-li $\mathcal{A}$ čistá kalibrace, pak $\mathcal{F}$ je nula. Naopak také platí, že je-li $\mathcal{F} = 0$ na U, pak kalibrační potenciál lze lokálně vyjádřit ve tvaru čisté kalibrace $\mathcal{A} = g^{-1}\mathrm{d}g$.

Poznámka (Bianchiho identita). Formy ω a Ω mají hodnoty v algebře $\mathfrak{g}$. Zvolíme-li v $\mathfrak{g}$ bázi (T_α), můžeme psát $\omega = \omega^\alpha T_\alpha$ a $\Omega = \Omega^\alpha T_\alpha$, kde $\omega_\alpha \in \Omega^1(P)$ a $\Omega^\alpha \in \Omega^2(P)$. Cartanova strukturní rovnice $\Omega = \mathrm{d}_P\omega + \omega \wedge \omega$ pak přejde na tvar

$$\Omega^\alpha = \mathrm{d}_P\omega^\alpha + c_{\beta\gamma}{}^\alpha\omega^\beta \wedge \omega^\gamma.$$

Potom aplikací vnější derivace d_P ihned dostáváme

$$\mathrm{d}_P\Omega^\alpha = c_{\beta\gamma}{}^\alpha\mathrm{d}_P\omega^\beta \wedge \omega^\gamma - c_{\beta\gamma}{}^\alpha\omega^\beta \wedge \mathrm{d}_P\omega^\gamma. \tag{2.7}$$

Pro kovariantní derivaci formy Ω pak lze s ohledem na předchozí rovnost psát

$$D\Omega(X, Y, Z) = \mathrm{d}_P\Omega(X^H, Y^H, Z^H) = 0, \qquad \forall u \in P, \forall X, Y, Z \in T_uP$$

neboť $\omega(X) = 0$ pro každý horizontální vektor X. Tím jsme dokázali *Bianchiho identitu*

$$D\Omega = 0. \tag{2.8}$$

Lokální tvar Bianchiho identity lze získat aplikací pullbacku σ^* na rovnici (2.7) a využitím identit $\sigma^*\mathrm{d}_P\Omega = \mathrm{d}\sigma^*\Omega = \mathrm{d}\mathcal{F}$ a $\sigma^*\mathrm{d}_P\omega = \mathrm{d}\sigma^*\omega = \mathrm{d}\mathcal{A}$. Dostaneme

$$\mathrm{d}\mathcal{F} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{F} - \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} = 0.$$

2.3 σ-modely

Pojmem σ-model označujeme určitou klasickou, resp. kvantovou, teorii pole (viz dále). Pro zajímavost uveďme, že „σ“ v názvu „σ-model“ pochází z 60. let 20. století, kdy se teoretičtí fyzici mimo jiné zabývali popisem hypotetických tzv. σ-částic. S jejich teorií přišel *Murray Gell-Mann* a říkalo se jí právě σ-model. Takový σ-model byla vlastně „obyčejná“ klasická teorie pole, která popisovala jistou dynamiku polí definovaných na našem prostoročasu s hodnotami v nějakém lineárním prostoru (*lineární* σ-modely). Jako zobecnění takového lineárního modelu byl později zaveden *nelineární* σ-model, kde příslušná pole měla hodnoty v nelineární varietě.

Také strunové teorie lze popisovat prostřednictvím jazyka σ-modelů. Konkrétně jde o dvourozměrné nelineární σ-modely. Je tedy vhodné zavést obecně pojem σ-modelu, což provedeme podle [22].

Definice 2.53. Buďte (M, γ) a (N, g) (pseudo)-riemannovské variety, kde γ a g jsou příslušné metrické tenzory a nechť $\dim M = m \in \mathbb{N}$ a $\dim N = n \in \mathbb{N}$. Potom **$m$-rozměrným σ-modelem** nazveme systém, jehož dynamika je dána akcí[5]

$$S(\phi; \gamma, g) = \frac{1}{2}\int \|\mathrm{d}\phi\|^2 \,\mathrm{dvol}\,(M) \tag{2.9}$$

$$= \frac{1}{2}\int \gamma^{\alpha\beta}(\xi)\; g_{ij}(\phi(\xi))\frac{\partial\phi^i(\xi)}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial\phi^j(\xi)}{\partial\xi^\beta}\;\sqrt{|\gamma|}\;\mathrm{d}\xi^1\cdots\mathrm{d}\xi^m, \tag{2.10}$$

[5] Integrace je prováděna na určité množině $\Omega \subset M$, nicméně vzhledem k tomu, že tato množina nebude hrát v našich úvahách žádnou roli, nebudeme ji v notaci uvádět. Je vhodné uvést, že budeme předpokládat takové okrajové podmínky, které nám později, při hledání polních rovnic, umožní využít metody per partes s vymizením hraničních členů.

kde klademe

$$
\begin{aligned}
|\gamma| &:= |\det(\gamma_{\alpha\beta})|, \\
\mathrm{dvol}\,(M) &:= \sqrt{|\gamma|}\ \mathrm{d}\xi^1 \cdots \mathrm{d}\xi^m, \\
\|\mathrm{d}\phi\|^2 &:= \gamma^{\alpha\beta}(\xi)\ g_{ij}\big(\phi(\xi)\big)\frac{\partial\phi^i(\xi)}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial\phi^j(\xi)}{\partial\xi^\beta},
\end{aligned}
$$

a ϕ^i jsou zobrazení variety M do variety N. Varietu M nazveme **bázovou** a varietu N **cílovou**.

Odvoďme nyní *Eulerovy-Lagrangeovy rovnice* pro obecný σ-model. Uvažme funkcionál

$$
S(\phi) = \int F\Big(\xi, \phi(\xi), \mathrm{d}\phi(\xi)\Big)\ \mathrm{d}^m\xi
$$

a variace ve tvaru

$$
\phi(\xi) \mapsto \phi(\xi) + \epsilon\delta\phi(\xi),
$$

kde ϵ je parametr a $\delta\phi(\xi)$ je variace ϕ v bodě ξ. Potom klademe

$$
\delta S(\phi)(\delta\phi) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\int F\Big(\xi, \phi(\xi) + \epsilon\delta\phi(\xi), \mathrm{d}\big(\phi(\xi) + \epsilon\delta\phi(\xi)\big)\Big)\mathrm{d}^m\xi\Big|_{\epsilon=0}.
$$

Předpokládejme, že pro variaci $\delta\phi$ platí

$$
\delta S(\phi)(\delta\phi) = 0.
$$

Potom

$$
\begin{aligned}
\delta S(\phi)(\delta\phi) &= \int\left(\frac{\partial F\big(\xi,\phi(\xi),\mathrm{d}\phi(\xi)\big)}{\partial\phi^l}\ \delta\phi^l(\xi) + \frac{\partial F\big(\xi,\phi(\xi),\mathrm{d}\phi(\xi)\big)}{\partial\phi^k_{,\alpha}}\ \frac{\partial(\delta\phi^k(\xi))}{\partial\xi^\alpha}\right)\mathrm{d}^m\xi \\
&= \int\left(\frac{\partial F\big(\xi,\phi(\xi),\mathrm{d}\phi(\xi)\big)}{\partial\phi^l} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi^\alpha}\frac{\partial F\big(\xi,\phi(\xi),\mathrm{d}\phi(\xi)\big)}{\partial\phi^l_{,\alpha}}\right)\ \delta\phi^l(\xi)\ \mathrm{d}^m\xi \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

kde jsme při integraci využili metodu *per partes* a předpokládali, že hraniční členy vymizí (díky okrajovým podmínkám $\delta\phi = 0$ na hranici). Mimo to jsme označili[6] $\phi^l_{,\alpha} := \partial\phi^l/\partial\xi^\alpha$.

Nechť ϕ extremalizuje akci S ve smyslu, že vztah $\delta S(\phi)(\delta\phi) = 0$ platí pro všechny variace $\delta\phi$ splňující příslušnou hraniční podmínku. Dostaneme

$$
\frac{\partial F\big(\xi,\phi(\xi),\mathrm{d}\phi(\xi)\big)}{\partial\phi^l} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi^\alpha}\frac{\partial F\big(\xi,\phi(\xi),\mathrm{d}\phi(\xi)\big)}{\partial\phi^l_{,\alpha}} = 0,
$$

což je hledaná Eulerova-Lagrangeova rovnice.

Chceme-li však odvodit pohybové rovnice geometricky invariantním způsobem, je třeba poněkud pozměnit předchozí postup. Všimněme si, že míra $\mathrm{d}^m\xi$ není geometricky invariantní. Přirozenější je využít objemovou formu $\mathrm{dvol}\,(M)$. Budeme tedy uvažovat akci ve tvaru

$$
S(\phi) = \int G\Big(\xi, \phi(\xi), \mathrm{d}\phi(\xi)\Big)\ \sqrt{|\gamma|}\ \mathrm{d}^m\xi.
$$

[6] Takto zavedené značení je v literatuře běžné, proto jej budeme bez dalšího podle potřeby používat.

Analogickým postupem potom dostáváme

$$\begin{aligned}
\delta S(\phi)(\delta\phi) &= \int \left(\frac{\partial G\big(\xi,\phi(\xi),\mathrm{d}\phi(\xi)\big)}{\partial\phi^j}\,\delta\phi^j(\xi) + \frac{\partial G\big(\xi,\phi(\xi),\mathrm{d}\phi(\xi)\big)}{\partial\phi^k_{,\alpha}}\,\frac{\partial(\delta\phi^k(\xi))}{\partial\xi^\alpha} \right) \sqrt{|\gamma|}\;\mathrm{d}^m\xi \\
&= \int \left(\frac{\partial G\big(\xi,\phi(\xi),\mathrm{d}\phi(\xi)\big)}{\partial\phi^j} - \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi^\alpha}\left[\sqrt{|\gamma|}\frac{\partial G\big(\xi,\phi(\xi),\mathrm{d}\phi(\xi)\big)}{\partial\phi^j_{,\alpha}}\right]\right) \delta\phi^j(\xi)\;\sqrt{|\gamma|}\;\mathrm{d}^m\xi \\
&= 0
\end{aligned}$$

a příslušné pohybové rovnice tedy mají tvar

$$\frac{\partial G\big(\xi,\phi(\xi),\mathrm{d}\phi(\xi)\big)}{\partial\phi^j} - \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi^\alpha}\left[\sqrt{|\gamma|}\frac{\partial G\big(\xi,\phi(\xi),\mathrm{d}\phi(\xi)\big)}{\partial\phi^j_{,\alpha}}\right] = 0.$$

Pro náš σ-model můžeme pohybové rovnice snadnými úpravami přepsat

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{\sqrt{|\gamma(\xi)|}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi^\alpha}\Big(\sqrt{|\gamma(\xi)|}\;\gamma^{\alpha\beta}(\xi)\;g_{li}\big(\phi(\xi)\big)\;\phi^i_{,\beta}(\xi)\Big) - \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}(\xi)\;g_{jk,l}\big(\phi(\xi)\big)\;\phi^j_{,\alpha}(\xi)\;\phi^k_{,\beta}(\xi) \\
&= \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi^\alpha}\Big(\sqrt{|\gamma|}\;\gamma^{\alpha\beta}\;\phi^i_{,\beta}\Big)\,g_{li} + \frac{1}{2}(2g_{lk,j} - g_{jk,l})\;\gamma^{\alpha\beta}\;\phi^j_{,\alpha}\;\phi^k_{,\beta} \\
&= \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi^\alpha}\Big(\sqrt{|\gamma|}\;\gamma^{\alpha\beta}\;\phi^i_{,\beta}\Big)\,g_{li} + \frac{1}{2}(g_{kl,j} + g_{lk,j} + \underbrace{g_{lj,k} - g_{lk,j}}_{\text{antisymetrické v }(j,k)} - g_{jk,l})\;\underbrace{\gamma^{\alpha\beta}\;\phi^j_{,\alpha}\;\phi^k_{,\beta}}_{\text{symetrické v }(j,k)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi^\alpha}\Big(\sqrt{|\gamma|}\;\gamma^{\alpha\beta}\;\phi^i_{,\beta}\Big)\,g_{li} + \gamma^{\alpha\beta}\;\Gamma^i{}_{jk}\;\phi^j_{,\alpha}\;\phi^k_{,\beta}\;g_{li}
\end{aligned}$$

do výsledného tvaru

$$0 = \frac{1}{\sqrt{|\gamma(\xi)|}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi^\alpha}\left(\sqrt{|\gamma(\xi)|}\;\gamma^{\alpha\beta}(\xi)\;\frac{\partial\phi^i(\xi)}{\partial\xi^\beta}\right) + \gamma^{\alpha\beta}(\xi)\;\Gamma^i{}_{jk}(\phi(\xi))\;\frac{\partial\phi^j(\xi)}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial\phi^k(\xi)}{\partial\xi^\beta}, \qquad (2.11)$$

kde $\Gamma^i{}_{jk} := \frac{1}{2}g^{il}(g_{lj,k} + g_{kl,j} - g_{jk,l})$ jsou *Christoffelovy symboly 2. druhu* na cílové varietě[7].

Hlavní náplní této práce je v zásadě studium T-duálních σ-modelů. Samotná T-dualita je tradičně spojována s existencí grupy izometrií cílových variet příslušných duálních modelů. Podívejme se tedy, co se rozumí pojmem izometrie.

Definice 2.54. Buďte (M,h), (N,g) dvě riemannovské variety a nechť je dán difeomorfismus $F : M \to N$. Řekneme, že zobrazení F je **izometrie** riemannovských variet M a N, právě když platí

$$F^*h = g.$$

Vezměme $v, w \in T_pM$. Potom $F_*v, F_*w \in T_{F(p)}N$ a platí

$$h(F_*v, F_*w) = (F^*h)(v,w) = g(v,w).$$

[7] Na cílové varietě tedy zavádíme tzv. *RLC* nebo *Levi-Civitovu konexi*, což je beztorzní konexe, která je kompatibilní s metrikou v tom smyslu, že zachovává skalární součin při paralelním přenosu.

Definice izometrie tedy říká, že se zachovává skalární součin, pročež se zachovává jak norma vektorů $\sqrt{g(v,v)}$, tak i úhel mezi vektory, který je definován vztahem

$$\cos\alpha := \frac{g(v,w)}{\sqrt{g(v,v)}\sqrt{g(w,w)}}.$$

Z definice úhlu mezi vektory je zřejmé, že pokud bychom se zajímali pouze o zachování úhlu mezi vektory, mohli bychom připustit i zobrazení splňující „jen“

$$F^*h = \rho g,$$

kde $\rho : M \to \mathbb{R}$ je libovolná funkce taková, že $\rho > 0$ na M. Takové transformace nazýváme *konformními.*

Snadno se lze přesvědčit, že konformní transformace na M tvoří grupu, v níž úlohu grupového násobení hraje skládání zobrazení. Dále lze ukázat, že množina izometrií je její podgrupou.

Speciálně se budeme zajímat o grupu izometrií variety (M,g) samotné. Jedná se tedy o difeomorfismy $F : M \to M$ vyhovující

$$F^*g = g.$$

Ukazuje se, že nemalou část těchto izometrií lze získat uplatněním infinitezimálního přístupu [12]. Získáme tak zřejmě pouze ty, k nimž lze dospět spojitou deformací identity. Celý postup spočívá v nalezení infinitezimálních izometrií $\Phi_\epsilon : M \to M$, které se liší od identity pouze nepatrně (v souřadnicích to znamená $x^i \mapsto x^i + \epsilon V^i(x)$). Jejich iterací pak získáme konečné izometrie. Výsledkem takového postupu je celá jednoparametrická grupa izometrií $\Phi_t : M \to M$. Zobrazení Φ_t lze interpretovat jako tok vektorového pole $V = V^i(x)\partial_i$.

Nechť $\Phi_t : M \to M$ je jednoparametrická grupa izometrií generovaná vektorovým polem $V = V^i(x)\partial_i$. Potom platí

$$\Phi_t^* g = g,$$

odkud

$$\mathcal{L}_V g := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Phi_t^* g = 0.$$

Vektorové pole V generující jednoparametrickou grupu izometrií Φ_t tedy splňuje rovnici

$$\mathcal{L}_V g = 0. \tag{2.12}$$

Tato rovnice se nazývá *Killingova.* Řešení této rovnice nazýváme *Killingova pole*, případně *Killingovy vektory.* Lze ukázat, že množina Killingových vektorů tvoří konečněrozměrnou podalgebru v Lieově algebře $\mathfrak{X}(M)$ [12].

Ve složkách má Killingova rovnice tvar

$$V^k\ g_{ij,k} + V^k{}_{,i}\ g_{kj} + V^k{}_{,j}\ g_{ik} = 0. \tag{2.13}$$

Uveďme krátký příklad ilustrující vztah izometrie cílové variety a symetrie akce daného σ-modelu. Předpokládejme, že bázovou varietou je Minkowského prostoročas (M,η). Potom akci (2.9) tohoto σ-modelu lze zapsat ve tvaru

$$S(\phi;\eta,g) = \int \eta^{\alpha\beta}\ g_{ij}(\phi)\ \phi^i{}_{,\alpha}\ \phi^j{}_{,\beta}\ \mathrm{d}^m\xi = \int g_{ij}(\phi)\ \phi^i{}_{,\alpha}\ \phi^{j,\alpha}\ \mathrm{d}^m\xi,$$

kde $\phi^{j,\alpha} = \eta^{\alpha\beta}\ \phi^j{}_{,\beta}$.

Nechť $V = V^k(\phi)\ \partial/\partial\phi^k$ je Killingův vektor na cílové varietě (N, g) (zde (ϕ^i) chápeme jako souřadnice na varietě N). Vektorové pole V nám generuje variace $\phi^i \mapsto \phi^i + \delta_V\phi^i := \phi^i + \epsilon V^i(\phi)$, přičemž metrika g je vůči této variaci invariantní, tj. platí

$$\delta_V g_{ij} = 0 \qquad \text{a} \qquad \delta_V\phi^i = \epsilon V^i(\phi).$$

Ukážeme, že tato izometrie je zároveň i symetrií akce uvažovaného σ-modelu:

$$\begin{aligned}
\delta_V S = \delta S(\phi)(\delta_V\phi^i) &= \int \mathrm{d}^m\xi\ \left(g_{ij,k}\phi^i{}_{,\alpha}\phi^{j,\alpha} + 2g_{ij}V^i{}_{,\alpha}\phi^{j,\alpha}\right) \\
&= \int \mathrm{d}^m\xi\ \left(g_{ij,k}V^k + 2g_{jk}V^k{}_{,i}\right)\phi^i{}_{,\alpha}\phi^{j,\alpha} \\
&= \int \mathrm{d}^m\xi\ \left[\left(g_{ij,k}V^k + g_{jk}V^k{}_{,i}\right)\phi^i{}_{,\alpha}\phi^{j,\alpha} + \underbrace{g_{jk}V^k{}_{,i}\ \eta^{\alpha\beta}\phi^i{}_{,\alpha}\phi^j{}_{,\beta}}_{\text{symetrické v } (i,j)}\right] \\
&= \int \mathrm{d}^m\xi\ \left(g_{ij,k}V^k + g_{jk}V^k{}_{,i} + g_{ik}V^k{}_{,j}\right)\phi^i{}_{,\alpha}\phi^{j,\alpha} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

kde poslední rovnost vyplývá právě z rovnice (2.13), kterou vektorové pole V splňuje. Podrobnější rozbor tohoto příkladu lze nalézt např. v [21].

Z hlediska strunové teorie jsou pro nás zajímavé 2-rozměrné nelineární σ-modely. Pohledem na akci (2.9) obecného σ-modelu zjistíme, že je definována nezávisle na výběru souřadnic. Můžeme tedy říci, že transformace souřadnic jsou symetriemi σ-modelu. Využijme nyní poznatku z diferenciální geometrie (viz např. [34]), totiž že každá 2-rozměrná (pseudo-)riemannovská varieta je *konformně plochá*[8]. Důkaz spočívá pouze v nalezení vhodných, tzv. *izotermických*, souřadnic. Speciálně pro 2-rozměrné σ-modely tedy můžeme konstatovat, že lokálně lze vždy vybrat konformně plochou metriku na bázovém prostoru[9]. To nám umožňuje zapisovat akci takového modelu v jednodušší formě.

S ohledem na definici (2.10) bychom mohli obecný dvourozměrný σ-model zapisovat ve tvaru

$$S = \int_W G_{ij}(x)\partial_+ x^i \partial_- x^j\ \mathrm{d}\xi^+ \wedge \mathrm{d}\xi^-,$$

kde bázová varieta W představuje strunovou světoplochu, na níž jsou zavedeny *souřadnice světelného kuželu*[10] (ξ^+, ξ^-) a G_{ij} představuje komponenty metrického tenzoru na cílové varietě v souřadnicích (x^i). Předpokládejme na okamžik, že máme model v uvedeném tvaru a že k němu existuje model duální v Poissonově-Lieově smyslu. Ukazuje se [4], že tento duální

[8] Řekneme, že (pseudo-)riemannovská varieta (M, g) je **konformně plochá**, právě když pro každý bod $p \in M$ existuje okolí $U_p \subset M$ a funkce $f \in \mathcal{C}^\infty(U_p)$ tak, že varieta $(U_p, \mathrm{e}^{2f} g|_{U_p})$ je plochá.

[9] Při konformní transformaci se nám totiž v akci S dvourozměrného σ-modelu vyskytne konformní faktor e^{2f} kvadraticky jak v čitateli, tak ve jmenovateli, důsledkem čehož se vykrátí. Dvourozměrný σ-model je konformně invariantní.

[10] Strunová světoplocha je vlastně dvourozměrný Minkowského prostoročas. Máme-li na něm zavedeny souřadnice (τ, σ), kde τ představuje časovou souřadnici a σ prostorovou, pak souřadnice světelného kuželu zavedeme vztahy $\xi^\pm = \frac{1}{2}(\tau \pm \sigma)$.

model obsahuje obecně také torzní člen, tj. má tvar

$$\tilde{S} = \int_W \Big(\tilde{G}_{ij}(y) + \tilde{B}_{ij}(y)\Big)\partial_+ y^i \partial_- y^j \, \mathrm{d}\xi^+ \wedge \mathrm{d}\xi^-,$$

kde $\tilde{G}_{ij}$ je symetrický tenzor (tj. metrický tenzor) a $\tilde{B}_{ij}$ je antisymetrický tenzor na nějaké duální cílové varietě $\tilde{M}[y^i]$. Je proto vhodné definici σ-modelu příslušným způsobem zobecnit.

Podle [24, 26], 2-rozměrný σ-model je polní teorie, k níž je kanonicky přiřazena metrika G_{ij} (symetrický tenzor) a 2-forma B_{ij} (antisymetrický tenzor) na nějaké cílové varietě $M[x^i]$. Akce takového σ-modelu má lokálně tvar

$$S = \int_W \Big(G_{ij}(x) + B_{ij}(x)\Big)\ \partial_+ x^i\ \partial_- x^j =: \int_W E_{ij}(x)\ \partial_+ x^i\ \partial_- x^j, \tag{2.14}$$

kde $W[\xi^+, \xi^-]$ je strunová světoplocha v souřadnicích světelného kuželu.

2.4 Poissonova-Lieova T-dualita

Duality hrají významnou úlohu ve strunových teoriích, kde se stávají nástrojem k rozkrytí jejich struktury, vztahů mezi jednotlivými teoriemi a umožňují lépe pochopit geometrii prostoročasu právě z pohledu strun. Ve strunové teorii se setkáváme se třemi hlavními typy dualit — *T-dualita*, *S-dualita* a *U-dualita*. V této práci se budeme zabývat pouze T-dualitou. T-dualita je vlastně symetrie mezi fyzikou velkých a malých rozměrů. S-dualita reprezentuje symetrie mezi režimy silné a slabé interakce, zatímco U-dualita je jakási „dualita dualit“, která dává do souvislosti T-dualitu a S-dualitu.

Poissonova-Lieova T-dualita [21, 27] je zobecněním pojmů abelovská i neabelovská T-dualita [4, 5, 9]. Samotná abelovská T-dualita byla v minulých letech intenzivně studována, důsledkem čehož jsou značné pokroky v jejím pochopení. V jazyce σ-modelů má abelovská T-dualita smysl *abelovské duality cílových prostorů*, o které hovoříme v případě, že pro daný σ-model existuje abelovská grupa izometrií jeho cílového prostoru. Ukázalo se však, že tato podmínka je značně restriktivní a významně tak omezuje třídu úloh, kde můžeme takové duality využít [24].

Ve studii [9] se objevila možnost zobecnění standardní abelovské T-duality na neabelovskou. K σ-modelu s globální neabelovskou grupou izometrií, byl nalezen neabelovský duál. Této neabelovské dualitě nicméně chyběly některé významné vlastnosti abelovské duality. Předně, grupa neabelovských izometrií duálního prostoru byla vždy menší. Chyběla také kanonická transformace, která by umožnila přejít zpět k původnímu modelu v případě, že by byl zadán pouze ten duální. Nebylo tedy jasné, v jakém smyslu vlastně oba modely duální jsou. V článku [27] autoři ukazují, že tyto modely jsou duální ve smyslu *Poissonovy-Lieovy T-duality*, a že struktura podmiňující T-dualitu je ve skutečnosti Drinfeldův double. Potom neabelovským analogem abelovského modulárního prostoru $O(d, d; \mathbb{Z})$ je množina všech maximálních izotropních rozkladů příslušného Drinfeldova doublu[11].

Dále popíšeme konstrukci páru duálních σ-modelů podle [24]. Tyto modely jsou ekvivalentní v tom smyslu, že mají ekvivalentní polní rovnice a stejnou symplektickou strukturu

[11]Pro úplnost poznamenejme, že na rozdíl od $O(d, d; \mathbb{Z})$, který reprezentuje globální vlastnosti abelovské duality, má množina rozkladů Drinfeldova doublu pouze lokální význam.

příslušných fázových prostorů. Nechť D je Drinfeldův double, $\mathfrak{d}$ je k němu příslušná Lieova algebra a nechť $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}$ je příslušný rozklad $\mathfrak{d}$ na dvě maximální izotropní podalgebry (vzhledem k symetrické bilineární nedegenerované invariantní formě $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Buďte $\mathcal{E}^+$ n-rozměrný podprostor $2n$-rozměrné algebry $\mathfrak{d}$ a $\mathcal{E}^-$ jeho ortogonální doplněk (vzhledem k $\langle \cdot, \cdot \rangle$) takové, že $\mathfrak{d} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$. Nechť podprostory $\mathcal{E}^\pm, \mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}}$ splňují

$$\mathcal{E}^\pm \cap \mathfrak{g} = \mathcal{E}^\pm \cap \tilde{\mathfrak{g}} = \{0\}. \tag{2.15}$$

Potom na základě těchto dat lze zkonstruovat pár duálních σ-modelů, jejichž cílovými prostory budou grupy G a $\tilde{G}$ (což jsou Lieovy grupy příslušné k algebrám $\mathfrak{g}$ a $\tilde{\mathfrak{g}}$). Uvažme zobrazení $l(\xi^+, \xi^-)$ ze strunové světoplochy $W[\xi^+, \xi^-]$ do D a polní rovnice ve tvaru

$$\langle \partial_\pm l \, l^{-1}, \mathcal{E}^\pm \rangle = 0, \tag{2.16}$$

kde výraz $\partial_\pm l \, l^{-1}$ má následující geometrickou interpretaci

$$\partial_\pm l \, l^{-1} := R_{l^{-1}*}(l_*(\partial_\pm)).$$

Jedná se tedy o pushforward tečného vektoru $\partial_\pm$ z TW do $T_e D \simeq \mathfrak{d}$. V dalším textu však budeme užívat stručnějšího značení $\partial_\pm l \, l^{-1}$.

Z literatury je známo, že na jistém okolí jednotky $e \in D$ existuje jednoznačný rozklad libovolného prvku z tohoto okolí na součin prvků z grup G a $\tilde{G}$, tj.

$$l(\xi^+, \xi^-) = g(\xi^+, \xi^-)\tilde{h}(\xi^+, \xi^-). \tag{2.17}$$

Po dosazení tohoto rozkladu do polní rovnice obdržíme po snadných úpravách

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \partial_\pm l \, l^{-1}, \mathcal{E}^\pm \rangle \\
&= \langle (\partial_\pm g \, \tilde{h} + g \partial_\pm \tilde{h}) \, \tilde{h}^{-1} g^{-1}, \mathcal{E}^\pm \rangle \\
&= \langle \partial_\pm g \, g^{-1} + g \partial_\pm \tilde{h} \, \tilde{h}^{-1} g^{-1}, \mathcal{E}^\pm \rangle \\
&= \langle g(g^{-1} \partial_\pm g + \partial_\pm \tilde{h} \, \tilde{h}^{-1}) g^{-1}, \mathcal{E}^\pm \rangle \\
&= \langle g^{-1} \partial_\pm g + \partial_\pm \tilde{h} \, \tilde{h}^{-1}, g^{-1} \mathcal{E}^\pm g \rangle,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

kde jsme využili invariantnost formy, tj. rovnost $\langle dXd^{-1}, dXd^{-1} \rangle = \langle X, Y \rangle$ pro $\forall d \in D$ a $\forall X, Y \in \mathfrak{d}$.

Na $\mathfrak{g}$ a $\tilde{\mathfrak{g}}$ lze zřejmě zavést vzájemně duální báze prostřednictvím vztahu

$$\langle T_a, \tilde{T}^b \rangle = \delta_a^b.$$

Předpokládejme dále, že

$$g^{-1} \mathcal{E}^+ g = \mathrm{span}\{T_a + E_{ab}(g) \tilde{T}^b \mid a = 1, \ldots, n\}, \tag{2.19}$$

$$g^{-1} \mathcal{E}^- g = \mathrm{span}\{T_a - E_{ba}(g) \tilde{T}^b \mid a = 1, \ldots, n\}. \tag{2.20}$$

Existenci bází prostorů $g^{-1} \mathcal{E}^\pm g$ v uvedeném tvaru lze ospravedlnit následující argumentací. Bazické vektory podprostoru $\mathcal{E}^+$ lze obecně zapsat ve tvaru

$$X_a = \alpha_a^b T_b + \beta_{ab} \tilde{T}^b, \qquad a = 1, \ldots, n$$

přitom matice (α_a^b) musí být regulární, neboť v opačném případě bychom mohli některý z bázových vektorů přičtením vhodné lineární kombinace ostatních vektorů upravit na tvar $X_{a_0} \mapsto Y_{a_0} = \gamma_{a_0 b}\tilde{T}^b$, což je spor s podmínkou (2.15). Obdobně lze dojít k závěru, že také matice (β_{ab}) je regulární. Po provedení analogické úvahy pro podprostor $\mathcal{E}^-$ lze konstatovat existenci jejich bází takových, že

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^+ &= \mathrm{span}\{T_a + E_{ab}(e)\tilde{T}^b \mid a = 1,\dots,n\},\\ \mathcal{E}^- &= \mathrm{span}\{T_a + F_{ab}(e)\tilde{T}^b \mid a = 1,\dots,n\}.\end{aligned}$$

Z ortogonality $\mathcal{E}^+$ a $\mathcal{E}^-$ okamžitě plyne $F_{ab}(e) = -E_{ba}(e)$. Vzhledem k tomu, že algebra $\mathfrak{g}$ je Ad_g-invariantní pro každé $g \in G$ dostáváme

$$\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\mathcal{E}^\pm \cap \mathfrak{g} = g^{-1}\mathcal{E}^\pm g \cap \mathfrak{g} = \{0\}.$$

Předpokládejme navíc[12], že i

$$\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\mathcal{E}^\pm \cap \tilde{\mathfrak{g}} = g^{-1}\mathcal{E}^\pm g \cap \tilde{\mathfrak{g}} = \{0\}.$$

Potom analogickou úvahou jako pro báze podprostorů $\mathcal{E}^\pm$ dospíváme k (2.19) a (2.20).

Označme $(\partial_\pm \tilde{h}\ \tilde{h}^{-1})_a := \langle \partial_\pm \tilde{h}\ \tilde{h}^{-1}, T_a\rangle$ a podobně též $(g^{-1}\partial_\pm g)^b := \langle g^{-1}\partial_\pm g, \tilde{T}^b\rangle$. Nyní dosaďme z (2.19) a (2.20) do (2.18)

$$\begin{aligned}0 &= \langle g^{-1}\partial_+ g + \partial_+\tilde{h}\ \tilde{h}^{-1}, T_a + E_{ab}(g)\tilde{T}^b\rangle\\ &= (\partial_+\tilde{h}\ \tilde{h}^{-1})_a + E_{ab}(g)(g^{-1}\partial_+ g)^b\\ 0 &= \langle g^{-1}\partial_- g + \partial_-\tilde{h}\ \tilde{h}^{-1}, T_a - E_{ba}(g)\tilde{T}^b\rangle\\ &= (\partial_-\tilde{h}\ \tilde{h}^{-1})_a - E_{ba}(g)(g^{-1}\partial_- g)^b\end{aligned}$$

a celkem tedy

$$-(\partial_+\tilde{h}\ \tilde{h}^{-1})_a = E_{ab}(g)(g^{-1}\partial_+ g)^b =: A_a^+(g), \tag{2.21a}$$
$$-(\partial_-\tilde{h}\ \tilde{h}^{-1})_a = -E_{ba}(g)(g^{-1}\partial_- g)^b =: A_a^-(g). \tag{2.21b}$$

Uvažme nyní formu $\theta \in \tilde{\mathfrak{g}} \otimes \Omega^1(\tilde{G})$ danou předpisem

$$\theta|_{\tilde{h}} := R_{\tilde{h}^{-1}*}.$$

Jedná se tedy o kanonickou 1-formu s hodnotami v $\tilde{\mathfrak{g}}$ na grupě $\tilde{G}$ a ta splňuje Maurerovu-Cartanovu rovnici

$$\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}[\theta \wedge \theta] = 0.$$

Označme $(\sigma_a)_{a=1}^n \subset \tilde{\mathfrak{g}}^*$ duální bázi k bázi $(\tilde{T}^b)_{b=1}^n$ a připomeňme si, že v důsledku nedegenerovanosti formy $\langle\cdot,\cdot\rangle$ platí $\tilde{\mathfrak{g}}^* \simeq \mathfrak{g}$, kde příslušný izomorfismus je $T_a \leftrightarrow \sigma_a$. Předpokládejme, že na $\tilde{G}$ máme zavedeny souřadnice $(x^1,\dots,x^n)$. Potom 1-formy σ_a mají lokálně tvar

$$\sigma_a := \sigma_{aj}(x)\ \mathrm{d}x^j$$

[12] Tento předpoklad není nikterak triviální a není důsledkem předchozích úvah. Jeho platnost závisí na okolí jednotky v D, na kterém máme rozklad $l = g\tilde{h}$, ale také přímo na tvaru matice $E(e)$.

a můžeme provést jejich pullback prostřednictvím zobrazení $\tilde{h} : W[\xi^+, \xi^-] \to \tilde{G}[x^1, \ldots, x^n]$, čímž obdržíme

$$\begin{aligned}\tilde{h}^*\sigma_a &= \left(\sigma_{aj}(\tilde{h}(\xi^+, \xi^-))\partial_+ x^j\right) \mathrm{d}\xi^+ + \left(\sigma_{aj}(\tilde{h}(\xi^+, \xi^-))\partial_- x^j\right) \mathrm{d}\xi^- \\ &=: (\tilde{h}^*\sigma_a)_+ \mathrm{d}\xi^+ + (\tilde{h}^*\sigma_a)_- \mathrm{d}\xi^-,\end{aligned}$$

kde jsme označili $(\tilde{h}^*\sigma_a)_+ := \tilde{h}^*\sigma_a(\partial_+)$ a $(\tilde{h}^*\sigma_a)_- := \tilde{h}^*\sigma_a(\partial_-)$ složky formy $\tilde{h}^*\sigma_a$. Vzhledem k definici kanonické 1-formy θ dostáváme

$$(\tilde{h}^*\sigma_a)_\pm = \tilde{h}^*\sigma_a(\partial_\pm) = \langle \tilde{h}^*\theta(\partial_\pm), T_a\rangle = (\partial_\pm \tilde{h}\ \tilde{h}^{-1})_a.$$

Potom tedy z Maurerovy-Cartanovy rovnice dostáváme

$$\begin{aligned}0 &= \mathrm{d}\theta(\partial_+\tilde{h}, \partial_-\tilde{h}) + \frac{1}{2}[\theta \wedge \theta](\partial_+\tilde{h}, \partial_-\tilde{h}) \\ &= \tilde{T}^a \otimes \mathrm{d}\sigma_a(\partial_+\tilde{h}, \partial_-\tilde{h}) + \frac{1}{2}[\tilde{T}^b, \tilde{T}^c] \otimes \sigma_b \wedge \sigma_c(\partial_+\tilde{h}, \partial_-\tilde{h}) \\ &= \tilde{T}^a \otimes \mathrm{d}(\tilde{h}^*\sigma_a)(\partial_+, \partial_-) + \frac{1}{2}[\tilde{T}^b, \tilde{T}^c] \otimes (\tilde{h}^*\sigma_b) \wedge (\tilde{h}^*\sigma_c)(\partial_+, \partial_-) \\ &= \tilde{T}^a \otimes \left[\partial_+(\tilde{h}^*\sigma_a)_- - \partial_-(\tilde{h}^*\sigma_a)_+\right] + \frac{1}{2}\tilde{c}^{bc}{}_a\tilde{T}^a \otimes \left[(\tilde{h}^*\sigma_b)_+(\tilde{h}^*\sigma_c)_- - (\tilde{h}^*\sigma_b)_-(\tilde{h}^*\sigma_c)_+\right] \\ &= \tilde{T}^a \otimes \left(\partial_+ A_a^-(g) - \partial_- A_a^+(g) - \tilde{c}^{bc}{}_a A_b^-(g) A_c^+(g)\right),\end{aligned}$$

kde jsme označili $\tilde{c}^{bc}{}_a$ strukturní konstanty algebry $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Celkem tedy dostáváme rovnice

$$\partial_+ A_a^-(g) - \partial_- A_a^+(g) - \tilde{c}^{bc}{}_a A_b^-(g) A_c^+(g) = 0, \qquad \forall a = 1, \ldots, n. \tag{2.22}$$

Přímým, ačkoliv poněkud zdlouhavým výpočtem lze ověřit, že tyto rovnice nejsou nic jiného, než polní rovnice pro lagrangián tvaru (připomeňme si definici výrazů $A_a^\pm(g)$ prostřednictvím vztahů (2.21))

$$\mathscr{L} = E_{ab}(g)(g^{-1}\partial_- g)^a (g^{-1}\partial_+ g)^b. \tag{2.23}$$

Kdybychom místo (2.17) použili rozkladu

$$l(\xi^+, \xi^-) = \tilde{g}(\xi^+, \xi^-)\ h(\xi^+, \xi^-), \qquad \tilde{g} \in \tilde{\mathfrak{g}}, h \in \mathfrak{g},$$

analogickým postupem bychom dospěli k duálnímu σ-modelu s lagrangiánem

$$\tilde{\mathscr{L}} = \tilde{E}^{ab}(\tilde{g})(\tilde{g}^{-1}\partial_- \tilde{g})_a (\tilde{g}^{-1}\partial_+ \tilde{g})_b.$$

Matice $\tilde{E}^{ab}(\tilde{g})$ je definována

$$\begin{aligned}\tilde{g}^{-1}\mathcal{E}^+\tilde{g} &= \mathrm{span}\{\tilde{T}^a + \tilde{E}^{ab}(\tilde{g})T_b \mid a = 1, \ldots, n\}, \\ \tilde{g}^{-1}\mathcal{E}^-\tilde{g} &= \mathrm{span}\{\tilde{T}^a - \tilde{E}^{ba}(\tilde{g})T_b \mid a = 1, \ldots, n\}.\end{aligned}$$

Nechť $g = e$ a $\tilde{g} = \tilde{e}$, potom dostáváme rovnost

$$\mathrm{span}\{\tilde{T}^a + \tilde{E}^{ab}(\tilde{e})T_b\}_{a=1}^n = \mathrm{span}\{T_a + E_{ab}(e)\tilde{T}^b\}_{a=1}^n,$$

odkud ihned vidíme[13] $E(e)\tilde{E}(\tilde{e}) = \tilde{E}(\tilde{e})E(e) = I$.

Explicitní závislost matice $E(g)$ na g získáme z

$$\begin{aligned} g^{-1}\mathcal{E}^+ g &= \mathrm{span}\{g^{-1}(T_a + E_{ab}(e)\tilde{T}^b)g \mid a = 1, \ldots, n\} \\ &= \mathrm{span}\{(a(g)_a{}^c + E_{ab}(e)b(g)^{bc})T_c + E_{ab}(e)d(g)^b{}_c\tilde{T}^c \mid a = 1, \ldots, n\}, \end{aligned}$$

kde jsme označili

$$\begin{aligned} a(g)_a{}^c T_c &:= g^{-1}T_a g, \\ b(g)^{bc}T_c + d(g)^b{}_c\tilde{T}^c &:= g^{-1}\tilde{T}^c g. \end{aligned}$$

Matice $E(g)$ se potom získá jako

$$E(g) = (a(g) + E(e)b(g))^{-1}E(e)d(g)$$

a obdobně získáme i matici duálního σ-modelu.

Existuje-li ještě jiný rozklad doublu D na dvojici maximálních izotropních podalgeber, řekněme $\mathfrak{k}$ a $\tilde{\mathfrak{k}}$, dostaneme tímto postupem další dvojici duálních σ-modelů s nějakými maticemi $E'(k)$ a $\tilde{E}'(\tilde{k})$. Tento nový pár duálních modelů má také stejný tvar rovnic pohybu (2.16) v Drinfeldově doublu jako původní pár. Množinu vzájemně ekvivalentních σ-modelů tedy zavádíme jako množinu Maninových trojic korespondujících k danému Drinfeldovu doublu.

Zabývejme se nyní otázkou, kdy k danému 2-rozměrnému σ-modelu s pravou volnou akcí grupy G na cílové varietě, lze zkonstruovat duální model (v Poissonově-Lieově smyslu) s nějakou duální grupou $\tilde{G}$. Východiskem našich úvah bude fakt, že nějaký σ-model může být neabelovským duálem i v případě, že nemá žádnou grupu izometrií. Z tohoto důvodu nebudeme předpokládat, že G je grupou izometrií cílové variety. Připomeňme si, že relevantní algebraickou strukturou neabelovské T-duality je Drinfeldův double. Podmínkou pro existenci duálu k danému σ-modelu není nutně existence grupy izometrií cílové variety, alebrž nějaká jiná struktura, která se jako grupa izometrií projevuje pouze ve speciálních případech. V jazyce σ-modelů je touto strukturou tzv. *Poissonova-Lieova symetrie* daného σ-modelu, kterou dále rozebereme.

Mějme tedy zadán 2-rozměrný σ-model (2.14), tj. model ve tvaru

$$S = \int \Big(G_{ij}(x) + B_{ij}(x)\Big)\ \partial_+ x^i\ \partial_- x^j = \int E_{ij}(x)\ \partial_+ x^i\ \partial_- x^j, \tag{2.14}$$

na světoploše W a s cílovou varietou $M[x^i]$. Předpokládejme, že máme grupu G s pravou, volnou akcí na cílové varietě. Infinitesimální akce G na M je daná homomorfismem Lieových algeber $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{X}(M)$. Speciálně tedy bázi $(T_a)_{a=1}^n$ v $\mathfrak{g}$ odpovídá soubor (levoinvariantních) vektorových polí $V_a(x) = V_a^i(x)\partial_i$ v $\mathfrak{X}(M)$. Tato vektorová pole splňují relace

$$[V_a, V_b] = c_{ab}{}^c\ V_c,$$

neboť jsou homomorfním obrazem polí $T_a, T_b \in \mathfrak{g}$. Čísla $c_{ab}{}^c$ jsou strukturní konstanty algebry $\mathfrak{g}$. Uvažme variace δx^i dané grupovou akcí ve tvaru

$$\delta x^i = \epsilon^a(\xi)V_a^i(x),$$

[13] I označuje jednotkovou matici.

a spočtěme variaci akce S vzhledem k δx^i (označíme $\mathrm{d}^2\xi := \mathrm{d}\xi^+ \wedge \mathrm{d}\xi^-$)

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int \mathrm{d}^2\xi \Big(\partial_+ x^i E_{ij,l}(x) \partial_- x^j \epsilon^a V_a^l + E_{ij}(x) \partial_+ (\epsilon^a V_a^i) \partial_- x^j + E_{ij}(x) \partial_+ x^i \partial_- (\epsilon^a V_a^j) \Big) \\
&= \int \mathrm{d}^2\xi \Big(\partial_+ x^i E_{ij,l}(x) \partial_- x^j \epsilon^a V_a^l + E_{ij}(x) \epsilon^a V_{a,l}^i \partial_+ x^l \partial_- x^j + E_{ij}(x) \epsilon^a V_{a,l}^j \partial_+ x^i \partial_- x^l \\
&\qquad + E_{ij}(x) V_a^i \partial_- x^j \partial_+ \epsilon^a + E_{ij}(x) V_a^j \partial_+ x^i \partial_- \epsilon^a \Big) \\
&= \int \mathrm{d}^2\xi \Big[\epsilon^a \partial_+ x^i (E_{ij,l} V_a^l + E_{lj} V_{a,i}^l + E_{il} V_{a,j}^l) \partial_- x^j + \partial_+ \epsilon^a V_a^i E_{ij} \partial_- x^j + \partial_- \epsilon^a \partial_+ x^i E_{ij} V_a^j \Big] \\
&= \int \mathrm{d}^2\xi \big[\epsilon^a \partial_+ x^i \ (\mathcal{L}_{V_a} E)_{ij} \ \partial_- x^j + \partial_+ \epsilon^a \ V_a^i \ E_{ij} \ \partial_- x^j + \partial_- \epsilon^a \ \partial_+ x^i \ E_{ij} \ V_a^j \big], \\
&= \int \mathrm{d}^2\xi \ \epsilon^a (\mathcal{L}_{V_a} E)_{ij} \ \partial_+ x^i \partial_- x^j + \int J_a \wedge \mathrm{d}\epsilon^a,
\end{aligned}$$

kde jsme položili $(\mathcal{L}_{V_a} E)_{ij} = (E_{ij,l} V_a^l + E_{lj} V_{a,i}^l + E_{il} V_{a,j}^l)$ a zavedli noetherovské 1-formy J_a na světoploše W

$$J_a := V_a^i(x) E_{ji}(x) \partial_+ x^j \mathrm{d}\xi^+ - V_a^i(x) E_{ij}(x) \partial_- x^j \mathrm{d}\xi^-.$$

S pomocí integrace per partes a za předpokladu vymizení hraničních členů lze ještě provést úpravu

$$\begin{aligned}
\int J_a \wedge \mathrm{d}\epsilon^a &= \int \mathrm{d}^2\xi \left(\partial_+ \epsilon^a \ V_a^i \ E_{ij} \ \partial_- x^j + \partial_- \epsilon^a \ \partial_+ x^i \ E_{ij} \ V_a^j \right) \\
&= - \int \mathrm{d}^2\xi \left(\partial_+ (V_a^i E_{ij} \partial_- x^j) + \partial_- (\partial_+ x^i E_{ij} V_a^j) \right) \epsilon^a \\
&= \int \epsilon^a \ \mathrm{d}J_a,
\end{aligned}$$

neboť platí: $\mathrm{d}J_a = - \Big(\partial_+ (V_a^i E_{ij} \partial_- x^j) + \partial_- (\partial_+ x^i E_{ij} V_a^j) \Big) \mathrm{d}\xi^+ \wedge \mathrm{d}\xi^-$.

Pokud G je grupou izometrií[14] cílové variety M, tj. splňuje rovnici

$$(\mathcal{L}_{V_a} E)_{ij} = 0,$$

dostáváme pro řešení z rovnice $\delta S = 0$ podmínku $\mathrm{d}J_a = 0$. To tedy znamená, že noetherovské 1-formy J_a jsou uzavřené na extremálních světoplochách.

Obecněji: buď G Lieova grupa a $\tilde{G}$ grupa k ní duální. Řekneme, že σ-model má **Poissonovu-Lieovu symetrii** vzhledem ke grupě $\tilde{G}$, pokud na extremálních plochách splňuje

$$\mathrm{d}J_a = \frac{1}{2} \tilde{c}^{bc}{}_a J_b \wedge J_c, \tag{2.24}$$

kde $\tilde{c}^{bc}{}_a$ jsou strukturní konstanty algebry $\tilde{\mathfrak{g}}$ příslušné k duální grupě $\tilde{G}$.

Na úrovni lagrangiánu σ-modelu lze podmínku (2.24) zapsat ve tvaru

$$(\mathcal{L}_{V_a} E)_{ij} = -\tilde{c}^{bc}{}_a V_b^m V_c^n E_{mj} E_{in}, \tag{2.25}$$

[14]Izometrie je nyní třeba chápat v zobecněném smyslu, tj. tak, že platí $(\mathcal{L}_{V_a} G)_{ij} = (\mathcal{L}_{V_a} B)_{ij} = 0$.

což snadno ověříme. Přímým dosazením totiž dostaneme

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\tilde{c}^{bc}{}_a J_b \wedge J_c &= -\frac{1}{2}\tilde{c}^{bc}{}_a\Big(V_b^m V_c^n E_{mj}E_{in}\partial_+ x^i\partial_- x^j - V_b^n V_c^m E_{jn}E_{mi}\partial_+ x^j\partial_- x^i\Big)\mathrm{d}\xi^+\wedge\mathrm{d}\xi^- \\
&= -\frac{1}{2}\tilde{c}^{bc}{}_a\Big(V_b^m V_c^n E_{mj}E_{in}\partial_+ x^i\partial_- x^j + V_b^m V_c^n E_{jn}E_{mi}\partial_+ x^j\partial_- x^i\Big)\mathrm{d}\xi^+\wedge\mathrm{d}\xi^- \\
&= -\tilde{c}^{bc}{}_a\Big(V_b^m V_c^n E_{mj}E_{in}\partial_+ x^i\partial_- x^j\Big)\mathrm{d}\xi^+\wedge\mathrm{d}\xi^- \\
&\overset{!}{=} (\mathcal{L}_{V_a}E)_{ij}\ \partial_+ x^i\partial_- x^j\mathrm{d}\xi^+\wedge\mathrm{d}\xi^-.
\end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int \mathrm{d}^2\xi\ \epsilon^a(\mathcal{L}_{V_a}E)_{ij}\ \partial_+ x^i\partial_- x^j + \int J_a\wedge\mathrm{d}\epsilon^a \\
&= \int \epsilon^a\Big(\mathrm{d}J_a + (\mathcal{L}_{V_a}E)_{ij}\ \partial_+ x^i\partial_- x^j\ \mathrm{d}\xi^+\wedge\mathrm{d}\xi^-\Big) \\
&= \int \epsilon^a\left(\mathrm{d}J_a - \frac{1}{2}\tilde{c}^{bc}{}_a J_b\wedge J_c\right).
\end{aligned}$$

Využijeme-li nyní vlastností Lieovy derivace

$$[\mathcal{L}_{V_a},\mathcal{L}_{V_b}] = \mathcal{L}_{[V_a,V_b]} = c_{ab}{}^c\ \mathcal{L}_{V_c}$$

a spočteme

$$\mathcal{L}_{V_a}(\mathcal{L}_{V_b}(E_{ij})) - \mathcal{L}_{V_b}(\mathcal{L}_{V_a}(E_{ij})) = c_{ab}{}^c\ \mathcal{L}_{V_c}(E_{ij}),$$

kam dosadíme z (2.25) a provedeme Lieovy derivace, dostaneme rovnost

$$\tilde{c}^{ab}{}_c\ c_{de}{}^c = \tilde{c}^{cb}{}_e\ c_{dc}{}^a - \tilde{c}^{ca}{}_e\ c_{dc}{}^b - \tilde{c}^{cb}{}_d\ c_{ec}{}^a + \tilde{c}^{ca}{}_d\ c_{ec}{}^b.$$

Toto je ale standardní podmínka kompatibility pro algebry $\mathfrak{g}$ a $\tilde{\mathfrak{g}}$

2.5 Integrabilita a Laxův formalismus

Integrabilita je pojem, s nímž se setkáváme zejména při studiu dynamických systémů. Chceme-li ji studovat, bylo by jistě vhodné začít její definicí. To však bohužel není možné. Jak se ukazuje, přesná a obecná definice pojmu integrabilita doposud stále uniká snahám odborníků, přestože se jí věnovalo již značné úsilí. S jistou nadsázkou lze říci, že každý autor chápe integrabilitu po svém a v kontextu konkrétní třídy dynamických systémů, jíž studuje. Vzhledem k těmto skutečnostem a vzhledem k tomu, že náš zájem je směřován k integrabilitě v kontextu klasické teorie pole, omezíme se nakonec na metody a výsledky relevantní pro studium parciálních diferenciálních rovnic. Avšak dříve než předestřeme pojetí integrability přijaté v této práci, je na místě o ní vybudovat určitou, alespoň intuitivní, představu a připomenout některé historické momenty ve vývoji tohoto pojmu.

Jak již bylo uvedeno, pohledem do literatury odhalíme množství různých pojetí integrability, ale rovněž různé metody jejího ověřování (*testy integrability*). Mikhailov, Shabat a Sokolov v [31] uvádí hlavní vlastnosti, který by měl dobrý test integrability mít: efektivita nebo jinými slovy nízká chybovost, algoritmizovatelnost, aplikovatelnost na širokou třídu systémů.

Podstatné je, že tyto testy nemají povahu rigorózních matematických vět a ve speciálních případech selhávají [20, 42].

Při podrobnějším studiu zjistíme, že lze v zásadě rozlišit několik hlavních přístupů k ověřování integrability [42]. Jedná se zejména o metody založené na *analýze singularit* řešení diferenciálních rovnic v komplexní rovině, které byly vyvinuty z původní práce S. Kovalevské [29] o integrabilitě setrvačníků v gravitačním poli[15] a později rozšířeny Painlevém (tzv. *Painlevého test*). Další přístup se orientuje na hledání *skrytých symetrií* a je založen na Lieově teorii symetrií. Existují i další metody, které zde však nebudeme zmiňovat.

Je třeba zmínit, že všechny uvedené metody ověřování integrability lze využít i pro práci s parciálními diferenciálními rovnicemi. Tedy i metody založené na analýze singularit, které byly původně určeny pro práci s rovnicemi obyčejnými. Mezi používanými modifikacemi uveďme například *ARS domněnku* [2] (podle níž je třeba provést Painlevého test na všechny redukce dané parciální rovnice na obyčejné diferenciální rovnice) případně *WTC metodu* [40], která umožňuje pracovat přímo s danou parciální diferenciální rovnicí.

Integrabilita jako taková je poměrně vzácný jev. Obecný dynamický systém je třeba považovat za neintegrabilní. Takové systémy lze studovat především s využitím moderních výpočetních metod. Na druhé straně integrabilní systémy mají strukturu, která umožňuje mnohem detailnější studium, a to také prostřednictvím analytických a algebraických metod. Integrabilita je navíc strukturálně nestabilní, čímž máme na mysli skutečnost, že i malá změna integrabilní rovnice může její integrabilitu zničit. Vzhledem k těmto faktům by bylo možno argumentovat, že integrabilita samotná nemá valnou relevanci pro studium fyzikálních jevů. Nicméně existují také důvody pro poněkud optimističtější pohled. Například v [6] autor ukazuje, že některé integrabilní parciální diferenciální rovnice jsou jak „univerzální“, tak „široce uplatnitelné“. Argument je založen na tom, že limitní (obvykle asymptotická) procedura aplikovaná na širokou třídu nelineárních parciálních diferenciálních rovnic vede ke stejné limitě, k univerzální integrabilní rovnici. V případě, že je daná limitní procedura dobře fyzikálně odůvodněná, máme zaručenu širokou uplatnitelnost dané rovnice. Fokas v [15] navíc dále rozšířil třídu takových univerzálních integrabilních rovnic za pomoci nelineárních transformací. Díky tomu bychom mohli očekávat, že integrabilní rovnice budou hrát nezanedbatelnou roli při popisu fyzikálních systémů, i kdyby měly popisovat „jen“ nějaké limitní situace.

Slovo „integrabilní“ v nás může vyvolávat určité asociace, jako např. „exaktně řešitelný“ nebo „regulární chování“ a podobně. Naproti tomu od neintegrabilních systémů očekáváme, že nebudou exaktně řešitelné a že budou vykazovat neregulární chování [14, 20]. Zde je slovo „neregulární“ užito ve smyslu vysoké citlivosti na volbě počátečních podmínek. „Neregularitu“ chování lze charakterizovat pomocí tzv. *Ljapunovových exponentů*. Systém, který má alespoň jeden kladný Ljapunovův exponent bude vykazovat neregulární chování. Samotná regularita chování systému jako definice jeho integrability však neobstojí, neboť neintegrabilní systémy nemusí nutně vykazovat neregulární chování [20].

V [20] autoři rozlišují tři možné aspekty integrability:

(i) systém může být vyřešen v kvadraturách,

(ii) systém může být bodovou transformací závislých a nezávislých proměnných redukován na soustavu lineárních rovnic, které považujeme za integrabilní (také je možno setkat se

[15] Kovalevská si povšimla, že většina tehdy známých integrabilních systémů je integrovatelná prostřednictvím eliptických, a tedy meromorfních funkcí. Takové funkce však nemají pohyblivé kritické body. Toto pozorování ji pak vedlo k sestavení integrabilní rovnice pro její setrvačník a později vedlo k sestavení Painlevého testu integrability.

s pojmem *C-integrabilní*[16] systémy [6]),

(iii) systém může být linearizován ve smyslu integrodiferenciálních rovnic.

Právě poslední jmenovaný aspekt bude pro tuto práci stěžejní. Příkladem rovnic, které spadají do této kategorie, jsou známé Painlevého transcendentální rovnice [3, 17, 35]. Sama myšlenka linearizace prostřednictvím integrodiferenciálních rovnic pochází z tzv. *obrácené úlohy rozptylu*[17] (*Inverse Scattering Transform*, IST), která byla vyvinuta jako metoda řešení některých parciálních diferenciálních rovnic. Calogero [6] takové systémy nazývá *S-integrabilní*.

Je zde na místě poznamenat, že uvedené aspekty nejsou v žádném případě definicí integrability. Jedná se pouze o jevy, které s integrabilními systémy často spojujeme. Například definovat integrabilitu prostřednictvím možnosti řešit daný systém v kvadraturách by bylo příliš omezující. Uvažme pro určitost rovnici

$$\dot{x} = x^2 + t.$$

Tato rovnice zjevně není separabilní a tudíž ani řešitelná v kvadraturách. Rovnice však přesto řešitelná je. Její řešení lze, po provedení vhodné transformace, vyjádřit prostřednictvím Airyho funkcí [14]. S podobným problémem bychom se setkali také u Painlevého transcendentálních rovnic, které rovněž nejsou řešitelné v kvadraturách, nicméně jsou integrabilní [14, 20].

Jedno z významných využití integrability, je možnost predikce dlouhodobého chování systému, a to především prostřednictvím zachovávajících se veličin (tj. integrálů či invariantů pohybu). Bylo by tedy možno uvažovat, že integrabilita je charakterizována existencí těchto invariantů v dostatečném množství. Je ovšem otázka, jaké vlastnosti by takové invarianty měly mít (vzájemná nezávislost apod.). Například z hlediska metod analýzy singularit bychom mohli požadovat existenci komplexně analytických (funkcionálně nezávislých) integrálů pohybu, a pak bychom mohli hovořit o „komplexně analytické integrabilitě“ [20].

Podívejme se nyní na oblast integrability obyčejných diferenciálních rovnic a systémů s konečně mnoha stupni volnosti. Uvažme například soustavu n autonomních[18] obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že nezávisle proměnná je čas. V takovém případě ono „dostatečné množství“ znamená existenci $(n-1)$ časově nezávislých invariantů (systém lze redukovat na jedinou kvadraturu) nebo n časově závislých invariantů (soustavu lze převést na algebraickou úlohu). Obecně se zdá rozumné od hledaných invariantů požadovat, aby respektovaly invarianci studovaného systému [20]. V případě autonomního systému je tedy rozumné hledat invarianty časově nezávislé neboli invariantní co do formy vůči posunu času.

Se zdánlivě jednodušší situací se setkáme v případě, že studujeme tzv. hamiltonovské systémy. Pro ně máme zavedeno pojetí *Liouvilleovy integrability* následujícím způsobem. Řekneme, že systém s n stupni volnosti a s Hamiltonovou funkcí tvaru $H(q_i, p_i)$ je **integrabilní**, jestliže má n nezávislých globálních integrálů pohybu $P_j(q_i, p_i)$ v involuci, tj. splňujících

(i) $\{P_j, P_k\} = 0$ pro $j, k = 1, \ldots, n$,

(ii) vektory $\operatorname{grad} P_j$ jsou lineárně nezávislé v každém bodě.

[16] Systémy linearizovatelné pomocí transformace proměnných.

[17] Transformaci obrácené úlohy rozptylu lze v jistém smyslu chápat jako nelineární analogii Fourierovy transformace. Připomeňme, že Fourierova transformace se rovněž využívá jako metoda řešení (lineárních) parciálních diferenciálních rovnic.

[18] Autonomní systém je takový, který nezávisí explicitně na nezávislé proměnné.

Uvažme nyní n-rozměrnou varietu M danou ve fázovém prostoru rovnicemi $P_j = \alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$. Je-li tato varieta souvislá, pak je topologicky ekvivalentní kartézskému součinu kružnic a přímek. Je-li dokonce kompaktní, pak se jedná o n-torus. Ve druhém uvedeném případě existuje také standardní způsob zavedení kanonických proměnných. Hovoříme o *proměnných akce-úhly*. Podrobnosti k jejich zavedení lze nalézt např. v [46, úloha 5.11, str. 172]. O soustavě, která splňuje předcházející definici lze dokázat, že je řešitelná v kvadraturách [3, 46]. Na druhé straně autoři Flaschka, Newell a Tabor [14] poukazují na určité zádrhele spojené s tímto přístupem k definici integrability.

Otázka integrability parciálních diferenciálních rovnic a systémů s nekonečně mnoha stupni volnosti se už na první pohled zdá být mnohem složitější. Jeden z prvních dokladů o tom, že i nelineární parciální diferenciální rovnice mohou mít speciální vlastnosti, je existence nekonečně mnoha zákonů zachování pro slavnou Kortewegovu-de Vriesovu rovnici (KdV rovnici), která byla představena v [10] v roce 1895. KdV rovnici lze zapsat například ve tvaru

$$u_t - \frac{3}{2} u u_x - \frac{1}{4} u_{xxx} = 0, \tag{2.26}$$

kde dolní indexy označují parciální derivace. Později Fermi, Pasta a Ulam [13] studovali prostřednictvím numerických metod vývoj rozdělení energie diskrétního systému spojených anharmonických oscilátorů s pevnými konci[19]

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x_n}{\mathrm{d}t^2} = k(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n)[1 + \alpha(x_{n+1} - x_{n-1})].$$

Cílem studie bylo, mimo jiné, ověřit tehdejší intuici o dynamice nelineárních rovnic. Výsledky však byly v tomto ohledu zcela neočekávané. Místo toho, aby se energie postupně rozdělila přes všechny módy a systém tak dospěl do stavu rovnováhy a termalizoval se, dospěl po čase systém zpět do počátečního nastavení. Tento výsledek motivoval Kruskala a Zabuskyho [41] k podobné numerické studii, ovšem nyní nikoliv diskrétního systému jako v [13], ale jeho spojité limity. Ukázalo se, že touto limitou je, tehdy již známá, KdV rovnice[20]. V navazující studii [19] pak byly objeveny některé speciální vlastnosti KdV rovnice. Především se jednalo o existenci nekonečného množství zákonů zachování, modifikované KdV rovnice [33] a možnost linearizace. Dokonce se ukázalo, že KdV rovnici lze přepsat v hamiltonovské formě. IST pak vlastně představuje kanonickou transformaci do proměnných akce-úhly [18, 43]. V tomto smyslu lze chápat integraci KdV rovnice prostřednictvím metody IST jako analogii Liouvilleovy integrability pro nekonečně mnoho stupňů volnosti. Nedlouho na to se začaly objevovat další integrabilní nelineární parciální diferenciální rovnice s obdobnými vlastnostmi, např. nelineární Schrödingerova rovnice [45] a sine-Gordonova rovnice [1].

Přestože však byly objeveny integrabilní nelineární parciální diferenciální rovnice s nekonečně mnoha zákony zachování, zdá se, že samotná existence nekonečného množství zákonů zachování jejich integrabilitu nijak nevymezuje. V [14] se uvádí mimo jiné příklad Burgersovy rovnice, která má pouze jeden zákon zachování (ale nekonečně mnoho zobecněných symetrií). Tato rovnice může být integrována pomocí transformace na lineární rovnici vedení tepla a je tedy integrabilní. Společný rys Burgersovy rovnice a KdV rovnice tedy v žádném případě není existence nekonečně mnoha zákonů zachování, přitom obě jsou integrabilní[21].

[19] V literatuře se setkáme s názvem *FPU model*.

[20] Pro úplnost uveďme, že samotný FPU model, na rozdíl od jeho spojité limity, integrabilní není.

[21] Autoři [14] uvádí příslušný společný rys. Je jím existence jednoparametrické třídy Bäcklundových trans-

Podívejme se nyní zpět na KdV rovnici (2.26). Gardner, Greene, Kruskal a Miura [19] si povšimli, že tuto rovnici lze dát do souvislosti s lineárním časově nezávislým Schrödingerovým problémem

$$\phi_{xx} + u(x,t)\phi = \lambda\phi,$$

kde u, které vystupuje v roli potenciálu, má být řešením KdV rovnice. Učinili zásadní pozorování, že v případě, že potenciál u je zároveň řešením KdV rovnice, pak lineární operátor $L := \partial_x^2 + u(x,t)$ je *isospektrální*, tj. jeho spektrum nezávisí na čase t (přitom samotný operátor L obecně na čase závisí). Požadujme navíc, aby vlnová funkce ϕ splňovala evoluční rovnici

$$\phi_t = \phi_{xxx} + \frac{3}{2}u(x,t)\phi_x + \frac{3}{4}u_x(x,t)\phi.$$

Máme tedy soustavu dvou rovnic pro jednu funkci. Taková soustava má řešení pouze v případě, že obě rovnice jsou kompatibilní. Ukazuje se, že podmínka kompatibility obou lineárních rovnic, při využití isospektrality operátoru L, je ekvivalentní požadavku, aby u je řešila KdV rovnici. Samotnou potenciálovou funkci u pak lze rekonstruovat prostřednictvím metody IST. Vzhledem k tomu, že při této rekonstrukci řešíme pouze lineární integrodiferenciální rovnice, hovoříme o linearizaci KdV rovnice.

V roce 1968 Peter D. Lax zasadil předchozí postup pro řešení KdV rovnice do obecnějšího rámce [30], který dnes stojí v centru teorie integrabilních systémů [28]. V literatuře se s ním setkáme pod názvem *Laxův formalismus* nebo také *Laxovy páry*. Podívejme se nyní, jak vypadají Laxovy páry pro KdV rovnici. Postupovat budeme podle [23]. Uvažme dva lineární (obyčejné diferenciální) operátory

$$L := \partial_x^2 + u(x,t) \qquad \text{a} \qquad M := \partial_x^3 + \frac{3}{2}u(x,t)\partial_x + \frac{3}{4}u_x(x,t). \tag{2.27}$$

Zaveďme časovou derivaci obyčejného diferenciálního operátoru $A := \sum_{j=0}^{n} \alpha_j(x,t)\partial_x^j$ vztahem

$$\dot{A} := \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial \alpha_j}{\partial t}\partial_x^j$$

a uvažme operátorovou rovnici tvaru (tzv. *Laxova rovnice*)

$$\dot{L} = [M, L]. \tag{2.28}$$

Přesvědčíme se, že tato rovnice je splněna právě tehdy, splňuje-li funkce u KdV rovnici (2.26). V Laxově rovnici pro levou a pravou stranu dostáváme

$$\begin{aligned}
\dot{L} &= u_t(x,t),\\
M \circ L &= \partial^5 + \frac{5}{2}u\partial^3 + \frac{15}{4}u_x\partial^2 + \frac{3}{2}(u^2 + 2u_{xx})\partial + \frac{9}{4}uu_x + u_{xxx},\\
L \circ M &= \partial^5 + \frac{5}{2}u\partial^3 + \frac{15}{4}u_x\partial^2 + \frac{3}{2}(u^2 + 2u_{xx})\partial + \frac{3}{4}(uu_x + u_{xxx}),
\end{aligned}$$

a tedy

$$[M, L] = \frac{3}{2}uu_x + \frac{1}{4}u_{xxx}.$$

formací mezi množinou řešení dané rovnice a nějaké přidružené rovnice (u KdV se jedná o modifikovanou KdV rovnici, u Burgerse je to rovnice vedení tepla). Odtud pak dále postupují k využití WTC metody k ověření integrability.

Celkem tedy vidíme, že Laxova rovnice (2.28) pro tuto konkrétní volbu operátorů L a M je ekvivalentní KdV rovnici (2.26) pro funkci u.

Podívejme se nyní na obecnější způsob odvození Laxovy rovnice. Uvažujme lineární problém (prozatím bez ohledu na KdV rovnici)

$$L\phi = \lambda\phi, \tag{2.29a}$$

$$M\phi = \phi_t, \tag{2.29b}$$

kde ϕ je komplexní funkce v proměnných x a t (v kvantové mechanice bychom požadovali, aby funkce byla kvadraticky integrabilní v proměnné x) a L a M jsou lineární operátory na příslušném lineárním prostoru, L je hermitovský a M antihermitovský (můžeme si všimnout, že operátor L (M) definovaný vztahem (2.27) je symetrický (antisymetrický)). Máme tedy soustavu dvou lineárních rovnic pro jednu funkci. Jedná se o přeurčený systém, který bude mít netriviální řešení pouze v případě, kdy jsou obě rovnice kompatibilní. Podmínku kompatibility snadno odvodíme. Zderivujeme-li první z těchto rovnic podle času a dosadíme z druhé, dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t}(L\phi) = \begin{cases} \dot{L}\phi + L\phi_t, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\lambda\phi) = \lambda_t\phi + \lambda\phi_t = \lambda_t\phi + \lambda M\phi = \lambda_t\phi + M(\lambda\phi) = \lambda_t\phi + ML\phi. \end{cases}$$

Podmínka kompatibility má tedy tvar $\dot{L} = \lambda_t + [M, L]$. Odtud je ihned vidět, že $\lambda_t = 0$, právě když $\dot{L} = [M, L]$. Za dodatečného předpokladu isospektrality operátoru L je tedy podmínkou kompatibility právě Laxova rovnice (2.28). Poznamenejme ještě, že parametr λ, vyskytující se v (2.29) se z pochopitelných důvodů nazývá *spektrálním parametrem.*

Důležitá na Laxově pozorování je především jeho obecnost. Libovolná rovnice, kterou lze ekvivalentně zapsat ve tvaru Laxovy rovnice pro nějaké lineární operátory (nemusí se tedy speciálně jednat o obyčejné diferenciální operátory), má automaticky řadu vlastností KdV rovnice — jmenovitě třeba nekonečně mnoho zákonů zachování (lokálních) [32]. Pro ilustraci uvažme např. diferenciální operátory s maticovými koeficienty ve tvaru

$$L := \alpha\partial + U(x) \qquad \text{a} \qquad M := V(x),$$

kde $\alpha =$ konst., $U(x)$ a $V(x)$ mají tvar

$$U := \begin{pmatrix} -4 & 2\mathrm{i}u_x \\ -2\mathrm{i}u_x & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad V := \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{i}}{4}\cos u & \frac{\mathrm{i}}{4}u_{xt} \\ \frac{\mathrm{i}}{4}u_{xt} & \frac{\mathrm{i}}{4}\cos u \end{pmatrix}.$$

Dostaneme vztah

$$\dot{L} - [M, L] = \begin{pmatrix} u_x(u_{xt} - \sin u) & u_x\cos u - u_{xxt} \\ u_x\cos u - u_{xxt} & u_x(\sin u - u_{xt}) \end{pmatrix}.$$

Odtud je vidět, že Laxova rovnice pro L a M platí, právě když $u_x = 0$ (tj. řešením je konstanta) anebo

$$u_{xt} = \sin u,$$

což je známá sine-Gordonova rovnice.

V soudobé literatuře se častěji místo původní *Laxovy reprezentace* pomocí operátorů L a M a příslušné Laxovy rovnice setkáme s tzv. *reprezentací nulové křivosti* [11, 16, a další].

Podívejme se, jak k této reprezentaci lze dospět v konkrétním případě KdV rovnice. Nahlížíme-li na integrabilní nelineární systémy jako na podmínky kompatibility lineárních problémů, lze přejít od operátorového zápisu k zápisu maticovému. Cenu, kterou za to zaplatíme bude, že se nám v rovnicích začnou objevovat také různé mocniny spektrálního parametru λ. Rovnici $L\phi = \lambda\phi$ pro $L = \partial_x^2 + u(x,t)$ lze zapsat maticově jako rovnici prvního řádu

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -u+\lambda & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} = \mathbf{U}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix},$$

kde jsme položili

$$\phi_1 := \phi \qquad \text{a} \qquad \phi_2 := \phi_x.$$

Podobně platí

$$\begin{aligned}
\phi_{1t} &= \phi_t = M\phi\\
&= \phi_{xxx} + \frac{3}{2}u\phi_x + \frac{3}{4}u_x\phi\\
&= \big((-u+\lambda)\phi\big)_x + \frac{3}{2}u\phi_x + \frac{3}{4}u_x\phi\\
&= \left((-u+\lambda)_x + \frac{3}{4}u_x\right)\phi_1 + \left(\frac{1}{2}u+\lambda\right)\phi_2\\
&= -\frac{1}{4}u_x\phi_1 + \left(\frac{1}{2}u+\lambda\right)\phi_2
\end{aligned}$$

odkud lze odvodit druhý potřebný vztah

$$\begin{aligned}
\phi_{2t} &= \phi_{xt} = \phi_{1tx}\\
&= -\frac{1}{4}u_{xx}\phi_1 + \left(\frac{1}{2}u+\lambda\right)(-u+\lambda)\phi_1 + \frac{1}{4}u_x\phi_2\\
&= \left(-\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}u\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{4}u_{xx}\right)\phi_1 + \frac{1}{4}u_x\phi_2.
\end{aligned}$$

Celkem dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{4}u_x & \frac{1}{2}u+\lambda\\ -\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}u\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{4}u_{xx} & \frac{1}{4}u_x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} = \mathbf{V}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix},$$

Máme tedy dvě lineární rovnice tvaru

$$\frac{\partial}{\partial x}X = \mathbf{U}X, \tag{2.30a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}X = \mathbf{V}X, \tag{2.30b}$$

kde jsme označili $X := \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}$. Podmínka kompatibility těchto rovnic se určí snadno

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}X &= \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{U}X) = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}X + \mathbf{U}\mathbf{V}X,\\
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}X &= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{V}X) = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}X + \mathbf{V}\mathbf{U}X.
\end{aligned}$$

Za předpokladu existence řešení (2.30) s libovolnou počáteční podmínkou $X|_{\substack{x=0\\t=0}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ lze podmínku kompatibility zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + [\mathbf{U}, \mathbf{V}] = \mathbf{0}. \tag{2.31}$$

Je třeba si také uvědomit, že uvedená podmínka kompatibility musí platit pro *všechny* hodnoty $\lambda \in \mathbb{C}$. Do rovnice (2.31) dosadíme za matice $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ a vyjádříme ji v mocninách λ. Vzhledem ke speciálnímu tvaru $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$, koeficienty u mocnin λ^3, λ^2 a λ vymizí a zbude pouze konstantní člen dávající rovnost

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_t - \frac{3}{2}uu_x - \frac{1}{4}u_{xxx} & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Podmínka (2.31) je zřejmě splněna právě tehdy, když u řeší KdV rovnici (2.26).

S podmínkou ve tvaru (2.31) se v literatuře setkáváme také pod názvem *podmínka nulové křivosti.* K tomuto názvu existuje názorná geometrická motivace. Rovnice $(\partial_x - \mathbf{U})X = 0$ a $(\partial_t - \mathbf{V})X = 0$ lze interpretovat tak, že definují konexi na vektorové fibraci nad (x, t)-rovinou. První z rovnic nám udává, jak paralelně přenést vektor X ve směru x a druhé totéž ve směru t. Matice $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ pak představují koeficienty této konexe. Původ názvu *podmínka nulové křivosti* se nám ozřejmí, srovnáme-li právě odvozený tvar podmínky kompatibility (2.31) s již dříve zavedeným lokálním tvarem 2-formy křivosti na fibrované varietě (2.5).

Pro účely této práce přijmeme pojetí integrability podle [16] založené na výše uvedených úvahách. Parciální diferenciální rovnice, které je možné zapsat jako podmínku kompatibility (2.31) nějakého přidruženého lineárního problému ve tvaru (2.30) nazveme *integrabilními.* Dvojici přidružených lineárních rovnic nazveme jejím *Laxovým párem.*

Bohužel ani toto pojetí integrability nelze přijmout obecně a bez výhrad. Přestože se v literatuře obvykle považuje existence Laxova páru k danému dynamickému systému a jeho integrabilita za ekvivalentní, lze uvést některé protipříklady. Podle [11] existence Laxova páru pro soustavu diferenciálně-diferenčních rovnic automaticky neznamená, že tyto rovnice jsou integrabilní. Například v [7] autoři Chandre a Eilbeck uvádí některé jednoduché systémy, které, ač mají Laxův pár, neprojdou testem singularit podle [36]. Nicméně se jedná o příklady obecnějších systémů, popsaných diferenciálně-diferenčními rovnicemi. Ty však pro tuto práci nejsou relevantní, neboť zde se zabýváme výhradně parciálními diferenciálními rovnicemi. Autorovi této práce nejsou v současné době známy žádné příklady systémů, které by měly Laxův pár a zároveň nebyly integrabilní, pakliže se omezíme pouze na parciální diferenciální rovnice.

Kapitola 3

Integrabilita Yangova-Baxterova σ-modelu

3.1 Hlavní chirální model

Uvažme jednoduše souvislou plochou světoplochu W parametrizovanou časovou souřadnicí τ a prostorovou souřadnicí σ. Na W zavedeme souřadnice světelného kuželu vztahem

$$\xi^{\pm} := \frac{1}{2}(\tau \pm \sigma).$$

Potom zřejmě

$$\partial_{\pm} = \partial_{\tau} \pm \partial_{\sigma}.$$

Nechť G je prostá kompaktní souvislá a jednoduše souvislá Lieova grupa. *Hlavním chirálním polem* nazveme libovolné hladké zobrazení $g : W \to G$ vyhovující rovnici

$$\partial_{+}(g^{-1}\partial_{-}g) + \partial_{-}(g^{-1}\partial_{+}g) = 0. \tag{3.1}$$

Tuto rovnici lze odvodit prostřednictvím principu nejmenší akce

$$S = \int_W (g^{-1}\partial_{+}g, g^{-1}\partial_{-}g)_{\mathfrak{g}}, \tag{3.2}$$

kde $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{g}}$ je Killingova-Cartanova forma[1] na Lieově algebře $\mathfrak{g}$. Samotné odvození polních rovnic (3.1) variací akce S na tomto místě neuvádíme, neboť jej provedeme později v obecnějším případě Yangova-Baxterova σ-modelu (viz sekce 3.4.1).

Dále se budeme soustředit na dynamiku obecně a nebudeme specifikovat žádné hraniční podmínky.

V [44] autoři ukazují, že ke každému řešení $g(\xi^+, \xi^-)$ polních rovnic (3.1) lze přiřadit plochou Laxovu konexi s hodnotami v $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$

$$A^0(\lambda) = A^0_{+}(\lambda)\mathrm{d}\xi^{+} + A^0_{-}(\lambda)\mathrm{d}\xi^{-}, \tag{3.3}$$

kde

$$A^0_{\pm}(\lambda) = -\frac{g^{-1}\partial_{\pm}g}{1 \pm \lambda}. \tag{3.4}$$

Plochost konexe znamená, že zobrazení $A^0_{\pm}(\lambda) : W \to \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ splňují podmínku nulové křivosti v $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, tj. pro každé $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ platí

$$\partial_{+}A^0_{-}(\lambda) - \partial_{-}A^0_{+}(\lambda) + [A^0_{-}(\lambda), A^0_{+}(\lambda)] = 0. \tag{3.5}$$

[1] Forma je nedegenerovaná, neboť Lieova grupa G je prostá.

Naopak uvažme dvě pole $u_\pm(\xi^+, \xi^-)$ s hodnotami v $\mathfrak{g}$ a konexi $A^0(\lambda) = A^0_+(\lambda)\mathrm{d}\xi^+ + A^0_-(\lambda)\mathrm{d}\xi^-$ s hodnotami v $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$, kde

$$A^0_\pm(\lambda) = -\frac{u_\pm}{1 \pm \lambda}. \tag{3.6}$$

Plochost této konexe pro každou hodnotu spektrálního parametru λ pak znamená, že $u_\pm$ musí splňovat následující rovnice

$$\begin{aligned} \partial_+ u_- - \partial_- u_+ - [u_-, u_+] &= 0, \\ \partial_- u_+ + \partial_+ u_- &= 0. \end{aligned}$$

První z těchto rovnic je podmínka nulové křivosti v (kompaktní) Lieově algebře $\mathfrak{g}$, odkud lokálně plyne existence pole $g(\xi^+, \xi^-)$ s hodnotami v G, které splňuje

$$u_\pm = g^{-1}\partial_\pm g.$$

Druhá je potom vlastně polní rovnice (3.1) pro hlavní chirální pole g.

3.2 Yangův-Baxterův operátor

Významnou úlohu z hlediska hledání Laxova páru sehraje jistý $\mathbb{R}$-lineární operátor $R : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Nechť G je prostá kompaktní souvislá a jednoduše souvislá Lieova grupa, $\mathfrak{g}$ je příslušná reálná Lieova algebra a $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ její komplexifikace. Killingovu-Cartanovu formu $(\cdot,\cdot)_\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{g}$ lineárně rozšíříme na $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ (rozšířenou formu však budeme dále značit stejně, tj. $(\cdot,\cdot)_\mathfrak{g}$). Označme dále $\mathfrak{h}^\mathbb{C}$ Cartanovu podalgebru algebry $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$. Pro $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ máme kořenový rozklad

$$\mathfrak{g}^\mathbb{C} = \mathfrak{h}^\mathbb{C} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathbb{C}E_\alpha \right),$$

kde Φ je množina kořenů a $\mathbb{C}E_\alpha := \operatorname{span}(E_\alpha)$. Z teorie víme, že ke každému $\alpha \in \Phi$ existuje právě jedno $H_\alpha \in \mathfrak{h}^\mathbb{C}$ tak, že $\alpha(H) = (H, H_\alpha)_\mathfrak{g}$ pro všechna $H \in \mathfrak{h}^\mathbb{C}$. Z těchto prvků pak vybereme bázi (H_μ), $\mu \in \Phi^p$, podalgebry $\mathfrak{h}^\mathbb{C}$. Kořenové vektory E_α zvolíme tak, aby splňovaly vztahy

$$[H_\mu, E_\alpha] = \alpha(H_\mu)E_\alpha, \qquad (E_\alpha, E_{-\alpha})_\mathfrak{g} = \frac{2}{|\alpha|^2}, \tag{3.7}$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha^\vee, \qquad [\alpha^\vee, E_{\pm\alpha}] = \pm 2E_{\pm\alpha}, \tag{3.8}$$

kde $|\alpha|^2 := (H_\alpha, H_\alpha)_\mathfrak{g}$. Z kořenového rozkladu je vidět, že v algebře $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ lze zvolit bázi (H_μ, E_α), $\alpha \in \Phi$.

Z Weylovy věty plyne, že algebra $\mathfrak{g}$ je kompaktní a vzhledem k tomu, že k algebře $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ existuje právě jedna kompaktní reálná forma, je zřejmé, že touto formou je právě algebra $\mathfrak{g}$. Jako její bázi lze zvolit soubor $(T_\mu, B_\alpha, C_\alpha)$, $\alpha > 0$, kde

$$T_\mu := \mathrm{i}H_\mu, \qquad B_\alpha := \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(E_\alpha + E_{-\alpha}), \qquad C_\alpha := \frac{1}{\sqrt{2}}(E_\alpha - E_{-\alpha}).$$

Definujme nyní $\mathbb{R}$-lineární operátor $R : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ vztahy

$$RT_\mu := 0, \qquad RB_\alpha := C_\alpha, \qquad RC_\alpha = -B_\alpha.$$

Takto definovaný operátor R nazveme *Yangův-Baxterův operátor*. R splňuje identitu

$$[RX, RY] = R([RX, Y] + [X, RY]) + [X, Y], \qquad X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{3.9}$$

Tuto identitu stačí ověřit na prvcích báze, tj. pro dvojice (T_μ, T_ν), (T_μ, B_α), (T_μ, C_α), (B_α, B_β), (B_α, C_β) a (C_α, C_β). Ověřme například případ (T_μ, C_α). Pro levou a pravou stranu postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
\mathrm{LHS} &= [RT_\mu, RC_\alpha] = [0, -B_\alpha] = 0,\\
\mathrm{RHS} &= R([RT_\mu, C_\alpha] + [T_\mu, RC_\alpha]) + [T_\mu, C_\alpha]\\
&= R[T_\mu, -B_\alpha] + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}[H_\mu, E_\alpha - E_{-\alpha}]\\
&= R\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha(H_\mu)(E_\alpha - E_{-\alpha})\right) + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\alpha(H_\mu)(E_\alpha + E_{-\alpha})\\
&= \alpha(H_\mu)\,(RC_\alpha + B_\alpha)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Obdobně lze (3.9) ověřit i pro ostatní možnosti.

Operátor R dále splňuje podmínku antisymetrie

$$(RX, Y)_\mathfrak{g} + (X, RY)_\mathfrak{g} = 0. \tag{3.10}$$

Rovnost lze ověřit analogickým způsobem jako předchozí identitu. Zvolme například dvojici (B_α, C_β), kde $\alpha, \beta > 0$. Potom

$$(RB_\alpha, C_\beta)_\mathfrak{g} + (B_\alpha, RC_\beta)_\mathfrak{g} = (C_\alpha, C_\beta)_\mathfrak{g} - (B_\alpha, B_\beta)_\mathfrak{g} = (E_\alpha, E_\beta)_\mathfrak{g} + (E_{-\alpha}, E_{-\beta})_\mathfrak{g} = 0,$$

kde jsme využili toho, že pro $\alpha, \beta > 0$ je nutně $(E_\alpha, E_\beta)_\mathfrak{g} = (E_{-\alpha}, E_{-\beta})_\mathfrak{g} = 0$.

Zavedeme dále zobrazení $[\cdot, \cdot]_R$ vztahem

$$[X, Y]_R := [RX, Y] + [X, RY], \qquad X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{3.11}$$

Jedná se zjevně o bilineární, antisymetrické zobrazení $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, které navíc díky (3.9) vyhovuje Jacobiho identitě

$$[X, [Y, Z]_R]_R + [Y, [Z, X]_R]_R + [Z, [X, Y]_R]_R = 0,$$

neboť

$$\begin{aligned}
&[X, [Y, Z]_R]_R + [Y, [Z, X]_R]_R + [Z, [X, Y]_R]_R\\
&\quad = [RX, [RY, Z] + [Y, RZ]] + [X, R[RY, Z] + R[Y, RZ]]\\
&\qquad + [RY, [RZ, X] + [Z, RX]] + [Y, R[RZ, X] + R[Z, RY]]\\
&\qquad + [RZ, [RX, Y] + [X, RY]] + [Z, R[RX, Y] + R[X, RY]]\\
&\quad = [RX, [RY, Z]] + [RY, [Z, RX]] + [Z, [RX, RY]]\\
&\qquad + [RX, [Y, RZ]] + [Y, [RZ, RX]] + [RZ, [RX, Y]]\\
&\qquad + [X, [RY, RZ]] + [RY, [RZ, X]] + [RZ, [X, RY]]\\
&\qquad - [X, [Y, Z]] - [Y, [Z, X]] - [Z, [X, Y]]\\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

Vzhledem k těmto vlastnostem lze zavést novou Lieovu algebru $\mathfrak{g}_R := (\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_R)$ na vektorovém prostoru $\mathfrak{g}$.

Uvažme komplexifikaci $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ a nahlížejme na ní jako na *reálnou* Lieovu algebru. Potom násobení komplexní jednotkou je zjevně $\mathbb{R}$-lineárním operátorem na $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ a tedy operátor $(R - \mathrm{i})$ lze chápat jako lineární operátor $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Lze se rovněž snadno přesvědčit, že $(R-\mathrm{i}) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ je injektivním homomorfismem reálných algeber $\mathfrak{g}_R$ a $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Tento výsledek nám umožňuje nahlížet na algebru $\mathfrak{g}_R$ jako na reálnou podalgebru algebry $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

Ověřme nyní tvrzení, že operátor $(R - \mathrm{i})$ je injektivním homomorfismem reálných algeber $\mathfrak{g}_R$ a $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. K tomu, aby byl $(R - \mathrm{i})$ homomorfismem, musí splňovat relaci

$$(R - \mathrm{i})[X, Y]_R = [(R - \mathrm{i})X, (R - \mathrm{i})Y]_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}, \qquad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Identitu (3.9) lze pomocí (3.11) zapsat ve tvaru

$$R[X, Y]_R = [RX, RY] - [X, Y],$$

odkud

$$(R - \mathrm{i})[X, Y]_R = \Big([RX, RY] - [X, Y]\Big) - \mathrm{i}\Big([RX, Y] + [X, RY]\Big).$$

Zároveň však také platí

$$[(R - \mathrm{i})X, (R - \mathrm{i})Y]_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}} = \Big([RX, RY] - [X, Y]\Big) - \mathrm{i}\Big([RX, Y] + [X, RY]\Big).$$

Uvedená rovnost tedy skutečně platí. Zbývá ověřit injektivitu operátoru $(R - \mathrm{i})$. Je však zřejmé, že $\ker(R - \mathrm{i}) = \{0\}$, neboť v opačném případě bychom nalezli $0 \neq x \in \mathfrak{g}$ tak, že $Rx = \mathrm{i}x$. Odtud plyne, že Rx leží v $\mathrm{i}\mathfrak{g}$ a zároveň v $\mathfrak{g}$, což je spor.

3.3 P-L symetrie Yangova-Baxterova σ-modelu

Uvažme dvourozměrný nelineární σ-model ve tvaru (2.14)

$$S = \int_W (G_{ij}(x) + B_{ij}(x))\partial_+ x^i \partial_- x^j =: \int_W E_{ij}(x)\partial_+ x^i \partial_- x^j. \tag{2.14}$$

Předpokládejme dále, že Lieova grupa G má infinitesimální akci na cílové varietě M prostřednictvím homomorfismu Lieových algeber $V : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$. Speciálně lze, díky tomuto homomorfismu, přiřadit k bázi $(T_a) \subset \mathfrak{g}$ vektorová pole $V_a = V_a^i(x)\partial_{x^i}$. V kapitole 2.4 jsme řekli, že σ-model (2.14) je symetrický v Poissonově-Lieově smyslu vzhledem k akci G na M, pokud platí vztah (2.25)

$$(\mathcal{L}_{V_a} E)_{ij} = -\tilde{c}^{bc}{}_a V_b^m V_c^n E_{mj} E_{in}, \tag{2.25}$$

kde $\tilde{c}^{bc}{}_a$ jsou strukturní konstanty nějaké Lieovy algebry $\tilde{\mathfrak{g}}$. V případě, že tyto strukturní konstanty vymizí říkáme, že daný σ-model je symetrický ve standarním smyslu[2].

Připomeňme, že při odvozování podmínky P-L symetrie (2.25) jsme zavedli 1-formy J_a

$$J_a := V_a^i(x)E_{ji}(x)\partial_+ x^j \mathrm{d}\xi^+ - V_a^i(x)E_{ij}(x)\partial_- x^j \mathrm{d}\xi^- \tag{3.12}$$

a dospěli k podmínce (2.24)

$$\mathrm{d}J_a - \frac{1}{2}\tilde{c}^{bc}{}_a J_b \wedge J_c = 0, \tag{2.24}$$

[2] Jedná se vlastně o zobecněnou izometrii (viz odstavec 2.4).

z níž jsme odvodili právě (2.25). Právě uvedenou podmínku (2.24) lze interpretovat jako podmínkou nulové křivosti neabelovské ploché konexe s hodnotami v algebře $\tilde{\mathfrak{g}}$, jejímiž komponentami jsou právě 1-formy J_a.

V případě, že akce grupy G na cílovou varietu M je tranzitivní, rovnice (2.24) vlastně představují kompletní soubor polních rovnic P-L symetrického σ-modelu (2.14) [24].

Předpokládejme dále, že cílová varieta M je ve skutečnosti prostá a kompaktní grupa G, akce G na sebe samu je přímo pravé násobení a Lieova algebra $\tilde{\mathfrak{g}}$ je ve skutečnosti algebra $\mathfrak{g}_R$ definovaná dříve (R je Yangův-Baxterův operátor). Nejobecnější tvar P-L symetrického σ-modelu v tomto případě byl nalezen v [25]

$$S_\epsilon(E)(g) = \int_W (g^{-1}\partial_+ g, (E_g - \epsilon R)^{-1} g^{-1}\partial_- g)_{\mathfrak{g}}, \tag{3.13}$$

kde ϵ představuje deformační parametr, $E_g := \mathrm{Ad}_{g^{-1}} E \mathrm{Ad}_g$ a E je vhodný $\mathbb{R}$-lineární operátor $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Jak je vidět, s využitím operátoru R, je možné zapsat akci σ-modelu nezávisle na bázi. Stejný závěr platí také o 1-formě $J(g)$ s hodnotami v $\mathfrak{g}_R$, kterou lze přepsat z obecného tvaru (3.12) jako

$$\begin{aligned} J(g) &= J_+(g)\mathrm{d}\xi^+ + J_-(g)\mathrm{d}\xi^- \\ &= -(E_g^t + \epsilon R)^{-1} g^{-1}\partial_+ g \ \mathrm{d}\xi^+ + (E_g - \epsilon R)^{-1} g^{-1}\partial_- g \ \mathrm{d}\xi^-, \end{aligned} \tag{3.14}$$

kde $E^t : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ je transpozice zobrazení E vzhledem ke Killingově-Cartanově formě

$$(EX, Y)_{\mathfrak{g}} = (X, E^t Y)_{\mathfrak{g}}, \qquad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Poznamenejme ještě, že interpretace $J(g)$ jako formy s hodnotami v $\mathfrak{g}_R$ vyplývá z následně uvedených polních rovnic, ve kterých vystupuje komutátor $[\cdot,\cdot]_R$.

Polní rovnice modelu (3.13) lze pak přepsat z (2.24) do tvaru podmínky nulové křivosti v algebře $\mathfrak{g}_R$

$$\partial_+ J_-(g) - \partial_- J_+(g) + \epsilon[J_-(g), J_+(g)]_R = 0. \tag{3.15}$$

Význam deformačního parametru ϵ tedy spočívá v přeškálování komutátoru algebry $\mathfrak{g}_R$, resp. nahrazuje strukturní konstanty $\tilde{c}^{bc}{}_a$ konstantami $\epsilon\tilde{c}^{bc}{}_a$.

Explicitní odvození polních rovnic (3.15) a 1-forem (3.14) na tomto místě neprovádíme, neboť je provedeme v následující sekci pro speciální případ modelu (3.13), tzv. Yangova-Baxterova σ-modelu.

Doposud jsme zjistili, že ke každému řešení g modelu (3.13) existuje plochá konexe $J(g)$ s hodnotami v $\mathfrak{g}_R$. Navíc se ukazuje, že ke stejnému g přirozeně existuje také plochá konexe $B^\epsilon(g)$ s hodnotami v $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Konexi $B^\epsilon(g)$ zkonstruujeme zadáním jejích chirálních komponent

$$B^\epsilon_\pm(g) := \mathrm{Ad}_g\Big(g^{-1}\partial_\pm g + \epsilon(R - \mathrm{i})J_\pm(g)\Big) = \partial_\pm g g^{-1} + g\epsilon(R-\mathrm{i})J_\pm(g)g^{-1}.$$

Je vidět, že tato konexe vznikne aplikací homomorfismu $\epsilon(R - \mathrm{i})$ na plochou konexi $J_\pm(g)$ a následnou kalibrační transformací. Obě tyto operace zřejmě zachovávají plochost. Explicitní tvar chirálních komponent je

$$B^\epsilon_+(g) = (E^t + \mathrm{i}\epsilon)(E^t + \epsilon R_{g^{-1}})^{-1}\partial_+ g g^{-1}, \tag{3.16a}$$

$$B^\epsilon_-(g) = (E - \mathrm{i}\epsilon)(E - \epsilon R_{g^{-1}})^{-1}\partial_- g g^{-1}, \tag{3.16b}$$

kde $R_{g^{-1}} := \mathrm{Ad}_g R \mathrm{Ad}_{g^{-1}}$. Dokažme například explicitní tvar $B^\epsilon_-(g)$

$$\begin{aligned} B^\epsilon_-(g) &= \partial_- g g^{-1} + g\epsilon(R - \mathrm{i})J_-(g)g^{-1} \\ &= g\Big[(I + \epsilon(R-\mathrm{i})(E_g - \epsilon R)^{-1})(g^{-1}\partial_- g)\Big]g^{-1} \\ &= \mathrm{Ad}_g(E_g - \mathrm{i}\epsilon)(E_g - \epsilon R)^{-1}(g^{-1}\partial_- g) \\ &= \mathrm{Ad}_g\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(E - \mathrm{i}\epsilon)\mathrm{Ad}_g\Big[\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(E - \epsilon R_{g^{-1}})\mathrm{Ad}_g\Big]^{-1}(g^{-1}\partial_- g) \\ &= (E - \mathrm{i}\epsilon)(E - \epsilon R_{g^{-1}})^{-1}\mathrm{Ad}_g(g^{-1}\partial_- g) \\ &= (E - \mathrm{i}\epsilon)(E - \epsilon R_{g^{-1}})^{-1}\partial_- g g^{-1}. \end{aligned}$$

Explicitní výraz pro $B^\epsilon_+(g)$ se získá obdobně.

Celkem tedy platí, že je-li g řešením modelu (3.13), pak $B^\epsilon_\pm(g)$ splňují podmínku nulové křivosti v algebře $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$

$$\partial_+ B^\epsilon_-(g) - \partial_- B^\epsilon_+(g) + [B^\epsilon_-(g), B^\epsilon_+(g)] = 0.$$

3.4 Laxův pár Yangova-Baxterova σ-modelu

3.4.1 Yangův-Baxterův σ-model

V předchozí sekci se ukázala existence tolika P-L symetrických σ-modelů na G, kolik je operátorů $E : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Významnou úlohu mezi nimi hraje případ $E = I$, kdy akce (3.13) přejde na na tvar

$$S_\epsilon(g) = \int_W (g^{-1}\partial_+ g, (I - \epsilon R)^{-1} g^{-1}\partial_- g)_{\mathfrak{g}}. \tag{3.17}$$

V [25] autoři nazývají tento model *Yangův-Baxterův σ-model*. Důležitý je fakt, že tento model nevykazuje pouze P-L symetrii vzhledem k pravé akci G na sebe samu, ale rovněž obyčejnou (standardní) symetrii vzhledem k levé akci G na sebe samu. Poznamenejme rovněž, že samotný hlavní chirální model (3.2) je bisymetrický, tj. je symetrický ve standardním smyslu vzhledem k pravé i levé akci grupy G na sebe samu. Yangův-Baxterův σ-model lze pak interpretovat jako pravou Poissonovu-Lieovu deformaci hlavního chirálního modelu, při které se zachovává standardní levá symetrie.

Přesvědčíme se nyní, že pro Yangův-Baxterův model (tj. $E = I$) mají příslušné pohybové rovnice a příslušná forma konexe skutečně dříve uvedené tvary (3.15) a (3.14). Spočtěme nejdříve výrazy

$$\begin{aligned} \delta(g^{-1}\partial_\pm g) &= \delta g^{-1}\partial_\pm g + g^{-1}\partial_\pm \delta g \\ &= -g^{-1}\delta g\, g^{-1}\partial_\pm g + \partial_\pm(g^{-1}\delta g) - \partial_\pm(g^{-1})\delta g \\ &= \partial_\pm(g^{-1}\delta g) + g^{-1}\partial_\pm g\, g^{-1}\delta g - g^{-1}\delta g\, g^{-1}\partial_\pm g \\ &= \partial_\pm(g^{-1}\delta g) + [g^{-1}\partial_\pm g, g^{-1}\delta g], \end{aligned}$$

kde jsme využili vztahu $\delta g^{-1} = -g^{-1}\delta g g^{-1}$, který ihned plyne z aplikace δ na rovnici $gg^{-1} = e$ a obdobného vztahu pro $\partial_\pm$. Označme v souladu s (3.14)

$$J_\pm := \mp(I \pm \epsilon R)^{-1} g^{-1}\partial_\pm g.$$

Potom z variačního principu pro akci (3.17) dostáváme

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_W \Big(\delta(g^{-1}\partial_+ g), (I-\epsilon R)^{-1} g^{-1}\partial_- g\Big)_{\mathfrak{g}} + \int_W \Big(g^{-1}\partial_+ g, (I-\epsilon R)^{-1}\delta(g^{-1}\partial_- g)\Big)_{\mathfrak{g}} \\
&= \int_W \Big(\partial_+(g^{-1}\delta g) + [g^{-1}\partial_+ g, g^{-1}\delta g], (I-\epsilon R)^{-1} g^{-1}\partial_- g\Big)_{\mathfrak{g}} \\
&\quad + \int_W \Big(g^{-1}\partial_+ g, (I-\epsilon R)^{-1}\big(\partial_-(g^{-1}\delta g) + [g^{-1}\partial_- g, g^{-1}\delta g]\big)\Big)_{\mathfrak{g}} \\
&= \int_W \Big(\partial_+(g^{-1}\delta g), J_-\Big)_{\mathfrak{g}} + \int_W \Big([g^{-1}\partial_+ g, g^{-1}\delta g], J_-\Big)_{\mathfrak{g}} \\
&\quad - \int_W \Big(\partial_-(g^{-1}\delta g), J_+\Big)_{\mathfrak{g}} - \int_W \Big([g^{-1}\partial_- g, g^{-1}\delta g], J_+\Big)_{\mathfrak{g}} \\
&= \int_W \Big(g^{-1}\delta g, \partial_- J_+ - \partial_+ J_-\Big)_{\mathfrak{g}} + \int_W \Big(g^{-1}\delta g, [g^{-1}\partial_- g, J_+]\Big)_{\mathfrak{g}} - \int_W \Big(g^{-1}\delta g, [g^{-1}\partial_+ g, J_-]\Big)_{\mathfrak{g}} \\
&= \int_W \Big(g^{-1}\delta g, \partial_- J_+ - \partial_+ J_- + [(I-\epsilon R)J_-, J_+] + [(I+\epsilon R)J_+, J_-]\Big)_{\mathfrak{g}} \\
&= \int_W \Big(g^{-1}\delta g, \partial_- J_+ - \partial_+ J_- - \epsilon[RJ_-, J_+] - \epsilon[J_-, RJ_+]\Big)_{\mathfrak{g}} \\
&= \int_W \Big(g^{-1}\delta g, \partial_- J_+ - \partial_+ J_- - \epsilon[J_-, J_+]_R\Big)_{\mathfrak{g}},
\end{aligned}
$$

kde jsme využili postupně integrace per partes a vymizení hraničních členů a dále ad-invariance, bilinearity a symetrie formy $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{g}}$. Vzhledem k libovolnosti $g^{-1}\delta g$ a nedegenerovanosti formy $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{g}}$ je zřejmé, že uvedená rovnice je splněna, právě když platí

$$
\partial_+ J_- - \partial_- J_+ + \epsilon[J_-, J_+]_R = 0. \tag{3.18}
$$

Příslušná 1-forma $J(g)$ s hodnotami v $\mathfrak{g}_R$ má tedy tvar

$$
\begin{aligned}
J(g) &= J_+(g)\mathrm{d}\xi^+ + J_-(g)\mathrm{d}\xi^- \\
&= -(I+\epsilon R)^{-1} g^{-1}\partial_+ g \ \mathrm{d}\xi^+ + (I-\epsilon R)^{-1} g^{-1}\partial_- g \ \mathrm{d}\xi^-.
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

Vztahy (3.18) a (3.19) jsou konzistentní s dříve uvedenými vztahy (3.15) a (3.14) ve smyslu speciálního případu — konkrétně pro Yangův-Baxterův model, tj. pro $E = I$.

Povšimněme si nyní určité podobnosti mezi tvarem Laxovy konexe (3.3), (3.4) přiřazené k hlavnímu chirálnímu modelu a ploché konexe (3.16) přiřazené k Yangovu-Baxterovu modelu. Ta má pro tento případ ($E = I$) speciální tvar

$$
B^\epsilon_\pm(g_\epsilon) = \frac{1}{1 \mp \mathrm{i}\epsilon}\frac{1+\epsilon^2}{I \pm \epsilon R_{g_\epsilon^{-1}}}\partial_\pm g_\epsilon g_\epsilon^{-1} =: -\frac{1}{1 \mp \mathrm{i}\epsilon} u^\epsilon_\pm. \tag{3.20}
$$

Podaří-li se nalézt pro každé ϵ řešení g_ϵ Yangova-Baxterova modelu (3.17) takové, že veličiny $u^\epsilon_\pm$ nezávisí na ϵ, pak (3.20) přejde na Zakharovův-Mikhailovův Laxův pár (3.6) pro hlavní chirální model (pro volbu $\lambda = -\mathrm{i}\epsilon$). Potom podle sekce 3.1 dostaneme řešení $g(\xi^+, \xi^-)$ hlavního chirálního modelu splňující

$$
u_\pm = g^{-1}\partial_\pm g.
$$

Podstatný závěr prozatím je, že existuje vztah mezi plochou konexí $B^\epsilon(g)$ s hodnotami v $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ kanonicky přiřazenou Yangovu-Baxterovu modelu a Laxovou konexí $A^0(\lambda)$ přiřazenou hlavnímu chirálnímu modelu. Ukáže se, že takový vztah platí i v obecnějším smyslu, což nám posléze umožní zkonstruovat Laxův pár pro samotný Yangův-Baxterův σ-model.

3.4.2 bi-Yangův-Baxterův σ-model

Zjistili jsme tedy, že existuje jistý deformovaný σ-model (Yangův-Baxterův model) takový, že jeho deformační parametr ϵ lze interpretovat jako spektrální parametr v Laxově páru odpovídajícího nedeformovaného modelu (hlavního chirálního modelu). Hledejme proto Laxův pár Yangova-Baxterova modelu tak, že provedeme Poissonovu-Lieovu deformaci Yangova-Baxterova σ-modelu takovou, aby bylo možno interpretovat nový deformační parametr η jako spektrální parametr v Laxově páru nedeformovaného (tj. nyní Yangova-Baxterova) modelu. Zdůrazněme, že samotný Yangův-Baxterův model, který hrál úlohu deformovaného hlavního chirálního modelu, hraje nyní úlohu nedeformovaného modelu. Jeho deformace je pak vlastně dvakrát deformovaný hlavní chirální model.

V předchozí sekci bylo uvedeno, že hlavní chirální model vykazuje standardní symetrii vzhledem k pravé i levé akci grupy G na sebe samu, zatímco Yangův-Baxterův model vykazuje standardní symetrii vůči levé akci G a P-L symetrii vůči pravé akci G. Yangův-Baxterův model tedy chápeme jako pravou P-L deformaci hlavního chirálního modelu. Potom se nabízí zkonstruovat onen dvakrát deformovaný model provedením P-L deformace levé symetrie Yangova-Baxterova modelu. Ukáže se, že tento postup skutečně vede ke konstrukci hledaného Laxova páru.

Hledáme tedy levou deformaci Yangova-Baxterova σ-modelu, která zachová pravou P-L symetrii. Z předchozího textu je již známé, že obecný σ-model s pravou P-L symetrií má tvar (3.13)

$$S_{\epsilon_r}(E)(g) = \int_W (g^{-1}\partial_+ g, (E_g - \epsilon_r R)^{-1} g^{-1}\partial_- g)_{\mathfrak{g}}, \tag{3.13}$$

kde deformační parametr je označen ϵ_r pro zdůraznění skutečnosti, že se vztahuje k pravé P-L symetrii. Je zřejmé, že hledaný model musí mít tento obecný tvar. Problém se tedy redukuje na nalezení vhodného operátoru $E : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ takového, aby σ-model $S_{\epsilon_r}(E)(g)$ byl zároveň P-L symetrický zleva. K nalezení vhodného operátoru E využijeme poznatku, že difeomorfismus $g \mapsto g^{-1}$ zaměňuje pravou za levou akci grupy G na sebe samu. Odtud však plyne, že model (3.13) s pravou P-L symetrií bude mít zároveň i levou P-L symetrii v případě, že existuje dvojice operátorů $E, E' : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ takových, že

$$S_{\epsilon_r}(E)(g^{-1}) = S_{\epsilon_l}(E')(g),$$

kde

$$S_{\epsilon_l}(E')(g) := \int_W (g^{-1}\partial_+ g, (E'_g - \epsilon_l R)^{-1} g^{-1}\partial_- g)_{\mathfrak{g}}.$$

Parametry ϵ_r a ϵ_l odpovídají postupně pravé a levé P-L symetrii. Snadno se lze přesvědčit, že operátory E a E' lze volit ve tvaru

$$E := I - \epsilon_l R, \qquad E' := I - \epsilon_r R,$$

neboť

$$\begin{aligned}
S_{\epsilon_r}(I-\epsilon_l R)(g^{-1}) &= \int_W (g\partial_+ g^{-1}, (I-\epsilon_l R_{g^{-1}} - \epsilon_r R)^{-1} g\partial_- g^{-1})_{\mathfrak{g}} \\
&= \int_W (g(g^{-1}\partial_+ g)g^{-1}, (I-\epsilon_l R_{g^{-1}} - \epsilon_r R)^{-1} g(g^{-1}\partial_- g)g^{-1})_{\mathfrak{g}} \\
&= \int_W (\mathrm{Ad}_g(g^{-1}\partial_+ g), \mathrm{Ad}_g(E'_g - \epsilon_l R)^{-1}\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\mathrm{Ad}_g(g^{-1}\partial_- g))_{\mathfrak{g}} \\
&= \int_W (g^{-1}\partial_+ g, (E'_g - \epsilon_l R)^{-1} g^{-1}\partial_- g)_{\mathfrak{g}} \\
&= S_{\epsilon_l}(E')(g),
\end{aligned}$$

kde jsme využili invariance formy $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{g}}$. Odtud tedy σ-model vykazující zároveň pravou i levou P-L symetrii má tvar

$$S_{\epsilon_r,\epsilon_l}(g) := S_{\epsilon_r}(I-\epsilon_l R)(g) = \int_W (g^{-1}\partial_+ g, (I-\epsilon_l R_g - \epsilon_r R)^{-1} g^{-1}\partial_- g)_{\mathfrak{g}}. \tag{3.21}$$

Tento model nazveme *bi-Yangův-Baxterův model*. Lze si povšimnout, že je ϵ_l-deformací Yangova-Baxterova modelu (3.17) a dvouparametrickou deformací hlavního chirálního modelu (3.2).

Vzhledem k symetrii bi-Yangova-Baxterova modelu lze zvolit plochou konexi $B^{\epsilon_r}(E)$ ve tvaru (3.16) pro $E = I - \epsilon_l R$. To znamená, že je-li $g_{\epsilon_r,\epsilon_l}$ řešením polních rovnic bi-Yangova-Baxterova modelu (3.21), potom pole

$$B_\pm(g_{\epsilon_r,\epsilon_l}) = (I \pm \epsilon_l R \pm \mathrm{i}\epsilon_r)(I \pm \epsilon_l R \pm \epsilon_r R_{g^{-1}_{\epsilon_r,\epsilon_l}})^{-1}\partial_\pm g_{\epsilon_r,\epsilon_l} g^{-1}_{\epsilon_r,\epsilon_l} =: (I \pm \epsilon_l R \pm \mathrm{i}\epsilon_r) f v_\pm \tag{3.22}$$

jsou chirálními komponentami ploché konexe $B^{\epsilon_r}(I-\epsilon_l R)$. Faktor f představuje normalizační parametr, jehož užitečnost vyjde najevo později.

Zvolme nyní následující ansatz pro hledaný Laxův pár Yangova-Baxterova σ-modelu

$$A^\epsilon_\pm(-\mathrm{i}\eta) = \Big(I \pm \epsilon_l(\epsilon,\eta) R \pm \mathrm{i}\epsilon_r(\epsilon,\eta)\Big) f(\epsilon,\eta) v^\epsilon_\pm, \tag{3.23}$$

kde ϵ je deformační parametr v akci Yangova-Baxterova modelu (3.17), $-\eta$ je imaginární část spektrálního parametru λ, funkce ϵ_r, ϵ_l a f je třeba určit a $v^\epsilon_\pm$ mohou záviset pouze na ϵ, nikoliv na η. Volba tohoto ansatzu je motivována vztahem mezi Yangovým-Baxterovým modelem a hlavním chirálním modelem, jmenovitě pak vztahy (3.20) a (3.22).

Podmínka nulové křivosti v $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ pro $A^\epsilon_\pm(-\mathrm{i}\eta)$ zní

$$\partial_+ A^\epsilon_-(-\mathrm{i}\eta) - \partial_- A^\epsilon_-(-\mathrm{i}\eta) + [A^\epsilon_-(-\mathrm{i}\eta), A^\epsilon_+(-\mathrm{i}\eta)] = 0.$$

Tuto podmínku v $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ lze přepsat na dvě podmínky v $\mathfrak{g}$, tj. na reálnou a imaginární část původní podmínky. Dostáváme rovnosti

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left\{A^\epsilon_\pm\right\} &= (I \pm \epsilon_l R) f v^\epsilon_\pm, \\
\mathrm{Im}\left\{A^\epsilon_\pm\right\} &= \pm\epsilon_r f v^\epsilon_\pm, \\
[A^\epsilon_-, A^\epsilon_+] &= [(I-\epsilon_l R) f v^\epsilon_- - \mathrm{i}\epsilon_r f v^\epsilon_-, (I+\epsilon_l R) f v^\epsilon_+ + \mathrm{i}\epsilon_r f v^\epsilon_+] \\
&= f^2\Big([(I-\epsilon_l R)v^\epsilon_-, (I+\epsilon_l R)v^\epsilon_+] + \epsilon_r^2 [v^\epsilon_-, v^\epsilon_+]\Big) \\
&\quad + \mathrm{i} f^2 \epsilon_r\Big([v^\epsilon_-, v^\epsilon_+] + \epsilon_l [v^\epsilon_-, R v^\epsilon_+] - [v^\epsilon_-, v^\epsilon_+] + \epsilon_l [R v^\epsilon_-, v^\epsilon_+]\Big) \\
&= f^2\Big([(I-\epsilon_l R)v^\epsilon_-, (I+\epsilon_l R)v^\epsilon_+] + \epsilon_r^2 [v^\epsilon_-, v^\epsilon_+]\Big) + \mathrm{i} f^2 \epsilon_r \epsilon_l [v^\epsilon_-, v^\epsilon_+]_R,
\end{aligned}$$

kde jsme využili toho, že $v_\pm^\epsilon \in \mathfrak{g}$. Odtud je vidět, že původní podmínku kompatibility v $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ lze přepsat na dvě podmínky v $\mathfrak{g}$ ve tvaru

$$0 = \partial_+ v_-^\epsilon + \partial_- v_+^\epsilon + \epsilon_l f [v_-^\epsilon, v_+^\epsilon]_R, \tag{3.24}$$

$$0 = (I - \epsilon_l R)\partial_+ v_-^\epsilon - (I + \epsilon_l R)\partial_- v_+^\epsilon + f[(I - \epsilon_l R)v_-^\epsilon, (I + \epsilon_l R)v_+^\epsilon] + \epsilon_r^2 f [v_-^\epsilon, v_+^\epsilon]. \tag{3.25}$$

Zapůsobíme-li na (3.24) operátorem R, využijeme identitu (3.9) a dosadíme do druhé rovnice (3.25), dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_+ v_-^\epsilon - \partial_- v_+^\epsilon - \epsilon_l R \partial_+ v_-^\epsilon - \epsilon_l R \partial_- v_+^\epsilon + f[(I - \epsilon_l R)v_-^\epsilon, (I + \epsilon_l R)v_+^\epsilon] + \epsilon_r^2 f [v_-^\epsilon, v_+^\epsilon] \\ &= \partial_+ v_-^\epsilon - \partial_- v_+^\epsilon + \epsilon_l^2 f([Rv_-^\epsilon, Rv_+^\epsilon] - [v_-^\epsilon, v_+^\epsilon]) + \epsilon_r^2 f [v_-^\epsilon, v_+^\epsilon] \\ &\quad + f[v_-^\epsilon, v_+^\epsilon] + \epsilon_l f [v_-^\epsilon, Rv_+^\epsilon] - \epsilon_l f [Rv_-^\epsilon, v_+^\epsilon] - \epsilon_l^2 f([Rv_-^\epsilon, Rv_+^\epsilon] \\ &= \partial_+ v_-^\epsilon - \partial_- v_+^\epsilon + (\epsilon_r^2 - \epsilon_l^2 + 1) f [v_-^\epsilon, v_+^\epsilon] - \epsilon_l f [Rv_-^\epsilon, v_+^\epsilon] + \epsilon_l f [v_-^\epsilon, Rv_+^\epsilon]. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Vzhledem k tomu, že veličiny $v_\pm^\epsilon$ nezávisí na parametru η, vyplývá z rovnic (3.24) a (3.26), že na něm nezávisí ani veličiny $\epsilon_l f$ a $(\epsilon_r^2 - \epsilon_l^2 + 1) f$. Závislost na parametru ϵ lze stanovit prozkoumáním pohybových rovnic a Bianchiho identit Yangova-Baxterova σ-modelu. Pohybové rovnice mají již známý tvar (3.18)

$$\partial_+ J_- - \partial_- J_+ + \epsilon [J_-, J_+]_R = 0, \tag{3.18}$$

kde podle (3.19) $(E = I)$

$$J_\pm = \mp (I \pm \epsilon R)^{-1} g^{-1} \partial_\pm g,$$

což lze ekvivalentně přepsat do tvaru

$$g^{-1} \partial_\pm g = \mp (I \pm \epsilon R) J_\pm.$$

Z vlastností Lieovy algebry ihned plyne platnost vztahu[3]

$$\partial_+ (g^{-1} \partial_- g) - \partial_- (g^{-1} \partial_+ g) - [g^{-1} \partial_- g, g^{-1} \partial_+ g] = 0,$$

odkud po dosazení za $g^{-1} \partial_\pm g$ z předchozí rovnosti dostaneme

$$(I - \epsilon R)\partial_+ J_- + (I + \epsilon R)\partial_- J_+ + [(I - \epsilon R)J_-, (I + \epsilon R)J_+] = 0. \tag{3.27}$$

Právě uvedená rovnice představuje Bianchiho identitu pro Yangův-Baxterův model. Nyní aplikujeme na pohybové rovnice (3.18) operátor R, dále využijeme identity (3.9) a výsledek dosadíme do (3.27). Pak lze Bianchiho identitu (3.27) přepsat jako

$$\partial_+ J_- + \partial_- J_+ + (1 - \epsilon^2)[J_-, J_+] - \epsilon [RJ_-, J_+] + \epsilon [J_-, RJ_+] = 0. \tag{3.28}$$

Odvození této rovnice je analogické postupu pro rovnici (3.26). Na základě srovnání rovnice (3.24) s (3.18) a rovnice (3.26) s (3.28) položme

$$v_\pm^\epsilon = \mp J_\pm = (I \pm \epsilon R)^{-1} g^{-1} \partial_\pm g,$$

$$\epsilon_l f = -\epsilon, \tag{3.29}$$

$$(\epsilon_r^2 - \epsilon_l^2 + 1) f = \epsilon^2 - 1. \tag{3.30}$$

[3] Jedná se o pullback Maurerovy-Cartanovy rovnice do W. Pro určitost odkazujeme na postup vedoucí k rovnici (2.22).

Vzhledem k rovnici (3.29) lze nyní ansatz pro Laxův pár (3.23) přepsat do tvaru

$$A^{\epsilon}_{\pm}(-\mathrm{i}\eta) = \Big(f(\epsilon,\eta) \mp \epsilon R \pm \mathrm{i} f(\epsilon,\eta)\epsilon_r(\epsilon,\eta)\Big) v^{\epsilon}_{\pm}. \tag{3.31}$$

Faktor stojící v (3.31) před operátorem R nezávisí na parametru η. To nám umožňuje změnit původní ansatz do tvaru

$$A^{\epsilon}_{\pm}(\lambda) = \left(F(\epsilon) \mp \epsilon R + \mathrm{i}\frac{G(\epsilon)}{1 \pm \lambda} \right) v^{\epsilon}_{\pm}, \tag{3.32}$$

kde λ je obecně komplexní[4] spektrální parametr. Pro volbu $\lambda = -\mathrm{i}\eta$ totiž dostáváme

$$A^{\epsilon}_{\pm}(-\mathrm{i}\eta) = \left(F(\epsilon) + \frac{G(\epsilon)}{1+\eta^2} \mp \epsilon R \pm \mathrm{i}\frac{G(\epsilon)\eta}{1+\eta^2} \right) v^{\epsilon}_{\pm},$$

a pro

$$f(\epsilon,\eta) = F(\epsilon) + \frac{G(\epsilon)}{1+\eta^2}, \qquad f(\epsilon,\eta)\epsilon_r(\epsilon,\eta) = \frac{G(\epsilon)\eta}{1+\eta^2}, \tag{3.33}$$

rekonstruujeme původní ansatz (3.31).

Dosazením (3.33) do (3.30) dostáváme podmínku

$$\frac{G^2 + G(2F + 1 - \epsilon^2)}{1+\eta^2} = \epsilon^2 + F(\epsilon^2 - 1) - F^2 = 0.$$

Obě strany jsme položili rovny 0, neboť podmínka má být splněna pro všechna η, přičemž výrazy $G^2 + G(2F + 1 - \epsilon^2)$ a $\epsilon^2 + F(\epsilon^2 - 1) - F^2$ na η nezávisí. Tato podmínka je zjevně splněna platí-li zároveň

$$G + 2F = \epsilon^2 - 1, \qquad \epsilon^2 + F(\epsilon^2 - 1) - F^2 = 0.$$

Kvadratická rovnice pro F má dvě řešení, ovšem pouze jedno z nich dává správnou limitu $\epsilon \to 0$, kdy hledaný Laxův pár pro Yangův-Baxterův model má přejít ve známý Zakharovův-Mikhailovův Laxův pár (3.4) pro hlavní chirální model. Celkem pak dostáváme

$$F(\epsilon) = \epsilon^2, \qquad G(\epsilon) = -(1 + \epsilon^2).$$

Laxův pár pro Yangův-Baxterův σ-model (3.17) má tedy tvar

$$A^{\epsilon}_{\pm}(\lambda) = \mp \left(\epsilon^2 \mp \epsilon R - \frac{1+\epsilon^2}{1 \pm \lambda} \right) J_{\pm}, \tag{3.34}$$

resp.

$$A^{\epsilon}_{\pm}(\lambda) = \left(\epsilon^2 \mp \epsilon R - \frac{1+\epsilon^2}{1 \pm \lambda} \right) (I \pm \epsilon R)^{-1} g^{-1} \partial_{\pm} g. \tag{3.35}$$

Stejně jako v případě hlavního chirálního modelu, lze i v tomto případě Laxův pár interpretovat dvěma způsoby:

[4] Tj. může mít obecně nenulovou reálnou i imaginární část.

(i) Uvažme dvě zobrazení $J_\pm : W \to \mathfrak{g}$ takové, že veličiny $A^\epsilon_\pm(\lambda) : W \to \mathfrak{g}^\mathbb{C}$ definované vztahy (3.34) splňují pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ podmínku nulové křivosti

$$\partial_+ A^\epsilon_-(\lambda) - \partial_- A^\epsilon_+(\lambda) + [A^\epsilon_-(\lambda), A^\epsilon_+(\lambda)] = 0.$$

Potom musí platit $J_\pm = \mp(I \pm \epsilon R)^{-1} g^{-1} \partial_\pm g$, kde $g : W \to G$ splňuje pohybové rovnice Yangova-Baxterova σ-modelu (3.17).

(ii) Naopak uvažme řešení $g : W \to G$ Yangova-Baxterova σ-modelu (3.17) a přiřaďme k nim veličiny $A^\epsilon_\pm(\lambda) : W \to \mathfrak{g}^\mathbb{C}$ podle vztahu (3.35). Potom tyto veličiny splňují pro každé komplexní λ podmínku nulové křivosti.

Ověřme, že platnost výše uvedené podmínky nulové křivosti pro výrazy (3.34) a pro všechna $\lambda \in \mathbb{C}$ je skutečně ekvivalentní platnosti pohybových rovnic (3.18) a Bianchiho identity (3.28).

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_+ A^\epsilon_-(\lambda) - \partial_- A^\epsilon_+(\lambda) + [A^\epsilon_-(\lambda), A^\epsilon_+(\lambda)] \\
&= \left(\epsilon^2 + \epsilon R - \frac{1+\epsilon^2}{1-\lambda}\right)\partial_+ J_- + \left(\epsilon^2 - \epsilon R - \frac{1+\epsilon^2}{1+\lambda}\right)\partial_- J_+ \\
&\quad - \left[\left(\epsilon^2 + \epsilon R - \frac{1+\epsilon^2}{1-\lambda}\right) J_-, \left(\epsilon^2 - \epsilon R - \frac{1+\epsilon^2}{1+\lambda}\right) J_+\right].
\end{aligned}$$

Po vynásobení výrazem $(1-\lambda^2)$ a vyjádření v mocninách λ dostáváme

$$\begin{aligned}
0 = \lambda^2\Big(&-(\epsilon^2 + \epsilon R)\partial_+ J_- - (\epsilon^2 - \epsilon R)\partial_- J_+ + \epsilon^4[J_-, J_+] - \epsilon^3[J_-, RJ_+] + \epsilon^3[RJ_-, J_+] - \epsilon^2[RJ_-, RJ_+]\Big) \\
&+ \lambda(1+\epsilon^2)\Big(\partial_- J_+ - \partial_+ J_- - \epsilon[RJ_-, J_+] - \epsilon[J_-, RJ_+]\Big) \\
&+ (\epsilon^2 + \epsilon R - 1 - \epsilon^2)\partial_+ J_- + (\epsilon^2 - \epsilon R - 1 - \epsilon^2)\partial_- J_+ - \epsilon^4[J_-, J_+] + \epsilon^3[J_-, RJ_+] \\
&+ \epsilon^2(1+\epsilon^2)[J_-, J_+] - \epsilon^3[RJ_-, J_+] + \epsilon^2[RJ_-, RJ_+] + \epsilon(1+\epsilon^2)[RJ_-, J_+] \\
&+ \epsilon^2(1+\epsilon^2)[J_-, J_+] - \epsilon(1+\epsilon^2)[J_-, RJ_+] - (1+\epsilon^2)^2[J_-, J_+]
\end{aligned}$$

Má-li tato rovnost platit pro všechna $\lambda \in \mathbb{C}$, musí být nulové koeficienty u všech mocnin λ. Je ihned zřejmě, že koeficient u λ^1 je nulový právě tehdy, je-li splněna pohybová rovnice (3.18)

$$\partial_+ J_- - \partial_- J_+ + \epsilon[J_-, J_+]_R = 0.$$

Upravme nyní koeficient u λ^2 tak, že jej vhodně uzávorkujeme, přičteme a odečteme výraz $\epsilon^2[J_-, J_+]$ a nakonec využijeme identity (3.9). Dostaneme

$$\begin{aligned}
0 &= -(\epsilon^2 + \epsilon R)\partial_+ J_- - (\epsilon^2 - \epsilon R)\partial_- J_+ + \epsilon^4[J_-, J_+] - \epsilon^3[J_-, RJ_+] + \epsilon^3[RJ_-, J_+] - \epsilon^2[RJ_-, RJ_+] \\
&= -\epsilon^2\Big(\partial_+ J_- + \partial_- J_+ + (1-\epsilon^2)[J_-, J_+] - \epsilon[RJ_-, J_+] + \epsilon[J_-, RJ_+]\Big) \\
&\quad - \epsilon R\Big(\partial_+ J_- - \partial_- J_+ + \epsilon[J_-, J_+]_R\Big).
\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že platnost pohybové rovnice již byla ukázána je zřejmé, že tato rovnost je splněna, právě když platí Bianchiho identita (3.28)

$$\partial_+ J_- + \partial_- J_+ + (1-\epsilon^2)[J_-, J_+] - \epsilon[RJ_-, J_+] + \epsilon[J_-, RJ_+] = 0.$$

Poslední krokem je ověřit, že podmínka na vymizení koeficientu u mocniny λ^0 je konzistentní s předchozími a nevynucuje platnost dodatečných podmínek. Absolutní člen vhodně uzávorkujeme a všimneme si, že výraz v první velké závorce je vlastně záporně vzatý koeficient u kvadratického členu, a ten je nulový, zatímco člen ve druhé závorce je Bianchiho identita, která je rovněž nulová.

$$\begin{aligned}0 = &\Big((\epsilon^2+\epsilon R)\partial_+ J_- + (\epsilon^2-\epsilon R)\partial_- J_+ - \epsilon^4[J_-,J_+] + \epsilon^3[J_-,RJ_+] - \epsilon^3[RJ_-,J_+] + \epsilon^2[RJ_-,RJ_+]\Big)\\ &- (1+\epsilon^2)\Big(\partial_+ J_- + \partial_- J_+ + (1-\epsilon^2)[J_-,J_+] - \epsilon[RJ_-,J_+] + \epsilon[J_-,RJ_+]\Big).\end{aligned}$$

3.5 Příklady

Na závěr zkonstruujeme několik explicitních příkladů. Cílem je ukázat, jak bude vypadat nalezený Laxův pár (3.35) v konkrétních případech, kdy za grupu G zvolíme postupně grupy $SU(2)$, $SU(3)$ a $Spin(5)$ (což je univerzální nakrytí grupy $SO(5)$). Všechny tyto grupy jsou prosté, kompaktní, souvislé a jednoduše souvislé. Zároveň rozebereme strukturu algebry $\mathfrak{g}_R$.

3.5.1 První příklad: $SU(2)$

Zvolme nejdříve $G = SU(2)$. Potom $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ a $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{su}(2) + \mathrm{i}\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Jak známo, $\mathfrak{su}(2)$ je reálná algebra všech antihermitovských bezestopých matic 2×2. Dimenze této algebry je zjevně 3 (obecněji: $\dim \mathfrak{su}(n) = n^2-1$) a její bázi lze zvolit např. jako trojici (X_1, X_2, X_3), kde

$$X_1 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad X_2 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad X_3 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Komutační relace jsou dány vztahem

$$[X_i, X_j] = \epsilon_{ijk} X_k,$$

kde ϵ_{ijk} je Levi-Civitův permutační symbol. Je zřejmé, že bázi příslušné komplexifikace, tj. algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, lze volit stejnou. Pro naše účely se však ukazuje výhodnější zvolit bázi $\mathcal{J} := (J_+, J_-, J_3)$, kde

$$J_\pm := \pm X_1 + \mathrm{i}X_2 \qquad \text{a} \qquad J_3 := \mathrm{i}X_3.$$

Komutační relace pak mají tvar

$$[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm \qquad \text{a} \qquad [J_+, J_-] = 2J_3.$$

Odtud je okamžitě zřejmé, že operátor ad_{J_3} je poloprostý, neboť je diagonální v bázi $\mathcal{J}$. Jeho vlastní hodnoty jsou 0 a ± 1 a příslušné vlastní vektory jsou postupně J_3 a $J_\pm$. Lze si navíc všimnout, že operátory $\mathrm{ad}_{J_\pm}$ jsou nilpotentní.

Cartanovu podalgebru zvolíme

$$\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} := \mathrm{span}(J_3).$$

Obecný prvek z $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ má tedy tvar $H = bJ_3$, kde $b \in \mathbb{C}$. Potom

$$\mathrm{ad}_H J_\pm = [H, J_\pm] = \pm b J_\pm$$

a množina kořenů Φ tak obsahuje funkcionály $\pm\alpha$, definované vztahem $(\pm\alpha)(H) := b$. S ohledem na definici je α kladným kořenem. Z teorie dále víme, že pro kořen α existuje právě jeden $H_\alpha \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ takový, že pro všechna $H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ platí $\alpha(H) = \kappa(H, H_\alpha)$, kde κ je Killingova forma na $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Vektor H_α snadno nalezneme. Zřejme $H_\alpha = cJ_3$ pro nějaké $c \in \mathbb{C}$. Potom

$$1 = \alpha(J_3) = \kappa(J_3, H_\alpha) = c\kappa(J_3, J_3) \implies c = \frac{1}{\kappa(J_3, J_3)}$$

Vzhledem ke komutačním relacím je zřejmé, že matice operátoru ad_{J_3} v bázi $\mathcal{J}$ je

$$^{\mathcal{J}}(\mathrm{ad}_{J_3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\kappa(J_3, J_3) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{J_3} \circ \mathrm{ad}_{J_3}) = 2$$

a tedy

$$H_\alpha = \frac{1}{2} J_3 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Chceme vybrat bázi $(E_\alpha, E_{-\alpha}, H_\alpha)$ tak, aby splňovala vztahy (3.7) a (3.8). Navíc zřejmě stačí ověřit vztahy (3.7), neboť ty zbývající jsou jejich důsledkem. První rovnost v (3.7) platí v důsledku konstrukce báze (J_+, J_-, H_α). Zvolme nyní $E_\alpha := c_1 J_+$ a $E_{-\alpha} := c_2 J_-$ a hledejme konstanty c_1, c_2 tak, aby platilo

$$c_1 c_2 \kappa(J_+, J_-) = \kappa(E_\alpha, E_{-\alpha}) = \frac{2}{\kappa(H_\alpha, H_\alpha)} = 4.$$

Z komutačních relací opět snadno odvodíme tvar matic operátorů ad_{J_+} a ad_{J_-} v bázi $\mathcal{J}$. Dostáváme

$$^{\mathcal{J}}(\mathrm{ad}_{J_+}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad ^{\mathcal{J}}(\mathrm{ad}_{J_-}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

odkud ihned

$$\kappa(J_+, J_-) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{J_+} \circ \mathrm{ad}_{J_-}) = 4.$$

Konstanty c_1, c_2 lze tedy volit $c_1 = c_2 = 1$ a hledaná báze algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ má tvar trojice $(E_\alpha, E_{-\alpha}, H_\alpha)$, kde

$$E_{\pm\alpha} := J_\pm = \pm X_1 + \mathrm{i} X_2 \qquad \text{a} \qquad H_\alpha := \frac{1}{2} J_3 = \frac{\mathrm{i}}{2} X_3.$$

Nyní se vrátíme zpět k algebře $\mathfrak{su}(2)$, v níž zvolíme novou bázi $\mathcal{B} = (T, B, C)$, podle vztahů

$$\begin{aligned} T &:= \mathrm{i} H_\alpha = -\frac{1}{2} X_3, \\ B &:= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(E_\alpha + E_{-\alpha}) = -\sqrt{2} X_2, \\ C &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(E_\alpha - E_{-\alpha}) = \sqrt{2} X_1. \end{aligned}$$

	T	B	C
T	0	$\frac{1}{2}B$	$\frac{1}{2}C$
B		0	0
C			0

Tab. 3.1: Komutační relace v algebře $\mathfrak{g}_R$ pro $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$.

Operátor R má v této bázi podle definice tvar

$$^{\mathcal{B}}R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a Laxův pár (3.35) má tedy tvar

$$\lceil A^{\epsilon}_{\pm}(\lambda) \rceil_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\epsilon^2\lambda \mp 1}{\lambda \pm 1} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{-1 \mp \lambda} & \dfrac{\epsilon\lambda}{1 \pm \lambda} \\ 0 & \dfrac{\epsilon\lambda}{-1 \mp \lambda} & \dfrac{1}{-1 \mp \lambda} \end{pmatrix} \lceil g^{-1}\partial_{\pm} g \rceil_{\mathcal{B}},$$

kde $\lceil g^{-1}\partial_{\pm} g \rceil_{\mathcal{B}}$ označuje sloupcový vektor souřadnic prvku $g^{-1}\partial_{\pm} g$ v bázi $\mathcal{B}$.

Po zavedení operátoru $R : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ jsme v sekci 3.2 zavedli algebru $\mathfrak{g}_R := (\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_R)$, v níž byla Lieova závorka definována vztahem

$$[X, Y]_R := [RX, Y] + [X, RY], \qquad X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{3.11}$$

Algebra $\mathfrak{g}_R$ je zřejmě generována stejnou bází jako algebra $\mathfrak{g}$, tj. v tomto případě bází $\mathcal{B} = (T, B, C)$ a její komutační relace (3.11) shrnuje tabulka 3.1. V [26] se o této algebře tvrdí, že je izomorfní Lieově algebře příslušné k Lieově grupě[5] AN, tj. reálné podalgebře v $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ generované vektory H_α, $\sqrt{2}E_\alpha$ a $\mathrm{i}\sqrt{2}E_\alpha$. Komutační relace v obou algebrách jsou však stejné, neboť

$$[H_\alpha, \sqrt{2}E_\alpha] = \frac{1}{2}\sqrt{2}E_\alpha, \qquad [H_\alpha, \mathrm{i}\sqrt{2}E_\alpha] = \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{2}E_\alpha, \qquad [\sqrt{2}E_\alpha, \mathrm{i}\sqrt{2}E_\alpha] = 0.$$

Obě algebry jsou tedy skutečně izomorfní.

Zmiňované izomorfii algeber odpovídají i další vlastnosti algebry $\mathfrak{g}_R$. Jmenovitě její řešitelnost a existence dvourozměrného abelovského nilradikálu. Podívejme se nejdříve na řešitelnost. Podle definice zkoumáme derivovanou sérii algebry $\mathfrak{g}_R$, přičemž postupně dostáváme

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_R^{(0)} &:= \mathfrak{g}_R = \operatorname{span}(T, B, C), \\ \mathfrak{g}_R^{(1)} &:= [\mathfrak{g}_R, \mathfrak{g}_R]_R = \operatorname{span}(B, C), \\ \mathfrak{g}_R^{(2)} &:= [\mathfrak{g}_R^{(1)}, \mathfrak{g}_R^{(1)}]_R = \{0\}. \end{aligned}$$

Algebra $\mathfrak{g}_R$ je tedy skutečně řešitelná. Druhým krokem je nalezení dvourozměrného abelovského nilradikálu. Zjevným kandidátem na něj je $I = \operatorname{span}(B, C)$. I je zřejmě dvourozměrným abelovským ideálem. Navíc každý abelovský ideál je nutně nilpotentní. Zbývá tedy ověřit jeho maximalitu. Přidáním dalšího nezávislého generátoru (bez újmy na obecnosti T) dostaneme zpět celou algebru $\mathfrak{g}_R$, která je sice svým ideálem, nikoliv však již nilpotentním.

[5]Pro úplnost poznamenejme, že se jedná o grupu vystupující v Iwasawově rozkladu KAN.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_1	0	X_7	X_5	0	0	$-X_4$	$-2X_1$	X_1
X_2		0	0	$-X_6$	X_3	0	$2X_2$	$-X_2$
X_3			0	X_8	0	X_2	X_3	$-2X_3$
X_4				0	$-X_1$	0	$-X_4$	$2X_4$
X_5					0	X_7+X_8	$-X_5$	$-X_5$
X_6						0	X_6	X_6
X_7							0	0
X_8								0

Tab. 3.2: Komutační relace v algebře $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$.

3.5.2 Druhý příklad: $SU(3)$

Druhým příkladem je Lieova grupa $G = SU(3)$, příslušná reálná algebra $\mathfrak{su}(3)$ a její komplexifikace $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$. Dimenze obou algeber je 8. V algebře $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ zvolíme bázi $\mathcal{X} = (X_1,\dots,X_8)$, kde

$$X_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$X_5 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_7 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_8 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Komutační relace jsou uvedeny v tabulce 3.2.

Z tabulky komutačních relací je vidět, že operátory ad_{X_7} a ad_{X_8} jsou poloprosté (diagonalizovatelné), neboť jsou v bázi $\mathcal{X}$ přímo diagonální

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{X}}(\mathrm{ad}_{X_7}) &= \mathrm{diag}(-2,2,1,-1,-1,1,0,0), \\ {}^{\mathcal{X}}(\mathrm{ad}_{X_8}) &= \mathrm{diag}(1,-1,-2,2,-1,1,0,0). \end{aligned}$$

Navíc k vlastnímu číslu 0 jsou v obou případech příslušné právě vlastní vektory X_7 a X_8. Cartanovu podalgebru v $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ lze tedy volit

$$\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} := \mathrm{span}(X_7, X_8).$$

Uvažme obecný prvek $H := \mathrm{diag}(a_1,a_2,a_3) \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ a definujme funkcionály ω_i, $i = 1,2,3$, na $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ vztahem

$$\omega_i(H) := a_i.$$

Zaveďme dále funkcionály α_i, $i = 1,2,3$ vztahy

$$\alpha_1 := \omega_1 - \omega_2, \qquad \alpha_2 := \omega_2 - \omega_3 \qquad \text{a} \qquad \alpha_3 := \omega_1 - \omega_3.$$

Snadno se lze přesvědčit, že potom pro každé $H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ platí

$$\begin{aligned} &[H,X_1] = \alpha_1(H)X_1, && [H,X_2] = -\alpha_1(H)X_2, && [H,X_3] = \alpha_2(H)X_3, \\ &[H,X_4] = -\alpha_2(H)X_4, && [H,X_5] = \alpha_3(H)X_5, && [H,X_6] = -\alpha_3(H)X_6. \end{aligned}$$

Pro ilustraci zkontrolujme například první ze vztahů. Nechť $H = aX_7 + bX_8 = \mathrm{diag}(a, b - a, -b)$. Protom

$$\begin{aligned} \mathrm{RHS} &= \alpha_1(H)X_1 = (a - (b-a))X_1 = (2a-b)X_1, \\ \mathrm{LHS} &= [H, X_1] = a[X_7, X_1] + b[X_8, X_1] = (2a-b)X_1. \end{aligned}$$

Množina kořenů je $\Phi = \{\pm\alpha_i \mid i = 1,2,3\}$. Kladné kořeny jsou α_i a prosté kořeny jsou α_1 a α_2.

Dále je třeba nalézt prvky $H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2} \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ příslušné k prostým kořenům. Zřejmě $H_{\alpha_1} = a_1X_7 + a_2X_8$ a řešíme tedy soustavu 2 lineárních rovnic pro 2 neznámé konstanty a_1, a_2

$$\begin{aligned} 2 &= \alpha_1(X_7) = \kappa(X_7, H_{\alpha_1}) = a_1\kappa(X_7, X_7) + a_2\kappa(X_7, X_8), \\ -1 &= \alpha_1(X_8) = \kappa(X_8, H_{\alpha_1}) = a_1\kappa(X_8, X_7) + a_2\kappa(X_7, X_8), \end{aligned}$$

kde κ je Killingova forma na $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$. Hodnoty $\kappa(X_7, X_7)$, $\kappa(X_7, X_8)$ a $\kappa(X_8, X_8)$ snadno spočteme, protože známe matice ${}^{\mathcal{X}}(\mathrm{ad}_{X_7})$ a ${}^{\mathcal{X}}(\mathrm{ad}_{X_8})$. Výsledek je

$$\kappa(X_7, X_7) = \kappa(X_8, X_8) = 12 \qquad \text{a} \qquad \kappa(X_7, X_8) = \kappa(X_8, X_7) = -6.$$

Po dosazení těchto hodnot zpět do uvedené soustavy rovnic nalezneme konstanty $a_1 = 1/6$ a $a_2 = 0$. Celkem tedy

$$H_{\alpha_1} = \frac{1}{6}X_7.$$

Obdobně lze nalézt rovněž druhý vektor

$$H_{\alpha_2} = \frac{1}{6}X_8.$$

Pro další postup se nám bude hodit také prvek H_{α_3} příslušný ke kořeni α_3. Ten má tvar

$$H_{\alpha_3} = \frac{1}{6}(X_7 + X_8).$$

Stejně jako v předcházejícím příkladě grupy $SU(2)$ také nyní hledáme bázi $(E_\alpha, H_\mu)_{\substack{\alpha\in\Phi \\ \mu\in\Phi^p}}$ komplexifikované algebry $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, která splňuje relace (3.7). Označme

$$E_{\alpha_1} := X_1, \quad E_{-\alpha_1} := X_2, \quad E_{\alpha_2} := X_3, \quad E_{-\alpha_2} := X_4, \quad E_{\alpha_3} := X_5, \quad E_{-\alpha_3} := X_6.$$

Z předchozí konstrukce je již zřejmé, že pak báze $(E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_1}, \ldots, E_{-\alpha_3}, H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2})$ splní první rovnost v (3.7). Zbývá tedy otázka druhé rovnosti

$$\kappa(E_\alpha, E_{-\alpha}) = \frac{2}{\kappa(H_\alpha, H_\alpha)}, \qquad \alpha \in \Phi.$$

Hodnoty $\kappa(H_{\alpha_i}, H_{\alpha_i})$, $i = 1,2,3$, spočteme snadno. Například $\kappa(H_{\alpha_i}, H_{\alpha_i}) = \frac{1}{36}\kappa(X_7, X_7)$. Celkem dostaneme

$$\kappa(H_{\alpha_i}, H_{\alpha_i}) = \frac{1}{3}, \qquad i = 1,2,3.$$

Tím je určena pravá strana zkoumané rovnosti. Na levé straně je třeba spočítat výrazy typu $\kappa(E_\alpha, E_{-\alpha})$. K tomu nám pomůže znalost matice operátorů ad_{E_α} a $\mathrm{ad}_{E_{-\alpha}}$ v bázi $\mathcal{X}$, kterou snadno určíme pohledem na komutační tabulku 3.2. Budeme dále uvažovat kořen α_1, pro ostatní kořeny je postup obdobný. Zřejmě

$$
{}^{\mathcal{X}}(\mathrm{ad}_{E_{\alpha_1}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^{\mathcal{X}}(\mathrm{ad}_{E_{-\alpha_1}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Potom $\kappa(E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_1}) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{E_{\alpha_1}} \circ \mathrm{ad}_{E_{-\alpha_1}}) = 6$ a stejně vyjdou i ostatní výrazy. Celkem

$$
\kappa(E_{\alpha_i}, E_{-\alpha_i}) = 6, \qquad \text{pro } i = 1, 2, 3.
$$

Porovnáním pravé a levé strany nakonec dostáváme, že zkoumaná rovnost je splněna. Hledaná báze tedy je

$$
(E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_1}, E_{\alpha_2}, E_{-\alpha_2}, E_{\alpha_3}, E_{-\alpha_3}, H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2}),
$$

kde

$$
\begin{aligned}
&E_{\alpha_1} := X_1, \quad E_{-\alpha_1} := X_2, \quad E_{\alpha_2} := X_3, \quad E_{-\alpha_2} := X_4, \\
&E_{\alpha_3} := X_5, \quad E_{-\alpha_3} := X_6, \quad H_{\alpha_1} := \frac{1}{6} X_7, \quad H_{\alpha_2} := \frac{1}{6} X_8.
\end{aligned}
$$

V algebře $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(3)$ pak zavedeme bázi

$$
\mathcal{B} := (T_1, T_2, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3),
$$

kde

$$
T_1 = \frac{\mathrm{i}}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_2 = \frac{\mathrm{i}}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},
$$

$$
B_1 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Yangův-Baxterův operátor R má v tomto případě v bázi $\mathcal{B}$ matici

$$
{}^{\mathcal{B}}R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

	T_1	T_2	B_1	B_2	B_3	C_1	C_2	C_3
T_1	0	0	$\frac{1}{3}B_1$	$-\frac{1}{6}B_2$	$\frac{1}{6}B_3$	$\frac{1}{3}C_1$	$-\frac{1}{6}C_2$	$\frac{1}{6}C_3$
T_2		0	$-\frac{1}{6}B_1$	$\frac{1}{3}B_2$	$\frac{1}{6}B_3$	$-\frac{1}{6}C_1$	$\frac{1}{3}C_2$	$\frac{1}{6}C_3$
B_1			0	$\sqrt{2}B_3$	0	0	$\sqrt{2}C_3$	0
B_2				0	0	$-\sqrt{2}C_3$	0	0
B_3					0	0	0	0
C_1						0	$-\sqrt{2}B_3$	0
C_2							0	0
C_3								0

Tab. 3.3: Komutační relace v algebře $\mathfrak{g}_R$ pro $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(3)$.

a Laxův pár (3.35) se spočte obdobně jako pro případ $SU(2)$. Jeho explicitní tvar je

$$\lceil A^{\epsilon}_{\pm}(\lambda)\rceil_{\mathcal{B}} = \left[\frac{\epsilon^2\lambda \mp 1}{\lambda \pm 1}J_1 + \frac{1}{-1 \mp \lambda}J_2 + \frac{\epsilon\lambda}{-1 \mp \lambda}J_3\right]\lceil g^{-1}\partial_{\pm}g\rceil_{\mathcal{B}},$$

kde matice J_i jsou dány vztahy

$$J_1 := \mathrm{diag}(1,1,0,0,0,0,0,0), \quad J_2 := \mathrm{diag}(0,0,1,1,1,1,1,1) \quad \text{a} \quad J_3 := {}^{\mathcal{B}}R.$$

Uvažme nyní algebru $\mathfrak{g}_R := (\mathfrak{su}(3), [\cdot,\cdot]_R)$. Komutační relace v této algebře v bázi $\mathcal{B}$ jsou uvedeny v tabulce 3.3. Stejně jako v předchozím příkladě, také nyní snadno ověříme, že algebra $\mathfrak{g}_R$ je izomorfní algebře příslušné k Lieově grupě AN. Lieova algebra ke grupě AN je opět algebra bezestopých komplexních horních trojúhelníkových matic s reálnou diagonálou a lze ji zjevně chápat jako reálnou podalgebru v $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ generovanou souborem

$$(H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2}, \sqrt{2}E_{\alpha_1}, \sqrt{2}E_{\alpha_2}, \sqrt{2}E_{\alpha_3}, \mathrm{i}\sqrt{2}E_{\alpha_1}, \mathrm{i}\sqrt{2}E_{\alpha_2}, \mathrm{i}\sqrt{2}E_{\alpha_3}).$$

Není obtížné se přesvědčit, že obě zkoumané algebry mají stejnou strukturu komutačních relací a jsou tedy izomorfní.

Na závěr celého příkladu se opět přesvědčíme, že algebra $\mathfrak{g}_R$ je řešitelná a má nilradikál dimenze 6. Řešitelnost této algebry je patrná ihned z tabulky komutačních relací. Platí totiž

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_R^{(0)} &:= \mathfrak{g}_R,\\
\mathfrak{g}_R^{(1)} &:= [\mathfrak{g}_R^{(0)}, \mathfrak{g}_R^{(0)}]_R = \mathrm{span}(B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3),\\
\mathfrak{g}_R^{(2)} &:= [\mathfrak{g}_R^{(1)}, \mathfrak{g}_R^{(1)}]_R = \mathrm{span}(B_3, C_3),\\
\mathfrak{g}_R^{(3)} &:= [\mathfrak{g}_R^{(2)}, \mathfrak{g}_R^{(2)}]_R = \{0\}.
\end{aligned}$$

Kandidát na nilradikál je $I := \mathrm{span}(B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3)$. Snadno se lze přesvědčit, že se skutečně jedná o ideál v $\mathfrak{g}_R$. Dále je nutné ověřit jeho nilpotenci. Podle definice dostáváme

$$\begin{aligned}
I^1 &:= I,\\
I^2 &:= [I^1, I]_R = \mathrm{span}(B_3, C_3),\\
I^3 &:= [I^2, I]_R = \{0\}.
\end{aligned}$$

Ideál I je navíc maximální, neboť přidáním (nenulové) lineární kombinace vektorů T_1 a T_2 mezi generátory I, porušíme jeho nilpotenci.

3.5.3 Třetí příklad: $Spin(5)$

Jako poslední příklad zvolíme grupu $G = Spin(5)$. Připomeňme, že $Spin(5)$ je univerzálním nakrytím grupy $SO(5)$. Příslušná reálná algebra je tedy $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(5)$, což je algebra všech reálných antisymetrických matic rozměru 5×5 s determinantem rovným 1. Komplexifikace algebry $\mathfrak{g}$ je potom algebra $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(5,\mathbb{C})$. Dimenze obou algeber je 10 a soubor jejich generátorů lze zvolit jako $\mathcal{X} := (X_1, \dots, X_{10})$, kde

$$X_1 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_5 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_7 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_8 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_9 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_{10} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Komutační relace těchto algeber jsou uvedeny v tabulce 3.4.

Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ lze zvolit jako množinu

$$\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} := \mathrm{span}(\mathrm{i}X_5, \mathrm{i}X_{10}) = \left\{ \mathrm{diag}\left(0, a\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, b\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\right) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{C} \right\},$$

kde jsme pro pohodlnost pozdějších výpočtů matice X_5 a X_{10} vynásobili imaginární jednotkou. Uvažme nyní obecně $H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. Zřejmě $H = a\mathrm{i}X_5 + b\mathrm{i}X_{10}$ pro nějaké $a, b \in \mathbb{C}$. Potom

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
X_1	0	$-X_5$	$-X_6$	$-X_7$	X_2	X_3	X_4	0	0	0
X_2		0	$-X_8$	$-X_9$	$-X_1$	0	0	X_3	X_4	0
X_3			0	$-X_{10}$	0	$-X_1$	0	$-X_2$	0	X_4
X_4				0	0	0	$-X_1$	0	$-X_2$	$-X_3$
X_5					0	$-X_8$	$-X_9$	X_6	X_7	0
X_6						0	$-X_{10}$	$-X_5$	0	X_7
X_7							0	0	$-X_5$	$-X_6$
X_8								0	$-X_{10}$	X_9
X_9									0	$-X_8$
X_{10}										0

Tab. 3.4: Komutační relace v algebře $\mathfrak{so}(5, \mathbb{C})$.

vlastní hodnota	vlastní vektor
0	$\mathrm{i}X_5$, $\mathrm{i}X_{10}$
$\pm a$	$\mathrm{i}X_1 \pm X_2$
$\pm b$	$\mathrm{i}X_3 \pm X_4$
$\pm(a+b)$	$\mp X_6 + \mathrm{i}X_7 + \mathrm{i}X_8 \pm X_9$
$\pm(a-b)$	$\pm X_6 + \mathrm{i}X_7 - \mathrm{i}X_7 \pm X_9$

Tab. 3.5: Tabulka shrnuje vlastní hodnoty a příslušné vlastní vektory operátoru ad_H, $H = a\mathrm{i}X_5 + b\mathrm{i}X_{10}$.

matice operátoru ad_H v bázi $\mathcal{X}$ má tvar

$$
{}^{\mathcal{X}}(\mathrm{ad}_H) = \begin{pmatrix}
0 & \mathrm{i}a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\mathrm{i}a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mathrm{i}b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\mathrm{i}b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{i}b & \mathrm{i}a & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i}b & 0 & 0 & \mathrm{i}a & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i}a & 0 & 0 & \mathrm{i}b & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i}a & -\mathrm{i}b & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

Vlastní hodnoty a k nim příslušné vlastní vektory jsou shrnuty v tabulce 3.5.

Na podalgebře $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ zavedeme funkcionály α_i prostřednictvím vztahů

$$
\alpha_1(H) := a, \qquad \alpha_2(H) := b, \qquad \alpha_3(H) := a + b, \qquad \alpha_4(H) := a - b,
$$

pro každé $H = a\mathrm{i}X_5 + b\mathrm{i}X_10 \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. Množina kořenů je potom zřejmě $\Phi = \{\pm\alpha_i \mid i = 1, \ldots, 4\}$ a dále

$$
\Phi^+ = \{\alpha_1 \ldots, \alpha_4\},
$$
$$
\Phi^p = \{\alpha_2, \alpha_4\}.
$$

Prvky $H_{\alpha_2}, H_{\alpha_4} \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ příslušné k prostým kořenům nalezneme obdobně jako v předchozích příkladech. Mají tvary

$$H_{\alpha_2} := \frac{\mathrm{i}}{6} X_{10} \qquad \text{a} \qquad H_{\alpha_4} := \frac{\mathrm{i}}{6}(X_5 - X_{10}).$$

Není obtížné se přesvědčit, že bázi komplexifikace $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(5, \mathbb{C})$ splňující relace (3.7) lze vybrat jako soubor $(E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_1}, \dots, E_{\alpha_4}, E_{-\alpha_4}, H_{\alpha_2}, H_{\alpha_4})$, kde

$$\begin{aligned} E_{\pm\alpha_1} &:= \mathrm{i}X_1 \pm X_2, & E_{\pm\alpha_2} &:= \mathrm{i}X_3 \pm X_4, \\ E_{\pm\alpha_3} &:= \frac{1}{2}(\mp X_6 + \mathrm{i}X_7 + \mathrm{i}X_8 \pm X_9), & E_{\pm\alpha_4} &:= \frac{1}{2}(\pm X_6 + \mathrm{i}X_7 - \mathrm{i}X_8 \pm X_9), \\ H_{\alpha_2} &:= \frac{\mathrm{i}}{6} X_{10}, & H_{\alpha_4} &:= \frac{\mathrm{i}}{6}(X_5 - X_{10}). \end{aligned}$$

V původní reálné algebře $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(5)$ pak analogicky jako v předchozích případech zavedeme bázi $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B} := (T_1, T_2, B_1, \dots, B_4, C_1, \dots, C_4),$$

kde

$$T_1 = -\frac{1}{6} X_{10}, \qquad T_2 = \frac{1}{6}(X_{10} - X_5),$$

$$\begin{aligned} B_1 &= -\sqrt{2} X_1, \quad & B_2 &= -\sqrt{2} X_3, \quad & B_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(X_7 + X_8), \quad & B_4 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(X_7 - X_8), \\ C_1 &= \sqrt{2} X_2, & C_2 &= \sqrt{2} X_4, & C_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-X_6 + X_9), & C_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X_6 + X_9). \end{aligned}$$

Yangův-Baxterův operátor R má podle definice v bázi $\mathcal{B}$ matici

$${}^{\mathcal{B}}R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Explicitní tvar Laxova páru (3.35) je opět

$$\lceil A_{\pm}^{\epsilon}(\lambda) \rceil_{\mathcal{B}} = \left[\frac{\epsilon^2 \lambda \mp 1}{\lambda \pm 1} J_1 + \frac{1}{-1 \mp \lambda} J_2 + \frac{\epsilon \lambda}{-1 \mp \lambda} J_3 \right] \lceil g^{-1} \partial_{\pm} g \rceil_{\mathcal{B}},$$

kde matice J_i jsou dány vztahy

$$J_1 := \mathrm{diag}(1,1,0,0,0,0,0,0,0,0), \quad J_2 := \mathrm{diag}(0,0,1,1,1,1,1,1,1,1) \quad \text{a} \quad J_3 := {}^{\mathcal{B}}R.$$

Pomocí operátoru R máme opět dánu algebru $\mathfrak{g}_R := (\mathfrak{so}(5), [\cdot,\cdot]_R)$ s komutačními relacemi uvedenými v tabulce 3.6. O algebře $\mathfrak{g}_R$ chceme jako obvykle ukázat, že má strukturu Lieovy

	T_1	T_2	B_1	B_2	B_3	B_4	C_1	C_2	C_3	C_4
T_1	0	0	0	$\frac{1}{6}B_2$	$\frac{1}{6}B_2$	$-\frac{1}{6}B_4$	0	$\frac{1}{6}C_2$	$\frac{1}{6}C_3$	$-\frac{1}{6}C_4$
T_2		0	$\frac{1}{6}B_1$	$-\frac{1}{6}B_2$	0	$\frac{1}{3}B_4$	$\frac{1}{6}C_1$	$-\frac{1}{6}C_2$	0	$\frac{1}{3}C_4$
B_1			0	$-2\sqrt{2}B_3$	0	0	0	$-2\sqrt{2}C_3$	0	0
B_2				0	0	$-\sqrt{2}B_1$	$2\sqrt{2}C_3$	0	0	$-\sqrt{2}C_1$
B_3					0	0	0	0	0	0
B_4						0	0	$\sqrt{2}C_1$	0	0
C_1							0	$2\sqrt{2}B_3$	0	0
C_2								0	0	$\sqrt{2}B_1$
C_3									0	0
C_4										0

Tab. 3.6: Komutační relace v algebře $\mathfrak{g}_R = (\mathfrak{so}(5), [\cdot,\cdot]_R)$.

algebry ke grupě AN, tj. v tomto případě reálné podalgebry v $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ generované vektory H_{α_2}, H_{α_4}, $\sqrt{2}E_{\alpha_1}$, $\sqrt{2}E_{\alpha_2}$, $\sqrt{2}E_{\alpha_3}$, $\sqrt{2}E_{\alpha_4}$, $\mathrm{i}\sqrt{2}E_{\alpha_1}$, $\mathrm{i}\sqrt{2}E_{\alpha_2}$, $\mathrm{i}\sqrt{2}E_{\alpha_3}$ a $\mathrm{i}\sqrt{2}E_{\alpha_4}$. Snadno lze ověřit, že obě tyto algebry mají stejnou strukturu komutačních relací a jsou tedy izomorfní.

Na závěr můžeme také ověřit, že algebra $\mathfrak{g}_R$ je řešitelná a má 8-rozměrný nilradikál. Řešitelnost $\mathfrak{g}_R$ plyne ihned z tabulky komutačních relací. Snadno si totiž rozmyslíme, že platí

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_R^{(0)} &:= \mathfrak{g}_R, \\
\mathfrak{g}_R^{(1)} &:= [\mathfrak{g}_R^{(0)}, \mathfrak{g}_R^{(0)}]_R = \operatorname{span}(B_1, \ldots, B_4, C_1, \ldots, C_4), \\
\mathfrak{g}_R^{(2)} &:= [\mathfrak{g}_R^{(1)}, \mathfrak{g}_R^{(1)}]_R = \operatorname{span}(B_1, B_3, C_1, C_3), \\
\mathfrak{g}_R^{(3)} &:= [\mathfrak{g}_R^{(2)}, \mathfrak{g}_R^{(2)}]_R = \{0\}.
\end{aligned}$$

Rovněž není obtížné ověřit, že hledaným nilradikálem je

$$I := \operatorname{span}(B_1, \ldots, B_4, C_1, \ldots, C_4).$$

I je zřejmě ideál v $\mathfrak{g}_R$, neboť z komutačních relací ihned plyne, že $[I, \mathfrak{g}_R]_R \subset I$. Dále se přesvědčíme, že I je nilpotentní

$$\begin{aligned}
I^1 &:= I, \\
I^2 &:= [I^1, I]_R = \operatorname{span}(B_1, B_3, C_1, C_3), \\
I^3 &:= [I^2, I]_R = \operatorname{span}(B_3, C_3), \\
I^4 &:= [I^3, I]_R = \{0\}.
\end{aligned}$$

Snadno si také rozmyslíme, že přidáním netriviální lineární kombinace vektorů T_1 a T_2 k I nutně narušíme jeho nilpotenci. Odtud však plyne, že I je maximální nilpotentní ideál, a tedy nilradikál v $\mathfrak{g}_R$.

Kapitola 4

Závěr

V této práci jsme se zabývali integrabilitou jisté třídy Poissonových-Lieových T-duálních σ-modelů definovaných na kompaktní, prosté, souvislé a jednoduše souvislé grupové varietě. Konkrétně se jednalo o Yangův-Baxterův σ-model, který lze chápat jako Poissonovu-Lieovu deformaci hlavního chirálních modelu.

Prvním krokem bylo objasnění samotného pojmu integrabilita v kontextu klasické teorie pole. Tento krok se zároveň ukázal býti nejobtížnějším, a to zejména s ohledem na skutečnost, že matematicky rigorózní teorie integrability (dokonce ani definice samotného pojmu integrabilita) není v současné době k dispozici. Jak se zdá, ve středu zájmu teorie integrability dnes stojí tzv. Laxova formulace či Laxovy páry. Ukazuje se, že dynamické systémy, které mají Laxův pár, mají také řadu zajímavých vlastností, které očekáváme u integrabilních systémů (zachovávající se veličiny atd.). To nás nakonec vedlo k přijetí existence Laxova páru jako postačující podmínky integrability.

Druhým krokem bylo ověření integrability Yangova-Baxterova σ-modelu, tj. konstrukce odpovídajícího Laxova páru. Bohužel v současnosti neexistuje žádná metoda umožňující nalezení Laxova páru k danému (obecnému) dynamickému systému a jsme proto v obecném případě odkázáni pouze na „metodu“ jeho uhodnutí. Pro Yangův-Baxterův model se však podařilo k Laxovu páru dospět poněkud důstojnějším způsobem. Základem bylo povšimnutí si formální podobnosti mezi Laxovou konexí přiřazenou hlavnímu chirálnímu modelu a plochou konexí přiřazenou Yangovu-Baxterovu modelu, a také přímo vztahu mezi hlavním chirálním modelem (nedeformovaný model) a Yangovým-Baxterovým modelem (deformovaný model). Dále byl zaveden bi-Yangův-Baxterův model jako deformace Yangova-Baxterova modelu a samotný Yangův-Baxterův model byl interpretován jako model nedeformovaný. V analogii se potom z ploché konexe přiřazené k bi-Yangovu-Baxterovu modelu podařilo zrekonstruovat Laxův pár Yangova-Baxterova modelu.

Posledním krokem byla konstrukce tří explicitních příkladů na grupových varietách $SU(2)$, $SU(3)$ a $Spin(5)$. Smyslem bylo udělat si představu o tvaru Laxova páru v těchto případech a o struktuře příslušných duálních grup. Ukázalo se, že odpovídající duální grupy lze interpretovat jako grupy AN.

Cíle práce se tedy podařilo naplnit. V rámci dalšího studia uvedené problematiky se lze zřejmě zaměřit na hlubší rozbor pojmu integrabilita, a to i mimo kontext klasické teorie pole a hledání vztahu mezi existencí Laxova páru a integrabilitou v obecnějších případech. V této práci neřešenou otázkou je rovněž poslední část článku [26], ve které se autor zabývá tzv. rozšířeným řešením a dospívá k závěru, že aparát rozvinutý pro studium dynamiky hlavního chirálního modelu lze použít také v případě Yangova-Baxterova modelu.

Literatura

[1] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, and H. Segur. Method for solving the sine-Gordon equation. *Phys Rev Lett*, 30:1262–1264, 1973.

[2] M.J. Ablowitz, A. Ramani, and H. Segur. Nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of Painlevé type. *Lett Nuov Cim*, 23:333–338, 1978.

[3] V.I. Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics*. Number 60 in Grad. Texts in Math. Springer, New York, 2nd edition, 1989. ISBN 0-387-96890-3.

[4] T. Buscher. A symmetry of the string background field equations. *Phys Lett B*, 194(1): 59–32, 1987. ISSN 0370-2693. doi: 10.1016/0370-2693(87)90769-6.

[5] T. Buscher. Path-integral derivation of quantum duality in nonlinear sigma-models. *Phys Lett B*, 201(4):466–472, 1988. ISSN 0370-2693. doi: 10.1016/0370-2693(88)90602-8.

[6] F. Calogero. Why are certain nonlinear pdes both widely applicable and integrable? In V.E. Zakharov, editor, *What is integrability?*, Springer Series in Nonlinear Dynamics, pages 1–62. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York London, 1st edition, 1991.

[7] C. Chandre and J.C. Eilbeck. Does the existence of a lax pair imply integrability? electronic publication, 2002. URL `http://www.cns.gatech.edu/people/chandre/Articles/Lax-Pair.pdf`.

[8] I.V. Cherednik. Relativistic-invariant quasiclassical limits of integrable two-dimensional quantum models. *Theor Math Phys*, 47(2):225–229, 1981.

[9] X. de la Ossa and F. Quevedo. Duality symmetries from non-abelian isometries in string theory. *Nucl Phys B*, 403:377–394, 1993. ISSN 0550-3213.

[10] G. de Vries D.J. Korteweg. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Philos Mag Ser 5*, 39:422–443, 1895.

[11] Ludwig D. Faddeev and Leon A. Takhtajan. *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*. Springer-Verlag, Berlin New York, 2007. ISBN 978-3-540-69843-2.

[12] Marián Fecko. *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov*. IRIS, 2nd edition, 2008. ISBN 978-80-89256-20-4.

[13] E. Fermi, J. Pasta, and S. Ulam. Studies of nonlinear problems. I. In A.C. Newell, editor, *Nonlinear wave motion*, number 15 in Lect. in Appl. Math., pages 143–145. Amer Math Soc, 1974.

[14] H. Flaschka, A.C. Newell, and m. Tabor. Integrability. In V.E. Zakharov, editor, *What is integrability?*, Springer Series in Nonlinear Dynamics, pages 73–114. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York London, 1st edition, 1991.

[15] A.S. Fokas. On a class of physically important integrable equations. *Physica D*, 87(1-4): 145–150, 1995.

[16] A.S. Fokas. Lax pairs: a novel type of separability. *Inverse Problems*, 25:1–44, 2009.

[17] B. Gambier. Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critique fixés. *Acta Math*, 33:1–55, 1910.

[18] C.S. Gardner. Korteweg-de Vries equation and generalizations. IV. The Korteweg-de Vries equation as a hamiltonian system. *J Math Phys*, 12:1548–1551, 1971.

[19] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, and J. Miura. Method for solving the Korteweg-de Vries equation. *Phys Rev Lett*, 19:1095–1097, 1967.

[20] B. Grammaticos and A. Ramani. Integrability - and how to detect it? In Y. Kosmann-Schwarzbach, B. Grammaticos, and K.M. Tamizhmani, editors, *Integrability of nonlinear systems*, number 638 in Lect. Notes Phys., pages 31–94. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2nd edition, 2004.

[21] Svend E. Hjelmeland and U. Lindstrom. Duality for the non-specialist, 1997. URL `http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:hep-th/9705122`.

[22] Jürgen Jost. *Geometry and Physics*. Springer, 1st edition, 2009. ISBN 978-3-642-00540-4.

[23] Alex Kasman. *Glimpses of Soliton Theory: the Algebra and Geometry of Nonlinear PDEs*, volume 54 of *Student Mathematical Library*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1st edition, 2010. ISBN 978-0-8218-5245-3.

[24] Ctirad Klimčík. Poisson-Lie T-duality. *Nucl Phys B*, 46:116–121, 1996. ISSN 0550-3213.

[25] Ctirad Klimčík. Yang-Baxter *sigma*-models and dS/AdS T-duality. *J High Energy Phys*, 2002(12):51, 2002. ISSN 1126-6708. doi: 10.1088/1126-6708/2002/12/051.

[26] Ctirad Klimčík. On integrability of the Yang-Baxter sigma-model. *J Math Phys*, 50(4): 11, 2008. ISSN 0022-2488. doi: 10.1063/1.3116242.

[27] Ctirad Klimčík and Pavel Ševera. Dual non-abelian duality and the drinfeld double. *Phys Lett B*, 351:455–462, 1995.

[28] Y. Kosmann-Schwarzbach, B. Grammaticos, and K.M. Tamizhmani, editors. *Integrability of nonlinear systems*. Number 638 in Lect. Notes Phys. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2nd edition, 2004. ISBN 3-540-20630-2.

[29] S. Kovalevska. Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. *Acta Math*, 12:177–232, 1889.

[30] P.D. Lax. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Comm Pure Appl Math*, 21:467–490, 1968.

[31] A.V. Mikhailov, A.B. Shabat, and V.V. Sokolov. The symmetry approach to classification of integrable systems. In V.E. Zakharov, editor, *What is integrability?*, Springer Series in Nonlinear Dynamics, pages 115–184. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York London, 1st edition, 1991.

[32] Peter Miller. *Lecture Notes: Math 529 — Universality.* University of Arizona, 2008. URL `http://math.arizona.edu/~mcl/MATH529_Spring08.html`.

[33] R.M. Miura. Korteweg-de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation. *J Math Phys*, 9:1202–1203, 1968.

[34] Mikio Nakahara. *Geometry, Topology and Physics.* Institute of Physics Publishing, 2nd edition, 2003. ISBN 0-7503-0606-8.

[35] P. Painlevé. Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme. *Acta Math*, 21:1–85, 1902.

[36] A. Ramani, B. Grammaticos, and Tamizhmani K.M. Painlevé analysis and singularity confinement: the ultimate conjecture. *J Phys A*, 26(2):L53–L56, 1993. doi: 10.1088/0305-4470/26/2/005.

[37] Hans Samelson. *Notes on Lie Algebras.* Springer-Verlag, 3rd edition, 1990. ISBN 978-0387972640.

[38] D.H. Sattinger and O.L. Weaver. *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics.* Springer-Verlag, 1st edition, 1986. ISBN 0-387-96240-9.

[39] M.A. Semenov-Tian-Shansky. Dressing transformations and poisson group actions. *Publ Res Inst Math Sci*, 21(6):1237–1260, 1985. doi: 10.2977/prims/1195178514.

[40] J. Weiss, M. Tabor, and G. Carnevale. The Painlevé property for partial differential equations. *J Math Phys*, 24(3):522–526, 1983.

[41] N.J. Zabusky and M.D. Kruskal. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of intial states. *Phys Rev Lett*, 15:240–243, 1965.

[42] V.E. Zakharov, editor. *What is integrability?* Springer Series in Nonlinear Dynamics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York London, 1st edition, 1991. ISBN 3-540-51964-5.

[43] V.E. Zakharov and L.D. Faddeev. The Korteweg-de Vries equation is a fully integrable hamiltonian system. *Funct Anal Appl*, 5:280–287, 1971.

[44] V.E. Zakharov and A.V. Mikhailov. Relativistically invariant two-dimensional models of field theory which are integrable by means of the inverse scattering problem method. *Sov Phys JETP*, 47:1017–1027, 1978.

[45] V.E. Zakharov and A.B. Shabat. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Sov Phys JETP*, 34:62–69, 1972.

[46] I. Štoll and J. Tolar. *Teoretická fyzika.* Vydavatelství ČVUT, Praha, 2004.